

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Демин Н.С., Рожкова С.В. О структуре количества информации в совместной задаче фильтрации и интерполяции по наблюдениям с памятью. Общий случай // Известия Томского политехнического университета. — 2004. — Т. 307. — № 3. — С. 13–17.
2. Абакумова О.Л., Демин Н.С., Сушко Т.В. Фильтрация стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью. II Синтез фильтров // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 10. — С. 36–49.
3. Демин Н.С., Сушко Т.В., Яковлева А.В. Обобщенная обратная экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. Теория и системы управления. — 1997. — № 4. — С. 48–59.
4. Демин Н.С., Рожкова С.В., Рожкова О.В. Обобщенная скользящая экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2000. — № 4. — С. 39–51.
5. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. — М.: Наука, 1974. — 696 с.
6. Медич Д. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. — М.: Энергия, 1973. — 440 с.
7. Гантмахер Ф.П. Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 549 с.
8. Dyomin N.S., Safronova I.E., Rozhkova S.V. Information amount determination for joint problem of filtering and generalized extrapolation of stochastic processes with respect to the set of continuous and discrete memory observations // Informatica (Lithuania). — 2003. — V. 14. — № 3. — P. 295–322.
9. Демин Н.С., Сафронова И.Е., Рожкова С.В. Оптимальная передача стохастического процесса по каналам с памятью при наличии запаздывания в дискретных наблюдениях // Вестник Томского государственного университета. — 2003. — № 6. — С. 259–264 (англ.).

УДК 514.76

**КЛАССИФИКАЦИЯ КОШИ-РИМАНА ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

Е.Д. Глазырина

Томский политехнический университет  
E-mail: glazirina@mail2000.ru

В четырехмерном евклидовом пространстве  $E_4$  рассматривается двумерное многообразие  $V_{2,2}^1$  плоскостей  $L_2^1$ , в каждой из которых задано по одной точке  $A$  (центр плоскости). С этим многообразием ассоциируется двумерное многообразие  $V_{2,2}^2$  плоскостей  $L_2^2$ , ортогональных соответствующим плоскостям  $L_2^1$  в точках  $A$  и являющихся оснащающими плоскостями многообразия  $V_{2,2}^1$ . Возникают отображения между соответствующими плоскостями  $L_2^1 \in V_{2,2}^1$  и  $L_2^2 \in V_{2,2}^2$ , каждое из которых определяется системой двух неоднородных квадратичных функций с двумя неизвестными или соответствующей комплексной функцией. Выясняется геометрический смысл этих отображений и рассматриваются частные случаи, когда указанные функции являются дифференцируемыми в смысле Коши-Римана или Даламбера-Эйлера или гармоническими в некоторых или во всех точках соответствующих плоскостей  $L_2^1$  или  $L_2^2$ . Доказывается существование всех указанных частных случаев. Все рассуждения носят локальный характер, а функции, встречающиеся в статье, предполагаются аналитическими.

**1. Аналитический аппарат**

Обозначения и терминология в данной статье соответствуют принятым в [1–8].

Рассматривается четырехмерное евклидово пространство  $E_4$ , отнесенное к подвижному ортонормальному реперу  $R = \{\bar{A}, \bar{e}_j\}$  ( $j, k, l = 1, 2, 3, 4$ ) с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$\begin{aligned} d\bar{A} &= \omega^j \bar{e}_j, \quad d\bar{e}_j = \omega_j^k \bar{e}_k, \\ D\omega^j &= \omega^k \wedge \omega_k^j, \quad D\omega_k^j = \omega_k^l \wedge \omega_l^j. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь 1-формы  $\omega_k^j$  удовлетворяют соотношениям

$$\omega_k^j + \omega_j^k = 0, \tag{1.2}$$

которые с учетом (1.1) вытекают из условия ортонормальности репера  $R$ :

$$\{\bar{e}_k, \bar{e}_j\} = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

где символом  $\{\bar{a}, \bar{b}\}$  обозначается скалярное произведение векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  пространства  $E_4$ .

В пространстве  $E_4$  рассматривается многообразие  $V_{2,2}^1$  — двумерное многообразие центрированных двумерных плоскостей  $L_2^1$ , в каждой из которых задано по одной точке  $M$ , называемой центром. К многообразию  $V_{2,2}^1$  присоединим ортонормальный репер  $R$  так, чтобы

$$M = A, \quad L_2^1 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2). \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем символом  $L_p = (\bar{A}, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_p)$  обозначается  $p$ -плоскость ( $p$ -мерное линейное подпространство), проходящее через точку  $A$  параллельно линейно независимым векторам  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_p$ . Из (1.3) в силу (1.1) следует, что дифференциальные уравнения многообразия  $V_{2,2}^1$  запишутся в виде:

$$\omega^{\hat{\alpha}} = A_{\hat{\alpha}}^{\hat{\alpha}} \omega^{\alpha}, \quad \omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} = A_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\hat{\beta}} \omega^{\beta}, \tag{1.4}$$

( $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma} = 3, 4$ ). Здесь 1-формы  $\omega^{\alpha}$  приняты за базисные, а величины  $A_{\hat{\alpha}}^{\hat{\alpha}}$  и  $A_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\hat{\beta}}$  удовлетворяют структурным уравнениям:

$$\begin{aligned} (dA_{\hat{\alpha}}^{\hat{\alpha}} - A_{\hat{\beta}}^{\hat{\alpha}} \omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} + A_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} \omega_{\hat{\beta}}^{\hat{\alpha}}) \wedge \omega^{\alpha} &= 0, \\ (dA_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\hat{\beta}} - A_{\hat{\gamma}}^{\hat{\alpha}} \omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{\gamma}} - A_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}}^{\hat{\beta}} \omega_{\hat{\beta}}^{\hat{\gamma}} + A_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\hat{\gamma}} \omega_{\hat{\gamma}}^{\hat{\alpha}}) \wedge \omega^{\alpha} &= 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Замечание 1.1. Из (1.2), (1.3) и (1.4) следует, что

$$\omega_\alpha^\alpha = -\hat{\omega}_\alpha^\alpha \Rightarrow \omega_\alpha^\alpha = A_{\alpha\beta}^\alpha \omega^\beta, A_{\alpha\beta}^\alpha = -A_{\alpha\beta}^\alpha; \quad (1.6)$$

геометрически это означает, что с многообразием  $V_{2,2}^1$  в  $E_4$  инвариантным образом ассоциируется двумерное многообразие  $V_{2,2}^2$ , элементом которого является плоскость  $L_2^3$ ,  $A \in L_2^2$ :

$$L_2^2 = (\bar{A}, \bar{e}_3, \bar{e}_4) \perp L_2^1. \quad (1.7)$$

### 2. Отображение $f_1: L_2^1 \rightarrow L_2^2$

Каждой точке  $A \in E_4$  сопоставим отображение  $f_1$  плоскостей  $L_2^1$  и  $L_2^2$ , которое каждую точку  $X \in L_2^1$  с радиус-вектором

$$\bar{X} = \bar{A} + x^\alpha \bar{e}_\alpha \quad (2.1)$$

переводит в соответствующую точку  $Y \in L_2^2$  с радиус-вектором

$$\bar{Y} = \bar{A} + y^\alpha \hat{e}_\alpha.$$

Это отображение определяется следующим образом:

$$f_1: L_2^1 \rightarrow L_2^2 \Leftrightarrow y^\alpha = A_\alpha^\alpha x^\alpha + B_{\alpha\beta}^\alpha x^\alpha x^\beta, \quad (2.2)$$

где величины  $B_{\alpha\beta}^\alpha$  определяются по формулам

$$B_{\alpha\beta}^\alpha = \frac{1}{2} (A_{\alpha\beta}^\alpha + A_{\beta\alpha}^\alpha) \quad (2.3)$$

и в силу (1.5) удовлетворяют структурным уравнениям:

$$(dB_{\alpha\beta}^\alpha - B_{\gamma\beta}^\alpha \omega_\alpha^\gamma - B_{\alpha\gamma}^\alpha \omega_\beta^\gamma + B_{\alpha\beta}^\beta \omega_\beta^\alpha) \wedge \omega^\beta = 0. \quad (2.4)$$

Заметим, что, отображение плоскостей  $L_2^1$  и  $L_2^2$ , отвечающее точке  $A$ , определяется двумя соответствующими функциями двух аргументов. Поэтому в соответствии с [6, с. 43–44] получаем, что каждое из указанных отображений определяется соответствующей комплекснозначной функцией:

$$f_1: L_2^1 \rightarrow L_2^2: w = f_1(z) = G_{01}z + G_{02}\bar{z} + 2G_{12}z\bar{z} + G_{11}z^2 + G_{22}\bar{z}^2, \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} G_{0\alpha} &= g_{0\alpha} + ih_{0\alpha}, G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + ih_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}, \\ 2g_{01} &= A_1^3 + A_2^4, 2h_{01} = A_1^4 - A_2^3, \\ 2g_{02} &= A_1^3 - A_2^4, 2h_{02} = A_2^3 + A_1^4, \\ 4g_{11} &= B_{11}^3 - B_{22}^3 + 2B_{12}^4, 4h_{11} = -2B_{12}^3 + B_{11}^4 - B_{22}^4, \\ 4g_{22} &= B_{11}^3 - B_{22}^3 - 2B_{12}^4, 4h_{22} = 2B_{12}^3 + B_{11}^4 - B_{22}^4, \\ 4g_{12} &= B_{11}^3 + B_{22}^3, 4h_{12} = B_{11}^4 + B_{22}^4. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При этом плоскость  $L_2^1$  объявляется комплексной плоскостью  $(z)(z=x^1+ix^2, \bar{z}=x^1-ix^2)$ , а плоскость  $L_2^2$  считается комплексной плоскостью  $(w)(w=y^3+iy^4)$ . Заметим, что плоскость  $L_2^1$  является областью определения функций (2.5), а плоскость  $L_2^2$  — областью их значений.

Выясним геометрический смысл отображения  $f_1: L_2^1 \rightarrow L_2^2$ .

Рассмотрим кривую  $K_0(t)$ , описываемую точкой  $A \in E_4$  и определяемую дифференциальными уравнениями:

$$K_0(t): \omega^\alpha = t^\alpha \Theta, D\Theta = \Theta \wedge \Theta_1. \quad (2.7)$$

Из (1.1) в силу (1.5) следует, что прямая

$$t = (\bar{A}, \bar{e}_\alpha + A_\alpha^\alpha \bar{e}_\alpha) t^\alpha \quad (2.8)$$

касается кривой  $K_0(t)$  в точке  $A$ .

В силу (1.4, 1.7) и (2.8) замечаем, что прямая  $\hat{t} = (\bar{A}, \bar{e}_\alpha) t^\alpha$  является  $np_{L_2^1}^t$  — проекцией прямой  $t$  на плоскость  $L_2^1$  в направлении плоскости  $L_2^2$ .

**Определение 2.1.** Точка  $X \in L_2^1$  с радиус-вектором (2.1), отвечающая точке  $A \in E_4$ , и кривая  $K_0(t)$  называются соответствующими, если прямая  $A\hat{X}$  параллельна прямой  $t$ .

Из (2.7, 2.8) и определения (2.1) замечаем, что точка  $X \in L_2^1$  и кривая  $K_0(t)$  будут соответствующими тогда и только тогда, когда

$$\frac{\omega^1}{x^1} = \frac{\omega^2}{x^2} \Leftrightarrow t^\alpha = \lambda x^\alpha, (\lambda \neq 0). \quad (2.9)$$

Из (2.1) в силу (1.1) и (1.4) получаем

$$d\bar{X} = (\dots)^\alpha \bar{e}_\alpha + (A_\beta^\alpha + x^\alpha A_{\alpha\beta}^\alpha) \omega^\beta \bar{e}_\alpha.$$

Поэтому в силу (2.3, 2.7, 2.8) и определения (2.1) прямая, определяемая векторным параметрическим уравнением

$$\bar{Y} = \bar{A} + \lambda y^\alpha \hat{e}_\alpha, \quad (2.10)$$

где  $y^\alpha$  определяются по формулам (2.2), есть пересечение плоскости  $L_2^2$  с трехмерным пространством, проходящим через плоскость  $L_2^1$  и касательную к линии, описываемой точкой  $X \in L_2^1$  вдоль соответствующей кривой  $K_0(t)$  в смысле определения 2.1. При этом предполагается, что точка  $X$  не является фокусом плоскости  $L_2^1$  в смысле [7], а кривая  $K_0(t)$  не является соответствующей фокальной кривой. Таким образом, в силу (2.9) и (2.10) отображение  $f_1: L_2^1 \rightarrow L_2^2$  геометрически характеризуется тем, что оно любую точку  $X \in L_2^1$ , отвечающую точке  $A \in E_4$ , переводит в прямую (2.8) в  $L_2^2$ , проходящую через точки  $A$  и  $Y$ . Поэтому отображение  $f_1$  определяется геометрически с точностью до ненулевого параметра  $\lambda$ .

### 3. Отображение $f_2: L_2^2 \rightarrow L_2^1$

Будем предполагать, что на многообразии  $V_{2,2}^0$  величина

$$a \equiv A_1^3 A_2^4 - A_1^4 A_2^3 \neq 0 \quad (3.1)$$

в каждой точке  $A \in E_4$ . Тогда из (1.4) получаем

$$\omega^\alpha = B_\alpha^\alpha \omega^\alpha, \quad (3.2)$$

где  $B_3^1 = \frac{A_2^4}{a}$ ,  $B_4^1 = -\frac{A_2^3}{a}$ ,  $B_3^2 = -\frac{A_1^4}{a}$ ,  $B_4^2 = \frac{A_1^3}{a}$ . (3.3)

С помощью величин (3.3) и (1.6) построим величины

$$B_{\alpha\beta}^\alpha = \frac{1}{2} A_{(\alpha\beta)}^\alpha B_{\beta)}^\alpha. \quad (3.4)$$

Из (1.5) с учетом (3.1–3.4) получаем, что величины  $B_\alpha^\alpha$  и  $B_{\alpha\beta}^\alpha$  удовлетворяют квадратичным уравнениям:

$$\begin{aligned} (dB_\alpha^\alpha - B_\beta^\alpha \omega_\alpha^\beta + B_\alpha^\beta \omega_\beta^\alpha) \wedge \omega^\alpha &= 0, \\ (dB_{\alpha\beta}^\alpha - B_{\gamma\beta}^\alpha \omega_\alpha^\gamma - B_{\alpha\gamma}^\alpha \omega_\beta^\gamma + B_{\alpha\beta}^\beta \omega_\beta^\alpha) \wedge \omega^\beta &= 0. \end{aligned}$$

Величины (3.3) и (3.4) определяют отображение  $f_2: L_2^2 \rightarrow L_2^1$ , которое в точке  $Y \in L_2^2$  с радиус-вектором  $\bar{Y} = A + y^a \bar{e}_a$  сопоставляет точку  $X \in L_2^1$  с радиус-вектором (2.1), по формуле:

$$f_2: L_2^2 \rightarrow L_2^1: x^\alpha = B_{\beta}^\alpha y^{\hat{\beta}} + B_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^\alpha y^{\hat{\alpha}} y^{\hat{\beta}} \quad (3.5)$$

Как и во втором пункте показывается, что отображение (3.5) определяется комплекснозначной функцией вида:

$$f_2: z = f_2(w) = G_{03}w + G_{04}\bar{w} + 2G_{34}w\bar{w} + G_{33}w^2 + G_{44}\bar{w}^2, \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} 2G_{03} &= (B_3^1 + B_4^2) + i(B_3^2 - B_4^1), \quad i^2 = -1, \\ 2G_{04} &= (B_3^1 - B_4^2) + i(B_3^2 + B_4^1), \\ 4G_{33} &= (B_{33}^1 - B_{44}^1 - 2B_{34}^2) + i(-2B_{34}^1 + B_{33}^2 - B_{44}^2), \\ 4G_{44} &= (B_{33}^1 - B_{44}^1 + 2B_{34}^2) + i(2B_{34}^1 + B_{33}^2 - B_{44}^2), \\ 4G_{34} &= (B_{33}^1 + B_{44}^1) + i(B_{33}^2 + B_{44}^2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Заметим, что геометрическая интерпретация отображения (3.6) аналогична геометрической интерпретации отображения (2.2). При этом линия, описываемая точкой  $A$ , определяется дифференциальными уравнениями

$$\dot{K}_0(t): \omega^{\hat{\alpha}} = t^{\hat{\alpha}} \Theta, \quad D\Theta = \Theta \wedge \Theta_1,$$

а прямая  $\dot{t} = (A, \bar{e}_a + B_{\hat{a}\hat{b}}^a \bar{e}_{\hat{a}}) \dot{t}^{\hat{a}}$  касается  $\dot{K}_0(t)$  в точке  $A$ .

#### 4. Гармонические и аналитические отображения $f_a$

В соответствии с [6. С. 75–76] и с учетом (2.3–2.6) и (3.5–3.7) получаем, что каждая из комплекснозначных функций будет дифференцируемой в соответствующей точке  $F_{ad}$  ( $\alpha=1,2; F_{1d} \in L_2^1; F_{2d} \in L_2^2$ ) тогда и только тогда, когда координаты  $(x^1; x^2) \Leftrightarrow z = x^1 + ix^2$  и  $(y^3; y^4) \Leftrightarrow w = y^3 + iy^4$  каждой из этих точек удовлетворяют системам, соответственно:

$$\begin{aligned} f_{1d}: L_2^1 \rightarrow L_2^2 \Rightarrow F_{1d}: \begin{cases} (B_{2\beta}^4 - B_{1\beta}^3) x^\beta = g_{02}, \\ (B_{2\beta}^3 + B_{1\beta}^4) x^\beta = -h_{02}; \end{cases} \\ f_{2d}: L_2^2 \rightarrow L_2^1 \Rightarrow F_{2d}: \begin{cases} (B_{4\hat{\beta}}^2 - B_{3\hat{\beta}}^1) y^{\hat{\beta}} = g_{04}, \\ (B_{4\hat{\beta}}^1 + B_{3\hat{\beta}}^2) y^{\hat{\beta}} = -h_{04}. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Заметим, что дважды непрерывные функции  $y = y(x^1, x^2)$  и  $x = x(y^3, y^4)$  в соответствующих точках плоскостей  $L_2^1$  и  $L_2^2$  будут гармоническими тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial^2 y}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 y}{(\partial x^2)^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{(\partial y^3)^2} + \frac{\partial^2 x}{(\partial y^4)^2} = 0.$$

Поэтому каждая из систем функций (2.2) и (3.5) будет состоять из гармонических функций тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} f_{1r}: L_2^1 \rightarrow L_2^2: B_{11}^1 + B_{22}^2 = 0, \\ f_{2r}: L_2^2 \rightarrow L_2^1: B_{33}^3 + B_{44}^4 = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Введем следующие определения.

**Определение 4.1.** Каждое из отображений  $f_a$  ( $\alpha=1,2$ ), отвечающих точке  $A \in E_4$ , называется дифференцируе-

мым или  $d$ -отображением в соответствующей точке  $F_{ad}$  и обозначается  $f_{ad}$ , если определяющие их функции двух переменных дифференцируемы в этой точке.

**Определение 4.2.** Если отображения  $f_1: L_2^1 \rightarrow L_2^2$ ,  $f_2: L_2^2 \rightarrow L_2^1$  отвечающие точке  $A \in E_4$ , являются  $d$ -отображениями во всех точках плоскостей  $L_2^1$  и  $L_2^2$ , то они называются аналитическими отображениями и обозначаются  $f_a$  ( $\alpha=1,2$ ).

**Определение 4.3.** Отображения  $f_a$  ( $\alpha=1,2$ ), отвечающие точке  $A \in E_4$ , называются гармоническими и обозначаются  $f_{ar}$ , если определяющие их функции двух переменных являются гармоническими.

**Замечание 4.1.** Символом  $g_a \rightarrow g_{as}$  будем обозначать отображение плоскостей  $L_2^1$  и  $L_2^2$  в каждой точке  $A \in E_4$ , которое является отображением  $g_{as}$  ( $\alpha=1,2; s=d,a,r$ ) в смысле определений (4.1–4.3), соответственно.

Из определений (4.1–4.3) и в силу (4.1, 2.6, 3.3) и (3.4) следует, что каждое из соотношений определяют гармонические отображения  $f_{1r}$ ,  $f_{2r}$ , соответственно, а соотношения

$$\begin{aligned} f_{1a}: B_{2\beta}^4 - B_{1\beta}^3 = 0, \quad B_{2\beta}^3 + B_{1\beta}^4 = 0, \quad A_1^3 = A_2^4, \quad A_1^4 + A_2^3 = 0; \\ f_{2a}: B_{4\hat{\beta}}^2 - B_{3\hat{\beta}}^1 = 0, \quad B_{4\hat{\beta}}^1 + B_{3\hat{\beta}}^2 = 0, \quad A_1^3 = A_2^4, \quad A_1^4 + A_2^3 = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

определяют аналитические отображения  $f_{1a}$ ,  $f_{2a}$ , соответственно.

**Замечание 4.2.** Из соотношений (4.3) вытекают, в частности соотношения (4.2), соответственно. Это, как и следовало ожидать, означает справедливость утверждения:  $f_a \rightarrow f_{aa} \Rightarrow f_a \rightarrow f_{ar}$  ( $\alpha=1,2$ ).

**Определение 4.4.** Многообразием  $V_{2,2}^{\alpha r}$  ( $\alpha=1,2$ ;  $\alpha$  – фиксировано) называется такое многообразие  $V_{2,2}^\alpha$ , у которого в каждом его элементе отображение  $f_a$  ( $f_1: L_2^1 \rightarrow L_2^2$ ;  $f_2: L_2^2 \rightarrow L_2^1$ ) является отображением  $f_{ar}$  в смысле определения (4.3):  $f_a \rightarrow f_{ar}$ . Многообразием  $V_{2,2}^{\alpha a}$  называется такое многообразие  $V_{2,2}^\alpha$ , у которого в каждом его элементе отображение  $f_a$  ( $f_1: L_2^1 \rightarrow L_2^2$ ;  $f_2: L_2^2 \rightarrow L_2^1$ ) является отображением  $f_{aa}$  в смысле определения (4.2):  $f_a \rightarrow f_{aa}$ . Многообразиями  $V_{2,2}^{1a}$  и  $V_{2,2}^{2r}$  называются многообразия вида:

$$\begin{aligned} V_{2,2}^{1a} &= V_{2,2}^{1a} \cup V_{2,2}^{2a}, \\ V_{2,2}^{2r} &= V_{2,2}^{1r} \cup V_{2,2}^{2r}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

**Замечание 4.3.** Многообразие  $V_{2,2}^{1a}$  определяется первой группой соотношений (4.3), а многообразие  $V_{2,2}^{2a}$  – второй группой из соотношений (4.3). Поэтому многообразие  $V_{2,2}^{1a}$  определяется одновременно первой и второй группами соотношений в (4.3).

#### 5. Геометрические свойства отображений $f_{ar}, f_{aa}$

В этом пункте будут выяснены геометрические свойства всех отображений, о которых шла речь в предыдущих пунктах.

Найдем некоторые инвариантные геометрические образы, ассоциированные с многообразием  $V_{2,2}^1$ , которые дадут дополнительные геометрические результаты.

Если  $\bar{X} = \bar{A} + x^a \bar{e}_a$  – радиус-вектор фокуса в плоскости  $L_2^1$  в смысле [7] вдоль соответствующего фокального направления, то из

$$(d\bar{X}, \bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0$$

с учетом (1.1, 1.4, 2.3) и (3.1–3.4) находим, что множество всех фокусов плоскости  $L_2^1$  представляет собой конику  $K_2^{12}$ , определяемую в локальных координатах ортонормального репера  $R$  системой

$$K_2^{12} : (A_{\alpha 1}^3 A_{\beta 2}^4 - A_{\alpha 2}^3 A_{\beta 1}^4) x^\alpha x^\beta - a(B_{33}^1 + B_{44}^1) x^1 - a(B_{33}^2 + B_{44}^2) x^2 + a = 0, \quad x^{\hat{\alpha}} = 0. \quad (5.1)$$

Аналогичным образом получаются уравнения коники  $K_2^{34}$ :

$$K_2^{34} : (A_{\alpha 1}^1 A_{\beta 2}^2 - A_{\alpha 2}^1 A_{\beta 1}^2) x^{\hat{\alpha}} x^{\hat{\beta}} - (B_{11}^3 + B_{22}^3) x^3 - (B_{11}^4 + B_{22}^4) x^4 + 1 = 0, \quad x^\alpha = 0. \quad (5.2)$$

Пусть  $\bar{Z}_1 = \bar{A} + \tau z_1^{\hat{\alpha}} \bar{e}_\alpha$  и  $\bar{Z}_2 = \bar{A} + \tau z_2^{\hat{\alpha}} \bar{e}_\alpha$  – векторные параметрические уравнения прямых  $z_1 \in L_1^1$  и  $z_2 \in L_2^2$ , проходящих через точку  $A$ , и имеющих направляющие векторы  $\bar{z}_1 = z_1^{\hat{\alpha}} \bar{e}_\alpha$  и  $\bar{z}_2 = z_2^{\hat{\alpha}} \bar{e}_\alpha$ , соответственно. Тогда с учетом (2.2) и (3.5) в плоскостях  $L_1^1$  и  $L_2^2$  получаются следующие коники, отвечающие каждой из заданных прямых и определяемые соответствующими алгебраическими уравнениями:

$$F_1(z_2) = \{X(x^1, x^2) \in L_2^1 | f_1(X) \perp z_2\} \Leftrightarrow \Leftrightarrow (z_2^3 A_\alpha^3 + z_2^4 A_\alpha^4) x^\alpha + (z_2^3 B_{\alpha\beta}^3 + z_2^4 B_{\alpha\beta}^4) x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^{\hat{\alpha}} = 0; \quad (5.3)$$

$$F_2(z_1) = \{Y(y^3, y^4) \in L_2^2 | f_2(Y) \perp z_1\} \Leftrightarrow \Leftrightarrow (z_1^1 B_\alpha^1 + z_1^2 B_\alpha^2) x^{\hat{\alpha}} + (z_1^1 B_{\alpha\beta}^1 + z_1^2 B_{\alpha\beta}^2) x^{\hat{\alpha}} x^{\hat{\beta}} = 0, \quad x^\alpha = 0. \quad (5.4)$$

Из (4.1–4.4) и (5.1–5.4) вытекает справедливость следующих утверждений.

**Теорема 5.1.** 1)  $f_1 \rightarrow f_{1r} \Leftrightarrow A$  – центр коники  $K_2^{34} \subset L_2^2$ ,  
2)  $f_2 \rightarrow f_{2r} \Leftrightarrow A$  – центр коники  $K_2^{12} \subset L_2^1$ ,  
3)  $f_\alpha \rightarrow f_{\alpha r} \Leftrightarrow$  асимптотические направления коник  $F_\alpha(z_\beta)$  ( $\alpha, \beta = 1, 2; \alpha \neq \beta$ ) взаимно ортогональны в соответствующих плоскостях  $L_1^1$  или  $L_2^2$ .

**Замечание 5.1.** Из определения (4.4) и замечания (4.2) следует, что многообразие  $V_{2,2}^{12a}$  является частным случаем соответствующего многообразия  $V_{2,2}^{12r}$ .

**Замечание 5.2.** Геометрические свойства многообразий  $V_{2,2}^{12r}$  и  $V_{2,2}^{12a}$  вытекают из теоремы 5.1 с учетом определения (4.4) и замечаний (4.2) и (5.1).

### 6. Существование многообразий $V_{2,2}^{12r}$ , $V_{2,2}^{12a}$ и $V_{2,2}^{12a}$

**Теорема 6.1.** Каждое из многообразий  $V_{2,2}^{12r}$ ,  $V_{2,2}^{12a}$ ,  $V_{2,2}^{12a}$  существует.

**Доказательство.** Из определения (4.4) с учетом (4.3) следует, что многообразия  $V_{2,2}^{12a}$  характеризуется соотношениями:

$$B_{2\beta}^4 - B_{1\beta}^3 = 0, B_{2\beta}^3 + B_{1\beta}^4 = 0, A_1^4 + A_2^3 = 0, A_1^4 = A_2^4, B_{4\beta}^2 - B_{3\beta}^1 = 0, B_{4\beta}^1 + B_{3\beta}^2 = 0, \quad (6.1)$$

( $\alpha, \beta = 1, 2; \hat{\alpha}, \hat{\beta} = 3, 4$ ). Из (1.5) с учетом (1.4) получаем

$$dA_\alpha^{\hat{\alpha}} - A_\beta^{\hat{\alpha}} \omega_\alpha^\beta + A_\alpha^{\hat{\beta}} \omega_\beta^\alpha = \dot{A}_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} \omega^\beta. \quad (6.2)$$

Проведем с учетом (6.2) и (6.1) такую канонизацию ортонормального репера  $R$ , при которой

$$A_1^4 = -A_2^3 = 0, A_1^3 = A_2^4 \neq 0,$$

тогда из (6.2) получаем

$$\omega_1^2 - \omega_3^4 = \dot{g}_\alpha \omega^\alpha. \quad (6.3)$$

Поэтому в соответствии с [8] указанная канонизация репера  $R$  существует.

Обозначим  $\dot{V}_{2,2}^{12a}$  – многообразии  $V_{2,2}^{12a}$ , на котором выполняются соотношения:

$$A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} = 0, \dot{g}_\alpha = 0, A_1^4 = -A_2^3 = 0, A_1^3 = A_2^4 = 1, \quad (6.4)$$

которые с учетом (6.3) и (1.4) приводят к дифференциальным уравнениям:

$$\omega^3 = \omega^1, \omega^4 = \omega^2, \omega_\alpha^{\hat{\alpha}} = 0, \omega_1^2 - \omega_3^4 = \omega_3^4 - \omega_2^1 = 0, \quad (6.5)$$

(по  $\alpha$  не суммировать).

Из (1.1) следует, что дифференциальные уравнения (6.5) замкнуты относительно операции внешнего дифференцирования. Это означает, что многообразии  $V_{2,2}^{12a}$ , являющиеся подклассом многообразий  $V_{2,2}^{12a}$ , существуют. Поэтому многообразия  $V_{2,2}^{12r}$ ,  $V_{2,2}^{12r}$ ,  $V_{2,2}^{12a}$  и  $V_{2,2}^{12a}$  существуют.

Теорема 6.1 доказана.

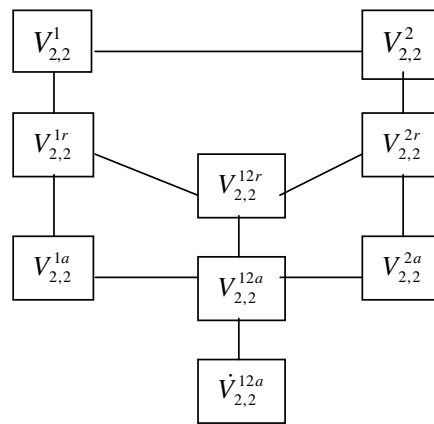
**Замечание 6.1.** Соотношения (6.1) тождественно выполняются с учетом (6.4), при этом неравенство (3.1) выполняется, поскольку в силу (6.4)  $a=1$ .

**Замечание 6.2.** В случае многообразия  $V_{2,2}^{12a}$  отображение  $f: L_2^1 \rightarrow L_2^2$  в силу (2.2) и (6.4) определяется по формулам:

$$f_1 : y^3 = x^1, y^4 = x^2;$$

отсюда в силу (3.5) и (6.4) можно легко получить формулы, определяющие отображение  $f_2: L_2^2 \rightarrow L_2^1$ :

$$f_2 : x^1 = y^3, x^2 = y^4.$$



**Рисунок.** Классификация Коши-Римана многообразий  $V_{2,2}^\alpha$

Замечание 6.3. Все построения в данной статье в силу (3.5) проведены в предположении, что из рассмотрения исключается случай

$$a \equiv A_1^3 A_2^4 - A_1^4 A_2^3 = 0 \Leftrightarrow \varpi^3 \wedge \varpi^4 = 0, \quad (6.6)$$

когда точка  $A$  принадлежит фокусной конике  $K_{12}^2$  плоскости  $L_2^2 \perp L_2^1$ , а также случай  $\varpi^2 = 0$ , когда плоскость  $L_2^1$  касается поверхности  $S_2$ , описываемой точкой  $A$ .

Замечание 6.4. В силу (6.6) или в случае, когда плоскость  $L_2^1$  касается поверхности  $S_2$  в точке  $A$ , отображение  $f_2: L_2^2 \rightarrow L_2^1$  становится неопределенным.

Замечание 6.5. Из определения (4.4) и результатов данного пункта вытекает следующая схема взаимосвязи многообразий  $V_{2,2}^{2r}$ ,  $V_{2,2}^{12r}$ ,  $V_{2,2}^{6a}$ ,  $V_{2,2}^{12a}$  и  $V_{2,2}^{12a}$  (рисунок).

Замечание 6.6. Классификацию многообразий  $V_{2,2}^{12a}$ , указанную на рисунке, будем называть **классификацией Коши-Римана**.

Замечание 6.7. Результаты, изложенные в данной статье для двумерного семейства центрированных плоскостей в четырехмерном евклидовом пространстве, является ответом на замечание в [1, С. 9].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев Е.Т., Глазырина Е.Д. О двумерном многообразии центрированных 2-плоскостей в многомерном евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. — 2003. — Т. 306. — № 4. — С. 5–9.
2. Норден А.П. Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976. — 432 с.
3. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1979. — С. 7–246.
4. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Московского математического общества. — М., 1953. — Т. 2. — С. 275–382.
5. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. — М.: ГИТТЛ, 1948. — 432 с.
6. Александров И.А. Теория функций комплексного переменного. — Томск: Томский гос. ун-т, 2002. — 510 с.
7. Аквис М.А. Фокальные образы поверхностей ранга // Известия вузов. Сер. Математика. — 1957. — № 1. — С. 9–19.
8. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). — 1962. — № 2. — P. 231–240.

УДК 681.5

## АНАЛИЗ ЛОКАЛИЗАЦИИ КОРНЕЙ ИНТЕРВАЛЬНОГО ПОЛИНОМА В ЗАДАННОМ СЕКТОРЕ

С.А. Гайворонский, С.В. Замятин

Институт "Кибернетический центр" Томского политехнического университета  
E-mail: saga@cc.tpu.edu.ru

*Анализируется отображение параметрического многогранника полинома в сектор  $\Gamma_m$  корневой плоскости, определяемый числом  $m$  интервальных коэффициентов. Находятся  $(2m-2)$  вершин многогранника, отображение которых в сектор  $\Gamma_m$  гарантирует локализацию в нем всех корней интервального полинома. Формулируются критерии локализации корней в заданном секторе  $\Gamma$  при различных соотношениях его угла с углом сектора  $\Gamma_m$ .*

#### Введение

Одной из основных проблем современной теории робастного управления является разработка методов исследования динамических свойств интервальных систем [1, 2]. В частности, необходим эффективный инструмент для оценки гарантированных показателей качества системы управления при интервальной неопределенности ее параметров.

В [3] подобная задача сформулирована как анализ робастной относительной устойчивости, предусматривающей различные варианты локализации корней интервального характеристического полинома (ИХП). Очевидно, что их принадлежность определенной области комплексной плоскости корней обуславливает тот или иной уровень робастного качества управления в интервальной системе.

Для анализа робастной относительной устойчивости широко применяются алгебраические и час-

тотные методы [1]. При этом значительно меньше внимания уделяется использованию корневых методов. Однако, согласно [4–6], робастное расширение корневого подхода, основанное на свойствах корневых годографов, может быть достаточно эффективным, а в некоторых случаях и наилучшим, для решения указанной задачи.

#### 1. Постановка задачи

В данной статье рассматривается открытый сектор  $\Gamma$  в левой полуплоскости корней, задающий область допустимой колебательности интервальной системы. Будем считать, что если корни ИХП располагаются в области  $\Gamma$ , то интервальная система обладает заданной робастной секторной устойчивостью. Для ее анализа можно использовать результаты работы [7], где показано, что границы областей локализации корней являются образами оп-