

**ОЦЕНКА VaR ВАЛЮТНОГО ПОРТФЕЛЯ  
НА ОСНОВЕ ФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ ЕГО КОМПОНЕНТ**

И.В. Загуменнова

Научный руководитель: доцент, к. ф.-м. н. М.Л. Шинкеев

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г.Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: [zagumenноваiv@mail.ru](mailto:zagumenноваiv@mail.ru)

**EVALUATION OF VaR MONETARY PORTFOLIO  
BASED ON THE FACTOR MODEL OF ITS COMPONENT**

I.V.Zagumenнова

Scientific Supervisor: Assoc. prof., Ph.D M.L. Shinkeev

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: [zagumenноваiv@mail.ru](mailto:zagumenноваiv@mail.ru)

***Abstract.** On the basis of the factor model, the distribution of density and function of the portfolio return are found. One-day VaR portfolio is defined. VaR estimates for a 10-day time horizon are made.*

**Введение.** В ходе факторного анализа распределения совокупности валютных пар в статье [1] показано, что совокупность относительных приращений котировок валютных пар может быть представлена в виде двухфакторной модели, распределение компонент которой достаточно хорошо описывается распределением Лапласа [2]. На основе этой модели можно получить аналитическое представление как для плотностей распределений относительных приращений всех котировок, входящих в совокупность, так и оценить распределения величин, являющихся производными от исходных компонент. В данной работе на основе модели, описанной в статье [1], рассматривается оценка VaR портфеля, состоящего из валютных пар.

**Материалы и методы исследования.** Пусть  $r = \sum_{j=1}^m w_j r_j$  - доходность портфеля за период

времени  $t$ , состоящего из  $m$  активов (валютных пар) с доходностями  $r_j$  и долями  $w_j$ , причем для компонент портфеля справедлива следующая факторная модель:

$$r_j - \bar{r}_j = \alpha_{1j} \xi_1 + \alpha_{2j} \xi_2 + \varepsilon_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

где:  $\bar{r}_j, \quad j = \overline{1, m}$  - средние значения доходностей валютных пар;

$\xi_1, \xi_2$  - обобщенные факторы,  $M(\xi_1) = M(\xi_2) = 0, D(\xi_1) = D(\xi_2) = 1$ ;

$\alpha_1, \alpha_2$  - векторы факторных нагрузок,  $\text{COV}(r_i, r_j) = \sum_{s=1}^2 \alpha_{si} \alpha_{sj}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m}, \quad i \neq j$ ;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$  - характерные факторы,  $M(\varepsilon_i) = 0, D(\varepsilon_i) = D(r_i) - \sum_{s=1}^2 (\alpha_{si})^2, \quad i = \overline{1, m}$ .

Предполагается также, что обобщенные и характерные факторы независимы в совокупности. Тогда для доходности  $r$  портфеля будет справедливо:

$$\begin{aligned} r &= \sum_{j=1}^m w_j r_j = \sum_{j=1}^m w_j \bar{r}_j + \sum_{j=1}^m w_j (\alpha_{1j} \xi_{1j} + \alpha_{2j} \xi_{2j} + \varepsilon_j) = \\ &= \bar{r} + \sum_{j=1}^m w_j (\alpha_{1j} \xi_{1j} + \alpha_{2j} \xi_{2j} + \varepsilon_j) \end{aligned} \quad (2)$$

где:  $\bar{r}$  - средняя доходность портфеля.

Соответственно для величины  $\eta = r - \bar{r} = \sum_{j=1}^m w_j (\alpha_{1j} \xi_{1j} + \alpha_{2j} \xi_{2j} + \varepsilon_j)$  можем записать:

$$\eta = r - \bar{r} = \sum_{j=1}^m w_j (\alpha_{1j} \xi_{1j} + \alpha_{2j} \xi_{2j} + \varepsilon_j) = \sum_{i=1}^2 \gamma_i \xi_i + \sum_{j=1}^m w_j \varepsilon_j,$$

где:  $\gamma_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} w_j$   $i = \overline{1, 2}$ .

Пусть как обобщенные, так и характерные факторы независимы и имеют распределение Лапласа с параметрами  $a_1, a_2$  и  $\theta_1 \div \theta_m$  соответственно. Характеристическая функция распределения Лапласа с параметром  $a$  имеет вид:  $g(t) = \frac{a^2}{a^2 + t^2}$ . Используя свойства характеристической функции [3],

получим следующую характеристическую функцию величины  $\eta$ :

$$g_{\eta}(t) = \prod_{i=1}^2 \frac{a_i^2}{a_i^2 + \gamma_i^2 t^2} \cdot \prod_{j=1}^m \frac{\theta_j^2}{\theta_j^2 + w_j^2 t^2} = \prod_{j=1}^{m+2} \frac{\delta_j^2}{\delta_j^2 + t^2}, \quad (3)$$

где:  $\delta_j = a_j / \gamma_j$  для  $j = \overline{1, 2}$ ;  $\delta_j = \theta_j / w_j$  для  $j = \overline{3, m+2}$ .

Выполнив обратное преобразование Фурье [4] найдем плотность распределения величины  $\eta$ :

$$f_{\eta}(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m+2} \left[ \delta_j \prod_{i=1, i \neq j}^{m+2} \left[ \frac{\delta_i^2}{\delta_i^2 - \delta_j^2} \right] e^{-\delta_j |x|} \right]. \quad (4)$$

Соответственно искомые плотность и функция распределения доходности портфеля будут иметь вид:

$$f_r(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m+2} \left[ \delta_j \prod_{i=1, i \neq j}^{m+2} \left[ \frac{\delta_i^2}{\delta_i^2 - \delta_j^2} \right] e^{-\delta_j |x - \bar{r}|} \right], \quad F_r(x) = \int_{-\infty}^x f_r(z) dz. \quad (5)$$

Для заданного уровня значимости  $\alpha$ , найдем значение  $\tau$ , для которого  $F_r(\tau) = \alpha$ . С вероятностью  $\beta = 1 - \alpha$  доходность портфеля на временном горизонте  $t$  не опустится ниже величины

$\tau$ . Соответственно, VaR портфеля на временном горизонте  $t$  будет равен:  $VaR_t = P(1 + \tau)$ , где  $P$  - начальная стоимость портфеля. Для того, чтобы получить VaR портфеля на временном горизонте  $T = k \cdot t$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , можно воспользоваться, например, методом Монте-Карло.

**Результаты.** В качестве примера был рассмотрен портфель из 5 валютных пар (BYR/RUB; CNY/RUB; EUR/RUB; GBP/RUB; USD/RUB) взятых с равными долями, построенный на основе данных за период с 12 января 2015 года по 13 октября 2015 года.

Параметры факторной модели приведены в таб. 1, 2. Уровень значимости модели  $p=0,314$ .

Таблица 1

Координаты векторов факторных нагрузок

$\alpha_1$	-0,0118	-0,0125	-0,0158	-0,0102	-0,0127
$\alpha_2$	-0,0155	-0,0040	0,0024	-0,0013	0,0018

Таблица 2

Оценки параметра  $a$  распределения Лапласа и уровень значимости  $p$  критерия хи-квадрат проверки гипотезы о распределении по закону Лапласа для обобщенных и характерных факторов

Фактор	$\xi_1$	$\xi_2$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\epsilon_3$	$\epsilon_4$	$\epsilon_5$
Оценка параметра $a$	1,30	1,39	580	134	478	89	156
Уровень значимости $p$	0,99	0,13	0,78	0,09	0,37	0,36	0,28

**Вывод.** На основе данной факторной модели по формулам (5) была найдены плотность и функция распределения доходности портфеля, а также определены однодневные VaR портфеля, соответствующие вероятностям 0,95 и 0,99. Моделируя доходности портфеля с законом (5) были получены и соответствующие оценки VaR для 10 дневного временного горизонта.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zagumennova I.V. Investigation of the distribution of currency pairs using methods of factor analysis // XIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых.. — Томск, 2016. — Т. — С. 54-56.
2. Лукасевич И. Я. Финансовый менеджмент. —М.:Бизнес-портал "Бизнес-Учебники.РФ", 2014 – 2015 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://bizbook.online/finance.html>.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. - 6-е изд. стер. - М.: Высш. шк., 1999.
4. Крицкий О.Л. Теория вероятностей и математическая статистика для технических университетов: учебное пособие // Национальный исследовательский Томский политехнический университет — Томск, 2014 г.