УДК 514.76

ОТОБРАЖЕНИЯ КОШИ–РИМАНА ДВУМЕРНЫХ ПЛОЩАДОК КАСАТЕЛЬНОГО И НОРМАЛЬНОГО РАССЛОЕНИЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Т. Ивлев, А.А. Лучинин, Е.А. Молдованова

Томский политехнический университет
E-mail: luchinin@tpu.ru

Изучаются двумерные площадки касательной и нормальной плоскости m-поверхности $S_m \in E_n$ и отображения этих площадок, отвечающие каждому направлению в касательной плоскости.

Ключевые слова:
Многомерные евклидовы пространства, многомерные поверхности, отображения.

Key words:
Multidimensional Euclidean spaces, multidimensional surfaces, mapping.

Введение

Как известно [1], одной из проблем дифференциальной геометрии многомерной поверхности является проблема инвариантного оснащения. Для m-мерной поверхности (m-поверхности) S_m в n-мерном евклидовом пространстве E_n эта проблема становится тривиальной, поскольку с каждой текущей точкой m-поверхности S_m в E_n ассоциируется оснащающая (нормальная) $(n-m)$-плоскость P_{n-m}, ортогональная касательной m-плоскости L_m к S_m в ее текущей точке. Поэтому при изучении m-поверхности $S_m \subset E_n$ представляет интерес детальное изучение полей инвариантных геометрических образов, определяемых компонентами внутреннего фундаментального геометрического объекта m-поверхности $S_m \subset E_n$ в смысле Г.Ф. Лаптева [2].

Данная работа посвящена рассмотрению m-поверхности $S_m \subset E_n$. Раздел 1 работы посвящен аналитическому аппарату, в котором указываются основные дифференциальные уравнения m-поверхности $S_m \subset E_n$ и объясняется задача, которая решается в данной работе. В разделе 2 изучаются двумерные площадки $L_2^1 \subset L_m$ и $P_2^1 \subset P_{n-m}$ и отображения $f_t^1 : P_2^1 \to L_2^1$, которые отвечают каждому фиксированному направлению $t \in L_m$ и определяются двумя соответствующими функциями двух аргументов. Доказывается существование конечного числа двумерных площадок L_2^1 таких, что функции, определяющие отображение f_t^1 (отображение Коши–Римана), удовлетворяют условиям Коши–Римана ([3. С. 188–189]).

Все рассмотрения в данной статье носят локальный характер, а функции, встречающиеся в статье, предполагаются функциями класса C^∞. Обозначения и терминология соответствует принятым в [1–7].

1. Аналитический аппарат

Рассматривается n-мерное евклидово пространство E_n, отнесенное к подвижному ортонормальному реперу $R=\{\bar{A}, \bar{e}_i\}$ с деривационными формулами и структурными уравнениями

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \;\; d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j,$$
$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \;\; D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \qquad (1)$$

где 1-формы ω_i^j удовлетворяют соотношениям

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0, \qquad (2)$$

вытекающим из ортонормальности репера R.

Здесь и в дальнейшем индексы будут принимать следующие значения

$$i, j, k = \overline{1, n}; \;\; \alpha, \beta, \gamma, \sigma = \overline{1, m}; \;\; a, b, c = \overline{m+1, n};$$
$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = 1, 2; \;\; a_1, b_1, c_1 = m+1, m+2;$$
$$\hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1 = \overline{m+3, n}; \;\; \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\gamma}_1 = \overline{3, m};$$
$$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 = 3, 4; \;\; \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2, \hat{\gamma}_2 = \overline{5, m};$$
$$\alpha_p, \beta_p = 2p-1, 2p; \;\; \hat{\alpha}_p, \hat{\beta}_p = \overline{2p+1, m}.$$

В пространстве E_n рассматривается m-мерная поверхность S_m и к ней присоединяется ортонормальный репер R так, что точка A – текущая точка этой поверхности, а m-мерная плоскость

$$L_m = (\bar{A}, \bar{e}_1, ..., \bar{e}_m) \qquad (3)$$

касается ее в точке A. Здесь и в дальнейшем символом $\Gamma_q = (\bar{X}, \bar{x}_1, ..., \bar{x}_q)$ обозначается плоскость пространства E_n, проходящая через точку X с радиус-вектором $\bar{X}$ и параллельная линейно независимым векторам $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_q$ пространства E_n. В силу выбора ортонормального репера R дифференциальные уравнения m-поверхности S_m в E_n запишутся в виде

$$\omega^a = 0, \omega_\alpha^a = A_{\alpha\beta}^a \omega^\beta,$$
$$dA_{\alpha\beta}^a + A_{\alpha\beta}^b \omega_b^a - A_{\gamma\beta}^a \omega_\alpha^\gamma - A_{\alpha\gamma}^a \omega_\beta^\gamma = A_{\alpha\beta\gamma}^a \omega^\gamma,$$
$$A_{[\alpha\beta]}^a = 0, A_{[\alpha\beta\gamma]}^a = 0. \qquad (4)$$

Заметим, что в дифференциальных уравнениях (4) величины $A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}}$ являются компонентами фундаментального геометрического объекта $\Gamma = \{A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}}\}$ m-поверхности S_m в смысле Г.Ф. Лаптева [2].

Замечание 1.1. В данной статье предполагается, что m и n удовлетворяют неравенствам

$$1 < m < n-1; \;\; n < m + \frac{m(m+1)}{2} = m_1. \qquad (5)$$

Замечание 1.2. Из (2) и (3) следует, что с каждой точкой $A \in S_m \subset E_n$ ассоциируется оснащающая (нормальная) m-плоскость

$$P_{n-m} = (\bar{A}, \bar{e}_{m+1}, ..., \bar{e}_n), \qquad (6)$$

ортогональная L_m.

Замечание 1.3. Из (3) с учетом (2) вытекают соотношения

$$\omega_a^\alpha = -\omega_\alpha^a = A_{a\beta}^\alpha \omega^\beta \Rightarrow A_{a\beta}^\alpha = -A_{\alpha\beta}^a, A_{a\beta}^\alpha = A_{a\alpha}^\beta. \qquad (7)$$

Замечание 1.4. В данной статье изучаются поля инвариантных геометрических образов m-поверхности $S_m \subset E_n$, определяемых компонентами геометрического объекта Г, а также некоторые частные классы m-поверхностей S_m, когда эти геометрические образы имеют специальный вид.

Замечание 1.5. Кривую $k(t)$, описываемую точкой $A \in S_m \subset E_n$, в дальнейшем будем задавать дифференциальными уравнениями

$$\omega^\alpha = t^\alpha \theta. \qquad (8)$$

Здесь θ – параметрическая 1-форма, удовлетворяющая структурному уравнению $D\theta = \theta \wedge \theta_1$, а величины t^α с учетом (1) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\delta t^\alpha + \pi_\beta^\alpha t^\beta = \tilde{\theta}_1 t^\alpha, \pi_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha(\delta), \tilde{\theta}_1 = \theta_1(\delta),$$

где δ – символ дифференцирования по вторичным параметрам [2]. Прямую

$$t = (\bar{A}, \bar{e}_\alpha) t^\alpha \subset L_m \qquad (9)$$

касательную к кривой (8) в точке $A \in S_m$ будем называть направлением t. В дальнейшем любую операцию, совершаемую вдоль кривой (8), будем считать так же совершаемой в направлении (9) или в направлении t, которое принадлежит L_m или его подпространству.

2. Поля двумерных площадок в линейном подпространстве L_m

В этом разделе будут рассмотрены двумерные площадки, отвечающие точке $A \in S_m \subset E_n$ в соответствующих линейных подпространствах L_m и P_{n-m}.

2.1. Отображение f_t: $P_2^1 \to L_2^1$; $P_2^1 \subset P_{n-m}$, $L_2^1 \subset L_m$

2.1.1. Точке $A \in S_m$ в соответствующих линейных подпространствах P_{n-m} и L_m сопоставим двумерные площадки $P_2^1 \ni A$ и $L_2^1 \ni A$, которые зададим следующим образом

1) Двумерную плоскость $P_2^1 \subset P_{n-m}$, проходящую через точку $A \in S_m$, относительно ортонормального репера R определим так

$$P_2^1 = (\bar{A}, \bar{e}_{m+1}, \bar{e}_{m+2}) \Leftrightarrow x^{\hat{\alpha}_1} = 0, x^\alpha = 0. \qquad (10)$$

Из (1) и (6) с учетом (10) следует, что на m-поверхности $S_m \subset E_n$ имеют место дифференциальные уравнения

$$\omega_{a_1}^{a_1} = A_{a_1\alpha}^{a_1} \omega^\alpha = -\omega_{\hat{a}_1}^{a_1} = -A_{\hat{a}_1\alpha}^{a_1} \omega^\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dA_{a_1\alpha}^{\hat{a}_1} + A_{a_1\alpha}^{\hat{b}_1} \omega_{\hat{b}_1}^{\hat{a}_1} - A_{b_1\alpha}^{\hat{a}_1} \omega_{a_1}^{b_1} - A_{a_1\beta}^{\hat{a}_1} \omega_\alpha^\beta = A_{a\,\alpha\beta}^{\hat{a}_1} \omega^\beta. \qquad (11)$$

2) Двумерную площадку $L_2^1 \subset L_m$ в локальных координатах ортонормального репера определим так

$$L_2^1 = (\bar{A}, \bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2) \Leftrightarrow x^{\hat{\alpha}_1} = g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} x^{\alpha_1}, x^\alpha = 0, \qquad (12)$$

где

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha_1} = \bar{e}_{\alpha_1} + g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} \bar{e}_{\hat{\alpha}_1}, \qquad (13)$$

а величины $g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dg_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} + g_{\alpha_1}^{\hat{\beta}_1} \omega_{\hat{\beta}_1}^{\hat{\alpha}_1} - g_{\beta_1}^{\hat{\alpha}_1} \omega_{\alpha_1}^{\beta_1} + \omega_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} = g_{\alpha\,1\alpha}^{\hat{\alpha}_1} \omega^\alpha. \qquad (14)$$

Из (10) и (12) с учетом (2) следует, что точке $A \in S_m \subset E_n$ отвечают линейные подпространства

$$P_{n-m-2} = (\bar{A}, \bar{e}_{m+3}, ..., \bar{e}_n) \perp P_2^1,$$

$$L_{m-2}^1 = (\bar{A}, \bar{\varepsilon}_3, ..., \bar{\varepsilon}_m) \perp L_2^1,$$

$$\bar{\varepsilon}_{\hat{\alpha}_1} = \bar{e}_{\hat{\alpha}_1} + g_{\hat{\alpha}_1}^{\alpha_1} \bar{e}_{\alpha_1}, g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} = -g_{\hat{\alpha}_1}^{\alpha_1}. \qquad (15)$$

2.1.2. Точке $A \in S_m$ сопоставим точки $X \in L_2^1$ и $Y \in P_2^1$ с радиус-векторами

$$\bar{X} = \bar{A} + x^{\alpha_1} \bar{\varepsilon}_{\alpha_1}, \ \bar{Y} = \bar{A} + y^{a_1} \bar{e}_{a_1}. \qquad (16)$$

Отсюда с учетом (1), (4), (8)–(11) получаем

$$\frac{d\bar{Y}}{\theta} = (\cdots)^{\hat{a}_1} \bar{e}_{\hat{a}_1} + (y^{a_1} A_{a_1\alpha}^\beta + \delta_\alpha^\beta) t^\alpha \bar{e}_\beta. \qquad (17)$$

Здесь символ $(...)^{\hat{a}_1}$ означает несущественные для нас выражения.

Из (17) с учетом (10)–(14), (9) и (15) замечаем, что каждой точке $A \in S_m \subset E_n$ отвечает отображение

$$f_t^1 : P_2^1 \to L_2^1 \Leftrightarrow y^{\alpha_1} = \lambda_1 (G_{a_1\alpha}^{\alpha_1} y^{a_1} + G_\alpha^{\alpha_1}) t^\alpha, \ \lambda_1 \neq 0, \qquad (18)$$

соответствующее фиксированному направлению $t = (\bar{A}, \bar{\varepsilon}_\beta) t^\beta \in L_m$. Здесь

$$G_{a_1\alpha}^{\alpha_1} = A_{a_1\alpha}^{\alpha_1} + g_{\hat{\alpha}_1}^{\alpha_1} A_{a_1\alpha}^{\hat{\alpha}_1}, G_\alpha^{\alpha_1} = \delta_\alpha^{\alpha_1} + g_{\hat{\alpha}_1}^{\alpha_1} \delta_\alpha^{\hat{\alpha}_1}. \qquad (19)$$

При этом величины $G_{a_1\alpha}^{\alpha_1}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dG_{a_1\alpha}^{\alpha_1} + G_{a_1\alpha}^{\beta_1} \omega_{\beta_1}^{\alpha_1} - G_{b_1\alpha}^{\alpha_1} \omega_{a_1}^{b_1} - G_{a_1\beta}^{\alpha_1} \omega_\alpha^\beta + A_{a\,\alpha}^{\hat{\alpha}_1} \omega_{\hat{\alpha}_1}^{\alpha_1} = G_{a\,1\alpha\beta}^{\alpha_1} \omega^\beta.$$

Здесь явный вид величин, стоящих при ω^β, для нас несущественен.

Геометрически отображение (20) (по аналогии с [7. С. 347]) каждой точке $Y \in P_2^1$, отвечающей точке $A \in S_m$, сопоставляет прямую $X = (\bar{A}, \bar{\varepsilon}_{\alpha_1}) x^{\alpha_1}$ пересечения плоскости L_2^1 с линейным подпространством, проходящим через P_{n-m} и касательную к линии (Y), описываемой точкой Y вдоль кривой (8) или в направлении t. При этом точка Y предполагается нефокальной точкой $(n-m)$-плоскости P_{n-m} в смысле [5].

2.2. Попарно-ортогональные площадки в m-плоскости L_m

2.2.1. Отображение f_t^1:$P_2^1 \to L_2^1$ Коши–Римана.

Определение 2.1. Отображение f_t^1: $P_2^1 \to L_2^1$ называется отображением Коши–Римана и обозначается f_{tr}, т. е. $f_t^1 \to f_{tr}^1$, если определяющие его функции при каждом фиксированном направлении удовлетворяют условиям Коши–Римана [3. С. 188–189].

Из (20) в соответствии с определением 2.1 замечаем, что отображение f_t^1:$P_2^1 \to L_2^1$ является отображением $f_{tr}^1 (f_t^1 \to f_{tr}^1)$ тогда и только тогда, когда в точке $A \in S_m$ выполняются условия

$$\frac{\partial x^1}{\partial y^{m+1}}=\frac{\partial x^2}{\partial y^{m+2}};\quad \frac{\partial x^1}{\partial y^{m+2}}=-\frac{\partial x^2}{\partial y^{m+1}},$$

эквивалентные соотношениям

$$(G^1_{m+1,\alpha}-G^2_{m+2,\alpha})t^\alpha=0,\quad (G^1_{m+2,\alpha}-G^\alpha_{m+1})t^\alpha=0,$$

t^α – фиксированы. (20)

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. Каждой двумерной плоскости $P^1_2\subset P_{n-m}$, отвечающей точке $A\in S_m\subset E_n$, в m-плоскости L_m (m>2), касательной к S_m в точке A, соответствует конечное число двумерных площадок L^1_2 таких, что

$$f^1_t:P^1_2\to L^1_2\to f^1_{tr},\quad \forall t\in L^1_{m-2}\perp L^1_2. \tag{21}$$

Доказательство. Из (20) в силу (15), (21) и в соответствии с определением 2.1 следует, что k_1=2(m–2) величин $g^{\hat\alpha_1}_{\alpha_1}=-g^{\alpha_1}_{\hat\alpha_1}$ определяющих двумерные площадки $L^1_2\subset L_m$, о которых идет речь в настоящей теореме, удовлетворяют следующей системе k_1 неоднородных алгебраических уравнений:

$$\varphi^{\gamma_1}_{\hat\beta_1}\equiv H^{\gamma_1}_{\hat\beta_1}+H^{\hat\alpha_1\gamma_1}_{\hat\beta_1\alpha_1}g^{\alpha_1}_{\hat\alpha_1}+H^{\hat\gamma_1\gamma_1}_{\beta_1\alpha_1}g^{\alpha_1}_{\hat\gamma_1}g^{\beta_1}_{\hat\beta_1}=0. \tag{22}$$

Здесь

$$H^1_{\hat\beta_1}=A^1_{m+1,\hat\beta_1}-A^2_{m+2,\hat\beta_1};\; H^2_{\hat\beta_1}=A^2_{m+1,\hat\beta_1}+A^1_{m+2,\hat\beta_1};$$

$$H^{\hat\gamma_1 1}_{\beta_1\alpha_1}=A^{\hat\gamma_1}_{m+1,\beta_1}\delta^1_{\alpha_1}-A^{\hat\gamma_1}_{m+2,\beta_1}\delta^2_{\alpha_1};$$

$$H^{\hat\alpha_1 2}_{\hat\beta_1\gamma_1}=A^{\hat\alpha_1}_{m+2,\hat\beta_1}\delta^1_{\gamma_1}+A^{\hat\alpha_1}_{m+1,\hat\beta_1}\delta^2_{\gamma_1}+(A^2_{m+1,\gamma_1}+A^1_{m+2,\gamma_1})\delta^{\hat\alpha_1}_{\hat\beta_1};$$

$$H^{\hat\gamma_1 2}_{\beta_1\alpha_1}=A^{\hat\gamma_1}_{m+2,\beta_1}\delta^1_{\alpha_1}+A^{\hat\gamma_1}_{m+1,\beta_1}\delta^2_{\alpha_1};$$

$$H^{\hat\alpha_1 1}_{\hat\beta_1\gamma_1}=A^{\hat\alpha_1}_{m+1,\hat\beta_1}\delta^1_{\gamma_1}-A^{\hat\alpha_1}_{m+2,\hat\beta_1}\delta^2_{\gamma_1}+(A^1_{m+1,\gamma_1}-A^2_{m+2,\gamma_1})\delta^{\hat\alpha_1}_{\hat\beta_1}. \tag{23}$$

Покажем, что система (22) имеет конечное число решений относительно величин $g^{\hat\alpha_1}_{\alpha_1}=-g^{\alpha_1}_{\hat\alpha_1}$. Рассмотрим якобиеву матрицу системы (22)

$$\left[\frac{\partial\varphi^{\gamma_1}_{\hat\beta_1}}{\partial g^{\alpha_1}_{\hat\alpha_1}}\right] \tag{24}$$

и подсчитаем ее ранг при нулевых значениях величин $g^{\alpha_1}_{\hat\alpha_1}=g^{\hat\alpha_1}_{\alpha_1}=0$. Тогда из системы (23) получаем следующие соотношения

$$A^1_{m+1,\hat\beta_1}-A^2_{m+2,\hat\beta_1}=0,\; A^2_{m+1,\hat\beta_1}+A^1_{m+2,\hat\beta_1}=0. \tag{25}$$

Рассмотрим с учетом (25) в матрице (24) минор порядка k_1=2(m–2)

$$H_{k_1}=\det[H^{\hat\alpha_1\beta_1}_{\hat\beta_1\alpha_1}], \tag{26}$$

здесь значения пар индексов $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \hat\beta_1\end{pmatrix}$ указывает на номера строк, а $\begin{pmatrix}\hat\alpha_1\\ \alpha_1\end{pmatrix}$ – на номера столбцов.

Пусть, например,

$$A^1_{m+1,\beta_1}-A^2_{m+2,\beta_1}=0,\; A^2_{m+1,\beta_1}+A^1_{m+2,\beta_1}=0,$$

Тогда из (23) и (26) получаем

$$H_{k_1}=\begin{vmatrix} A^3_{m+1,3} & \cdots & A^3_{m+1,m} & -A^3_{m+2,3} & \cdots & -A^3_{m+2,m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A^m_{m+1,3} & \cdots & A^m_{m+1,m} & -A^m_{m+2,3} & \cdots & -A^m_{m+2,m}\\ A^3_{m+2,3} & \cdots & A^3_{m+2,m} & A^3_{m+1,3} & \cdots & A^3_{m+1,m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A^m_{m+2,3} & \cdots & A^m_{m+2,m} & A^m_{m+1,3} & \cdots & A^m_{m+1,m} \end{vmatrix}. \tag{27}$$

Из (27) заключаем, что определитель (26) в общем случае не равен нулю в точке $A\in S_m\subset E_n$. В этом нетрудно убедиться, например, при следующих числовых значениях $A^{\hat\alpha_1}_{m+1,\hat\beta_1}=\delta^{\hat\alpha_1}_{\hat\beta_1}$, $A^{\hat\alpha_1}_{m+2,\hat\beta_1}=0$ при которых с учетом (27) $H_{k_1}=1\neq0$.

Поскольку определитель (26) не равен нулю в общем случае, то ранг матрицы (24) равен k_1=2(m–2). Это означает, что система (22) состоит из алгебраически независимых уравнений, а потому в общем случае она имеет конечное число решений относительно $g^{\hat\alpha_1}_{\alpha_1}=-g^{\alpha_1}_{\hat\alpha_1}$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. – М.: ВИНИТИ АН СССР. – 1979. – С. 7–246.
2. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Московского математического общества. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
3. Акивис М.А. Фокальные образы поверхности ранга r // Известия вузов. Сер. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.
4. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТП, 1948. – 432 с.
5. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.
6. Ивлев Е.Т., Глазырина Е.Д. О двумерном многообразии центрированных 2-плоскостей в многомерном евклидовом пространстве E_m(m>4) // Известия Томского политехнического университета. – 2003. – Т. 306. – № 4. – С. 5–9.
7. Ивлев Е.Т., Молдованова Е.А. О дифференцируемых отображениях аффинных пространств в многообразия m-плоскостей в многомерном евклидовом пространстве // Известия вузов. Сер. Математика. – 2009. – № 11. – С. 24–42.

Поступила 14.11.2011 г.