# СРАВНЕНИЕ ПОДХОДОВ CVaR И МАРКОВИЦА ФОРМИРОВАНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПОРТФЕЛЕЙ

П.В. Борцова
Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент М.Е. Семенов
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: poly.bortsova@yandex.ru

# COMPASION OF CVaR AND MARKOWITZ APPROACHES TO FORMATION OF INVESTMENT PORFOLIOS

P.V. Bortsova
Scientific Supervisor: PhD, Associate prof. M.E. Semenov
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: poly.bortsova@yandex.ru

***Abstract.*** *The aim of research is formation of efficient frontiers of CVaR and Mean-Variance optimal portfolios. As a result, CVaR and Mean-Variance efficient frontiers were formed, graphs of dependencies risk vs yield, and yield vs CVaR were plotted.*

**Введение.** В литературе [1] выделяют различные методы измерения рыночного риска: а) методика расчёта минимальных требований к размеру гарантийного обеспечения SPAN, б) маржинальные правила Комиссии по ценным бумагам и биржам, США, а также в) *стоимость под риском* (Value-at-Risk, *VaR*). Последняя мера риска – *VaR* – является стандартом в измерении рыночного риска [2] и широко используется при управлении риском в банковском секторе, страховании. *VaR* – это стоимостная оценка риска, т.е. выраженная в денежных единицах величина возможных потерь $X$ за определенный период времени, характеризуемая заданной вероятностью: $P(X \le VaR_\alpha) = 1–\alpha$, $\alpha\in(0, 1)$. *VaR*, как мера риска, имеет два параметра: временной горизонт, $t$, и доверительный уровень допустимого риска, $(1-\alpha)\cdot 100\%$. Существенным недостатком этого метода является отсутствие чувствительности к распределению возможных потерь, которая в различные периоды времени может различаться значительно. В статьях [3, 4] предложена новая мера риска, получившая название *условная стоимость под риском* (Conditional Value-at-Risk, *CVaR*). $CVaR(x)$ – величина условных ожидаемых потерь, которые могут произойти в $(1-\alpha)\cdot 100\%$ наихудших случаях реализации случайной величины $X$: $CVaR_\alpha(x) = \mathrm{E}[x \mid x \le VaR_\alpha]$, $\alpha\in(0, 1)$.

Таким образом, портфельное инвестирование с помощью методологии *CVaR*, представляет собой математическое ожидание убытков, которые не меньше *VaR*, где под убытками понимается нежелательные с точки зрения инвестора значения доходности, а *VaR* представляет собой наибольший убыток, который может произойти на рассматриваемом временном промежутке с некоторой заданной вероятностью. Цель данной работы построить эффективные границы портфелей с использованием *CVaR*-подхода и их сравнить с классическим подходом Марковица (*mean-variance*, *MV*) [5].

**Исходные данные и обозначения.** В качестве исходных данных использованы ежедневные цены закрытия (Close) акций 50 российских компаний, входящих в индекс ММВБ Московской биржи в период с 01.07.2014 по 01.07.2015. Будем использовать обозначения из статьи [6]: пусть вектора

$x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)^T$, $q=(q_1,q_2,...,q_n)^T$ – доли активов и их цены соответственно в портфеле $X$ в начальный момент времени $t$=0, тогда $x=(x_1,x_2,...,x_n)^T$, $y=(y_1,y_2,...y_n)^T$ доли активов и их цены в конце периода инвестирования $t$=1. Тогда функцию убытков можно вычислить по формуле [6]:

$$f(x,y;x^0,q)=-y^Tx+q^Tx^0\ . \qquad (1)$$

Функцию прибыли, представляющую собой ожидаемое значение доходности от портфеля в конце периода, $t$=1, можно найти по формуле:

$$R(x)=E[y^Tx]=\sum_{i=1}^{n}E[y_i]x_i\ . \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) нетрудно заметить, что функция прибыли (2) связана с функцией убытков (1) соотношением $R(x)=-E[f(x,y)]+q^Tx^0$. Для формулировки задачи оптимизации необходимо задать ограничения на риск и доли активов в портфеле. Верхняя граница *CVaR* должна быть равна максимальному значению *VaR*. В зависимости от этого, запишем ограничение на риск в виде [6]:

$$CVaR_a(x)\le wq^Tx^0, \qquad (3)$$

где $w\in[0, 1]$ – доля портфеля под риском (уровень терпимости инвестора к риску). Так, например, если α=0,95 и $w$=0,1, это означает, что средние потери в 5% наихудших исходов не должны превышать 10% первоначальной стоимости портфеля. В статье [6] показано как через введение фиктивных переменных можно линеаризовать *CVaR*-ограничение (3). Отсюда следует, что высокий уровень терпимости к риску приводит к получению более высокой прибыли. Потребуем, чтобы доля $i$-го актива в портфеле составляла не более чем $v_i$ от всего портфеля:

$$q_ix_i\le v_i\sum_{k=1}^{n}q_kx_k\ . \qquad (4)$$

Заметим, что ограничение в виде (4) используют только при запрете коротких продаж. В итоге задача оптимизации сводится к нахождению минимума функционала [6]: $\min\limits_{x,\zeta}\sum_{i=1}^{n}-E[y_i]x_i$ при ограничениях (3) и (4), где ζ ϵ R – пороговое значение. В результате решения задачи оптимизации получим вектор $x^*$, соответствующий риску значению *VaR*, который равен $\zeta^*$ и имеющий максимальную доходность, которая равна $E[y]x^*/\left(q^Tx^0\right)$. Напомним, что задача оптимизации портфеля Марковица может быть записана в виде [5]: $\min\limits_{x}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}x_ix_k$, при ограничениях $\sum_{i=1}^{n}E[r_i]x_i=r_p$ и $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$, где $x_i$ - доля $i$-го актива в портфеле, $r_p$ - ожидаемое значение доходности портфеля, а $\delta_{ik}$- ковариация между случайными величинами доходностей $i$-го и $j$-го активов.

**Иллюстративный пример.** Эффективная граница может быть найдена путем задания различных уровней терпимости к риску, $w\in[0, 1]$. На рис. 1 изображены эффективные границы для *CVaR*- и *MV*-подхода при α=0,01 и 0,05. Можно заметить, что для одного и того же уровня доходности портфель, построенный по модели Марковица, имеет более высокий *CVaR*. При детальном анализе полученных результатов нетрудно заметить, что с увеличением уровня терпимости к риску доходность портфеля для одного и того же уровня CVaR значительно возрастает.

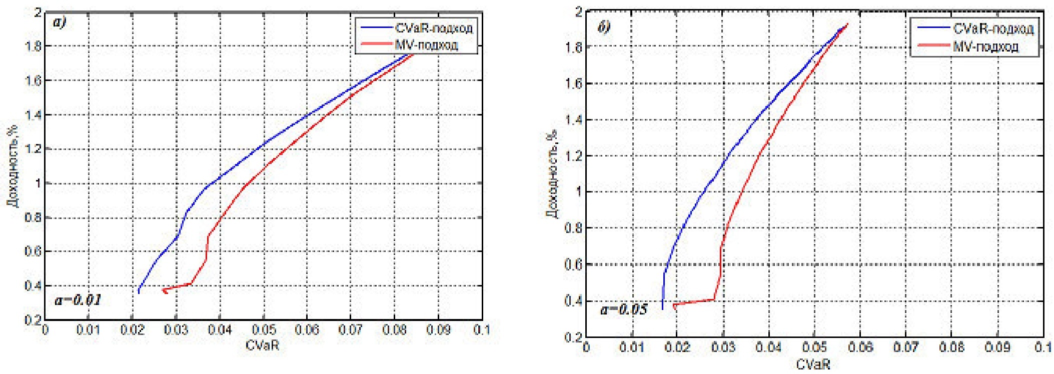


*Рис. 1. Эффективные границы для CVaR-* и *MV*-подхода при различном α*: а)* 0,01*, б)* 0,05

На рис. 2 изображены эффективные границы для *CVaR*- и *MV*-подхода при α=0,01 и 0,05. Под риском понимают среднеквадратическое отклонение цены актива от среднего значения, выраженное в %. Можно заметить, что бóльшему уровню риска соответствует более высокий доход, в тоже время для одного уровня риска *MV*-портфель Марковица приносит, незначительно, но бóльший доход, чем *CVaR*-портфель.

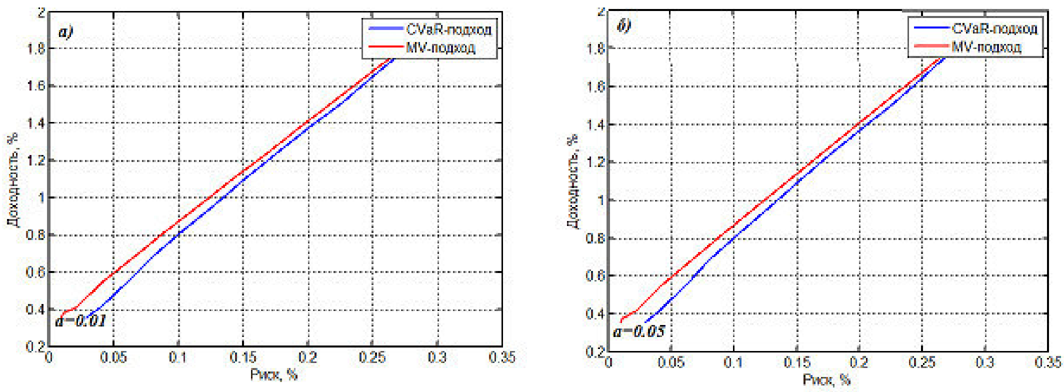


*Рис. 2. Эффективные границы* для *CVaR-* и *MV*-подхода при различном α*: а)* 0,01*, б)* 0,05

**Заключение.** В статье рассмотрены *CVaR*- и *MV*-подход к формированию инвестиционных портфелей. Сформированы оптимальные портфели и построены *CVaR*- и *MV* эффективные границы для α=0,01 и 0,05. Показано, что с увеличением уровня терпимости к риску, доходность портфеля существенно увеличивается, при этом портфель *CVaR* приносит больший доход относительно портфеля Марковица.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M. (1999) Coherent measures of risk. Mathematical Finance. 9. 203–228.
2. Basel Committee on Banking Supervision. International convergence of capital measurement and capital standards, 2006. http://www.bis.org/publ/bcbs128b.pdf.
3. Pflug G. (2000) Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk // Probabilistic Constrained Optimization / Ed. by S. Uryasev. Vol. 38. pp. 272–281.
4. Rockafellar R., Uryasev S. (2000) Optimization of conditional value-at-risk. The Journal of Risk, 2(3), 21–41.
5. Markowitz H.M. (1952) Portfolio Selection. Journal of finance, 7(1), 77–91.
6. Krokhmal P., Palmquist J., Uryasev S. (2002) Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk Objective and Constraints. Journal of Risk, 4(2), 43-68.