

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Национальный исследовательский  
Томский политехнический университет»



ISSN 1684-8519

# ИЗВЕСТИЯ

## ТОМСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 323, № 2, 2013

Математика и механика.  
Физика

ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ

г. Томск

# ИЗВЕСТИЯ ТОМСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

## Редакционный совет:

Чубик П.С. (председатель), д.т.н., ректор ТПУ (г. Томск)  
Пестряков А.Н. (заместитель председателя),  
д.х.н., проректор ТПУ по НИИ (г. Томск)  
Алексеенко С.В., д.ф.-м.н.,  
член-корреспондент РАН (г. Новосибирск)  
Болдырев В.В., д.х.н., академик РАН (г. Новосибирск)  
Боровиков Ю.С., к.т.н. (г. Томск)  
Гуляев Ю.В., д.ф.-м.н., академик РАН (г. Москва)  
Дамамм Ж., PhD (Франция)  
Дмитриев А.Ю., к.т.н. (г. Томск)  
Долматов О.Ю., к.т.н. (г. Томск)  
Ершов Ю.Л., д.ф.-м.н., академик РАН (г. Новосибирск)  
Замятин А.В., к.т.н. (г. Томск)  
Клименов В.А., д.т.н. (г. Томск)  
Конторович А.Э., д.г.-м.н., академик РАН (г. Новосибирск)  
Крёнинг М., PhD (Германия)  
Летников Ф.А., д.г.-м.н., академик РАН (г. Иркутск)  
Месяц Г.А., д.ф.-м.н., академик РАН (г. Москва)  
Михайленко Б.Г., д.ф.-м.н.,  
академик РАН (г. Новосибирск)  
Накоряков В.Е., д.т.н., академик РАН (г. Новосибирск)  
Панин В.Е., д.ф.-м.н., академик РАН (г. Томск)  
Сигов А.С., д.ф.-м.н., академик РАН (г. Москва)  
Сигфуссон Т.И., PhD (Исландия)  
Турнаев В.И., д.и.н. (г. Томск)  
Филлипов Г.А., д.т.н., академик РАН (г. Москва)  
Чайковский Д.В., к.ф.н. (г. Томск)  
Шень Джаоли, PhD (Китай)  
Яковлев А.Н., к.ф.-м.н. (г. Томск)

## Редакционная коллегия:

Пестряков А.Н. (председатель, главный редактор), д.х.н.  
Коробейников А.Ф. (зам. председателя), д.г.-м.н.  
Глазырин А.С. (главный редактор Издательства ТПУ), к.т.н.  
Могильницкий С.Б. (учёный секретарь), к.ф.-м.н.  
Барышева Г.А., д.э.н.  
Григорьев В.П., д.ф.-м.н.  
Заворин А.С., д.т.н.  
Иванчина Э.Д., д.т.н.  
Ильин А.П., д.ф.-м.н.  
Корниенко А.А., д.ф.н.  
Лавринович В.А., д.т.н.  
Погребной В.К., д.т.н.  
Савичев О.Г., д.г.н.  
Тузовский А.Ф., д.т.н.  
Шаманин И.В., д.ф.-м.н.

Журнал зарегистрирован Министерством  
Российской Федерации по делам печати,  
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.  
Свидетельство ПИ № 77-16615 от 24 октября 2003 г.  
Учредитель: Томский политехнический университет

Издаётся с 1903 г.

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2013

# BULLETIN OF THE TOMSK POLYTECHNIC UNIVERSITY

## Editorial Board:

Chubik P.S. (Chairman), D.E., rector of TPU (Tomsk)  
Pestryakov A.N. (Deputy Chairman) D. Chem.,  
pro-rector of TPU for Research and Innovation (Tomsk)  
Aleksenko S.V., D. Phys. and Math. Sc.,  
corresponding member of RAS (Novosibirsk)  
Boldyrev V.V., D. Chem., member of RAS (Novosibirsk)  
Borovikov Yu.S., Candidate of Science (Tomsk)  
Gulyaev Yu.V., D. Phys. and Math. Sc., member of RAS (Moscow)  
Damamm G., PhD (France)  
Dmitriev A.Yu., Candidate of Science (Tomsk)  
Dolmatov O.Yu., Candidate of Science (Tomsk)  
Ershov Yu.L., D. Phys. and Math. Sc., member of RAS (Novosibirsk)  
Zamyatin A.V., Candidate of Science (Tomsk)  
Klimenov V.A., D.E. (Tomsk)  
Kontorovich A.E., D. Geol. and Mineral. Sc., member of RAS (Novosibirsk)  
Kröning M., PhD (Germany)  
Letnikov F.A., D. Geol. and Mineral. Sc., member of RAS (Irkutsk)  
Mesyats G.A., D. Phys. and Math. Sc., member of RAS (Moscow)  
Mikhailenko B.G., D. Phys. and Math. Sc.,  
member of RAS (Novosibirsk)  
Nakoryakov V.E., D. E., member of RAS (Novosibirsk)  
Panin V.E., D. Phys. and Math. Sc., member of RAS (Tomsk)  
Sigov A.S., D. Phys. and Math. Sc., member of RAS (Moscow)  
Sigfusson T.I., PhD (Iceland)  
Turnaev V.I., PhD (Tomsk)  
Fillipov G.A., D.E., member of RAS (Moscow)  
Chaikovskiy D.V., Candidate of Science (Tomsk)  
Shen Zhaoli, PhD (China)  
Yakovlev A.N., Candidate of Science (Tomsk)

## Editorial:

Pestryakov A.N. (Chairman, Editor in Chief), D. Chem.  
Korobeinikov A.F. (Deputy Editor in Chief), D. Geol. and Mineral. Sc.  
Glazyrin A.S. (Editor in Chief), Candidate of Science  
Mogilnitsky S.B. (Science Secretary), Candidate of Phys. and Math. Sc.  
Barysheva G.A., Ec. D.  
Grigoriev V.P., D. Phys. and Math. Sc.  
Zavorin A.S., D.E.  
Ivanchina E.D., D.E.  
Ilyin A.P., D. Phys. and Math. Sc.  
Kornienko A.A., Ph. D.  
Lavrinovich V.A., D.E.  
Pogrebnoy V.K., D.E.  
Savichev O.G., D. Geog. Sc.  
Tuzovsky A.F., D.E.  
Shamanin I.V., D. Phys. and Math. Sc.

Подписной индекс по каталогу  
Агентства «Роспечать» – 18054

Журнал рассылается в адреса 50-и библиотек РФ,  
США, ФРГ, Великобритании, Франции  
и 9-и стран ближнего зарубежья

Полнотекстовый доступ к электронной версии  
журнала возможен на сайтах ТПУ: [portal.tpu.ru/izvestiya/](http://portal.tpu.ru/izvestiya/);  
ООО «Научная электронная библиотека»:  
[www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru), [www.e-library.ru](http://www.e-library.ru),  
а также поисковой системы [scholar.google.com](http://scholar.google.com)

Импакт-фактор РИНЦ 2011 г. 0,210

© Tomsk Polytechnic University, 2013

## СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА	
Определение квадратных параметрических обобщенных обратных матриц Мура–Пенроуза применением дифференциальных преобразований Пухова Симонян С.О.	6
Мультивейвлет пятой степени Шумилов Б.М., Эшаров Э.А., Кудуев А.Ж., Ыманов У.С.	11
Дифференцируемое отображение аффинного $Q_m$ и проективного $P_n$ пространств ( $m < n$ ) Ивлев Е.Т., Аль-Хассани М.А., Лучинин А.А.	16
Функция, представляющая функционал погрешности кубатурной формулы в пространстве Соболева Корытов И.В.	21
О построении многомерных циркулянтных графов диаметра два Монахова Э.А.	25
Дифференцируемое отображение аффинного $Q_n$ и проективного $P_n$ пространств Аль-Хассани М.А., Молдованова Е.А.	28
Полиномы дифференцирования в локальном дробном анализе на основе $d$ -оператора Чуриков В.А.	32
Оценка функции автокорреляции в виде линейной комбинации экспонент Устинова И. Г., Пахомова Е.Г.	37
Обобщенный $G$ -оператор комплексных порядков вещественной переменной Чуриков В.А.	42
Ковариантные формы принципов и уравнений движения систем с дифференциальными связями Родионов А.И.	44
Аналитическая и модельная оптимизация кинематических схем равномерноплотного прессования порошковых материалов Двилис Э.С., Чартпук П., Хасанов О.Л., Соколов В.М., Ешетов Б.А.	49
Динамика фрезерования конструкционных сталей концевыми фрезами Гаврилин А.Н., Коровин Г.И., Рожков П.С.	56
Особенности проектирования двухполюсной передачи с промежуточными телами качения Ефременков Е.А., Сорокова С.Н., Кобза Е.Е.	59
ФИЗИКА	
Исследование отражательной способности слоистой дисперсной среды Горячев Б.В., Могильницкий С.Б.	63
Хроматографическая система с радиальной геометрией Жданеев О.В.	66
Влияние оксида алюминия на пороги лазерного зажигания смеси нанопорошок алюминия и оксид железа Медведев В.В., Ильин А.П., Решетов А.А.	69
Разрушение нитроцементованной стали Апасов А.М., Апасов А.А., Козлов Э.В.	72
Особенности изнашивания композиционного покрытия на основе стали Р6М5 в трибоконтакте со сталью ШХ15 в широком интервале скоростей и нагрузок Гнюсов С.Ф., Игнатов А.А., Дураков В.Г.	76
Исследование релаксации напряжений в термомеханических соединениях на основе никелида титана и методы повышения их надежности Хохлов В.А., Потекаев А.И., Галсанов С.В.	85
Рассеяние энергии и адгезионные свойства квазигерцевского контакта материалов с памятью формы Потекаев А.И., Хохлов В.А., Галсанов С.В., Шулепов И.А.	90
Тройные диаграммы на основе алюминидов титана. Анализ и построение Клопотов В.Д., Потекаев А.И., Клопотов А.А., Кулагина В.В., Кнестяпин Е.А., Маркова Т.Н., Морозов М.М.	96
Кристаллические продукты сгорания в воздухе нанопорошка алюминия при действии магнитного поля Ильин А.П., Мостовщиков А.В.	101

## CONTENTS

MATHEMATICS AND MECHANICS	
Determination of square parametric generalized inverse Moore–Penrose matrices applying differential transformations of Pukhov Simonyan S.O.	6
Quintic multi-wavelet Shumilov B.M., Esharov E.A., Kuduev A.Zh., Ymanov Y.S.	11
Differentiable mapping of affine $Q_m$ and projective $P_n$ spaces ( $m < n$ ) Ivlev E.T., Al-Khassani M.A., Luchinin A.A.	16
Function representing error functional of a cubature formula in Sobolev space Korytov I.V.	21
On construction of multidimensional circulant graphs of diameter two Monakhova E.A.	25
Differentiable mapping of affine $Q_n$ and projective $P_n$ spaces Al-Khassani M.A., Moldovanova E.A.	28
Differentiation polynomials in local fractional analysis based on $d$ -operator Churikov V.A.	32
Estimation of autocorrelation function in the form of exponent linear combination Ustinova I.G., Pakhomova E.G.	37
The generalized $G$ -operator of complex orders of real variable Churikov V.A.	42
Covariant forms of principles and equations of motion in the systems with differential constraints Rodionov A.I.	44
Analytic and model optimization of kinematic diagrams for powder material uniform-dense compaction Dvilis E.S., Chartpuk P., Khasanov O.L., Sokolov V.M., Eshetov B.A.	49
Dynamics of cutting structural steels with end-milling cutters Gavrilin A.N., Korovin G.I., Rozhkov P.S.	56
The peculiarities of designing double-pole drive with the intermediate rolling elements Efremenkov E.A., Sorokova S.N., Kobza E.E.	59
PHYSICS	
The research of layered dispersion media reflectance Goryachev B.V., Mogilnitsky S.B.	63
Chromatographic system with radial geometry Zhdaneev O.V.	66
The effect of aluminum oxide on thresholds of laser ignition of aluminum nanopowder and iron oxide mixture Medvedev V.V., Ilyin A.P., Reshetov A.A.	69
Destruction of nitrocarbonized steel Apasov A.M., Apasov A.A., Kozlov E.V.	72
The features of wear of steel P6M5-based composition coating in tribocontact with steel ShKh15 in a wide range of velocities and loads Gnyusov S.F., Ignatov A.A., Durakov V.G.	76
Study of stress relaxation in thermomechanical titanium nickelide-based junctions and methods for their reliability growth Khokhlov V.A., Potekaev A.I., Galsanov S.V.	85
Energy dissipation and adhesive properties of quasi-hertz contact of shape memory materials Potekaev A.I., Khokhlov V.A., Galsanov S.V., Shulepov I.A.	90
Triple titanium aluminide-based diagrams. Analysis and construction Klopotov V.D., Potekaev A.I., Klopotov A.A., Kulagina V.V., Knestyapin E.A., Markova T.N., Morozov M.M.	96
Crystal air combustion products of aluminum nanopowders under magnetic field action Ilyin A.P., Mostovshchikov A.V.	101

- Влияние равноканального углового прессования на структуру и свойства антифрикционного сплава Al-40Sn**  
Скоренцев А.Л., Русин Н.М., Колубаев Е.А.
- Формирование износостойких покрытий вневакуумной электронно-лучевой наплавкой карбида вольфрама и последующей термической обработкой**  
Полетика И.М., Крылова Т.А., Тетюцкая М.В., Макаров С.А.
- Исследование тонкой структуры элементов кабеля технических сверхпроводников на основе сплава Nb-Ti при многоступенчатом волочении**  
Баранникова С.А., Шляхова Г.В., Зуев Л.Б., Мальцев Ю.А.
- Усиление мощности резонансного СВЧ компрессора с выводом энергии трансформацией моды колебаний**  
Артёменко С.Н., Игумнов В.С.
- Модификация элементов релятивистского магнетрона**  
Винтизенко И.И.
- Исследование влияния ферромагнитной вставки на распределение плотности низкоэнергетического электронного пучка**  
Коваль Т.В., Ле Ху Зунг
- Неустойчивость типа «змейки» компенсированного по заряду неоднородного электронного пучка**  
Григорьев В.П., Звигинцев И.Л., Кузнецов П.Е.
- К расчету возраста нейтронов в графите**  
Кузьмин А.В.
- Коэффициенты Пуассона щелочно-галогенидных кристаллов. Ч. II. Галогениды натрия**  
Беломестных В.Н., Соболева Э.Г.
- Гидромеханический момент сопротивления регулирующей заслонки магистрального нефтепровода**  
Богданов Е.П., Рикконен С.В.
- Расчет гидромеханических характеристик задвижки магистрального трубопровода**  
Богданов Е.П., Рикконен С.В.
- Разработка автоматизированной установки для синтеза наночастиц благородных металлов методом лазерной абляции объемных мишеней в жидкости**  
Смагулов А.А., Лапин И.Н., Светличный В.А.
- Оценка влияния датчиков температуры на температурное поле кольцевого нагревательного модуля**  
Филиппов М.М., Бабушкин Ю.В., Грибенюков А.И.
- Исследование особенностей плазменных граничных условий у коллектора термоэмиссионного диода**  
Зимин В.П.
- Частотный линейный индукционный ускоритель с двумя разнополярными импульсами**  
Машченко А.И.
- Теплофизический метод определения энергетических параметров модельных тепловыделяющих сборок в импульсных испытаниях на импульсном графитовом реакторе**  
Витюк В.А., Вурим А.Д., Шаманин И.В., Козловский С.Б.
- Лазерное разрушение на границе раздела двухслойной системы**  
Морозова Е.Ю., Лисицын В.М., Ципилев В.П., Яковлев А.Н.
- Регистрация параметров вихревого пучка в турбулентной атмосфере. Ч. 1. Использование градиентов волнового фронта**  
Аксенов В.П., Канев Ф.Ю., Куksenok Д.С., Макенова Н.А., Хапаева А.В.
- Регистрация параметров вихревого пучка в турбулентной атмосфере. Ч. 2. Учет ограничений, вносимых датчиком волнового фронта**  
Аксенов В.П., Канев Ф.Ю., Куksenok Д.С., Макенова Н.А., Хапаева А.В.
- Математическое моделирование процесса конденсации серного ангидрида в атмосфере, прилегающей к тепловой электрической станции**  
Гвоздяков Д.В., Губин В.Е.
- Седиментация частиц в ферроколлоидах с учетом динамических граничных условий**  
Глухов А.Ф., Демин В.А.
- Энергетический способ расчета упругих модулей образцов конечных размеров с ГПУ-решеткой**  
Зубко И.Ю., Симонов М.В.
- О некоторых физических закономерностях испарения распыленной воды при движении через высокотемпературные продукты сгорания**  
Волков Р.С., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А.
- 104 The influence of equal channel angular pressing on structure and properties of antifricition alloy Al-40Sn**  
Skorentsev A.L., Rusin N.M., Kolubaev E.A.
- 108 Formation of wear-resistance coatings by off-vacuum electron-beam tungsten carbide surfacing and further heat treatment**  
Poletika I.M., Krylova T.A., Tetyutskaya M.V., Makarov S.A.
- 111 The study of fine structure of cable elements in engineering Nb-Ti alloy-based superconductors at multistage cold drawing**  
Barannikova S.A., Shlyakhova G.V., Zuev L.B., Maltsev Yu.A.
- 116 Power amplification of resonance microwave compressor with energy output by oscillation mode transformation**  
Artemenko S.N., Igumnov V.S.
- 121 Modification of the relativistic magnetron elements**  
Vintizenko I.I.
- 127 The research of the influence of ferromagnetic insert on density distribution of low-power electron beam**  
Koval T.V., Le Khu Zung
- 132 «Snake» instability of charge compensated nonuniform electron beam**  
Grigoriev V.P., Zvigintsev I.L., Kuznetsov P.E.
- 135 On calculation of neutron age in graphite**  
Kuzmin A.V.
- 140 Poisson's ratios of alkali-halide crystal crystals. P. II. Sodium halogenides**  
Belomestnykh V.N., Soboleva E.G.
- 143 Hydromechanical resistance moment of control shutter in main oil pipeline**  
Bogdanov E.P., Rikkonen S.V.
- 147 Calculation of hydromechanical features of a pipe valve of the main pipeline**  
Bogdanov E.P., Rikkonen S.V.
- 152 The development of the automated installation to synthesize nanoparticles of noble metals by the method of laser ablation of volume targets in liquid**  
Smagulov A.A., Lapin I.N., Svetlichny V.A.
- 155 Estimation of temperature sensor effect on temperature field of ring heating module**  
Filippov M.M., Babushkin Yu.V., Gribenyukov A.I.
- 158 Studying the features of plasma boundary conditions in collector of thermionic diode**  
Zimin V.P.
- 163 Frequency linear induction accelerator with two bipolar pulses**  
Mashchenko A.I.
- 168 Thermophysical method for determining energy parameters of model fuel assemblies in impulse tests on pulsed uranium-graphite reactor**  
Vityuk V.A., Vurim A.D., Shamamin I.V., Kozlovsky S.B.
- 173 Laser damage on double-layer system interface**  
Morozova E.Yu., Lisitsyn V.M., Tsipilev V.P., Yakovlev A.N.
- 177 Recording the vortex beam parameters in turbulent atmosphere. P. 1. The use of wave front gradients**  
Aksenov V.P., Kanev F.Yu., Kuksenok D.S., Makenova N.A., Khapaeva A.V.
- 181 Recording the vortex beam parameters in turbulent atmosphere. P. 2. Consideration of wave front sensor restrictions**  
Aksenov V.P., Kanev F.Yu., Kuksenok D.S., Makenova N.A., Khapaeva A.V.
- 185 Mathematical modeling of sulphurous anhydride condensation in atmosphere adjoining thermal electric station**  
Gvozdyakov D.V., Gubin V.E.
- 189 Sedimentation of particles in ferrocolloids considering dynamic boundary conditions**  
Glukhov A.F., Demin V.A.
- 194 Energy method to calculate elastic modules of finite size samples with HCP-lattice**  
Zubko I.Yu., Simonov M.V.
- 201 Some physical laws of sprayed water evaporation when moving through high-temperature combustion products**  
Volkov R.S., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A.



	<b>РЕЦЕНЗИИ</b>		<b>REVIEWS</b>
	Рецензия на монографию А.А.Тихонова «Тензорное моделирование геомагнитного поля» Георгиевский Д.В.	208	The review of a monograph of A.A. Tikhonov «Tensor modeling of geomagnetic field» Georgievsky D.V.
	<b>НАУЧНЫЕ МЕРОПРИЯТИЯ</b>		<b>SCIENTIFIC EVENTS</b>
	Отчет о проведении российско-германского семинара «Биосовместимые материалы и покрытия: фундаментальные проблемы и приложения, направления развития»	211	The report on Russian-German seminar «Biocompatible materials and coatings: basic problems and applications, trends»
	<b>РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ</b>	212	<b>SUMMARIES</b>
	<b>СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ</b>	217	<b>INFORMATION ABOUT AUTHORS</b>

# Математика и механика

УДК 621.52+511.52

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАДРАТНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ МУРА–ПЕНРОУЗА ПРИМЕНЕНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПУХОВА

С.О. Симонян

Государственный инженерный университет Армении (Политехник), г. Ереван  
E-mail: ssimonyan@seua.am

Предложен достаточно простой численно-аналитический метод определения квадратных параметрических обобщенных обратных матриц Мура–Пенроуза. Рассмотрена известная тестовая задача.

### Ключевые слова:

Квадратная параметрическая матрица, обобщенная обратная матрица, дифференциальные преобразования.

### Key words:

Square parametric matrix, generalized inverse matrix, differential transformations.

### Введение

Пусть  $A(t) \in R^{m \times n}$  – параметрическая матрица (параметр  $t$  может быть временем, оператором Лапласа

$\left(s \sim \frac{d}{dt}\right)$  или другим параметром), а  $X(t) = A^+(t) \in R^{m \times n}$  –

соответствующая ей обобщенная обратная, подлежащая определению. По аналогии с известными соотношениями для числовых матриц [1] введем следующие условия Мура–Пенроуза для матриц  $A(t)$  и  $X(t)$ :

$$A(t) \cdot X(t) \cdot A(t) = A(t), \quad (1)$$

$$X(t) \cdot A(t) \cdot X(t) = X(t), \quad (2)$$

$$(A(t) \cdot X(t))^T = A(t) \cdot X(t), \quad (3)$$

$$(X(t) \cdot A(t))^T = X(t) \cdot A(t). \quad (4)$$

Тогда параметрическая обобщенная обратная матрица  $X(t)$  единственным образом будет определяться условиями (1)–(4). Далее, используя обозначения, приведенные в [2], можно определить ряд других обратных матриц: если выполняется условие (1), то  $X(t) = A^{(1)}(t)$ ; если условия (1) и (2) выполняются одновременно, то  $X(t) = A^{(1,2)}(t)$ ; если одновременно выполняются условия (1) и (3), то  $X(t) = A^{(1,3)}(t)$ ; если одновременно выполняются условия (1) и (4), то  $X(t) = A^{(1,4)}(t)$ ; если одновременно выполняются все условия (1)–(4), то  $X(t) = A^{(1-4)}(t)$ .

С учетом этих обозначений по аналогии с числовыми матрицами  $A^{(1)}(t)$  назовем  $g(t)$  обратной;  $A^{(1,2)}(t)$  рефлексивной  $g(t)$  обратной ( $A^R(t)$ );  $A^{(1,3)}(t) - g(t)$  обратной со свойством наименьших квадратов ( $A^L(t)$ );  $A^{(1,4)}(t) - g(t)$  обратной со свойством минимальной нормы ( $A^M(t)$ );  $A^{(1-4)}(t) - g(t)$  обратной (обобщенной обратной) Мура–Пенроуза ( $A^+(t)$ ).

Как показывают исследования [3–6], для определения матриц  $X(t)$  весьма эффективными оказываются дифференциальные преобразования [7, 8]. Так, при применении этих преобразований метод определения  $X(t)$  на основе раздельного использования условия (1) был предложен в работе [3], метод определения  $X(t)$  на основе раздельного использования условия (2) – в работе [4], метод определения  $X(t)$  на основе совместного использования условий (1) и (2) – в работе [5], метод определения  $X(t)$  на основе раздельного использования простейших соотношений (см. далее) – в работе [6]. В настоящей работе предлагается новый метод определения  $X(t)$  на основе совместного использования этих простейших соотношений также с применением дифференциальных преобразований.

### Математический аппарат

Рассмотрим произведение соотношений (1) и (2). При этом имеем:

$$[A(t) \cdot X(t) \cdot A(t)] \cdot [X(t) \cdot A(t) \cdot X(t)] = A(t) \cdot X(t) \quad (5)$$

или

$$[A(t) \cdot X(t)]^3 = A(t) \cdot X(t)$$

или

$$[[A(t) \cdot X(t)]^2 - E] \cdot A(t) \cdot X(t) = [0], \quad (6)$$

где  $E$  – единичная матрица порядка  $m$ .

Из соотношения (6) имеем

$$A(t) \cdot X(t) = [0], \quad (7a)$$

либо

$$A(t) \cdot X(t) = -E, \quad (7б)$$

либо

$$A(t) \cdot X(t) = E_{m \times m}. \quad (7в)$$

Теперь рассмотрим произведение соотношений (2) и (1). При этом имеем:

$$[X(t) \cdot A(t) \cdot X(t)] \cdot [A(t) \cdot X(t) \cdot A(t)] = X(t) \cdot A(t) \quad (8)$$

или

$$[X(t) \cdot A(t)]^3 = X(t) \cdot A(t),$$

или

$$[[X(t) \cdot A(t)]^2 - E] \cdot X(t) \cdot A(t) = [0], \quad (9)$$

где  $E$  – единичная матрица порядка  $n$ .

Из соотношения (9) имеем

$$X(t) \cdot A(t) = [0], \quad (10a)$$

либо

$$X(t) \cdot A(t) = -E, \quad (10б)$$

либо

$$X(t) \cdot A(t) = E_{n \times n}. \quad (10в)$$

Очевидно, при условиях (7a), (7б) и (10a), (10б) соотношения (1) и (2) не выполняются. Следовательно в итоге образования сверток (5) и (8) условия (1) и (2) трансформируются в условия (7в) и (10в), при которых как условия (1) и (2), так и условия симметричности (3) и (4) выполняются автоматически. Таким образом, условия (7в) и (10в) полностью эквивалентны условиям (1)–(4), ввиду чего для определения матрицы  $X(t)$  в дальнейшем будем оперировать простейшими соотношениями (7в) и (10в), о которых шла речь выше [6].

*Вариант 1.*

Рассмотрим произведение соотношений (7в) и (10в), что, очевидно, может иметь место лишь при условии  $m=n$ . При этом

$$[A(t) \cdot X(t)] \cdot [X(t) \cdot A(t)] = E$$

или

$$A(t) \cdot X^2(t) \cdot A(t) = E. \quad (11)$$

Матричное уравнение (11) представим в виде системы

$$\begin{cases} A(t) \cdot Y_1(t) \cdot A(t) = E, & (12) \\ Y_1(t) - X^2(t) = 0 & (13) \end{cases}$$

и переведем ее из области оригиналов в область  $\mathcal{D}$ -изображений [7, 8], допустив при этом, что все матрицы  $X(t)$ ,  $Y_1(t)$  и  $A(t)$  обладают элементами, аналитическими в центре аппроксимации. При этом получим:

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^m \sum_{m=0}^K A(l) \cdot Y_1(m-l) \cdot A(K-m) = E \cdot \delta(K), & (14) \\ Y_1(K) - \sum_{l=0}^K X(l) \cdot X(K-l) = 0, & (15) \end{cases}$$

где

$$\delta(K) = \begin{cases} 1, & \text{если } K = 0, \\ 0, & \text{если } K \geq 1 \end{cases} \quad (16)$$

– тейлоровская единица, а матричные дискреты

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K X(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v},$$

$$K = \overline{0, \infty} \mp X(t) = \mathfrak{N}_1(t, t_v, H, X(K)), \quad (17)$$

$$Y_1(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K Y_1(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v},$$

$$K = \overline{0, \infty} \mp Y_1(t) = \mathfrak{N}_2(t, t_v, H, Y(K)), \quad (18)$$

$$A(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K A(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v},$$

$$K = \overline{0, \infty} \mp A(t) = \mathfrak{N}_3(t, t_v, H, A(K)), \quad (19)$$

где  $H$  – масштабный коэффициент;  $t_v$  – центр аппроксимации;  $\mathfrak{N}_1(\cdot)$ ,  $\mathfrak{N}_2(\cdot)$  и  $\mathfrak{N}_3(\cdot)$  – обратные  $\mathcal{D}$ -преобразования, восстанавливающие оригиналы-матрицы  $X(t)$ ,  $Y_1(t)$  и  $A(t)$  соответственно; символ  $\mp$  – знак перехода из области оригиналов в область  $\mathcal{D}$ -изображений и наоборот [7].

Рассмотрим, к чему приводят соотношения (14)–(16) с учетом (17)–(19) при изменении целочисленного аргумента  $K = \overline{0, \infty}$ . Итак, при  $\underline{K=0}$ :

$$\begin{cases} A(0) \cdot Y_1(0) \cdot A(0) = E, \\ Y_1(0) = X(0) \cdot X(0) = [A^+(0)]^2, \end{cases}$$

откуда

$$A(0) \cdot X^2(0) \cdot A(0) = E; \quad (20)$$

при  $\underline{K=1}$ :

$$\begin{cases} A(0) \cdot Y_1(0) \cdot A(1) + A(0) \cdot Y_1(1) \cdot A(0) + \\ + A(1) \cdot Y_1(0) \cdot A(0) = 0, \\ Y_1(1) = X(0) \cdot X(1) + X(1) \cdot X(0), \end{cases}$$

откуда

$$\begin{aligned} & X(0) \cdot X(1) - X(1) \cdot [-X(0)] = \\ & = -X(0) \cdot \left[ \begin{matrix} A(0) \cdot Y_1(0) \cdot A(1) + \\ + A(1) \cdot Y_1(0) \cdot A(0) \end{matrix} \right] \cdot X(0); \end{aligned} \quad (21)$$

при  $\underline{K=2}$ :

$$\begin{cases} A(0) \cdot Y_1(0) \cdot A(2) + A(0) \cdot Y_1(1) \cdot A(1) + \\ + A(0) \cdot Y_1(2) \cdot A(0) + A(1) \cdot Y_1(1) \cdot A(0) + \\ + A(2) \cdot Y_1(0) \cdot A(0) + A(1) \cdot Y_1(0) \cdot A(1) = 0, \\ Y_1(2) = X(0) \cdot X(2) + X(1) \cdot X(1) + X(2) \cdot X(0), \end{cases}$$

откуда

$$X(0) \cdot X(2) - X(2) \cdot [-X(0)] =$$

$$= -X(0) \cdot \begin{bmatrix} A(0) \cdot Y_1(0) \cdot A(2) + \\ + A(0) \cdot Y_1(1) \cdot A(1) + \\ + A(1) \cdot Y_1(1) \cdot A(0) + \\ + A(2) \cdot Y_1(0) \cdot A(0) + \\ + A(1) \cdot Y_1(0) \cdot A(1) \end{bmatrix} \cdot X(0) - X^2(1); \quad (22)$$

$$\vdots$$

при  $K=K$ :

$$\begin{cases} A(0) \cdot Y_1(K) \cdot A(0) + \\ + \sum_{l=0}^m \sum_{m=0}^K A(l) \cdot Y_1(m-l) \cdot A(K-m), \\ Y_1(K) = X(0) \cdot X(K) + \\ + \sum_{l=1}^{K-1} X(l) \cdot X(K-l) + X(K) \cdot X(0), \end{cases}$$

откуда

$$X(0) \cdot X(K) - X(K) \cdot [-X(0)] =$$

$$-X(0) \cdot \left[ \sum_{l=0}^m \sum_{m=0}^K A(l) \cdot Y_1(m-l) \cdot A(K-m) \right] \cdot X(0) -$$

$$- \sum_{l=1}^{K-1} X(l) \cdot X(K-l). \quad (23)$$

Таким образом, получена рекуррентная цепочка линейных матричных уравнений (21)–(23) типа уравнений Сильвестра [1] с инвариантными, по отношению к номерам неизвестных матричных дискрет  $X(1), X(2), \dots, X(K)$ , левыми частями (везде фигурируют матрицы  $X(0)$  и  $-X(0)$ ). Вычислив начальные матричные дискреты  $X(0)=A^2(0)$  [1] и  $Y_1(0)=X^2(0)$ , далее некоторым численным алгоритмом [9] можно рекуррентно определить матричные дискреты  $X(1), X(2), \dots, X(K)$ , а затем и восстановить аппроксимирующее решение  $X(t)$  в соответствии с (17).

*Вариант 2.*

Теперь рассмотрим произведение соотношений (10в) и (7в), что также может иметь место лишь при условии  $m=n$ . При этом

$$[X(t) \cdot A(t)] \cdot [A(t) \cdot X(t)] = E$$

или

$$X(t) \cdot A^2(t) \cdot X(t) = E. \quad (24)$$

Матричное уравнение (24) представим в виде системы

$$\begin{cases} X(t) \cdot Y_2(t) \cdot X(t) = E, \\ Y_2(t) - A^2(t) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

$$(26)$$

Здесь обратим внимание на то, что системы (12), (13) и (25), (26), несмотря на то, что по виду вполне идентичны, по содержанию отличны друг от друга ввиду отличия матриц  $Y_1(t)$  и  $Y_2(t)$ . С учетом этого обстоятельства и соотношений (16)–(19), систему (25), (26) переведем из области оригиналов

в область Д-изображений, имея ввиду, что (аналогично (18)) вместо матричных дискрет  $Y_1(K)$  будут фигурировать матричные дискреты  $Y_2(K)$ . Следовательно получим:

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^m \sum_{m=0}^K X(l) \cdot Y_2(m-l) \cdot X(K-m) = E \cdot \delta(K), \\ Y_2(K) - \sum_{l=0}^K A(l) \cdot A(K-l) = 0. \end{cases} \quad (27)$$

$$(28)$$

Теперь рассмотрим, к чему приводят соотношения (27), (28), (16) с учетом (17)–(19) при изменении целочисленного аргумента  $K=0, \infty$ . Итак, при  $K=0$ :

$$\begin{cases} X(0) \cdot Y_2(0) \cdot X(0) = E, \\ Y_2(0) = A^2(0), \end{cases}$$

откуда

$$X(0) \cdot A^2(0) \cdot X(0) = E; \quad (29)$$

при  $K=1$ :

$$\begin{cases} X(0) \cdot Y_2(0) \cdot X(1) + X(0) \cdot Y_2(1) \cdot X(0) + \\ + X(1) \cdot Y_2(0) \cdot X(0) = 0, \\ Y_2(1) = A(0) \cdot A(1) + A(1) \cdot A(0), \end{cases}$$

откуда

$$X(0) \cdot Y_2(0) \cdot X(1) - X(1) \cdot [-Y_2(0) \cdot X(0)] =$$

$$= -X(0) \cdot [A(0) \cdot A(1) + A(1) \cdot A(0)] \cdot X(0); \quad (30)$$

при  $K=2$ :

$$\begin{cases} X(0) \cdot Y_2(0) \cdot X(2) + X(0) \cdot Y_2(1) \cdot X(1) + \\ + X(0) \cdot Y_2(2) \cdot X(0) + X(1) \cdot Y_2(1) \cdot X(0) + \\ + X(2) \cdot Y_2(0) \cdot X(0) + X(1) \cdot Y_2(0) \cdot X(1) = 0, \\ Y_2(2) = A(0) \cdot A(2) + A(1) \cdot A(1) + A(2) \cdot A(0), \end{cases}$$

откуда

$$X(0) \cdot Y_2(0) \cdot X(2) - X(2) \cdot [-Y_2(0) \cdot X(0)] =$$

$$= \begin{bmatrix} X(0) \cdot [A(0) \cdot A(1) + A(1) \cdot A(0)] \cdot X(1) - \\ - X(0) \cdot \begin{bmatrix} A(0) \cdot A(2) + \\ + A(1) \cdot A(1) + \\ + A(2) \cdot A(0) \end{bmatrix} \cdot X(0) - \\ - X(1) \cdot [A(0) \cdot A(1) + A(1) \cdot A(0)] \cdot X(0) - \\ - X(1) \cdot Y_2(0) \cdot X(1) \end{bmatrix}; \quad (31)$$

$\vdots$

при  $K=K$ :

$$X(0) \cdot Y_2(0) \cdot X(K) - X(K) \cdot [-Y_2(0) \cdot X(0)] =$$

$$= - \sum_{l=0}^m \sum_{m=1}^K X(l) \cdot Y_2(m-l) \cdot X(K-m), \quad (32)$$

где

$$Y_2(K) = \sum_{l=0}^m A(l) \cdot A(K-l). \quad (33)$$

Таким образом, получается другая рекуррентная цепочка линейных матричных уравнений

(30)–(32) также типа уравнений Сильвестра [1] с инвариантными, по отношению к номерам неизвестных матричных дискрет  $X(1), X(2), \dots, X(K)$ , левыми частями (здесь везде фигурируют матрицы  $X(0) \cdot Y_2(0)$  и  $-Y_2(0) \cdot X(0)$ ). Вычислив начальные дискреты  $X(0) = A^+(0)$  [1] и  $X_2(0) = A^2(0)$ , далее некоторым численным алгоритмом и здесь можно рекуррентно определить матричные дискреты  $X(1), X(2), \dots, X(K)$ , а затем и восстановить аппроксимирующее решение  $X(t)$  в соответствии с (17).

*Тестовая задача [10].*

Пусть дана матрица

$$A(t) = \begin{bmatrix} (t+1) & t & (t+1) \\ t & (t-1) & t \\ (t+1) & t & (t+1) \end{bmatrix}, \quad \det A(t) \equiv 0.$$

Тогда при маклореновском центре аппроксимации ( $t_v=0$ ) имеем:

$$A(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A(K) = [0], \quad \forall K \geq 2; \quad X(0) = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,25 \end{bmatrix}.$$

а) При применении варианта 1 получаем:

$$Y_1(0) = \begin{bmatrix} 0,125 & 0 & 0,125 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,125 & 0 & 0,125 \end{bmatrix},$$

$$Y_1(1) = \begin{bmatrix} -0,25 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & 2 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & -0,25 \end{bmatrix},$$

$$Y_1(2) = \begin{bmatrix} 0,375 & -0,75 & 0,375 \\ -0,75 & 1,5 & -0,375 \\ 0,375 & -0,75 & 0,375 \end{bmatrix}.$$

Далее, в соответствии с (21), имеем матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,25 \end{bmatrix} \cdot X(1) + X(1) \cdot \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,25 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & 2 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & -0,25 \end{bmatrix},$$

обладающее решением

$$X(1) = \begin{bmatrix} -0,25 & 0,5 & -0,25 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \\ -0,25 & 0,5 & -0,25 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (22), имеем матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,25 \end{bmatrix} \cdot X(2) + X(2) \cdot \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

обладающее решением

$$X(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Такая же картина имеет место и для последующих матричных дискрет  $X(K)=[0], \forall K \geq 3$ . Следовательно, обратные дифференциально-маклореновские преобразования [7] приводят к решению

$$X(t) = \begin{bmatrix} (0,25 - 0,25 \cdot t) & 0,5 \cdot t & (0,25 - 0,25 \cdot t) \\ 0,5 \cdot t & (-1 - t) & 0,5 \cdot t \\ (0,25 - 0,25 \cdot t) & 0,5 \cdot t & (0,25 - 0,25 \cdot t) \end{bmatrix} = A^{(1-4)}(t) = A^+(t),$$

точно совпадающему с известным решением, полученным в [10].

б) При применении варианта 2 получаем:

$$Y_2(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad Y_2(1) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$Y_2(2) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

а матрицы

$$X(0) \cdot Y_2(0) = Y_2(0) \cdot X(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда, в соответствии с (30), имеем матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X(1) + X(1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0,5 & -1 \\ 0,5 & 2 & 0,5 \\ -1 & 0,5 & -1 \end{bmatrix},$$

обладающее решением, совпадающим с решением, полученным выше при применении варианта 1.

Далее, в соответствии с (31), имеем матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X(2) + X(2) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

обладающее решением, полученным выше при применении варианта 1. Такая же картина имеет место и для последующих матричных дискрет  $X(K)=0, \forall K \geq 3$ . Следовательно, и при этом обратные дифференциально-маклореновские преобразования [7] приводят к решению, полученному выше при применении варианта 1 и точно совпадающему с известным решением, полученным в [10].

Наконец, сделаем несколько замечаний.

**Замечание 1.** Использование соотношений (7в) и (10в), из-за известных свойств обобщенных обратных матриц, не гарантирует их точное выполнение при найденном  $X(t)$ . Обычно имеет место одно из следующих четырех возможных двойных условий:

- 1)  $A(t) \cdot X(t) = E, A(t) \cdot X(t) \neq E$ ;
- 2)  $A(t) \cdot X(t) \neq E, A(t) \cdot X(t) = E$ ;
- 3)  $A(t) \cdot X(t) = E, A(t) \cdot X(t) \neq E$ ;
- 4)  $A(t) \cdot X(t) \neq E, A(t) \cdot X(t) \neq E$ .

Естественно, эти условия остаются в силе с точностью до начальных матричных дискрет  $A(0)=A(t_0)$  и  $X(0)=X(t_0)$ . Следовательно, нелинейные матричные уравнения (20) при варианте 1 и (29) при варианте 2 в общем случае также не будут выполняться точно.

**Замечание 2.** При переходах от (1), (2) к (11) и от (2), (1) к (24) порождаются квадратичные матричные уравнения по отношению к неизвестной матрице  $X(t)$ , ввиду чего, наряду с единственным решением исходной задачи, могут появляться также «побочные решения» [5]. С целью выделения этого единственного решения из полученного множества решений, естественно, необходимо провести дополнительные вычисления, в частности, убедиться в одновременном выполнении условий (1)–(4).

**Замечание 3.** Для решения систем рекуррентных матричных уравнений типа уравнений Сильвестра (21)–(23) или (30)–(32) может быть использован известный алгоритм Бартельса–Стюарта [9].

**Замечание 4.** В рассмотренном примере матрицы  $X(0)$  и  $-X(0)$  (вариант 1), а также матрицы  $X(0) \cdot Y_2(0)$  и  $-Y_2(0) \cdot X(0)$  (вариант 2) имеют общие нулевые собственные значения. Ввиду этого, матричные уравнения Сильвестра для определения

матричных дискрет  $X(1)$  и  $X(2)$  в обоих вариантах, в зависимости от свободных членов, либо противоречивы (что в данном случае, естественно, не могут иметь место), либо могут иметь бесчисленное множество решений [1. С. 207; 11. С. 240].

В частности, при применении обоих вариантов получаются также следующие «побочные» матричные дискреты:

$$X(0) = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,25 \end{bmatrix},$$

$$X(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \forall K \geq 2.$$

Очевидно, при этом первые приближения – начальные матричные дискреты  $X(0)$  и матричные дискреты  $X(K), \forall K \geq 2$  точного решения и «побочного решения», полностью совпадают. Следовательно, «побочное решение» выглядит так:

$$X(t) = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,5 \cdot t & (0,25 - 0,5 \cdot t) \\ 0,5 \cdot t & (-1 - t) & 0,5 \cdot t \\ (0,25 - 0,5 \cdot t) & 0,5 \cdot t & 0,25 \end{bmatrix},$$

при котором, как нетрудно убедиться, условия (1)–(4) также выполняются точно.

Таким образом, в общем случае с учетом отмеченных обстоятельств вопрос об определении окончательного решения – матричного оригинала  $X(t)=A^{(-4)}(t)=A^+(t)$  (обобщенной обратной матрицы) ввиду ее существования и единственности, требует дополнительного изучения.

**Замечание 5.** Теоретические исследования решения уравнений Сильвестра–Ляпунова при невыполнении условий однозначной разрешимости рассмотрены, в частности, в работах М.Г. Крейна [12].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Физматлит, 2010. – 560 с.
2. Грегори Р., Кришнамурти Е. Безошибочные вычисления. Методы и приложения. – М.: Мир, 1998. – 208 с.
3. Симонян С.О., Аветисян А.Г., Симонян А.С. Метод определения параметрических обобщенно-обратных матриц (I) // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. – 2008. – Т. LXI. – № 3. – С. 452–464.
4. Симонян С.О., Аветисян А.Г., Симонян А.С. Метод определения параметрических обобщенно-обратных матриц (II) // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. – 2008. – Т. LXI. – № 4. – С. 584–591.
5. Аветисян А.Г. Способ определения параметрических обобщенных обратных матриц Мура–Пенроуза решением матричных уравнений // Известия НАН РА и ГИУА. Серия ТН. – 2011. – Т. LXIV. – № 1. – С. 76–82.
6. Симонян С.О., Аветисян А.Г., Симонян А.С. Метод определения параметрических обобщенно-обратных матриц, основанный на дифференциальных преобразованиях // Вестник ГИУА. Сер. «Моделирование, оптимизация, управление». – 2008. – Вып. 11. – Т. 1. – С. 78–85.
7. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. – Киев: Наукова думка, 1990. – 184 с.
8. Симонян С.О., Аветисян А.Г. Прикладная теория дифференциальных преобразований. – Ереван: Чартарагет, 2010. – 361 с.
9. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. – М.: Наука, 1984. – 190 с.
10. Stanimirovic P.S., Tasic M.B., Krtolica P.V., Karampetakis N.P. Generalized Inversion by Interpolation // Filomat. – 2007. – V. 21. – № 1. – P. 67–86.
11. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
12. Демиденко Г.В. Матричные уравнения. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2009. – 203 с.

Поступила 11.04.2013 г.



## МУЛЬТИВЕЙВЛЕТ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Б.М. Шумилов, Э.А. Эшаров, А.Ж. Кудуев, У.С. Ыманов

Томский государственный архитектурно-строительный университет  
E-mail: sbm@tsuab.ru; elzare@mail.ru

Ошский государственный университет, Кыргызская Республика  
E-mail: altun\_12@rambler.ru; ymanv8106@rambler.ru

Предложены два новых типа мультивейвлетов на основе эрмитовых сплайнов 5-й степени. Получен алгоритм вейвлет-разложения. Представлены результаты численных экспериментов.

### Ключевые слова:

Эрмитовы сплайны, вейвлеты, разложение.

### Key words:

Hermitian splines, wavelets, decomposition.

Вейвлетом называется маленькая, т. е. короткая или быстро затухающая волна, множество сжатий и смещений которой порождает некоторое пространство ограниченных функций на всей числовой оси [1–4]. Если таких волн несколько, то возникают мультивейвлеты [5, 6].

В данной статье мы построим базисные мультивейвлеты на основе эрмитовых сплайнов пятой степени. При этом, наряду с классическим, рассмотрим неизвестный ранее тип «ленивых» мультивейвлетов и обоснуем новый подход к вычислению вейвлет-преобразования на основе конечных неявных соотношений разложения с расщеплением по четным и нечетным узлам.

Основой для построения вейвлет-преобразования является набор вложенных пространств  $\dots V_{L-1} \subset V_L \subset V_{L+1} \dots$ . В данном случае пространство  $V_L$  является пространством сплайнов степени 5 гладкости  $C^2$  на отрезке  $[a, b]$  с равномерной сеткой узлов  $\Delta^L: u_i = a + (b-a) i/2^L, i=0, 1, \dots, 2^L, L \geq 0$ , и базисными функциями  $N_{i,k}^L(u) = \varphi_k(u-i), k=0, 1, 2 \forall i$ , где  $v=2^L(u-a)/(b-a)+1$ , с центрами в целых числах, порожденными сжатиями и сдвигами трех функций вида [7]:

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} t^3(6t^2 - 15t + 10) \\ -t^3(3t^2 - 7t + 4) \\ \frac{t^3}{2}(t^2 - 2t + 1) \end{bmatrix}, 0 \leq t \leq 1; \\ \begin{bmatrix} (2-t)^3(6t^2 - 9t + 4) \\ (2-t)^3(3t^2 - 5t + 2) \\ \frac{(2-t)^3}{2}(t^2 - 2t + 1) \end{bmatrix}, 1 \leq t \leq 2 \end{array} \right\}, \\ \varphi_k(t) = 0, k = 0, 1, 2, t \notin [0, 2].$$

На любой сетке  $\Delta^L, L \geq 0$ , интерполяционный эрмитов сплайн 5-й степени может быть представлен как

$$S^L(u) = \sum_{k=0}^2 \sum_{i=0}^{2^L} C_i^{L,k} N_{i,k}^L(u), \quad a \leq u \leq b, \quad (1)$$

где коэффициенты  $C_i^{L,k}, k=0, 1, 2$ , являются значениями и, соответственно, первыми и вторыми производными аппроксимируемой функции в узлах.

Суть вейвлет-преобразования состоит в том, что оно позволяет иерархически разложить заданную функцию на серию все более грубых приближенных представлений и локальных уточняющих подробностей. При этом «более грубый» уровень представления функции в  $V_{L-1}$  получается из «более подробного» уровня представления функции в  $V_L$  посредством прореживания (удаления каждого второго, как правило, отсчета). Здесь необходимо лишь, чтобы каждая базисная функция в  $V_{L-1}$  могла быть выражена в виде линейной комбинации базисных функций в  $V_L$ . В частности, двухмасштабное соотношение для эрмитовых сплайнов 5-й степени можно записать в виде следующей векторной формулы [5]:

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^2 H_k \begin{bmatrix} \varphi_0(2t-k) \\ \varphi_1(2t-k) \\ \varphi_2(2t-k) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где

$$H_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{15}{16} & 0 \\ -\frac{5}{32} & -\frac{7}{32} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{64} & -\frac{1}{16} \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \\ H_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{15}{16} & 0 \\ \frac{5}{32} & -\frac{7}{32} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{64} & -\frac{1}{64} & -\frac{1}{16} \end{bmatrix}.$$

В этом случае базисными функциями для  $V_{L-1}$  будут функции  $N_{i,k}^{L-1}$ , с носителями в два раза большими по ширине и центрами в четных целых числах. Следующим этапом является определение

пространства уточняющих подробностей  $W_{L-1}$ . В отличие от классического определения вейвлетов, мы не требуем, чтобы базисные функции из  $W_{L-1}$  были ортогональны базисным функциям в  $V_{L-1}$ . Вместо этого просто потребуем, чтобы пространство  $W_{L-1}$  являлось дополнением  $V_{L-1}$  до  $V_L$ . Следовательно, любая функция в  $V_L$  может быть записана в виде суммы некоторой функции в  $V_{L-1}$  и некоторой функции в  $W_{L-1}$ . Очень простой способ получения базисных функций в  $W_{L-1}$  заключается в использовании функций  $N_{i,k}^L$  в  $V_L$  с центрами в нечетных целых числах [3].

Для облегчения выполнения дальнейших действий удобно записать базисные сплайн-функции в виде единой матрицы-строки  $\phi^L = [N_{0,0}^L, N_{0,1}^L, N_{0,2}^L, N_{1,0}^L, N_{1,1}^L, \dots, N_{2^L,2}^L]$  и упорядочить коэффициенты сплайна в виде вектора  $C^L = [C_0^{L,0}, C_0^{L,1}, C_0^{L,2}, C_1^{L,0}, C_1^{L,1}, \dots, C_{2^L}^{L,2}]^T$ . Тогда уравнение (1) переписывается как  $S^L(u) = \phi^L(u)C^L$ . Аналогично обозначим базисные вейвлет-функции как  $M_{i,k}^{L-1} = \phi_k(v-2i+1)$ ,  $k=0,1,2$ ,  $i=1,2, \dots, 2^{L-1}$ , и запишем их в виде матрицы-строки  $\psi^L = [M_{1,0}^L, M_{1,1}^L, M_{1,2}^L, \dots, M_{2^L,2}^L]$ . Соответствующие коэффициенты вейвлет-разложения на уровне разрешения  $L$  будем собирать в вектор  $D^L = [D_1^{L,0}, D_1^{L,1}, D_1^{L,2}, \dots, D_{2^L}^{L,2}]^T$ .

Тогда для уровня разрешения  $L-1$  можно записать функции  $\phi^{L-1}$  и  $\psi^{L-1}$  в виде линейных комбинаций функций  $\phi^L, \phi^{L-1} = \phi^L P^L$  и  $\psi^{L-1} = \phi^L Q^L$ , где блоки матрицы  $P^L$  составлены из коэффициентов соотношений (2), так как каждую широкую базисную функцию внутри отрезка аппроксимации можно построить из трех, а по краям интервала из двух, троек узких базисных функций, тогда как все элементы столбцов матрицы  $Q^L$  – нули, за исключением единственной единицы, так как каждый ленивый вейвлет – это одна узкая базисная функция.

Следовательно, справедлива цепочка равенств  $\phi^L C^L = \phi^{L-1} C^{L-1} + \psi^{L-1} D^{L-1} = \phi^L P^L C^{L-1} + \phi^L Q^L D^{L-1}$ .

Таким образом, процесс получения  $C^L$  из  $C^{L-1}$  и  $D^{L-1}$  может быть записан как  $C^L = P^L C^{L-1} + Q^L D^{L-1}$  или, используя обозначения для блочных матриц,

$$C^L = [P^L | Q^L] \begin{bmatrix} C^{L-1} \\ D^{L-1} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Обратный процесс разбиения коэффициентов  $C^L$  на более грубую версию  $C^{L-1}$  и уточняющие коэффициенты  $D^{L-1}$  состоит в решении системы линейных уравнений (3). Для данного случая блоки матрицы  $[A^L | B^L]$ , обратной по отношению к  $[P^L | Q^L]$ , являются разреженными. Поэтому процесс создания версии с низким разрешением,  $C^{L-1}$ , характеризуемой меньшим количеством коэффициентов, можно выразить в явном виде с помощью матричного равенства  $C^{L-1} = A^L C^L$ . При этом потерянные детали собираются в другой вектор  $D^{L-1}$ , определяемый выражением  $D^{L-1} = B^L C^L$ .

При выполнении анализа заданной функции в соответствии с полученным выше результатом грубое приближение получается из более точного путем исключения узлов, соответствующих нечетным числам. Следовательно, самое грубое прибли-

жение зависит только от нескольких начальных значений, и оно может оказаться очень плохим приближением исходной функции. Чтобы улучшить усредняющие свойства представленного метода анализа данных, мы предлагаем использовать в качестве вейвлетов для  $W_{L-1}$  функции  $N_{i,k}^L$  в  $V_L$  с центрами в четных целых числах. Поскольку  $W_{L-1}$  должно являться дополнением  $V_{L-1}$  в  $V_L$ , размерности этих пространств должны удовлетворять соотношению  $\text{Dim}(V_L) = \text{Dim}(V_{L-1}) + \text{Dim}(W_{L-1})$ . Для выполнения этого условия мы предлагаем из исходных координат вычитать уравнение прямой, соединяющей первую и последнюю вершины при дополнительном условии, что вторая производная в последней точке обращается в нуль.

Будем обозначать базисные сплайн-функции и коэффициенты эрмитового сплайна 5-й степени с отсутствующими элементами по концам отрезка аппроксимации как  $\phi_0^L$  и  $C_0^L$ . Аналогично обозначим базисные вейвлет-функции как  $M_{i,k}^{L-1} = \phi_k(v-2i)$ ,  $k=0,1,2$ ,  $i=0,1, \dots, 2^{L-1}$  и запишем их в виде матрицы-строки

$$\psi_0^L = \begin{bmatrix} M_{0,1}^L, M_{0,2}^L, M_{1,0}^L, M_{1,1}^L, M_{1,2}^L, \dots, \\ \dots, M_{2^{L-1},0}^L, M_{2^{L-1},1}^L, M_{2^{L-1},2}^L, M_{2^L,1}^L \end{bmatrix}.$$

Соответствующие вейвлет-коэффициенты на уровне разрешения  $L$  будем собирать в вектор

$$D_0^L = \begin{bmatrix} D_0^{L,1}, D_0^{L,2}, D_1^{L,0}, D_1^{L,1}, D_1^{L,2}, \dots, \\ \dots, D_{2^{L-1}}^{L,0}, D_{2^{L-1}}^{L,1}, D_{2^{L-1}}^{L,2}, D_{2^L}^{L,1} \end{bmatrix}^T.$$

В результате вейвлет-преобразование может быть записано как

$$C_0^L = [P_0^L | Q_0^L] \begin{bmatrix} C_0^{L-1} \\ D_0^{L-1} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Нетрудно проверить, что матрицы, обратные по отношению к  $[P_0^L | Q_0^L]$ , теряют разреженную структуру. Поэтому систему линейных уравнений (4) приходится решать численно. При этом матрицу  $[P_0^L | Q_0^L]$  удобно сделать ленточной, изменив порядок неизвестных так, чтобы столбцы матриц  $P_0^L$  и  $Q_0^L$  перемежались [3]. Тем не менее, хотя разрешимость полученной системы и гарантирована линейной независимостью базисных функций, вопрос ее хорошей обусловленности остается открытым. В [6] для частного случая кубических эрмитовых сплайн-вейвлетов с помощью метода неопределенных коэффициентов были впервые получены конечные неявные соотношения разложения. В матричном виде полученные результаты можно представить следующим равенством  $[P_0^L | Q_0^L] R^L = G^L$ , где матрица  $R^L$  представляет собой простую ленточную матрицу, а матрица  $G^L$  – трехдиагональную матрицу со строгим диагональным преобладанием. После этого решение системы уравнений типа (4) можно записать в матричном виде как [8]:

$$\begin{bmatrix} C_0^{L-1} \\ D_0^{L-1} \end{bmatrix} = [P_0^L | Q_0^L]^{-1} C_0^L = R^L (G^L)^{-1} C_0^L, \quad (5)$$



где  $\varphi_k(2x-i)$  – эрмитовы базисные сплайны на густой сетке;  $\varphi_l(x-j)$  – эрмитовы базисные сплайны на прореженной сетке,  $\varphi_l(2x-1-2j)$  – базисные вейвлеты на прореженной сетке.

Тогда для вычисления неопределенных коэффициентов соотношения (7) при  $k=0$  с использованием табл. 1 и легко проверяемых равенств

$\frac{d^k}{dt^k} \varphi_l(2t) = 2^l \cdot \delta_k^l, t = \frac{1}{2}, k, l = 0, 1, 2,$  имеем, соответственно, в точках

$$x = \frac{1}{2}: a_0^0 = c_0^{00} \frac{1}{2} + c_0^{01} \left(-\frac{5}{32}\right) + c_0^{02} \frac{1}{64},$$

$$0 = c_0^{00} \frac{15}{8} + c_0^{01} \left(-\frac{7}{16}\right) + c_0^{02} \frac{1}{32},$$

$$0 = c_0^{01} \frac{3}{2} + c_0^{02} \left(-\frac{1}{4}\right),$$

$$x = 1: a_1^0 = b_0^{00} + c_0^{00},$$

$$0 = b_0^{01} \cdot 2 + c_0^{01},$$

$$0 = b_0^{02} \cdot 4 + c_0^{02},$$

$$x = \frac{3}{2}: a_2^0 = c_0^{00} \frac{1}{2} + c_0^{01} \frac{5}{32} + c_0^{02} \frac{1}{64} + c_1^{00} \frac{1}{2} + c_1^{01} \left(-\frac{5}{32}\right) + c_1^{02} \frac{1}{64},$$

$$0 = c_0^{00} \left(-\frac{15}{8}\right) + c_0^{01} \left(-\frac{7}{16}\right) + c_0^{02} \left(-\frac{1}{32}\right) + c_1^{00} \frac{15}{8} + c_1^{01} \left(-\frac{7}{16}\right) + c_1^{02} \frac{1}{32},$$

$$0 = c_0^{01} \left(-\frac{3}{2}\right) + c_0^{02} \left(-\frac{1}{4}\right) + c_1^{01} \frac{3}{2} + c_1^{02} \left(-\frac{1}{4}\right),$$

⋮

$$x = m-1: a_{2m-3}^0 = b_{m-2}^{00} + c_{m-2}^{00},$$

$$0 = b_{m-2}^{01} \cdot 2 + c_{m-2}^{01},$$

$$0 = b_{m-2}^{02} \cdot 4 + c_{m-2}^{02},$$

$$x = \frac{2m-1}{2}: a_{2m-2}^0 = c_{m-2}^{00} \frac{1}{2} + c_{m-2}^{01} \frac{5}{32} + c_{m-2}^{02} \frac{1}{64},$$

$$0 = c_{m-2}^{00} \left(-\frac{15}{8}\right) + c_{m-2}^{01} \left(-\frac{7}{16}\right) + c_{m-2}^{02} \left(-\frac{1}{32}\right),$$

$$0 = c_{m-2}^{01} \left(-\frac{3}{2}\right) + c_{m-2}^{02} \left(-\frac{1}{4}\right).$$

Одно из решений полученной системы уравнений имеет вид:  $a_{2j+1}^0 = b_j^0 = 1, j=0, \dots, m-2,$  при условии, что все остальные коэффициенты равны нулю. Это означает, что в нечетных узлах выполняются тождества для базисных сплайн-вейвлетов  $\varphi_0(2x-1-2j)$ .

Попытаемся найти систему уравнений, связывающую коэффициенты разложения для четных узлов (случай, когда  $a_1^0 = a_3^0 = \dots = a_{2m-3}^0 = 0$ ). При  $m=2, 3$  нетрудно убедиться, что система имеет только тривиальное решение. При  $m=4$  решение имеет

вид:  $a_1^0 = a_3^0 = a_5^0 = b_1^{01} = c_1^{01} = 0, b_0^{00} = b_0^{02} = -4, b_1^{00} = -20, b_1^{01} = -15, b_1^{02} = 15, b_2^{00} = b_2^{02} = -45, b_2^{01} = 90, c_0^{00} = c_0^{02} = 4, c_0^{01} = 20, c_0^{01} = 30, c_0^{02} = -30, c_2^{00} = c_2^{02} = 180, c_2^{01} = -360, a_0^0 = a_6^0 = 1/8, a_2^0 = a_4^0 = 111/8.$

Таким образом, из соотношения (7) выделяется неявное четырехчленное разложение вида

$$\frac{\varphi_0(2x) + 111\varphi_0(2x-2) + 111\varphi_0(2x-4) + \varphi_0(2x-6)}{8} =$$

$$= 4 \left( \begin{aligned} &\varphi_0(x) + 5\varphi_0(x-1) + \varphi_0(x-2) - \\ &-\varphi_0(2x-1) - 5\varphi_0(2x-3) - \varphi_0(2x-5) \end{aligned} \right) +$$

$$+ 15(2\varphi_1(x) - 2\varphi_1(x-2) - \varphi_1(2x-1) + \varphi_1(2x-5)) +$$

$$+ 180(\varphi_2(x) - 2\varphi_2(x-1) + \varphi_2(x-2)) -$$

$$- 45(\varphi_2(2x-1) - 2\varphi_2(2x-3) + \varphi_2(2x-5)).$$

**Таблица.** Значения базисных функций и их производных в точках отрезка  $[0, 2]$

x	$\varphi_0(x)$	$\varphi_0'(x)$	$\varphi_0''(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_1'(x)$	$\varphi_1''(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_2'(x)$	$\varphi_2''(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/2	1/2	15/8	0	-5/32	-7/16	3/2	1/64	1/32	-1/4
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
3/2	1/2	-15/8	0	5/32	-7/16	-3/2	1/64	-1/32	-1/4
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Совершенно аналогично с помощью табл. 1 нетрудно убедиться, что для эрмитовых базисных сплайнов первых производных на густой сетке справедливо неявное трехчленное разложение вида

$$\frac{\varphi_1(2x) + 110\varphi_2(2x-2) + \varphi_2(2x-4)}{16} =$$

$$\varphi_0(2x-1) - \varphi_0(2x-3) - \varphi_0(x) + \varphi_0(x-1) +$$

$$+ 4(\varphi_1(2x-1) + \varphi_1(2x-3) - 2\varphi_1(x) - 2\varphi_1(x-1)) +$$

$$+ 12(\varphi_2(2x-1) - \varphi_2(2x-3) - 4\varphi_2(x) + 4\varphi_2(x-1)),$$

а для базисных сплайнов вторых производных имеет место неявное четырехчленное разложение вида

$$\frac{\varphi_2(2x) + 111\varphi_2(2x-2) + 111\varphi_2(2x-4) + \varphi_2(2x-6)}{8} =$$

$$2 \left( \begin{aligned} &\varphi_0(x) + 12\varphi_0(x-1) + \varphi_0(x-2) - \\ &-\varphi_0(2x-1) - 12\varphi_0(2x-3) - \varphi_0(2x-5) \end{aligned} \right) +$$

$$+ 7(2\varphi_1(x) - 2\varphi_1(x-2) - \varphi_1(2x-1) + \varphi_1(2x-5)) +$$

$$+ 38\varphi_2(x) - 524\varphi_2(x-1) + 38\varphi_2(x-2) -$$

$$- 19\varphi_2(2x-1) + 262\varphi_2(2x-3) - 19\varphi_2(2x-5).$$

Соответствующие разложения по краям отрезка аппроксимации содержатся в матричном равенстве (6). Введем последовательности матриц  $G^L$  и  $R^L$ , блоки которых составлены из коэффициентов левых и правых частей полученных разложений, соответственно. В результате находим, что базисные функции пространства эрмитовых сплайнов 5-й степени на густой сетке, базисные функции на прореженной сетке и вейвлеты удовлетворяют равенству  $\varphi_0^L G^L = [\varphi_0^{L-1} | \psi_0^{L-1}] R^L, L \geq 2.$

Отсюда, используя свойство дополнения пространства вейвлетов, находим

$$[\varphi_0^{L-1} | \psi_0^{L-1}] \begin{bmatrix} C_0^{L-1} \\ D_0^{L-1} \end{bmatrix} = \varphi_0^L C_0^L = \\ = [\varphi_0^{L-1} | \psi_0^{L-1}] R^L (G^L)^{-1} C_0^L.$$

После этого решение системы уравнений (4) можно записать в виде (5), откуда после расщепления по четным и нечетным узлам вытекает утверждение Теоремы 1.

**Пример.** Рассмотрим в качестве тестовой функции функцию Хартена:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(3\pi x), & x \leq \frac{1}{3}, \\ |\sin(4\pi x)|, & \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}, \\ -\frac{1}{2} \sin(3\pi x), & x > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Начиная с верхнего уровня разрешения  $L=5$ , то есть при числе разбиений  $n=2^L=32$ , на интервале  $0 \leq x \leq 1$  с длиной шага  $\Delta x=1/n$  находим последовательно, при  $L=5$ :  $D_0^4 = [-5,856, -88,1, 3,295, 5,904, -25,81, 14,12, 2,663, -173,8, 8,263, -1,359, -83,65, 11,54, -4,808, -144,9, 2,226, -19,38, 60,93, 66,25, 0,1275, -855,7, 6,406, -8,153, 0,7788, 23,93, -12,57, -352, 6,406, 8,153, 0,7788, 66,25, -0,1276, -855,7, 2,029, 10,15, 78,23, -8,348, -5,076, 95,12, -11,52, -1,357, 132,6, -10,86, 2,664, 124,9, -6,528, 5,788, 75,11, 6,961]^T$ ;

$L=4$ :  $D_0^3 = [-407,3, -2522, -121,3, 15,31, 2087, 44,06, -29,11, -313,5, 17,2, -9,35, 2376, 127,6, -0,003728, -3,504, 17,1, 9,76, 2375, 74,52, -8,945, -885,9, 93,62, 10,86, -1204, 28,64]^T$ ;  $L=3$ :  $D_0^2 = [-13980, -80860, -1099, 986, 23240, 459,8, -10,01, -5093, -1401, 235,3, 19260, -802,2]^T$ ;  $L=2$ :  $D_0^1 = [-11760, 225000, 27040, 1022, -262700, 15090]^T$ ;  $L=1$ : на последнем шаге остается три коэффициента разложения производных на концах интервала  $C_0^0 = [-3,871 \cdot 10^6, -4,625 \cdot 10^7, 5,768 \cdot 10^5]^T$  и три вейвлет-коэффициента  $D_0^0 = [2,018 \cdot 10^6, 1,214 \cdot 10^7, -3,156 \cdot 10^5]^T$ .

При условии обнуления незначимых вейвлет-коэффициентов  $D_0^2(6), D_0^3(3), \dots, D_0^4(48)$  итоговый коэффициент сжатия равняется  $3 \cdot 33 / (96 - 32) = 99 / 64 = 1,55$ .

Несложно предложить параллельную реализацию представленного в статье алгоритма вейвлет-преобразования эрмитовых сплайнов 5-й степени, в которой три прямых хода прогонки выполняются независимо, а три обратных хода выполняются с максимальным запаздыванием на два такта. Это позволит преодолеть некоторое отставание в вычислительной эффективности вейвлет-алгоритмов в сравнении с универсальными алгоритмами сжатия [9].

*Работа выполнена при поддержке РФФИ 13-01-90900 мол\_ин\_нр, 13-07-90900 мол\_ин\_нр.*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / пер. с англ. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 332 с.
2. Чуи Ч. Введение в вейвлеты / пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
3. Столиц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике / пер. с англ. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 272 с.
4. Исаев Ю.Н. Конструирование биортогональных вейвлет-базисов для оптимального представления сигналов // Известия Томского политехнического университета. – 2004. – Т. 307. – № 1. – С. 37–42.
5. Strela V. Multiwavelets: Theory and Applications. – Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1996. – 99 p.
6. Шумилов Б.М., Эшаров Э.А. Построение эрмитовых сплайн-вейвлетов // Вестник Томского государственного университе-
7. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 248 с.
8. Шумилов Б.М. Алгоритм с расщеплением вейвлет-преобразования эрмитовых кубических сплайнов // Вестник Томского государственного университета. Сер. Математика. Механика. – 2010. – № 4 (12). – С. 45–55.
9. Замятин А.В., То Динь Чыонг. Повышение эффективности трехэтапного алгоритма сжатия многозональных аэрокосмических изображений // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 313. – № 5. – С. 24–28.

*Поступила 09.01.2013 г.*

УДК 514.757.2

## ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ АФФИННОГО $Q_m$ И ПРОЕКТИВНОГО $P_n$ ПРОСТРАНСТВ ( $m < n$ )

Е.Т. Ивлев, М.А. Аль-Хассани, А.А. Лучинин

Томский политехнический университет  
E-mail: eam@tpu.ru

*Доказывается, что с отображением аффинного и проективного пространств инвариантным образом определяются отображения аффинного пространства в многообразия вырожденных и невырожденных нуль-пар проективного пространства.*

**Ключевые слова:**

*Дифференцируемое отображение, многомерные аффинные и проективные пространства.*

**Key words:**

*Differentiable mapping, multidimensional affine and projective spaces.*

**Введение**

Данная статья является продолжением статьи [1] и посвящена изучению дифференцируемого отображения аффинного  $Q_m$  и проективного  $P_n$  пространств при  $m < n$ .

В данной статье, как и в [1], решается задача об инвариантном определении отображений аффинного пространства  $Q_m$  в многообразия  $M^{2n-1}$  вырожденных и  $M^{2n}$  невырожденных нуль-пар проективного пространства  $P_n$ .

Статья состоит из трех разделов. В первом разделе приводится аналитический аппарат, связанный с определением отображения  $V_{m,n}: Q_m \rightarrow P_n (m < n)$ . Во втором разделе доказываются теоремы об инвариантном определении дифференцируемых отображений  $f_m^{2n-1}: Q_m \rightarrow M^{2n-1}$  и  $f_m^{2n}: Q_m \rightarrow M^{2n} (m < n)$  с заданной в текущей точке  $B \in Q_m$  оснащающей  $(n-m)$ -плоскости  $L_{n-m} \subset P_n$  к  $m$ -поверхности  $S_m$  в соответствующей при отображении  $V_{m,n} (m < n)$  точке  $A_0 \in P_n$ . Третий раздел посвящен инвариантному определению оснащающей  $(n-m)$ -плоскости  $L_{n-m}$ .

Все рассмотрения в данной статье носят локальный характер, а встречающиеся функции предполагаются функциями класса  $C^\infty$ . Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1–9].

**1. Аналитический аппарат**

**1.1.** Пусть задано  $m$ -мерное аффинное пространство  $Q_m$ , отнесенное к подвижному аффинному реперу  $Q = \{\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a\}$  с деривационными формулами и структурными уравнениями

$$d\bar{B} = \theta^a \bar{\varepsilon}_a, \quad d\bar{\varepsilon}_a = \theta_a^b \bar{\varepsilon}_b,$$

$$D\theta^a = \theta^b \wedge \theta_b^a, \quad D\theta_a^b = \theta_a^c \wedge \theta_c^b, \quad (a, b, c = \overline{1, m}). \quad (1)$$

**1.2.** Рассмотрим  $n$ -мерное эквипроективное пространство  $P_n$ , отнесенное к подвижному эквипроективному реперу  $P = \{A_i\}$  с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$dA_i = \omega_i^j \bar{A}_j, \quad D\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \quad (I, J, K, L = \overline{0, n}). \quad (2)$$

Здесь предполагается, что линейно независимые аналитические точки  $A_K \in P_n$  удовлетворяют условию:

$$[\bar{A}_0, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n] = 1, \quad (3)$$

т. е. внешнее произведение аналитических точек  $A_K$  равно 1. Из (2) и (3) получаем

$$\omega_K^K \equiv \omega_0^0 + \omega_1^1 + \dots + \omega_n^n = 0.$$

**1.3.** Будем рассматривать дифференцируемое отображение

$$V_{m,n}: Q_m \rightarrow P_n \quad (4)$$

аффинного  $Q_m$  и проективного  $P_n$  пространств. Реперы  $Q$  и  $P$  выбираются так, что дифференциальные уравнения отображения (4) принимают вид:

$$\omega_0^i = A_a^i \theta^a, \quad (i, j, k = \overline{1, n}). \quad (5)$$

Здесь величины  $A_a^i$  с учетом (1) и (2) являются компонентами внутреннего фундаментального геометрического объекта первого порядка

$$\Gamma_1 = \{A_a^i\}. \quad (6)$$

отображения (5) в смысле Г.Ф. Лаптева [2, 3] и удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dA_a^i + A_a^j \Omega_j^i - A_b^i \theta_a^b = A_{ab}^i \theta^b, \\ \Omega_j^i = \omega_j^i - \delta_j^i \omega_0^0, \quad A_{[ab]}^i = 0. \quad (7)$$

Заметим, что геометрически отображение (4) направление  $u = \{B, \bar{\varepsilon}_a\} u^a \in Q_m$  в точке  $B \in Q_m$  переводит в направление

$$x = (\bar{A}_0, \bar{A}_i) x^i = V_{m,n} u \quad (8)$$

пространства  $P_n$  в соответствующей точке  $A_0 \in P_n$ .

В данной статье в случае  $m < n$ , как и в статье [1] в случае  $m = n$ , решается задача о нахождении полей геометрических образов, определяемых геометрическим объектом (6) и внутренним фундаментальным геометрическим объектом второго порядка

$$\Gamma_2 = \{A_a^i, A_{ab}^i\}, \quad (9)$$

компоненты которого удовлетворяют дифференциальными уравнениям (7) и уравнениям

$$dA_{ab}^i + A_{ab}^j \Omega_j^i - A_{cb}^i \theta_a^c - A_{ac}^i \theta_b^c + \\ + A_b^j (A_a^i \delta_j^l + A_a^l \delta_j^i) \omega_l^0 = A_{abc}^i \theta^c,$$

$$A_{[abc]}^i = 0, \quad (a, b, c = \overline{1, m}; \quad i, j, l = \overline{1, n}). \quad (10)$$



## 2. Случай отображения $V_{m,n} (m < n)$

В этом разделе будет использована следующая система индексов

$$\begin{aligned} a, b, c, q = \overline{1, m}; \quad i, j, k = \overline{1, n}; \quad I, J, K = \overline{0, n}; \\ \alpha, \beta, \gamma = \overline{1, m}; \quad \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma} = \overline{m+1, n}. \end{aligned} \quad (11)$$

**2.1.** Заметим, что в рассматриваемом случае ( $m < n$ ) отображение (5) является инъективным отображением. При этом точка  $A_0 \in P_n$  как образ точки  $B \in Q_m$  описывает  $m$ -поверхность  $S_m$  в  $P_n$ , когда точка  $B$  пробегает пространство  $Q_m$ . Обозначим  $L_m$   $m$ -плоскость, касательную к  $S_m$  в точке  $A_0$ , и канонизируем проективный репер  $P$  пространства  $P_n$  так, чтобы

$$L_m = (A_0, A_1, \dots, A_m). \quad (12)$$

Здесь и в дальнейшем символом  $L_s = (\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_s)$  обозначается  $s$ -плоскость  $L_s \subset P_n$ , проходящая через линейно независимые аналитические точки  $\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_s$ .

По аналогии с [4] с учетом (2), (5), (7)–(12) получаем

$$\begin{aligned} A_0^{\hat{\alpha}} = 0 \Rightarrow \omega_0^{\hat{\alpha}} = 0, \quad \omega_0^{\alpha} = A_{\alpha}^{\alpha} \theta^{\alpha}, \\ dA_{\alpha}^{\alpha} + A_{\alpha}^{\beta} \Omega_{\beta}^{\alpha} - A_{\beta}^{\alpha} \theta_{\alpha}^{\beta} = A_{\alpha\beta}^{\alpha} \theta^{\beta}, \\ A_{\alpha}^{\alpha} \omega_{\alpha}^{\hat{\alpha}} = A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} \theta^{\beta}, \quad dA_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} + A_{\alpha\beta}^{\gamma} \Omega_{\gamma}^{\hat{\alpha}} - A_{\gamma\beta}^{\hat{\alpha}} \theta_{\alpha}^{\gamma} - A_{\alpha\gamma}^{\hat{\alpha}} \theta_{\beta}^{\gamma} + \\ + (A_{\alpha}^{\alpha} A_{\beta}^{\gamma} + A_{\alpha}^{\gamma} A_{\beta}^{\alpha}) \omega_{\gamma}^0 + A_{\alpha\beta}^{\alpha} A_{\gamma}^{\hat{\alpha}} \omega_{\gamma}^{\alpha} = A_{\alpha\beta\gamma}^{\hat{\alpha}} \theta^{\gamma}, \\ A_{[\alpha\beta]}^{\hat{\alpha}} = 0, \quad A_{\alpha[bc]}^{\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда следует, что с инъективным отображением (5) ассоциируется отображение

$$V_{m,m} : Q_m \rightarrow L_m. \quad (14)$$

Будем предполагать, что это отображение является невырожденным (биективным), т. е.  $\det[A_{\alpha}^{\alpha}] \neq 0$ . Тогда можно ввести в рассмотрение величины  $B_{\alpha}^{\alpha}$  по формулам

$$B_{\alpha}^{\alpha} A_{\alpha}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}, \quad B_{\alpha}^{\alpha} A_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha}. \quad (15)$$

Из дифференциальных уравнений (13) с учетом (15) получаем

$$\begin{aligned} dB_{\alpha}^{\alpha} + B_{\alpha}^{\beta} \theta_{\beta}^{\alpha} - B_{\alpha\beta}^{\alpha} \Omega_{\alpha}^{\beta} = B_{\alpha\beta}^{\alpha} \theta^{\beta}, \quad \theta^{\alpha} = B_{\alpha}^{\alpha} \omega_0^{\alpha}, \\ B_{\alpha\beta}^{\beta} = -A_{\alpha\beta}^{\beta} B_{\alpha}^{\alpha} B_{\beta}^{\beta}, \\ \omega_{\alpha}^{\hat{\alpha}} = A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} \omega_0^{\beta} = \tilde{A}_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} \theta^{\beta} \Rightarrow A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} = \\ = A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} B_{\alpha}^{\alpha} B_{\beta}^{\beta} \Rightarrow A_{[\alpha\beta]}^{\hat{\alpha}} = 0, \\ A_{[\alpha\beta\gamma]}^{\hat{\alpha}} = 0, \quad A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} = \tilde{A}_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} A_{\alpha}^{\alpha} A_{\beta}^{\beta}, \\ \tilde{A}_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} = A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} B_{\beta}^{\beta}, \quad d\tilde{A}_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} + \tilde{A}_{\alpha\beta}^{\hat{\beta}} \Omega_{\beta}^{\hat{\alpha}} - \\ - \tilde{A}_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} \omega_{\alpha}^{\gamma} - \tilde{A}_{\alpha\gamma}^{\hat{\alpha}} \omega_{\beta}^{\gamma} = \tilde{A}_{\alpha\beta\gamma}^{\hat{\alpha}} \omega_0^{\gamma}, \\ \tilde{A}_{\alpha\beta\gamma}^{\hat{\alpha}} = A_{\alpha\beta\gamma}^{\hat{\alpha}} B_{\beta}^{\beta} + A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} B_{\beta\gamma}^{\beta}, \quad \tilde{A}_{[\alpha\beta\gamma]}^{\hat{\alpha}} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

**2.2.** Обозначим  $L_{n-m} (n > m)$  оснащающую (нормальную)  $(n-m)$ -плоскость к  $m$ -поверхности  $S_m$  в точке  $A_0 \in S_m$ , соответствующую точке  $B \in Q_m$  при отображении (14):

$$L_{n-m} \cap L_m = A_0, L_{n-m} \cup L_m = P_n.$$

Проективный репер  $P$  пространства  $P_n$  канонизируем так, чтобы

$$L_{n-m} = (\bar{A}_0, \bar{A}_{m+1}, \dots, \bar{A}_n). \quad (17)$$

Из дифференциальных уравнений (2) с учетом (15)–(17) получаются дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha}^{\hat{\alpha}} = A_{\alpha\alpha}^{\hat{\alpha}} \theta^{\alpha} \Rightarrow \omega_{\alpha}^{\hat{\alpha}} = \tilde{A}_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} \omega_0^{\beta} \Rightarrow \tilde{A}_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} = A_{\alpha\alpha}^{\hat{\alpha}} B_{\beta}^{\alpha}, \\ d\tilde{A}_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} + \tilde{A}_{\alpha\beta}^{\hat{\gamma}} \omega_{\gamma}^{\hat{\alpha}} - \tilde{A}_{\alpha\gamma}^{\hat{\alpha}} \omega_{\beta}^{\hat{\gamma}} - A_{\beta\beta}^{\alpha} \Omega_{\alpha}^{\hat{\beta}} - \delta_{\beta\alpha}^{\alpha} \omega_{\alpha}^0 = \tilde{A}_{\alpha\beta\gamma}^{\hat{\alpha}} \omega_0^{\gamma}, \\ \tilde{A}_{\alpha[\beta\gamma]}^{\hat{\alpha}} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

В соответствии с [6] и с учетом (17) заключаем, что аффинному пространству  $Q_m$  в соответствующем проективном пространстве отвечает многообразие  $E(0; n-m; m)$ , элемент которого состоит из точки  $A_0$ ,  $(n-m)$ -плоскости  $L_{n-m}$  и  $m$ -плоскости  $L_m$ . Поэтому с учетом (18), [5] и [6] заключаем, что каждой точке  $B \in Q_m$  в проективном пространстве  $P_n$  отвечает  $(n-m-1)$ -плоскость  $\tilde{L}_{n-m-1} \subset L_{n-m}$ , которая в терминах проективного репера  $P$  определяется уравнениями

$$x^{\beta} = 0, \quad mx^0 + \tilde{A}_{\alpha\alpha}^{\hat{\alpha}} x^{\alpha} = 0. \quad (19)$$

В соответствии с определением 1 в [6] эта  $(n-m-1)$ -плоскость называется полярной  $(n-m-1)$ -плоскостью. Из (18) следует, что система величин  $\tilde{A}_{\alpha\alpha}^{\hat{\alpha}}$  удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$d\tilde{A}_{\alpha\alpha}^{\hat{\alpha}} - m\omega_{\alpha}^0 = A_{\alpha\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} \omega_0^{\beta} \quad (\text{по } \alpha \text{ суммировать}). \quad (20)$$

Проведем такую канонизацию проективного репера  $P$  пространства  $P_n$ , при которой

$$\tilde{A}_{\alpha\alpha}^{\hat{\alpha}} = 0. \quad (21)$$

Из дифференциальных уравнений (20) с учетом (21) получаются следующие дифференциальные уравнения

$$\omega_{\alpha}^0 = \tilde{A}_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} \omega_0^{\beta}, \quad \tilde{A}_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} = -\frac{1}{m} \tilde{A}_{\alpha\alpha\beta}^{\hat{\alpha}}. \quad (22)$$

В соответствии с [7] из дифференциальных уравнений (22) заключаем, что канонизация репера  $P$  типа (21) существует в точке  $B \in Q_m$ . Геометрически эта канонизация с учетом (19) означает, что

$$\tilde{L}_{n-m-1} = (\bar{A}_{m+1}, \bar{A}_{m+2}, \dots, \bar{A}_n). \quad (23)$$

**2.3.1.** Заметим с учетом (14) и (17), что геометрически невырожденное отображение  $V_{m,m} : Q_m \rightarrow L_m$  каждое направление  $u = \{B, \bar{e}_a\} u^a \in Q_m$  переводит в направление  $x \in P_n$ :

$$x = (\bar{A}_0, \bar{A}_a) x^{\alpha} = \{V_{m,m} u \cup L_{n-m}\} \cap L_m.$$

Поэтому в соответствии с [1] и с учетом (15) можно ввести в рассмотрение величины

$$G_{\alpha\beta}^{\gamma} = A_{\alpha\beta}^{\gamma} B_{\alpha}^{\alpha} B_{\beta}^{\beta}, \quad G_{\alpha} = G_{\alpha\beta}^{\beta}, \quad (24)$$

которые в силу (13) и (18) удовлетворяют дифференциальными уравнениями [1]:

$$\begin{aligned}
 & dG_{\alpha\beta}^\gamma + G_{\alpha\beta}^\sigma \Omega_\sigma^\gamma - G_{\alpha\beta}^\gamma \Omega_\alpha^\sigma - G_{\alpha\sigma}^k \Omega_\beta^\sigma + \\
 & + (\delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\gamma + \delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\sigma) \omega_\sigma^0 = G_{\alpha\beta}^\gamma \theta^c, \\
 & dG_\alpha - \Omega_\alpha^\beta G_\beta + (m+1)\omega_\alpha^0 = G_{\alpha c} \theta^c, \\
 & G_{\alpha\beta}^\gamma = -A'_{cbq} B_\alpha^a B_\beta^b - A'_{cb} B_{\alpha q}^\gamma B_\beta^b - A'_{ab} B_\alpha^a B_{\beta q}^\gamma, \quad (25)
 \end{aligned}$$

Каждой точке  $B \in Q_m$  в проективном пространстве  $P_n$  сопоставим гиперплоскость  $y$ , проходящую через  $(n-m)$ -плоскость  $L_{n-m}$ , которую в терминах проективного репера  $P$  с учетом (17) зададим уравнением:

$$y_\alpha x^\alpha = 0. \quad (26)$$

Проведем для этой гиперплоскости рассуждения, аналогичные тем, которые проведены в [1] для гиперплоскости (17) и воспользуемся соотношениями (13)–(16). Тогда получим, что каждой гиперплоскости (26), проходящей через  $(n-m)$ -плоскость  $L_{n-m}$  и отвечающей точке  $B \in Q_m$  в пространстве  $P_n$ , соответствует гиперконус  $\tilde{K}_{n-1}^2(y)$  с вершиной  $L_{n-m}$ , определяемый уравнением

$$\tilde{K}_{n-1}^2(y) \Leftrightarrow y_\gamma G_{\alpha\beta}^\gamma x^\alpha x^\beta = 0, x^\alpha = 0.$$

В силу (12) определяется нижеследующий конус

$$\begin{aligned}
 \tilde{K}_{m-1}^2 &= \tilde{K}_{n-1}^2 \cap L_m \Leftrightarrow y_\gamma G_{\alpha\beta}^\gamma x^\alpha x^\beta = 0, \\
 \tilde{K}_{m-1}^2 &= \tilde{K}_{n-1}^2 \cap L_m \Leftrightarrow y_\gamma G_{\alpha\beta}^\gamma x^\alpha x^\beta = 0. \quad (27)
 \end{aligned}$$

Точке  $B \in Q_m$  в соответствующей  $m$ -плоскости  $L_m \subset P_n$  сопоставим точку  $Z = z_0 A_0 + z^\alpha A_\alpha$ . Полярной этой точки относительно конуса  $\tilde{K}_{m-1}^2 \in L_m$  в силу (27) является  $(m-1)$ -плоскость  $\tilde{y} = L_{m-1}(y) \in L_m$ , определяемая уравнениями:

$$\tilde{y} = L_{m-1}(y) \Leftrightarrow y_\gamma G_{\alpha\beta}^\gamma x^\alpha z^\beta = 0, (z^\beta \text{ фиксированы}). \quad (28)$$

Таким образом, с учетом (15), (27) и (28) заключаем, что каждой точке  $B \in Q_m$  отвечает центропроективное преобразование

$$\Pi(\tilde{Z}) = \{z^\beta G_{\alpha\beta}^\gamma\} \quad (29)$$

$m$ -плоскости  $L_m$  в себя с центром в точке  $A_0 \in P_n$ , которое  $(m-1)$ -плоскость  $y \cap L_{m-1}$  переводит в  $(m-1)$ -плоскость  $\tilde{y} \in L_m$ . Из (29) замечаем, что точке  $B \in Q_m$  в  $m$ -плоскости  $L_m$  отвечает  $(m-1)$ -плоскость

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}_{m-1} &= \{Z \in L_m \mid \Pi(\tilde{Z}) = 0\} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow z^0 - G_\alpha z^\alpha = 0, z^\alpha = 0, \quad (30)
 \end{aligned}$$

которая в общем случае не проходит через точку  $A_0$ .

Таким образом, с учетом (30) и (23) доказана следующая теорема.

**Теорема 2.1.** Каждой  $(n-m)$ -плоскости  $L_{n-m}$ , соответствующей точке  $B \in Q_m$ , с отображением  $V_{m,n}: Q_m \rightarrow P_n (m < n)$  инвариантным образом ассоциируется отображение  $f_m^{2n-1}: Q_m \rightarrow M^{2n}$  аффинного пространства  $Q_m$  в многообразии  $M^{2n}$  всех невырожденных нуль-пар  $\{A_0, L_{n-1}, A_0 \notin L_{n-1}\}$ , где

$$L_{n-1} = \tilde{L}_{m-1} \cup \tilde{L}_{n-m-1} \Leftrightarrow z^0 - G_\alpha z^\alpha = 0. \quad (31)$$

**2.3.2.** Проводится такая канонизация проективного репера  $P$  пространства  $P_n$  в точке  $B \in Q_m$ , при которой

$$G_\alpha = 0. \quad (32)$$

Из (25) с учетом (1), (22) и (32) получаются следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned}
 \omega_\alpha^0 &= A_{\alpha a} \theta^a, \quad A_{\alpha a} = \frac{1}{m+1} G_{\alpha a}, \\
 dA_{\alpha a} - A_{\beta a} \Omega_\alpha^\beta - A_{\alpha\beta} \Omega_a^\beta - A_{\alpha b} \theta_a^b &= -A_{\alpha ab}^0 \theta^b. \quad (33)
 \end{aligned}$$

Эти дифференциальные уравнения в соответствии с [7] свидетельствуют о существовании канонизации проективного репера  $P$  типа (32). Геометрически эта канонизация с учетом (31) означает, что  $L_{n-1} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ . С помощью величин  $A_{\alpha a}$ ,  $A_a^\beta$  и  $G_{\alpha\beta}^\gamma$  с учетом (33), (15), (24) и (32) в точке  $B \in Q_m$  рассмотрим следующие величины

$$\begin{aligned}
 g_{ab} &= \frac{1}{2} A_{\alpha(a} A_{b)}^\alpha, \quad \det[g_{ab}] \neq 0, \\
 g_{[ab]} &= 0, \quad g_{ab} g^{by} = \delta_a^y, \\
 C_\alpha^\beta &= A_{\alpha(a} A_{b)}^\beta g^{ab}, \quad c_\alpha = G_{\alpha\beta}^\gamma C_\gamma^\beta. \quad (34)
 \end{aligned}$$

Из дифференциальных уравнений (25), (33), (7) и (16) получаются следующие дифференциальные уравнения в точке  $B \in Q_m$ , которым удовлетворяют величины (34):

$$\begin{aligned}
 dg_{ab} - g_{ac} \theta_b^c - g_{bc} \theta_a^c &= g_{abc} \theta^c, \\
 dg^{ab} + g^{cb} \theta_c^a + g^{ac} \theta_c^b &= g^{ab} \theta^a, \\
 dC_\alpha^\beta + C_\alpha^\gamma \Omega_\gamma^\beta - C_\gamma^\beta \Omega_\alpha^\gamma &= C_{\alpha a}^\beta \theta^a, \quad dc_\alpha - c_\gamma \Omega_\alpha^\gamma = c_{\alpha a} \theta^a.
 \end{aligned}$$

Так же, как и в [1, (33)–(45)], где вместо индексов  $i, j, k$  надо иметь в виду индексы  $\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, m}$ , получаем в силу (17), что с системой величин ассоциируется в точке  $B \in Q_m$  гиперплоскость  ${}^*L_{n-1} \ni A_0$ ,  ${}^*L \subset L_{n-m}$ , определяемая уравнением:

$${}^*L_{n-1}: c_\alpha x^\alpha = 0. \quad (35)$$

Таким образом, с учетом (35) справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.2.** Каждой  $(n-m)$ -плоскости  $L_{n-m}$  в точке  $B \in Q_m$  с отображением  $V_{m,n}: Q_m \rightarrow P_n (m < n)$  инвариантным образом ассоциируется отображение  $f_m^{2n-1}: Q_m \rightarrow M^{2n-1}$  аффинного пространства  $Q_n$  в многообразии  $M^{2n-1}$  всех вырожденных нуль-пар  $\{A_0, {}^*L_{n-1}\}; A_0 \in {}^*L_{n-1} \subset P_n$ .

### 3. Инвариантное оснащение

В этом пункте будет инвариантным образом определена оснащающая  $(n-m)$ -плоскость (17) в точке  $A_0 \in S_m \subset P_n$ , соответствующей точке  $B \in Q_m$  при отображении (14).

**3.1.** В соответствии с [5] с помощью величин  $\tilde{A}_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}}$  в (16) в точке  $A_0 \in S_m \subset P_n$ , отвечающей точке  $B \in Q_m$ , рассмотрим следующие симметрические величины:

$$\tilde{A}^{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_m} = \frac{1}{m!} \tilde{A}_{1|\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} \tilde{A}_{12|\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} \dots \tilde{A}_{1m|\alpha_m}^{\hat{\alpha}_m}. \quad (36)$$

Здесь, как обычно, символ  $()$  означает симметрирование, а символ  $|\dots|$  – альтернирование по соответствующим индексам, причем индексы  $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_m$  изменяются по закону:

$$\widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \dots, \widehat{\alpha}_m = \overline{m+1, \dots, n}.$$

Из (16) получаются дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют величины (36):

$$d\widehat{A}^{\widehat{\alpha}_1 \widehat{\alpha}_2 \dots \widehat{\alpha}_m} + \widehat{A}^{\widehat{\alpha}_1 \widehat{\alpha}_2 \dots \widehat{\alpha}_m} \Omega_{\widehat{\alpha}}^{\widehat{\alpha}_1} + \widehat{A}^{\widehat{\alpha}_1 \widehat{\alpha}_2 \dots \widehat{\alpha}_m} \Omega_{\widehat{\alpha}}^{\widehat{\alpha}_2} + \dots + \widehat{A}^{\widehat{\alpha}_1 \dots \widehat{\alpha}_{m-1} \widehat{\alpha}} \Omega_{\widehat{\alpha}}^{\widehat{\alpha}_m} = \widehat{A}_{\widehat{\beta}}^{\widehat{\alpha}_1 \widehat{\alpha}_2 \dots \widehat{\alpha}_m} \omega_0^{\widehat{\beta}}. \quad (37)$$

Здесь явный вид величин, стоящих при  $\omega_0^{\widehat{\beta}}$ , для нас несущественный. Заметим с учетом [5], что величины (36) определены при условии, если числа  $m$  и  $n$  удовлетворяют неравенствам

$$m+2 < n \leq \frac{m(m+3)}{2}. \quad (38)$$

**3.2.** С помощью величин (36) в точке  $B \in Q_m$  проведем такую канонизацию проективного репера  $P$  пространства  $P_n$ , при которой [5]:

$$\widehat{A}^{\widehat{\alpha}_1 \widehat{\alpha}_2 \dots \widehat{\alpha}_m} = 0, \quad \widehat{A}^{\widehat{\alpha}_1 \dots \widehat{\alpha}_{m-1} \widehat{\alpha}} \neq 0, \quad \widehat{A} \neq 0, \quad (\widehat{\alpha} \neq \widehat{\beta}). \quad (39)$$

Здесь  $\widehat{A}$  – определитель порядка  $(n-m)^2$ , имеющий вид:

$$\widehat{A} = \begin{vmatrix} M_{m+1}^{m+1} & M_{m+1, m+2}^{m+1} & M_{m+1, m+3}^{m+1} & \dots & M_{m+1, l}^{m+1} & M_{m+1, l}^{m+1} \\ M_{m+2, m+1}^{m+2} & M_{m+2}^{m+2} & M_{m+2, m+3}^{m+2} & \dots & M_{m+2, l}^{m+2} & M_{m+2, l}^{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n, m+1}^n & M_{n, m+2}^n & M_{n, m+3}^n & \dots & M_{n, l}^n & M_n^n \end{vmatrix}, \quad (40)$$

где  $M_{\widehat{\alpha}}^{\widehat{\beta}} = \|\widehat{A}^{\widehat{\alpha}_1 \dots \widehat{\alpha}_m \widehat{\beta}}\|$ ,  $(\widehat{\alpha} \neq \widehat{\beta}, \widehat{\gamma})$ ; (индекс  $\widehat{\alpha}$  фиксирован), а матрица  $M_{\widehat{\alpha}}^{\widehat{\beta}} = \|\widehat{A}^{\widehat{\alpha}_1 \dots \widehat{\alpha}_m \widehat{\beta}}\|$  состоит из одного ненулевого элемента, принадлежащего строке с номером  $\widehat{\beta}$  и столбцу с номером  $\widehat{\gamma}$ . Заметим с учетом (39) и (41), что определитель  $\widehat{A}$  в общем случае не равен нулю в точке  $B \in Q_m$ . Поэтому в этой точке в силу (38) и (40) получаем с учетом (2) следующие дифференциальные уравнения

$$\omega_{\widehat{\alpha}}^{\widehat{\beta}} = A_{\widehat{\alpha}\widehat{\gamma}}^{\widehat{\beta}} \omega_0^{\widehat{\gamma}}, \quad dA_{\widehat{\alpha}\widehat{\gamma}}^{\widehat{\beta}} + A_{\widehat{\alpha}\widehat{\gamma}}^{\widehat{\beta}} \Omega_{\widehat{\gamma}}^{\widehat{\beta}} - A_{\widehat{\gamma}\widehat{\gamma}}^{\widehat{\beta}} \Omega_{\widehat{\alpha}}^{\widehat{\beta}} = A_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}^{\widehat{\beta}} \omega_0^{\widehat{\beta}}, \quad (\widehat{\alpha} \neq \widehat{\beta} \neq \widehat{\gamma}). \quad (41)$$

Здесь явный вид величины, состоящих при  $\omega_0^{\widehat{\beta}}$ , для нас несущественный.

В соответствии с [7] дифференциальные уравнения (41) свидетельствуют о существовании канонизации репера  $P$  типа (39).

**3.3.** Точке  $B \in Q_m$  в соответствующем пространстве  $P_n$  сопоставим гиперплоскость  $L_{n-1}(x) \supset L_m$ , определяемую в терминах проективного репера  $P$  пространства  $P_n$  уравнением:

$$L_{n-1}(x) \Leftrightarrow x_{\widehat{\alpha}} x^{\widehat{\alpha}} = 0. \quad (42)$$

Из (16), (2), (36) и (42) в соответствии с [5] получаем, что множество всех гиперплоскостей  $L_{n-1}$ , содержащих  $L_m$  и бесконечно близкие к  $L_m$  первого порядка вдоль соответствующих фокальных [7, 8] направлений в точке  $A_0 \in S_m$ , определяет в  $P_n$  алгебраический гиперконус  $\Phi_{n-1}$  порядка  $m$  с вершиной  $L_m$ . Этот гиперконус, в [9, 8] называемый фокальным, определяется уравнением

$$\Phi_{n-1}^m \Leftrightarrow \widehat{A}^{\widehat{\alpha}_1 \widehat{\alpha}_2 \dots \widehat{\alpha}_m} x_{\widehat{\alpha}_1} x_{\widehat{\alpha}_2} \dots x_{\widehat{\alpha}_m} = 0. \quad (43)$$

Заметим, что этот гиперконус определяется при всех  $m$  и  $n$ , удовлетворяющих с учетом (36) неравенствам (38).

**3.4.** Обозначим  $W_{n-1, m}^n$  систему линейно независимых гиперплоскостей  $y^{\widehat{\beta}} y_{\widehat{\alpha}}$ , проходящих через  $L_m$  и не принадлежащих гиперконусу  $\Phi_{n-1}^m$ . В соответствии с [5] эта система гиперплоскостей называется основной относительно  $\Phi_{n-1}^m$ , если линейным полюсом (полюсом порядка  $m-1$ ) каждой гиперплоскости  $y^{\widehat{\beta}}$  относительно  $\Phi_{n-1}^m$  является  $(m+1)$ -плоскость, проходящая через  $L_m$  и принадлежащая всем остальным гиперплоскостям системы  $W_{n-1, m}^n$ . По аналогии с [5] из (43) получаем, что система  $W_{n-1, m}^n$  будет основной тогда и только тогда, когда величины  $y_{\widehat{\alpha}}^{\widehat{\beta}}$  удовлетворяют системе алгебраических  $(n-m)$  уравнений

$$\widehat{A}^{\widehat{\alpha}_1 \widehat{\alpha}_2 \dots \widehat{\alpha}_m} y_{\widehat{\alpha}_1}^{\widehat{\beta}} y_{\widehat{\alpha}_2}^{\widehat{\beta}} \dots y_{\widehat{\alpha}_m}^{\widehat{\beta}} = 0, \quad (\widehat{\beta} \neq \widehat{\gamma}). \quad (44)$$

Как и в [5], показывается, что система (44) имеет в общем случае конечное число решений относительно  $y_{\widehat{\alpha}}^{\widehat{\beta}}$ . Геометрически это в силу (40) означает, что гиперплоскости  $L_{n-1}^{\widehat{\alpha}}$  и соответствующие им  $(m+1)$ -плоскости  $L_{m+1}^{\widehat{\alpha}}$

$$L_{n-1}^{\widehat{\alpha}} = (L_m, \overline{A}_{m+1}, \dots, \overline{A}_{\widehat{\alpha}-1}, \overline{A}_{\widehat{\alpha}+1}, \dots, \overline{A}_n), \quad L_{m+1}^{\widehat{\alpha}} = (L_m, \overline{A}_{\widehat{\alpha}}) \quad (45)$$

образуют основную систему  $\widehat{E}_{n-1} \in W_{n-1, m}^n$ . При этом из рассмотрения исключается случай  $\widehat{A}=0$ , когда основные гиперплоскости  $W_{n-1}^n$  определяются бесчисленным числом способов.

**3.4.1.** Точке  $B \in Q_m$  сопоставим в соответствующем проективном пространстве  $P_n$  гиперплоскость

$$L_{n-1}^{m+1} = (\overline{A}_0, \overline{A}_1, \dots, \overline{A}_m, \overline{A}_{m+2}, \dots, \overline{A}_n) = L_m \cup L_{m-1}^{m+2} \cup \dots \cup L_{m-1}^n \quad (46)$$

(см. (45)). Из (46) и (45) в силу (2) и (41) следует, что точка

$$\overline{X} = x^0 \overline{A}_0 + x^{\widehat{\alpha}} \overline{A}_{\widehat{\alpha}} + x^{\widehat{\alpha}} \overline{A}_{\widehat{\alpha}}, \quad (\widehat{\alpha} \neq m+1),$$

отвечающая точке  $B \in Q_m$ , описывает  $(n-m-1)$ -плоскость  $L_{n-m-1}^{m+1}$  – характеристический элемент гиперплоскости  $L_{n-1}^{m+1}$ , т. е. совокупность касательных к линиям, описываемым точкой  $X$  вдоль  $S_m$ , тогда и только тогда, когда  $x^{\widehat{\alpha}}$  и  $x^{\widehat{\alpha}} (\widehat{\alpha} \neq m+1)$  удовлетворяют системе линейных уравнений:

$$x^{m+1} = 0, \quad \widehat{A}_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}^{m+1} x^{\widehat{\beta}} + x^{\widehat{\alpha}} A_{\widehat{\alpha}\widehat{\alpha}}^{m+1} = 0, \quad (\widehat{\alpha} \neq m+1). \quad (47)$$

Проведем такую канонизацию проективного репера  $P$ , при которой

$$A_{m+2, \alpha}^{m+1} = 0, \dots, A_{n, \alpha}^{m+1} = 0, \quad \det[A_{\alpha\beta}^{m+1}] \neq 0. \quad (48)$$

Из дифференциальных уравнений (41) и (2) в силу (48) получаются дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha_{m+1}}^{\alpha} &= A_{\alpha_{m+1}\beta}^{\alpha} \omega_0^{\beta}, \\ dA_{\alpha_{m+1}\beta}^{\alpha} + A_{\alpha_{m+1}\beta}^{\gamma} \Omega_{\gamma}^{\alpha} - A_{\beta_{m+1}\beta}^{\alpha} \omega_{\alpha_{m+1}}^{\beta} - \\ - A_{\alpha_{m+1}\gamma}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\gamma} - \delta_{\beta}^{\alpha} \omega_{\alpha}^0 &= A_{\alpha_{m+1}\beta\gamma}^{\alpha} \omega^{\gamma}, \\ (\hat{\alpha}_{m+1}, \hat{\beta}_{m+1} &= \overline{m+2, n}). \end{aligned} \quad (49)$$

Здесь явный вид величин, стоящих при  $\omega^{\gamma}$ , для нас несущественный.

Дифференциальные уравнения (49) свидетельствуют с учетом [7] о существовании канонизации типа (48). Из (47) замечаем, что геометрически эта канонизация означает следующее:

$$L_{n-m-1}^{m+1}(\bar{A}_0, \bar{A}_{m+2}, \dots, \bar{A}_n). \quad (50)$$

При этом из рассмотрения исключается случай  $\det[\bar{A}_{\alpha\beta}^{m+1}] = 0$ , когда  $(n-m-1)$ -плоскость  $L_{n-m-1}^{m+1}$  определяется бесчисленным числом способов.

**3.4.2.** Как и в случае гиперплоскости (46) в соответствии с (41) получаем, что характеристический элемент  $L_{n-m-1}^n$  гиперплоскости  $L_{n-1}^n = (L_m, \bar{A}_{m+1}, \dots, \bar{A}_{n-1})$  определяется системой линейных уравнений:

$$x^n = 0, \quad x^{\alpha} A_{\alpha\beta}^n + x^{\alpha_n} A_{\alpha_n\beta} = 0, \quad (\alpha_n = m+1, n-1).$$

Отсюда с учетом (46) следует, что нижеследующая система линейных уравнений определяет прямую  $L$  – пересечение  $(m+1)$ -плоскости  $L_{m+1}^{m+1} = (L_m, \bar{A}_{m+1})$  с  $(n-m-1)$ -плоскостью  $L_{n-m-1}^n$ :

$$x^{\alpha} A_{\alpha\beta}^n + x A_{m+1,\beta}^n = 0, \quad x^{m+2} = \dots = x^n = 0. \quad (51)$$

Проводится такая канонизация проективного репера, при которой

$$A_{m+1,\beta}^n = 0, \quad \det[A_{\alpha\beta}^n] \neq 0. \quad (52)$$

Из дифференциальных уравнений (41) с учетом (2) и (52) получаются дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \omega_{m+1}^{\alpha} &= A_{m+1,\beta}^{\alpha} \omega_0^{\beta}, \\ dA_{m+1,\beta}^{\alpha} + A_{m+1,\beta}^{\gamma} \Omega_{\gamma}^{\alpha} - A_{m+1,\beta}^{\alpha} \omega_{m+1}^{m+1} - \\ - A_{m+1,\gamma}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\gamma} - \delta_{\beta}^{\alpha} \omega_{m+1}^0 &= A_{m+1\beta\gamma}^{\alpha} \omega^{\gamma}. \end{aligned} \quad (53)$$

Здесь явный вид величин  $A_{m+1\beta\gamma}^{\alpha}$  для нас несущественный.

Дифференциальные уравнения (53) в соответствии с [7] свидетельствуют о существовании канонизации типа (52). Геометрически эта канонизация в силу (51) означает, что

$$L = (\bar{A}_0, \bar{A}_{m+1}). \quad (54)$$

Из (50) и (54) следует, что оснащающая  $(n-m)$ -плоскость (17) в точке  $B \in Q_m$  в соответствующем проективном пространстве теперь определяется инвариантным образом так, что  $L_{n-m} = \cup L_{n-m-1}^{m+1}$ . При этом дифференциальные уравнения (18) получаются из (49) и (53). Поэтому с учетом теорем 2.1 и 2.2 справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.1.** С отображением  $V_{m,n}: Q_m \rightarrow P_n$  в случае  $m < n, m+2 < n < \frac{m(m+3)}{2}$  инвариантным образом ассоциируются конечным числом способов отображения

$$\begin{aligned} f_m^{2n}: Q_m &\rightarrow M^{2n}, M^{2n} = \{L_{n-1}, A_0\}, A_0 \notin L_{n-1}; \\ f_m^{2n-1}: Q_m &\rightarrow M^{2n-1}, M^{2n-1} = \{L_{n-1}, A_0\}, A_0 \in L_{n-1}. \end{aligned}$$

### Заключение

Из теорем 2.1, 2.2 и 3.1 следует, что для более глубокого изучения отображения  $V_{m,n}: Q_m \rightarrow P_n$  можно использовать с аналитической и геометрической точек зрения отображение аффинного пространства  $Q_m$  в многообразия  $M^{2n-1}$  и  $M^{2n}$  вырожденных и невырожденных нуль-пар проективного пространства  $P_n$ , соответственно.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аль-Хассани М.А., Молдованова Е.А. Дифференцируемое отображение аффинного  $Q_n$  и проективного  $P_n$  пространств // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323. – № 2. – С. 28–32.
2. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Московского математического общества. – М.: ГИИТД, 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
3. Лаптев Г.Ф. К инвариантной теории дифференцируемых отображений // Труды геометрического семинара. Т.6. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1974. – С. 37–42.
4. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. Отображение аффинных и евклидовых пространств // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317. – № 2. – С. 8–14.
5. Ивлев Е.Т. О многообразии  $E(L, L_m, L_{m+1}^{\alpha})$  в  $n$ -мерном проективном пространстве  $P_n (m < n)$  // Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 8. – № 6. – С. 1307–1320.

6. Ивлев Е.Т. О многообразии  $E(0, n-m, m)$  в  $n$ -мерном проективном пространстве  $P_n (m > 2, n < m(m+1))$  // Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 5. – № 5. – С. 1143–1155.
7. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. Math pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – Р. 231–240.
8. Акивис М.А. Фокальные образы поверхностей ранга  $r$  // Известия вузов. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.
9. Акивис М.А. Об одном классе тангенциально вырожденных поверхностей // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 146. – № 3. – С. 515–518.

Поступила 03.05.2013 г.

## ФУНКЦИЯ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩАЯ ФУНКЦИОНАЛ ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

И.В. Корытов

Томский политехнический университет

E-mail: korytov@tpu.ru

*Для произвольной функции из пространства Соболева, нормируемого с использованием производных всех порядков вплоть до заданного наивысшего, строится представление функционала погрешности кубатурной формулы. В отличие от работ, посвященных вопросу построения представлений функционалов через суммируемые функции, пространство Соболева здесь нормируется без использования псевдодифференциальных операторов. Доказывается существование, единственность и суммируемость представляющей функции. Ни норма, ни представление функционала не совпадают с описанными ранее ни при каком значении наибольшего порядка производных функций рассматриваемого класса.*

### Ключевые слова:

*Кубатурная формула; функционал погрешности; негильбертово пространство; представление функционала; локально суммируемая функция.*

### Key words:

*Cubature formula; error functional; non-Hilbert space; representation of functional; locally summable function.*

### Введение

Функционально-аналитический подход к задаче априорной оценки погрешности численного интегрирования, реализуемый в данной работе, впервые был применен С.Л. Соболевым [1, 2]. В рамках данного подхода погрешность рассматривается как линейный ограниченный функционал над некоторым банаховым пространством основных функций. Функционал представляет собой разность неизвестного приближаемого интеграла и кубатурной суммы. В качестве основной выступает подынтегральная функция, а обобщенной – разность характеристической функции области интегрирования и линейной комбинации дельта-функций. Последняя обеспечивает значения функции в узлах интегрирования. Для существования таких значений необходимо выполнение условия непрерывности основной функции, что достигается дополнителем ограничением – вложением основного банахова пространства в пространство непрерывных функций.

При функциональном подходе в самостоятельную выделяется задача о представлении функционала в основном пространстве через локально суммируемую функцию. Иными словами, требуется доказать, что функционал погрешности кубатурной формулы является регулярной обобщенной функцией. В дальнейшем такое представление используется для нахождения нормы функционала, которая уже непосредственно определяет границы погрешности приближения. В данных условиях функция, представляющая функционал, является решением некоторого дифференциального уравнения в обобщенных функциях. Оператор этого уравнения напрямую зависит от вида нормы основного пространства. Из наиболее близких к нашей по содержанию отметим работы С.Л. Соболева, В.И. Половинкина, Ц.Б. Шойнжурова [1–6].

С.Л. Соболев выполнил построение представления функционала погрешности кубатурной формулы для пространства  $L_2^{(m)}$  – факторизации по множеству полиномов степени не выше  $m$  пространства функций, суммируемых вместе со всеми производными в степени 2. Пространство благодаря показателю  $p=2$  является гильбертовым, и функция, реализующая в нем функционал, принадлежит тому же пространству, что и функция, на которой данный функционал строится. Первые публикации на эту тему в настоящее время доступны в издании [1].

В.И. Половинкин занимался исследованием этого вопроса в пространстве с произвольным показателем суммируемости  $L_p^{(m)}$ ,  $1 < p < \infty$ . Показатель  $p \neq 2$  переводит пространство Соболева и его факторизацию в статус негильбертовых. Реализующая представление функция в таком случае принадлежит пространству с сопряженным показателем суммируемости  $L_q^{(m)}$ ,  $1/p + 1/q = 1$ . Некоторые из результатов приведены в работах [3–5]. Во всех упомянутых выше исследованиях дифференциальное уравнение было полигармоническим  $\Delta^m = l$ , и его фундаментальное решение, дифференциальные свойства, а также оценки производных в окрестности начала координат и на бесконечности описаны в [2].

В пространстве же Соболева  $W_p^{(m)}$ , нормированном с участием производных всех порядков, оператор содержит сумму операторов Лапласа с возрастанием порядка, и нахождение фундаментального решения такого уравнения представляет значительную трудность, так как требует нахождения несобственного интеграла от функции нескольких комплексных переменных. Поскольку уравнение строится на основе нормы основного пространства, то задача решается обычно подбором такой нормы, чтобы фундаментальное решение соответствующе-

го уравнения было известным. Ц.Б. Шойнжуров получил представление функционала в пространстве Соболева, введя норму, построенную на преобразовании Фурье известного фундаментального решения [6]. Таким образом, построенный на интегральном преобразовании оператор, указывающий наличие в составе нормы производных основной функции заданных порядков, является псевдодифференциальным.

В данной работе в отличие от [6] норма определена таким образом, что при ее построении не используются псевдодифференциальные операторы.

**Исходные положения**

Основные функции  $\varphi(x)$  нескольких действительных переменных  $x^T=(x_1, \dots, x_n)$  образуют пространство Соболева  $W_p^{(m)}(R_n)$  с нормой

$$\|\varphi|W_p^{(m)}(R_n)\| = \left( \int_{R_n} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi|^p dx \right)^{1/p} \quad (1)$$

Функционал погрешности кубатурной формулы

$$\langle l, \varphi \rangle = \int_{R_n} \left( \chi_\Omega(x) - \sum_{k=0}^N c_k \delta(x - x^{(k)}) \right) \varphi(x) dx$$

является финитным:  $\exists r > 0: \text{suppl} \subset B(a, r)$ . Здесь  $B(a, r)$  – шар с центром  $a \in R_n$  и радиусом  $r$ ;  $c_k$  – коэффициенты и  $x^{(k)}$  – узлы кубатурной формулы;  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака. Область интегрирования ограничена  $\Omega \subset B(a, r)$  и представлена в функционале характеристической функцией

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

На параметры пространства  $W_p^{(m)}(R_n)$  накладываются ограничения

$$pm > n, \quad 1 < p < \infty, \quad 1/p + 1/q = 1. \quad (2)$$

Первое из них обеспечивает вложение пространства Соболева с нормой (1) в пространство непрерывных функций, второе – равномерную выпуклость единичной сферы.

Локальная суммируемость функций предполагает суммируемость на любом подмножестве  $\Omega^*$  ограниченного множества  $\Omega \subset R_n$ . Известно [7], что всякая глобально суммируемая в  $\Omega$  функция является также и локально суммируемой. Сказанное верно и в случае, если область глобальной суммируемости расширяется до  $R_n$ .

Преобразование Фурье, применяемое ниже для решения дифференциального уравнения в обобщенных функциях, требует, чтобы областью их определения было пространство  $R_n$ . Однако функции, от которых вычисляется кратный интеграл, могут, в том числе, быть определены только внутри области интегрирования и не определены вне ее, или могут быть определены на  $R_n$ , но их поведение

может быть неизвестным за пределами этой области. В таком случае утверждения, доказанные в данной работе, будут верными и для таких функций, если рассматривать их как совпадающие на области интегрирования с функциями, определенными на  $R_n$  и принадлежащими  $W_p^{(m)}(R_n)$  с минимальной нормой (1).

**Существование представляющей функции**

В данном пункте будет показано, что представление функционала существует и реализуется некоторой функцией, локально суммируемой в степени  $q$  вместе со всеми своими частными производными.

**Теорема 1.** Существует функция  $\psi \in W_q^{(m)}(R_n)$ , реализующая на произвольной функции  $\varphi \in W_p^{(m)}(R_n)$  с нормой (1) при условиях (2) данный линейный функционал в виде

$$\langle l, \varphi \rangle = \int_{R_n} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha \psi D^\alpha \varphi dx. \quad (3)$$

Норма функционала при этом равна норме функции  $\psi$ :  $\|\langle l, \varphi \rangle\| = \|\psi|W_q^{(m)}(R_n)\|$ .

**Доказательство.** Последовательно применение неравенств Гельдера к выражению (3)

$$\begin{aligned} |\langle l, \varphi \rangle| &\leq \left( \int_{R_n} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |D^\alpha \psi|^q dx \right)^{1/q} \times \\ &\times \left( \int_{R_n} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi|^p dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

приводит к оценке

$$|\langle l, \varphi \rangle| \leq \|\psi|W_q^{(m)}(R_n)\| \|\varphi|W_p^{(m)}(R_n)\|,$$

что означает, во-первых, ограниченность функционала, во-вторых, необходимость принадлежности функции  $\psi$  пространству  $W_q^{(m)}(R_n)$ , откуда

$$\frac{|\langle l, \varphi \rangle|}{\|\varphi|W_p^{(m)}(R_n)\|} \leq \|\psi|W_q^{(m)}(R_n)\|.$$

Далее, поскольку правая часть неравенства не зависит от функций  $\varphi \in W_p^{(m)}(R_n)$ , и неравенство верно для всех таких функций, то

$$\sup_{\varphi \neq 0} \frac{|\langle l, \varphi \rangle|}{\|\varphi|W_p^{(m)}(R_n)\|} \leq \|\psi|W_q^{(m)}(R_n)\|,$$

что согласно определению нормы функционала дает

$$\|\langle l, \varphi \rangle\| \leq \|\psi|W_q^{(m)}(R_n)\|. \quad (4)$$

Для построения обратного неравенства предположим существование функции  $\theta$ , удовлетворяющей равенствам

$$D^\alpha \theta = |D^\alpha \psi|^{1/(p-1)} \text{sign} D^\alpha \psi, \quad \forall |\alpha| \leq m. \quad (5)$$

Функционал, формально построенный на такой функции, будет равен



$$\begin{aligned}
 \langle l, \theta \rangle &= \int_{R_n} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha \psi D^\alpha \theta dx = \\
 &= \int_{R_n} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha \psi |D^\alpha \psi|^{1/(p-1)} \text{sign } D^\alpha \psi dx = \\
 &= \int_{R_n} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |D^\alpha \psi|^{1/(p-1)} dx = \\
 &= \int_{R_n} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |D^\alpha \psi|^{p/(p-1)} dx = \\
 &= \int_{R_n} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |D^\alpha \psi|^q dx = \|\psi\|_{W_q^{(m)}(R_n)}^q. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Согласно (5)

$$D^\alpha \psi = |D^\alpha \theta|^{p-1} \text{sign } D^\alpha \theta, \quad \forall |\alpha| \leq m.$$

Известно [2], что для любой  $f \in L_p$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $1/p + 1/q = 1$ , функция  $|f|^{p-1} \text{sign } f \in L_q$ .

Так как  $\psi \in W_q^{(m)}$ , то  $D^\alpha \psi \in L_q$ , следовательно,  $D^\alpha \theta \in L_p$ ,  $\alpha \leq m$ , и  $\theta \in W_p^{(m)}$ .

Таким образом, для нормы функции  $\theta$ , в предположении, что эта функция существует, верно равенство

$$\begin{aligned}
 \|\theta\|_{W_p^{(m)}(R_n)}^p &= \int_{R_n} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |D^\alpha \theta|^p dx = \\
 &= \int_{R_n} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |D^\alpha \psi|^{p/(p-1)} \text{sign } D^\alpha \psi|^p dx = \\
 &= \int_{R_n} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |D^\alpha \psi|^{p/(p-1)} dx = \\
 &= \|\psi\|_{W_q^{(m)}(R_n)}^q. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Далее будем рассматривать интегралы из (7), т. е.  $p$  и  $q$  степени ( $p > 1$  и  $q > 1$ ,  $1/p + 1/q = 1$ ) норм функций в основных пространствах как нелинейные функционалы, заданные на этих пространствах

$$F(f) = \|f\|_{W_p^{(m)}(R_n)}^p, \quad G(g) = \|g\|_{W_q^{(m)}(R_n)}^q.$$

Покажем, что для непрерывного ограниченно-го функционала существует функция, для которой выполняются соотношения (5)–(7) при всех значениях мультииндекса.

Пусть  $f_k$  – последовательность функций из пространства  $W_p^{(m)}(R_n)$ , сходящаяся по норме к функции  $f$ , т. е.  $\|f_k - f\| \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Тогда из неравенства Минковского в аксиомах нормы следует

$$|F(f_k) - F(f)| = \left| \|f_k\|_p^p - \|f\|_p^p \right| \leq \|f_k - f\|_p^p \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

что означает непрерывность функционала  $F(f)$ . Его ограниченность следует из конечности нормы. Из сказанного видно, что равенство функционалов равносильно равенству функций, на которых они определены.

Далее из оценки функционала

$$|\langle l, \theta \rangle| \leq \|l\|_{W_p^{(m)*}(R_n)} \|\theta\|_{W_p^{(m)}(R_n)}$$

с учетом (6) и (7) следует

$$\begin{aligned}
 \|l\|_{W_p^{(m)*}(R_n)} &\geq \frac{|\langle l, \theta \rangle|}{\|\theta\|_{W_p^{(m)}(R_n)}} = \\
 &= \frac{\|\psi\|_{W_q^{(m)}(R_n)}^q}{\|\psi\|_{W_q^{(m)}(R_n)}^{q/p}} = \|\psi\|_{W_q^{(m)}(R_n)}^q.
 \end{aligned}$$

Получилось неравенство, обратное к (4), следовательно,

$$\|l\|_{W_p^{(m)*}(R_n)} = \|\psi\|_{W_q^{(m)}(R_n)}.$$

Теорема доказана.

### Единственность представляющей функции

**Теорема 2.** Функция, реализующая представление (3) в условиях теоремы 1, единственна в пространстве обобщенных функций и имеет вид

$$\psi = G * l, \quad (8)$$

где  $G$  – фундаментальное решение дифференциального оператора с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} (-1)^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^{2\alpha}.$$

**Доказательство.** Интегрирование по частям представления (3)

$$\langle l, \varphi \rangle = \int_{R_n} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} (-1)^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^{2\alpha} \psi \varphi dx$$

приводит к дифференциальному уравнению в обобщенных функциях

$$\sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} (-1)^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^{2\alpha} \psi = l.$$

Оператор уравнения линеен и имеет постоянные коэффициенты. Согласно [8] решение такого уравнения единственно в пространстве обобщенных функций и равно свертке его фундаментального решения с правой частью, что доказывает утверждение теоремы.

Фундаментальное решение определяется из уравнения

$$\sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} (-1)^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^{2\alpha} G = \delta,$$

к обеим частям которого применено преобразование Фурье

$$\sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} (-1)^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (-2\pi iz)^{2\alpha} F[G] = F[\delta],$$

что после цепочки упрощений левой части

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \left( \sum_{j=1}^n |2\pi iz_j|^2 \right)^k F[G] &= 1, \\
 (1 + |2\pi z|^2)^m F[G] &= 1
 \end{aligned}$$

приводит к выражению

$$G = F^{-1}[(1 + |2\pi z|^2)^{-m}].$$

Результат обратного преобразования Фурье полученного выражения известен и приведен в [9]. Подставив значение показателя  $m$ , сохраняя обозначения и учитывая, что аргументом искомой

функции выступает  $|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$ , получим фундаментальное решение в виде

$$G(x) = G_{2m}(|x|) = \frac{K_{n/2-m}(|x|)}{2^{m-1} \Gamma(m) |x|^{n/2-m}}.$$

В выражении присутствуют специальные функции:  $K(z)$  – функция Макдональда и  $\Gamma(z)$  – гамма-функция.

Из теоремы следует, что искомая функция единственна как обобщенная функция, и, что если она будет регулярной, то будет единственной и в классе локально суммируемых функций.

**Локальная суммируемость представляющей функции**

**Теорема 3.** Функция (8) в условиях (2) принадлежит пространству  $W_q^{(m)}(R_n)$  с нормой вида (1).

**Доказательство.** Для доказательства требуется установить суммируемость в степени  $q$  частных производных всех порядков  $|\alpha| \leq m$  свертки (8). Вначале докажем это утверждение для производных функции  $G_{2m}$ .

На основании оценок [9]

$$|D^\alpha G_{2m}| \leq C e^{-|x|} |x|^{(2m-n-1)/2}, \quad |x| > 1,$$

все частные производные убывают на бесконечности по экспоненциальному типу и несобственные интегралы вне единичного шара от каждой производной сходятся.

Оценка внутри единичного шара разбивается на три случая.

При  $n-2m+|\alpha|=0$  и четном  $|\alpha|$  несобственный интеграл от оценивающей функции

$$|D^\alpha G_{2m}| \leq C(1 - \ln|x|), \quad |x| < 1,$$

сходится.

При  $n-2m+|\alpha| < 0$  интеграл от оценки

$$|D^\alpha G_{2m}| \leq C, \quad |x| < 1,$$

является собственным.

При  $n-2m+|\alpha|=0$  и нечетном  $|\alpha|$  или  $n-2m+|\alpha| > 0$  несобственный интеграл от оценки

$$|D^\alpha G_{2m}| \leq C \frac{1}{|x|^{n-2m+|\alpha|}}, \quad |x| < 1,$$

возведенной в степень  $q$

$$\int_{|x|<1} |D^\alpha G_{2m}|^q dx \leq C \int_{|x|<1} \frac{1}{|x|^{(n-2m+|\alpha|)q}} dx,$$

сводится к однократному путем перехода к сферическим координатам

$$K \int_0^1 \frac{1}{r^{n-2m+|\alpha|}} r^{n-1} dr \leq CK \int_0^1 \frac{1}{r^{(n-2m+|\alpha|)q-n+1}} dr. \quad (9)$$

Здесь в константу  $K$  перешли все повторно взятые интегралы от тригонометрических множителей. Несобственный интеграл от неограниченной функции одной переменной сходится на указанном интервале при  $(n-2m+|\alpha|)q-n+1 < 1$ .

Учитывая, что  $q = \frac{p}{p-1}$ , получаем сходимость

интеграла, оценивающего каждую производную при условии  $p(2m-|\alpha|) > n$ . Следовательно, интегралы от производных наивысшего порядка функции  $G_{2m}$  оцениваются сходящимся несобственным интегралом при  $pm > n$ .

Для установления суммируемости свертки используется ограниченность линейного функционала в  $L_q$  [2]

$$\begin{aligned} \|D^\alpha G_{2m} * l\|_{L_q(R_n)}^q &= \\ &= \int_{R_n} |D^\alpha G_{2m} * l|^q dx \leq M \int_{R_n} |D^\alpha G_{2m}|^q dx. \end{aligned}$$

Таким образом, для всех  $|\alpha| \leq m$  интегралы от производных свертки, возведенных в степень  $q$ , сходятся при  $pm > n$ , следовательно  $D^\alpha G_{2m} * l \in L_q(R_n)$ ,  $|\alpha| \leq m$ , и  $G_{2m} * l \in W_q^{(m)}(R_n)$ , т. е. свертка и ее производные всех порядков локально суммируемы в степени  $q$ .

Теорема доказана.

**Заключение**

Пространство Соболева нормируется таким образом, что обязательными слагаемыми суммы, стоящей под знаком интеграла, являются функция и все частные производные высшего порядка. Включение производных промежуточных порядков является произвольным, равно как и присутствие коэффициентов при этих производных. В задачах представления функционалов через локально суммируемые функции возникает необходимость решения дифференциальных уравнений в частных производных с использованием интегральных преобразований. Если пространство Соболева является гильбертовым, то такие уравнения линейны относительно искомой функции и ее производных. В негильбертовых же случаях уравнения нелинейны, поэтому в ранних исследованиях частные производные, входящие в норму, вводились через обратные интегральные преобразования заданного фундаментального решения. Позднее были опубликованы результаты, в том числе и автора, с нормой, не зависящей от интегральных преобразований, но в этом случае требовалось установление эквивалентности фундаментальных решений в окрестности начала координат и на бесконечности. В данной работе введена норма, с одной стороны, не зависящая от интегральных преобразований, что позволяет ее вычислить, с другой, позволяющая найти фундаментальное решение непосредственно через преобразование Фурье.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Соболев С.Л. Избранные труды. Т. 1. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал «Гео» СО РАН, 2003. – 692 с.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. – 707 с.
3. Половинкин В.И. Реализация линейных функционалов из  $L_q^{ms}(\Omega)$  // Сибирский математический журнал. – 1995. – Т. 36. – № 1. – С. 156–158.
4. Половинкин В.И. Реализация функционалов на пространствах  $L_p^m(E_n)$  // Сибирский математический журнал. – 1997. – Т. 38. – № 1. – С. 166–172.
5. Половинкин В.И. Формула для функций, реализующих функционалы // Сибирский математический журнал. – 2001. – Т. 42. – № 4. – С. 920–925.
6. Шойнжуров Ц.Б. Теория кубатурных формул в функциональных пространствах с нормой, зависящей от функции и ее производных: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Улан-Удэ, 1977. – 235 с.
7. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.
8. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
9. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.

Поступила 23.05.2013 г.

УДК 519.87

**О ПОСТРОЕНИИ МНОГОМЕРНЫХ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ ДИАМЕТРА ДВА**

Э.А. Монахова

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск

E-mail: emilia@rav.sccc.ru

*Рассматривается задача оптимизации неориентированных циркулянтных сетей, состоящая в максимизации числа вершин при заданных степени и диаметре графа. Получены новые нижние оценки достижимого числа вершин циркулянтных сетей любых степеней и диаметра два. Впервые построены бесконечные семейства циркулянтов диаметра два, достигающих найденные оценки.*

**Ключевые слова:**

*Неориентированные циркулянтные сети, графы Кэли абелевых групп, циркулянтные графы диаметра два, нижние оценки достижимого числа вершин.*

**Key words:**

*Undirected circulant networks, Abelian Cayley graphs, circulant graphs of diameter two, lower bounds of a number of nodes.*

**Введение**

Пусть  $s_1, s_2, \dots, s_k$ ,  $n$  – целые числа такие, что  $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < n$ , и пусть  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ . Неориентированный граф  $C(n; S)$  с множествами вершин  $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$  и ребер  $E = \{(i, j) : |i - j| = s_l \pmod{n}, l = \overline{1, k}\}$  называется *циркулянтным*, числа из множества  $S$  – образующими,  $k$  – размерностью,  $n$  – порядком графа. В  $k$ -мерном циркулянте степень вершин  $v = 2k$ , за исключением тех случаев, когда образующая представляет собой циклическую подгруппу порядка два.

Циркулянтные графы (сети) являются графами Кэли абелевых групп и находят широкое применение при построении и анализе топологий сетей и мультипроцессорных систем, в теории кодирования, распределенных вычислениях, моделировании химических реакций [1–7].

Диаметром графа  $G$  называется

$$d(G) = \max_{i, j \in V} d(i, j),$$

где  $d(i, j)$  – длина кратчайшего пути из вершины  $i$  в вершину  $j$  графа  $G$ .

Пусть  $AC(v, d)$  означает наибольший возможный порядок графа Кэли абелевой группы степени

$v$  и диаметра  $d$ . В последнее время границы  $AC(v, d)$  интенсивно изучаются (обзор в [8]). Исследование циркулянтных графов как важного класса графов Кэли абелевых групп вносит существенный вклад при поиске нижних границ  $AC(v, d)$ . Так, для степеней 4 и 6 получены точные значения  $AC(4, d) = 2d^2 + 2d + 1$  и  $AC(6, d)$  (обзор в [3]), для степени 8 также найдены хорошие оценки для  $AC(8, d)$  [9]. В работах [3, 10, 11] улучшены нижние оценки функции  $AC(v, d)$  для любых четных степеней  $v$  и диаметров  $d \geq v/2 \geq 3$  [10],  $d \geq v/2 + \lfloor v/8 \rfloor$  и  $v > 8$  [3], в [11] – на основе получения семейств экстремальных графов Кэли абелевых групп и при условии  $d \geq \lfloor v/4 \rfloor$ . Удивительно, но с другой стороны спектра, для графов Кэли абелевых групп диаметра два, трудности в получении нижних оценок функции  $AC(v, 2)$  крайне сложны, а циркулянты диаметра два вообще еще не исследовались. Данная работа – первое исследование функции  $AC(v, 2)$  для класса циркулянтов.

Известно, что для четных степеней  $v = 2k$

$$AC(v, 2) \leq v^2 / 2 + v + 1 = 2k^2 + 2k + 1.$$

С другой стороны, из построения графа Кэли для  $\mathbb{Z}_{(v+2)/2} \times \mathbb{Z}_{(v+2)/2}$  с множеством образующих, со-

стоящим из всех таких пар  $(x, y)$ , где точно один из  $x, y$  равен нулю, следует

$$AC(v, 2) \geq \left\lfloor \frac{v+2}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{v+2}{2} \right\rceil = (k+1)^2. \quad (1)$$

Указанная нижняя граница во многих случаях улучшалась на 1 или 2 [8]. В настоящей работе данная граница улучшена на  $k$  и  $2k$ .

Наилучшая известная нижняя граница функции  $AC(v, 2)$  для графов Кэли абелевых групп диаметра два есть  $O((3/8)v^2)$  [12]. Полученные в [12] графы не являются циркулянтами, и граница найдена только для последовательности степеней вида  $v=4q-2$ , где  $q$  – простые числа или их степени. В [13] найден более слабый результат, а именно  $AC(v, 2) \geq (8/25)v^2 + O(v)$ , применимый для всех степеней  $v \geq 11$ . В [13] также доказано, что найденные графы не являются вершинно-транзитивными при  $v \geq 21$ . Аналогичная задача рассмотрена в [14], где, используя результаты теории чисел по распределению простых чисел, авторы показали, что для всех достаточно больших  $v$  нижняя граница  $AC(v, 2)$  имеет вид  $(3/8)v^2 - O(v^{1.525})$ .

В данной статье конструктивно получены новые нижние оценки экстремальной функции  $AC(v, 2)$  в классе циркулянтных графов для всех размерностей  $k$  (соответственно, степеней  $v=2k$ ) и построены семейства циркулянтных сетей, достигающих найденные оценки. Показано, что аналитические описания найденных графов диаметра два обладают свойством сохранения параметров описания на больших диапазонах изменения порядков графа.

**Новые семейства циркулянтных графов диаметра два**

Построим циркулянтный граф  $C(n; S)$  диаметра два размерности  $k > 1$  с образующими  $s_i, i=1, \dots, k$ , и порядком  $n$ , большим (1). Пронумеруем вершины графа от 0 до  $n-1$ . Обозначим через  $D(x)=d(0, x)$ ,  $0 \leq x < n$ , длину кратчайшего пути из вершины 0 в вершину  $x$ . В графе диаметра два выполняется условие  $D(x) \leq 2$  для любой вершины  $x$ , где  $0 \leq x < n$ . Поскольку циркулянтные графы являются вершинно-транзитивными, то достаточно рассматривать вершины с номерами  $0 \leq x \leq n/2$ .

Пусть образующие

$$s_i = i \text{ для } i=1, \dots, l, \text{ где } l \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Остальные  $k-l$  образующих определим следующим образом:

$$s_{l+1} = l + 2l + 1, \quad s_{l+2} = s_{l+1} + 2l + 1, \dots, \\ s_k = s_{k-1} + 2l + 1 = 2l(k-l) + k.$$

При таких образующих имеем  $D(x) \leq 2$  для любой вершины  $x$  из интервала  $0 \leq x \leq s_k + l$ . Если порядок графа будет равен  $n = 2(s_k + l) + 1$ , то выполняется условие  $D(x) \leq 2$  для любой вершины  $0 \leq x < n$ . Отсюда исконое значение  $n = 4l(k-l) + 2(k+l) + 1$ . Найдем, при каких значениях  $l$  значение  $n$  как функции от  $k$  является максимально возможным.

Пусть  $k$  – четное число. Если  $l=k/2$ , то  $2l+1=k+1$  и  $n=(k+1)^2+k$ . Если  $l=k/2+1$ , то

$2l+1=k+3$  и  $n=(k+1)^2+k-2$ . При всех других  $l \in \{1, 2, \dots, k\}$  значения  $n$  будут меньше.

Пусть  $k > 1$  – нечетное число. Если  $l=\lfloor k/2 \rfloor$ , то  $2l+1=k$  и  $n=(k+1)^2+k-2$ . Если  $l=\lceil k/2 \rceil$ , то  $2l+1=k+2$  и  $n=(k+1)^2+k$ . При всех других  $l \in \{1, 2, \dots, k\}$  значения  $n$  будут меньше.

Таким образом, доказаны две следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $k > 1$  – целое число,

$$n = (k+1)^2 + k - 2 = n_1, \quad (2)$$

$$S = \left\{ 1, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + k, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor k \right\}, \\ \text{если } k \text{ нечетное,} \quad (3)$$

или

$$S = \left\{ 1, \frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 1 + k + 3, \dots, \frac{k}{2} + 1 + \left( \frac{k}{2} - 1 \right) (k + 3) \right\}, \quad (4) \\ \text{если } k \text{ четное.}$$

Тогда  $d(C(n; S)) = 2$ .

**Теорема 2.** Пусть  $k > 1$  – целое число,

$$n = (k+1)^2 + k = n_2, \quad (5)$$

$$S = \left\{ 1, \frac{k}{2}, \frac{k}{2} + k + 1, \dots, \frac{k}{2} + \frac{k}{2} (k + 1) \right\}, \\ \text{если } k \text{ четное,} \quad (6)$$

или

$$S = \left\{ 1, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + k + 2, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor (k + 2) \right\}, \\ \text{если } k \text{ нечетное.} \quad (7)$$

Тогда  $d(C(n; S)) = 2$ .

При этом все найденные в теоремах 1 и 2 описания образующих для графов диаметра два обладают свойством сохранения параметров на больших интервалах изменения порядков графов (следствия 1, 2).

**Следствие 1.** Пусть  $k > 1$  – целое число, значение  $n_1$  равно (2), а образующие  $S$  равны (3) или (4). Для

всех порядков  $n$ , где  $\left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor \leq n \leq n_1$ , циркулянтные графы  $C(n; S)$  имеют диаметр два и степени вершин  $v=2k$ , за исключением значений

$$n_i = \begin{cases} n_1 - ik, & i = 1, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor, & \text{если } k \text{ нечетное,} \\ n_1 - i(k+3), & i = 1, \frac{k}{2} - 1, & \text{если } k \text{ четное,} \end{cases}$$

для которых графы  $C(n; S)$  имеют степени вершин  $v=2k-i$ .

**Доказательство.** Из рассмотренного выше способа построения данных графов следует, что при

всех значениях  $n$  в диапазоне  $\left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor \leq n \leq n_1$  диа-

метр графов  $C(n;S)$  равен двум. Степень вершин графов  $C(n;S)$  зависит от соотношения между множеством образующих  $S$  и множеством  $\bar{S}=\{n-s_j | j=1, \dots, k\}$  их дополнений до  $n$ . Имеем  $s_j < \lfloor n_1/2 \rfloor$  и  $n_1 - s_j > \lfloor n_1/2 \rfloor$  для всех  $j=1, 2, \dots, k$ . Для всех порядков  $n \neq n_1$ ,  $\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor \leq n \leq n_1$ ,  $S \cap \bar{S} = \emptyset$  и степень вершин графов  $C(n;S)$  равна  $v=2k$ . При  $n=n_1$ ,  $|S \cap \bar{S}|=i$ , так как происходит совпадение (наложение)  $i$  образующих из  $S$  с  $i$  дополнениями из  $\bar{S}$ , что уменьшает степень графа  $C(n;S)$  на  $i$ . Следствие 1 доказано. Аналогично доказывается следствие 2.

**Следствие 2.** Пусть  $k > 1$  – целое число, значение  $n_2$  равно (5), а образующие  $S$  равны (6) или (7). Для

всех порядков  $n$ , где  $\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor \leq n \leq n_2$ , циркулянтные графы  $C(n;S)$  имеют диаметр два и степени вершин  $v=2k$ , за исключением значений

$$n_i = \begin{cases} n_2 - i(k+1), & i=1, \dots, \frac{k}{2}, & \text{если } k \text{ четное,} \\ n_2 - i(k+2), & i=1, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, & \text{если } k \text{ нечетное,} \end{cases}$$

для которых графы  $C(n;S)$  имеют степени вершин  $v=2k-i$ .

Теперь будем увеличивать порядок циркулянтного графа  $C(n;S)$  диаметра два. Это можно сделать следующим образом. Пусть образующие  $s_i=i$  для  $i=1, \dots, l$ , где  $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

Остальные  $k-l$  образующих имеют следующий вид:

$$s_{l+1} = l + 2l + 2, s_{l+2} = s_{l+1} + 2l + 2, \dots, s_k = s_{k-1} + 2l + 2 = 2(l+1)(k-l) + l.$$

При таких образующих имеем  $D(x) \leq 2$  для любой вершины  $x$  из интервала  $0 \leq x \leq s_k + l$ , кроме вершин с номерами

$$x_1 = 2l + 1, x_2 = x_1 + 2l + 2, \dots, x_{k-l} = x_{k-l-1} + 2l + 2,$$

где  $D(x_i)=3$ ,  $i=1, 2, \dots, k-l$ . Если порядок графа будет равен  $n=2(s_k+l)+1$ , то выполняются следующие соотношения:

$$x_1 = 2l + 1 = n - 2s_k, x_2 = n - s_k - s_{k-1}, \dots, x_{k-l} = n - s_k - s_{l+1}.$$

Таким образом,  $D(x) \leq 2$  для любой вершины  $0 \leq x < n$ . Отсюда искомое значение  $n=4l(k-l)+4k+1$ . Найдем, при каких значениях  $l \in \{1, 2, \dots, k\}$  значение  $n$  как функции от  $k$  является максимально возможным.

Пусть  $k$  – четное число. Если  $l=k/2$ , то  $2l+2=k+2$  и  $n=(k+1)^2+2k$ . При всех других  $l \in \{1, 2, \dots, k\}$  значения  $n$  будут меньше.

Пусть  $k > 1$  – нечетное число. Если  $l=\lfloor k/2 \rfloor$  или  $l=\lceil k/2 \rceil$ , то в первом случае  $2l+2=k+1$ , во втором  $2l+2=k+3$  и в обоих случаях  $n=(k+1)^2+2k-1$ . При всех других  $l \in \{1, 2, \dots, k\}$  значения  $n$  будут меньше.

Таким образом, получены доказательства следующих теорем.

**Теорема 3.** Пусть  $k$  – четное число,

$$n = (k+1)^2 + 2k, \\ S = \left\{ 1, \frac{k}{2}, \frac{k}{2} + k + 2, \dots, \frac{k}{2} + \frac{k}{2}(k+2) \right\}.$$

Тогда  $d(C(n;s))=2$ .

**Теорема 4.** Пусть  $k > 1$  – нечетное число,

$$n = (k+1)^2 + 2k - 1, \\ S = \left\{ 1, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + k + 1, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor (k+1) \right\}$$

или

$$S = \left\{ 1, \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + k + 3, \dots, \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil (k+3) \right\}.$$

Тогда  $d(C(n;s))=2$ .

### Заключение

Полученная для всех степеней  $v$  конструктивная нижняя граница функции  $AC(v,2)$  в классе циркулянтных графов еще относительно далека от верхней границы. Что же показывают проведенные вычислительные эксперименты в этом случае? Получение точных значений функции  $AC(v,d)$  при  $v > 6$  достаточно трудоемко даже для диаметра  $d=2$  и сводится к полному перебору параметрических описаний графов. Даже в пределах класса циркулянтов никакой общей тенденции для получения семейств с общим аналитическим описанием для максимально достижимых порядков графов пока не намечается, но это требует дальнейшего исследования.

В таблице даны описания экстремальных циркулянтных графов диаметра два, полученные с помощью компьютерной программы на основе переборных алгоритмов. Во втором столбце приведены значения функции  $P(v,2)$ , которые соответствуют границе Мура для класса циркулянтных графов. Представленные графы степеней  $v=4, 6$  и  $8$  являются максимально возможными циркулянтными графами диаметра  $d=2$  (отмечено символом \*).

**Таблица.** Описания максимально достижимых циркулянтов диаметра два

$v$	$P(v,2)$	$n \leq AC(v,2)$	$S=(s_1, s_2, \dots, s_{v/2})$
4	13	13*	(1, 5), (2, 3)
6	25	21*	(1, 2, 8), (1, 3, 8), (1, 4, 6), (1, 5, 8), (1, 5, 9)
8	41	35*	(1, 6, 7, 10), (1, 7, 11, 16)
10	61	51	(1, 2, 10, 16, 23)
12	85	67	(1, 2, 3, 13, 21, 30)
14	113	90	(1, 4, 10, 17, 26, 29, 41)
16	145	112	(1, 4, 10, 17, 29, 36, 45, 52)

Автор выражает благодарность О.Г. Монахову за полезное обсуждение статьи и помощь в компьютерных экспериментах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Bermond J.-C., Comellas F., Hsu D.F. Distributed loop computer networks: a survey // *J. Parallel Distributed Comput.* – 1995. – V. 24. – P. 2–10.
- Hwang F.K. A survey on multi-loop networks // *Theoretical Computer Science.* – 2003. – V. 299. – P. 107–121.
- Монахова Э.А. Структурные и коммуникативные свойства циркулянтных сетей // *Прикладная дискретная математика.* – 2011. – № 3 (13). – С. 92–115.
- Нестеренко Б.Б., Новотарский М.А. Клеточные нейронные сети на циркулянтных графах // *Искусственный интеллект.* – 2009. – 3. – С. 132–138.
- Martinez C., Beivide R., Gabidulin E.M. Perfect codes from Cayley graphs over Lipschitz integers // *IEEE Transactions on Information Theory.* – 2009. – V. 55. – № 8. – P. 3552–3562.
- Muga F.P., Saldana R.P., Yu W.E.S. Building GraphBased Symmetric Cluster // *NECTEC Technical Journal.* – 2001. – V. 11. – № 9. – P. 195–199.
- Balaban A.T. Reaction graphs // *Graph Theoretical Approaches to Chemical Reactivity* / eds. D. Bonchev, O. Mekenyan. – Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1994. – P. 137–180.
- Miller M., Siran J. Moore Graphs and beyond: A survey of the degree/diameter problem // *Electron. J. Combin.* – 2005. – Dyn. Surv. (DS14). – 61 p.
- Монахова Э.А. Новая достижимая нижняя оценка числа вершин в циркулянтных сетях размерности четыре // *Дискретный анализ и исследование операций.* – 2013. – Т. 20. – № 1. – С. 37–44.
- Chen S., Jia X.-D. Undirected loop networks // *Networks.* – 1993. – V. 23. – P. 257–260.
- Dougherty R., Faber V. The degree-diameter problem for several varieties of Cayley Graphs, 1: The Abelian Case // *SIAM J. Discrete Math.* – 2004. – V. 17 (3). – P. 478–519.
- Macbeth H., Siagiova J., Siran J. Cayley Graphs of given degree and diameter for cyclic, Abelian, and metacyclic groups // *Discrete Math.* – 2012. – V. 312 (1). – P. 94–99.
- Meseznikov D. A construction of large graphs of diameter two and given degree from Abelian lifts of dipoles // *Kybernetika.* – 2012. – V. 48 (3). – P. 518–521.
- Siran J., Siagiova J., Zdimalova M. Large graphs of diameter two and given degree // *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> Inter. Workshop on Optimal Networks Topologies IWONT'2010.* – Barcelona: Iniciativa Digital Politecnica, 2011. – P. 347–359.

Поступила 17.04.2013 г.

УДК 514.757.2

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ АФФИННОГО  $Q_n$  И ПРОЕКТИВНОГО  $P_n$  ПРОСТРАНСТВ

М.А. Аль-Хассани<sup>1,2</sup>, Е.А. Молдованова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Томский политехнический университет  
E-mail: eam@tpu.ru

<sup>2</sup>Аль-Баера Университет, Ирак

Изучаются поля инвариантных геометрических образов, возникающих при отображении аффинного пространства в проективное пространство. С помощью этих геометрических образов показывается, что с рассматриваемым отображением инвариантным образом возникают отображения аффинного пространства в многообразия вырожденных и невырожденных нуль-пар проективного пространства.

**Ключевые слова:**

Дифференцируемое отображение, многомерные пространства, линейные подпространства, геометрические объекты.

**Key words:**

Differentiable mapping, multidimensional spaces, linear subspaces, geometrical objects.

**Введение**

Как известно [1–4], дифференцируемые отображения многообразий являются важным разделом дифференциально-геометрических структур на многообразиях.

Данная работа посвящена изучению отображения  $V_{n,n}:Q_n \rightarrow P_n$  аффинного  $Q_n$  и проективного  $P_n$  пространств. В первом разделе выводятся дифференциальные уравнения этого отображения, которым удовлетворяют компоненты внутренних фундаментальных геометрических объектов  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  первого и второго порядков в смысле Г.Ф. Лаптева [2, 5]. С помощью этих компонент во втором разделе изучаются поля инвариантных геометрических образов. Эти поля дают возможность аналитически и геометрически доказать, что с отобра-

жением  $V_{n,n}$  инвариантным образом ассоциируются два отображения  $f_n^{2n}:Q_n \rightarrow M^{2n}$  и  $f_n^{2n-1}:Q_n \rightarrow M^{2n-1}$ , где  $M^{2n}$  и  $M^{2n-1}$  – многообразия всех невырожденных и вырожденных нуль-пар пространства  $P_n$ , соответственно.

Все построения в данной работе носят локальный характер, а функции, встречающиеся в работе, предполагаются функциями класса  $C^\infty$ .

Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1–7].

**1. Аналитический аппарат**

Рассматривается  $n$ -мерное аффинное пространство  $Q_n$ , отнесенное к подвижному аффинному реперу  $Q = \{\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a\}$  с деривационными формулами и структурными уравнениями



$$d\bar{B} = \bar{\varepsilon}_a \theta^a, \quad d\bar{\varepsilon}_a = \theta_a^b \bar{\varepsilon}_b, \\ D\theta^a = \theta^b \wedge \theta_b^a, \quad D\theta_a^b = \theta_c^a \wedge \theta_c^b, \quad (a, b, c = \overline{1, n}). \quad (1)$$

Рассматривается  $n$ -мерное эквипроективное пространство  $P_n$ , отнесенное к подвижному эквипроективному реперу  $P = \{\bar{A}_i\}$  с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\bar{A}_i = \omega_i^j \bar{A}_j, \quad D\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \quad \omega_i^i = 0, \\ (I, J, K = \overline{0, n}). \quad (2)$$

Здесь предполагается, что линейно независимые аналитические точки  $A_K \in P_n$  удовлетворяют условию

$$[\bar{A}_0, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n] = 1, \quad (3)$$

т. е. внешнее произведение аналитических точек  $A_K$  равно 1. Из (2) и (3) получаем

$$\omega_K^K \equiv \omega_0^0 + \omega_1^1 + \dots + \omega_n^n = 0.$$

**1.1.** Рассматривается дифференцируемое отображение

$$V_{n,n} : Q_n \rightarrow P_n \quad (4)$$

аффинного  $Q_n$  и проективного  $P_n$  пространств. Реперы  $Q$  и  $P$  выбираются так, что дифференциальные уравнения отображения (4) имеют вид:

$$\omega_0^i = A_a^i \theta^a, \quad (i, j, k = \overline{1, n}). \quad (5)$$

Здесь величины  $A_a^i$  с учетом (1) и (2) являются компонентами внутреннего фундаментального геометрического объекта

$$\Gamma_1 = \{A_a^i\} \quad (6)$$

отображения (4) в смысле Г.Ф. Лаптева [2, 5], которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dA_a^i + A_a^j \Omega_j^i - A_b^i \theta_a^b = A_{ab}^i \theta^b, \\ \Omega_j^i = \omega_j^i - \delta_j^i \omega_0^0, \quad A^i_{[kb]} = 0. \quad (7)$$

Заметим, что геометрически отображение (4) направление  $u = \{\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a\} u^a \in Q_n$  переводит в направление  $x = \{A, A_i\} x^i \in P_n$ , т. е.

$$x = V_{n,n} u = (\bar{A}_0, \bar{A}_i) A_a^i u^a. \quad (8)$$

В данной статье решается задача о нахождении геометрических образов, определяемых компонентами геометрического объекта (6) и продолженно-го геометрического объекта

$$\Gamma_2 = \{A_a^i, A_{ab}^i\},$$

компоненты которого удовлетворяют дифференциальными уравнениями (7) и

$$dA_{ab}^i + A_{ab}^j \Omega_j^i - A_{cb}^i \theta_a^c - A_{ac}^i \theta_b^c + \\ + A_b^j (A_a^i \delta_j^l + A_a^l \delta_j^i) \omega_l^0 = A_{abc}^i \theta^c, \\ A_{[abc]}^i = 0, \quad (a, b, c = \overline{1, n}; i, j, l = \overline{1, n}). \quad (9)$$

## 2. Поля инвариантных геометрических образов

**2.1.** В этом разделе используется, как и выше, следующая система индексов  $i, j, k, l = \overline{1, n}$

$a, b, c, q = \overline{1, n}$ . Предполагается, что отображение  $V_{n,n} : Q_n \rightarrow P_n$  является невырожденным, т. е.

$$\det[A_a^i] \neq 0. \quad (10)$$

Поэтому можно ввести в рассмотрение величины  $B_i^a$  по формулам:

$$B_i^a A_a^j = \delta_i^j, \quad B_i^b A_a^i = \delta_a^b. \quad (11)$$

Из (7) с учетом (11) замечаем, что величины  $B_i^b$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dB_i^b + B_i^c \theta_c^b - B_j^b \Omega_i^j = B_{ia}^b \theta^a, \quad B_{ia}^b = -A_{qa}^i B_i^q B_j^b. \quad (12)$$

Рассмотрим следующие величины

$$G_{ij}^k = A_{ab}^k B_i^a B_j^b \stackrel{(7)}{\Rightarrow} G_{[ij]}^k = 0; \\ G_i = G_{ik}^k. \quad (13)$$

Из (9) и (12) следует, что величины (13) удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$dG_{ij}^k + G_{ij}^l \Omega_l^k - G_{lj}^k \Omega_i^l - \\ - G_{il}^k \Omega_j^l + (\delta_i^l \delta_j^k + \delta_i^k \delta_j^l) \omega_l^0 = G_{ijc}^k \theta^c, \\ dG_i - \Omega_i^k G_k + (n+1) \omega_i^0 = \tilde{A}_{ia}^i \theta^a, \\ G_{ijc}^k = -A_{abc}^k B_i^a B_j^b - A_{ab}^k B_{ic}^a B_j^b - A_{ab}^k B_i^a B_{jc}^b, \quad (14)$$

Найдем те геометрические образы в текущей точке  $B \in Q_n$ , которые определяются величинами (13).

Каждой текущей точке  $B \in Q_n$  в соответствующем проективном пространстве  $P_n$  сопоставим гиперплоскость  $y \in A_0$ , которая в точечных проективных координатах репера  $P$  определяется уравнением

$$y \Leftrightarrow y_i \cdot x^i = 0. \quad (15)$$

Из (5), (4) и (15) следует, что совокупность всех направлений  $u = \{\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a\} u^a \in Q_n$ , образы которых при отображении  $V_{n,n}$  принадлежат гиперплоскости  $y \in P_n$ , образует в  $Q_n$  гиперплоскость  $U_{n-1}(y) \ni B$ , которая в точечных аффинных координатах репера  $Q$  определяется уравнением

$$y_i A_a^i u^a = 0. \quad (16)$$

Пользуясь условиями инвариантности точек и гиперплоскостей пространств  $Q_n$  и  $P_n$  в смысле Г.Ф. Лаптева [5] и учитывая (8), (7) и (9), получаем, что гиперплоскость (16) и бесконечно близкая к ней первого порядка вдоль направления  $v = \{\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a\} v^a$  пересекаются по  $(n-2)$ -плоскости  $U_{n-2}(y; v) \in Q_n$ , являющейся характеристикой  $\text{Ch}\{U_{n-1}(y)\}_v$  в направлении  $v$ . Эта  $(n-2)$ -плоскость относительно репера  $Q$  определяется уравнениями:

$$\begin{cases} y_i A_a^i u^a = 0, \\ y_i A_{ab}^i u^a v^b = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Из (17) следует, что каждому направлению  $v = \{\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a\} v^a \in Q_n$  в аффинном пространстве отвечает пучок гиперплоскостей  $\tilde{U}_{n-1}(y; v) \ni \tilde{U}_{n-2}(y; v)$ , определяемых уравнением:

$$y_i(A_{ab}^i u^a v^b + \lambda A_a^i u^a) = 0, \quad (v^b - \text{фиксированы}).$$

Отсюда следует, что совокупность всех направлений  $v \in Q_n$  типа  $\{v \in Q_n | v \in \tilde{U}_{n-1}(y; v)\}$  образует в пространстве  $Q_n$  пучок гиперквадрик  $Q_{n-1}^2(y; \lambda) \ni B$ , которые в аффинных координатах репера  $Q$  определяются уравнением:

$$y_i(A_{ab}^i v^a v^b + \lambda A_a^i v^a) = 0.$$

Асимптотическим гиперконусом этого пучка, не зависящим от  $\lambda$ , будет гиперконус  $K_{n-1}^2(y)$  второго порядка, который определяется уравнением:

$$K_{n-1}^2(y) \Leftrightarrow y_i A_{ab}^i v^a v^b = 0. \quad (18)$$

Таким образом, каждой гиперплоскости (15) пространства  $P_n$ , отвечающей точке  $B \in Q_n$ , в аффинном пространстве  $Q_n$  соответствует гиперконус  $K_{n-1}^2(y)$ . Из (18) с учетом (11) и (13) замечаем, что прообразом гиперконуса  $K_{n-1}^2(y) \subset Q_n$  при отображении (4) является гиперконус  $\tilde{K}_{n-1}^2(y) \subset P_n$  с вершиной в точке  $A_0$ , который в проективных координатах репера  $P$  определяется уравнением:

$$\tilde{K}_{n-1}^2(y) \Leftrightarrow y_k G_{ij}^k x^i x^j = 0. \quad (19)$$

Итак, каждой гиперплоскости  $u \in A_0$  пространства  $P_n$ , соответствующей точке  $B \in Q_n$ , в этом пространстве отвечает гиперконус  $\tilde{K}_{n-1}^2(y)$  второго порядка с вершиной в точке  $A_0$ .

Точке  $B \in Q_n$  в соответствующем проективном пространстве  $P_n$  сопоставим точку

$$\bar{Z} = z^0 \bar{A}_0 + z^i \bar{A}_i. \quad (20)$$

Полярой этой точки относительно гиперконуса (19) является гиперплоскость  $\tilde{y} \ni A_0$ , которая в проективных координатах репера  $P$  определяется уравнением:

$$\tilde{y} \Leftrightarrow y_k G_{ij}^k x^i x^j = 0, \quad (z^i - \text{фиксированы}). \quad (21)$$

Таким образом, с учетом (16), (20), и (21) получаем, что каждой точке  $B \in Q_n$  отвечает центропроективное преобразование

$$\Pi(z) = \{G_{ij}^k z^j\} \quad (22)$$

с центром в точке  $A_0$ , соответствующее точке  $\bar{Z} \in P_n$ , которое гиперплоскость  $u$  переводит в гиперплоскость  $\tilde{y}$ . Из (22) замечаем, что точке  $B \in Q_n$  в проективном пространстве  $P_n$  в силу (13) отвечает гиперплоскость

$$L_{n-1} = \{Z | \text{ter } \Pi(z) = 0\} \Leftrightarrow z^0 - G_i z^i = 0, \quad (23)$$

которая в общем случае не проходит через точку  $A_0$ . Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 2.1.** С каждым отображением  $V_{n,n}: Q_n \rightarrow P_n$  в общем случае инвариантным образом ассоциируется отображение

$$f_n^{2n}: Q_n \rightarrow M^{2n} \quad (24)$$

аффинного пространства  $Q_n$  в многообразии  $M^{2n}$  всех невырожденных нуль-пар  $\{L_{n-1}; A_0\}$  проективного пространства  $P_n$ .

Проводится с учетом (13), (10) и (11) канонизация проективного репера  $P$  пространства  $P_n$ , при которой

$$G_i = 0 \Rightarrow A_{ab}^k B_k^a = 0. \quad (25)$$

Из дифференциальных уравнений (14) с учетом (25) получаются следующие дифференциальные уравнения:

$$\omega_i^0 = A_{ia} \theta^a, \quad A_{ia} = \frac{1}{n+1} G_{ika}^k. \quad (26)$$

Здесь величины  $A_{ia}$  удовлетворяют в силу (1) и (2) дифференциальным уравнениям:

$$dA_{ia} - A_{ja} \Omega_i^j - A_{ib} \theta_a^b = A_{ab} \theta^b, \quad A_{|ab|} = 0. \quad (27)$$

Заметим, что дифференциальные уравнения (26) и (27) свидетельствуют в соответствии с [7] о существовании канонизации репера  $P$  типа (25).

Из (23) следует, что канонизация типа (25) означает, что

$$L_{n-1} = (\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n) \Leftrightarrow x^0 = 0. \quad (28)$$

Отметим, что дифференциальные уравнения (5), (7), (26) и (27) являются дифференциальными уравнениями отображения (24).

**2.2.** Каждой точке  $B \in Q_n$  сопоставим направление

$$u = (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a) u^a \in Q_n. \quad (29)$$

Из (2) и (28) с учетом (26) следует, что вдоль направления  $u$  точка  $A_0 \in P_n$  описывает линию с касательной

$$x = (\bar{A}_0, \bar{A}_i) A_a^i u^a, \quad (30)$$

а характеристика  $\text{Ch}(L_{n-1})_u$  гиперплоскости  $L_{n-1}$  вдоль направления  $u$ , т. е. пересечение  $L_{n-1}$  со своей бесконечно близкой  $(L_{n-1})'$  первого порядка вдоль  $u$ , определяется в точечных координатах  $x^i$  проективного репера  $P$  пространства  $P_n$  уравнениями

$$x^0 = 0, \quad A_{ia} x^i u^a = 0. \quad (31)$$

Из (29–31) замечаем, что каждой точке  $B \in Q_n$  в аффинном пространстве  $Q_n$  отвечает гиперконус  $\hat{Q}_{n-1}^2$  второго порядка с вершиной  $B$

$$\hat{Q}_{n-1}^2 = \{u \in Q_n | x \cap L_{n-1} \in \text{Ch}(L_{n-1})_u\},$$

который определяется в аффинных точечных координатах аффинного репера  $Q$  уравнением:

$$g_{ab} u^a u^b = 0. \quad (32)$$

Здесь симметрические величины  $g_{ab}$  определяются по формулам и в силу (27), (11), и (12) удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$g_{ab} = \frac{1}{2} A_{i(a} A_{b)}^i, \quad dg_{ab} - g_{cb} \theta_a^c - g_{ac} \theta_b^c = g_{abc} \theta^c, \quad (33)$$

причем явный вид величин  $g_{abc}$  для нас несущественный.

Из (33) с учетом (11) замечаем, что гиперконус  $\hat{Q}_{n-1}^2 \subset Q_n$  в точке  $B \in Q_n$  является прообразом гиперконуса  $Q_{n-1}^2 \in P_n$  второго порядка с вершиной в точке  $A_0 \in P_n$ , который определяется уравнением

$$C_{kj} x^k x^j = 0.$$

Здесь симметрические величины  $C_{kj}$  определяются по формулам и в силу (32), (7), (12) и (27) удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} C_{kj} &= \frac{1}{2} A_{(k|a} B_j^a = g_{ab} B_k^a B_j^b, \\ dC_{kj} - C_{kj} \Omega_j^i - C_{ij} \Omega_k^i &= C_{kja} \theta^a, \end{aligned} \quad (34)$$

причем явный вид величин  $C_{kja}$  для нас несущественный.

**Замечание 2.1.** Из (34) замечаем, что в общем случае гиперконус  $Q_{n-1}^2 \subset P_n$  в точке  $B \in Q_n$  является невырожденным, (не вырождается в гиперконус по крайней мере с прямолинейной вершиной, проходящей через точку  $A_0 \in P_n$ ), т. е.

$$\det[C_{kj}] \neq 0.$$

Поэтому в точке  $B \in Q_n$  можно ввести в рассмотрение симметрические величины  $C^{ij}$  по формулам

$$C^{ij} C_{jk} = \delta_k^i,$$

которые с учетом (34) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dC^{ij} + C^{kj} \Omega_k^i + C^{ik} \Omega_a^j = C_a^{ij} \theta^a. \quad (35)$$

Здесь явный вид величин  $C_a^{ij}$  для нас несущественный.

**Замечание 2.2.** Из (33) следует, что в общем случае гиперконус  $Q_{n-1}^2 \subset Q_n$  в точке  $B \in Q_n$  является невырожденным, т. е.

$$\det[g_{ab}] \neq 0. \quad (36)$$

Это дает возможность ввести в рассмотрение симметрические величины  $g^{ac}$  по формулам:

$$g^{ac} g_{cb} = \delta_a^b. \quad (37)$$

которые с учетом (33) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dg^{ac} + g^{bc} \theta_b^a + g^{ab} \theta_b^c = g_b^{ac} \theta^b. \quad (38)$$

Здесь явный вид величин  $g_b^{ac}$  для нас несущественный.

В каждой точке  $B \in Q_n$  рассмотрим следующие величины:

$$C_i^j = A_{i(a} A_b^j g^{ab}; \quad c_i = G_{ij}^k C_k^j. \quad (39)$$

Здесь величины  $G_{ij}^k$  определяются по формулам (13). Из (14), (35)–(38) и (7) получаются дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют величины (39):

$$dC_i^j + C_i^k \Omega_k^j - C_k^j \Omega_i^k = C_{ia}^j \theta^a,$$

$$dc_i - c_j \Omega_i^j = \check{c}_{ia} \theta^a.$$

Здесь явный вид величин, стоящих при  $\theta^a$ , для нас несущественный.

Точке  $B \in Q_n$  сопоставим в соответствующей гиперплоскости  $L_{n-1} \subset P_n$  (28) аналитическую точку  $\bar{X} = x^i \bar{A}_i$ , отвечающую геометрической точке  $X$ .

Из (5), (6) и (31) следует, что множество всех направлений (29) в  $Q_n$ , образы которых при отображении (4) пересекают гиперплоскость  $L_{n-1} \subset P_n$  в точках  $\text{Ch}(L_{n-1})_n$ , образует в  $Q_n$  гиперплоскость  $\Gamma_{n-1}(X)$ , определяемую в точечных аффинных координатах  $u^a$  репера  $Q$  уравнением

$$x^j A_{ja} u^a = 0.$$

Образ полюса этой гиперплоскости относительно гиперконуса (32) при отображении (4) с учетом (39), (35) и (37) пересекает гиперплоскость  $L_{n-1} \subset P_n$  в точке  $Y$  с аналитической точкой  $\bar{Y} = y^j \bar{A}_j = C_j^i x^i \bar{B}_i$ . Такова геометрическая интерпретация центропроективного преобразования

$$\bar{\Pi} = \{C_j^i\} \quad (40)$$

пространства  $P_n$  в себя с центром в точке  $A_0 \in P_n$ .

Из (22) и (40) замечаем, что множество всех прямых  $z = (\bar{A}_0, \bar{A}_i) z^i \in P_n$ , отвечающих точке  $B \in Q_n$ , таких, что соответствующие им произведения центропроективных преобразований  $\Pi(z)$  и  $\bar{\Pi}^*$  имеют нулевые следы, образует в силу (39) в проективном пространстве  $P_n$  гиперплоскость  $L_{n-1}^* \ni A_0$ , определяемую в проективных координатах уравнением

$$c_j x^j = 0. \quad (41)$$

Таким образом, с учетом (41) доказана следующая теорема.

**Теорема 2.2.** С каждым отображением  $V_{n,n}: Q_n \rightarrow P_n$  в общем случае инвариантным образом ассоциируется отображение

$$f_m^{2n-1}: Q_n \rightarrow M^{2n-1}$$

аффинного пространства  $Q_n$  в многообразии  $M^{2n-1}$  всех вырожденных нуль-пар  $\{L_{n-1}^*; A_0\}, (A_0 \in L_{n-1}^*)$  проективного пространства  $P_n$ .

#### Заключение

Теоремы 2.1 и 2.2 свидетельствуют о том, что изучение отображения  $V_{n,n}$  инвариантным образом в общем случае сводится к изучению отображений  $f_n^{2n}$  и  $f_n^{2n-1}$ . Наибольший интерес, по нашему мнению, представляет отображение  $f_n^{2n}$ . Во-первых, потому что для многообразия  $M^{2n}$  применим принцип двойственности: если на многообразии  $M^{2n}$  какой-нибудь результат связан с гиперплоскостью  $L_{n-1} \subset P_n$ , входящей в элемент этого многообразия, то аналогичный результат имеет место и для соответствующей точки  $A_0 \in P_n$ ,  $A_0 \in L_{n-1}$ , и наоборот. Во-вторых, как будет показано в следующих публикациях, с отображением  $f_n^{2n-1}$  инвариантным образом ассоциируется отображение  $f_n^{2n}$ . Поэтому для изучения отображения  $f_n^{2n-1}$  можно использовать результаты, имеющие место для отображения  $f_n^{2n}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евтушик П.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геом. – 1979. – Т. 9. – С. 3–246.
2. Лаптев Г.Ф. К инвариантной теории дифференцируемых отображений // Тр. Геом. Сем. – 1974. – № 16. – С. 37–42.
3. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Итоги науки. Сер. Геометрия. – 1965. – Т. – С. 65–107.
4. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Итоги науки. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. – 1971. – Т. – С. 153–174.
5. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды московского математического общества. – М., 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
6. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИИТТ, 1948. – 432 с.
7. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – Р. 231–240.

Поступила 15.02.2013 г.

УДК 517

ПОЛИНОМЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ЛОКАЛЬНОМ ДРОБНОМ АНАЛИЗЕ  
НА ОСНОВЕ  $d$ -ОПЕРАТОРА

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет  
E-mail: vachurikov@list.ru

Показано, что в локальном дробном анализе имеются достаточно простые интегрируемые функции нецелочисленных порядков, базовая первообразная соответствующего порядка от которых равна нулю.

**Ключевые слова:** $d$ -оператор, полиномы дифференцирования, полиномы интегрирования.**Key words:** $d$ -operator, differentiation polynomials, integration polynomials.**Введение**

В локальном дробном анализе появляются новые функции, зависящие от порядка интегриродифференцирования, которые можно назвать элементарными и которые в стандартном анализе или обрастают константы, в частности в ноль, или вообще теряют смысл, поэтому такие функции в стандартном анализе отсутствуют и их удобно приравнять к нулю [1, 2].

Аналоги функций стандартного анализа в локальном дробном анализе в общем случае имеют другие свойства, зависящие от их порядка. Более того, для многих функций в локальном дробном анализе имеет место вырождение, когда они имеют не один аналог, а более одного, конечное или бесконечное счётное множество [2, 3].

В частности, в локальном дробном анализе появляются своеобразные функции, которые можно отнести к элементарным функциям локального дробного анализа, которые были названы *полиномами дифференцирования*.

**Полиномы дифференцирования**

**Определение.** Ненулевая интегрируемая функция  $C_{-s}(x)$ , выражающаяся через дробнестепенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{-k-s}; k = 0, 1, 2, 3, \dots; \mathbb{N}; b, s \in \mathbb{C}; b, s = \text{const},$$

с шагом равным 1, будем называть *полиномом дифференцирования*.

*Шаг ряда* – это модуль разности показателей степеней степенных функций любых двух соседних элементов дробнестепенного ряда.

Функций, аналогичных полиномам дифференцирования в стандартном анализе, нет.

**Теорема.** Первообразная порядка  $s$  равна нулю с точностью до сложения с полиномом интегрирования  $C_s(x)$ .

Первообразная функция называется *базовой первообразной*, если её полином интегрирования, в силу его произвольности, приравнять к нулю.

Тогда утверждение теоремы равносильно тому, что базовая первообразная нецелочисленного порядка  $s$  от полинома дифференцирования порядка  $s$  равна нулю.

**Доказательство.** Используя  $d$ -оператор дробного интегрирования порядка  $s$  [3, 4], легко проинтегрировать полином дифференцирования

$$\begin{aligned}
 d^s x : C_{-s}(x) &= d^s x : \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{-k-s} = C_{-s}^{(-s)}(x) + C_s(x) = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\Gamma(-k-s+1)}{\Gamma(-k-s+s+1)} x^{-k-s+s} + C_s(x) = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\Gamma(-k-s+1)}{\Gamma(-k+1)} x^{-k} + C_s(x) = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\Gamma(-k-s+1)}{\infty} x^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-k+s} = \\
 &= 0 + C_s(x) = C_s(x); \quad x \in \mathbb{R}; s, a_k, b_k \in \mathbb{C}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $s, a_k, b_k = \text{const}$ ;  $s \neq 0, 1, 2, 3, \dots$ ;  $C_{-s}^{(-s)}(x)$  – базовая первообразная порядка  $s$  от полинома дифференцирования порядка  $s$ .

Полином дифференцирования задаётся через степенной ряд, в котором элементы ряда пропорциональны степенным функциям  $x^{-k-s}$ , которые обращаются в ноль при однократном воздействии  $d$ -оператором интегрирования порядка  $s$

$$d^s x : x^{-k-s} = 0 + C_s(x).$$

**Определение.** Вещественные степенные функции  $x^{-k-s}$  ( $k=0, 1, 2, 3, \dots$ ) будем называть *нильпотентными функциями дифференцирования комплексного порядка  $s$  ( $s \neq 0, 1, 2, 3, \dots$ ) степени 1*.

Введём и более общие нильпотентные функции дифференцирования.

**Определение.** Степенные функции  $x^{-k-ps}$  ( $k=0, 1, 2, 3, \dots$ ) будем называть *нильпотентными функциями дифференцирования порядка  $s$  целочисленной вещественной степени  $p$* .

**Теорема.** Если последовательно  $p$  раз проинтегрировать *нильпотентные функций дифференцирования порядка  $s$  степени  $p$*   $d$ -оператором порядка  $s$ , приняв получающиеся полиномы интегрирования равными нулю в силу их произвольности ( $C_s(x)=0$ ), то получим ряд равенств

$$\begin{aligned}
 d^s x : x^{-k-ps} &= \frac{\Gamma(-k-ps)}{\Gamma(-k-(p-1)s+1)} x^{-k-(p-1)s}; \\
 d^s x : d^s x : x^{-k-ps} &= \frac{\Gamma(-k-ps)}{\Gamma(-k-(p-2)s+1)} x^{-k-(p-2)s}; \\
 &\dots \\
 \underbrace{d^s x : d^s x : \dots d^s x : x^{-k-ps}}_n &= \frac{\Gamma(-k-ps)}{\Gamma(-k)} x^{-k} = \\
 &= \frac{\Gamma(-k-ps)}{\infty} x^{-k} = 0.
 \end{aligned}$$

Из данной теоремы следует равенство для полиномов дифференцирования порядка  $ps$

$$\underbrace{d^s x : d^s x : \dots d^s x : C_{-ps}(x)}_p = d^{ps} x : C_{-ps}(x) = 0.$$

Заметим, что в локальном дробном анализе существуют степенные интегрируемые функции отличные от нуля, базовая первообразная от которых равна нулю. В стандартном анализе степенные функции с такими свойствами не встречаются.

Аналогично можно рассмотреть степенные функции для случая дробного дифференцирования.

**Определение.** Степенные функции  $x^{-k+s}$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) будем называть *нильпотентными функциями интегрирования комплексного порядка  $s$  степени 1*.

Введём и более общие нильпотентные функции интегрирования.

**Определение.** Степенные функции  $x^{-k+ps}$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) будем называть *нильпотентными функциями интегрирования комплексного порядка  $s$  целочисленной вещественно степени  $p$* .

**Теорема.** Если последовательно  $p$  раз проинтегрировать *нильпотентные функций интегрирования порядка  $s$  степени  $p$*   $d$ -оператором порядка  $s$ , приняв получающиеся полиномы дифференцирования равными нулю в силу их произвольности ( $C_{-s}(x)=0$ ), то получим ряд равенств

$$\begin{aligned}
 d^{-s} x : x^{-k+ps} &= \frac{\Gamma(-k+ps)}{\Gamma(-k+(p-1)s+1)} x^{-k+(p-1)s}; \\
 d^{-s} x : d^{-s} x : x^{-k+ps} &= \frac{\Gamma(-k+ps)}{\Gamma(-k+(p-2)s+1)} x^{-k+(p-2)s}; \\
 &\dots \\
 \underbrace{d^{-s} x : d^{-s} x : \dots d^{-s} x : x^{-k+ps}}_n &= \frac{\Gamma(-k+ps)}{\Gamma(-k)} x^{-k} = \\
 &= \frac{\Gamma(-k+ps)}{\infty} x^{-k} = 0.
 \end{aligned}$$

Из данной теоремы следует равенство для полиномов интегрирования порядка  $ps$

$$\underbrace{d^{-s} x : d^{-s} x : \dots d^{-s} x : C_{ps}(x)}_p = d^{-ps} x : C_{ps}(x) = 0.$$

Рассмотрим интегрирование ряда полинома дифференцирования для случаев целочисленных порядков  $m$ , тогда будет справедливо следующее утверждение.

**Теорема.** Базовая первообразная целочисленного порядка  $m=0, 1, 2, 3, \dots$  от полинома дифференцирования  $C_{-m}(x)$  порядка  $m$  отлична от нуля

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}
 d^m x : C_{-m}(x) &= d^m x : \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{-k-m} = C_{-m}^{(-m)}(x) + C_m(x) = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\Gamma(-k-m+1)}{\Gamma(-k-m+m+1)} x^{-k-m+m} + C_m(x) = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\Gamma(-k-m+1)}{\Gamma(-k+1)} x^{-k} + C_m(x) = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{(-1)^m \Gamma(-k+1)}{k(k+1)(k+2) \dots (k-1+m) \Gamma(-k+1)} x^{-k} + \\
 &+ \sum_{k=0}^{m-1} b_k n^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{(-1)^m}{k(k+1)(k+2) \dots (k-1+m)} x^{-k} + \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{m-1} b_k n^k.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$b_k = \text{const}; x \in \mathbb{R}; s, a_k, b_k \in \mathbb{C};$$

$$s, a_k, b_k = \text{const}; s \neq 0, 1, 2, 3, \dots$$

Рассмотрим доказательство по-другому, исходя из равенства  $d$ -оператора для интегрирования целочисленных порядков степенных функций с отрицательными целочисленными показателями

$$d^m x : x^{-n} = \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{(n-1)!} x^{m-n} + C_m(x).$$

Здесь

$$m = 0, 1, 2, \dots; n \in \mathbb{N}; m < n.$$

Тогда доказывается просто

$$d^m x : x^{-n-m} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (n+m-m-1)!}{(n+m-1)!} x^{m-m-n} + C_m(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (n-1)!}{(n+m-1)!} x^{m-m-n} + C_m(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (n-1)!}{(n+m-1)!} x^{-n} + C_m(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{n(n+1)(n+2)\dots(n+m-1)} x^{-n} + C_m(x).$$

Здесь

$$m = 0, 1, 2, \dots; n \in \mathbb{N}; m < n.$$

Очевидно, производная целочисленного порядка  $m$  от базовой первообразной того же порядка  $m$  в общем случае отлична от нуля

$$d^m x : C_{-m}(x) = C_{-m}^{(-m)}(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{(-1)^m}{k(k+1)(k+2)\dots(k-1+m)} x^{-k} \neq 0.$$

Это значит, что для целочисленных порядков  $m$ , включая нулевой порядок, рассматриваемые функции  $C_{-m}(x)$  полиномами дифференцирования не являются. В частности, в стандартном анализе, когда порядок равен 1, функции  $C_{-1}(x)$  тоже не являются полиномами дифференцирования.

Поэтому для целочисленных порядков полиномы дифференцирования, для удовлетворения равенства  $d^m x : C_{-m}(x) = 0$ , необходимо принять равными нулю

$$C_{-m}(x) = 0; m = 1, 2, 3, \dots$$

В тривиальном случае дифференцирования порядка 0, что соответствует единичному оператору интегрирования, будем считать, что полином дифференцирования тоже равен нулю

$$C_0(x) = C_{-0}(x) = 0; d^0 x : C_0(x) = \mathbf{1}; C_0(x) = 0.$$

В результате полиномы дифференцирования можем записать для всех рассмотренных случаев

$$C_{-s}(x) = \begin{cases} C_0(x) = 0; s = 0; \\ C_{-\alpha}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{-k-\alpha}; s = \alpha; \alpha, b_k \in \mathbb{C}; \\ \alpha, b_k = \text{const}; s \neq 0, 1, 2, 3, \dots; \\ C_{-m}(x) = 0; s = m; m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Если полином дифференцирования выразить через дискретную переменную  $n$ , пробегающую целочисленные значения ( $n \in \mathbb{Z}$ ), вместо непрерывной переменной  $x$ , то получим частный случай полинома дифференцирования

$$C_{-s}(n) = \begin{cases} C_0(n) = 0; s = 0; \\ C_{-\alpha}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k n^{-k-\alpha}; s = \alpha; \alpha, b_k \in \mathbb{C}; \\ \alpha, b_k = \text{const}; s \neq 0, 1, 2, 3, \dots; \\ C_{-m}(n) = 0; s = m; m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Дискретный интеграл порядка  $s$  от полиномов дифференцирования порядка  $s$  будет

$$d^s n : C_{-s}(n) = C_s(n).$$

Если полином интегрирования  $C_s(n)$  принять равным нулю, в силу его произвольности, то получим

$$d^s n : C_{-s}(n) = 0.$$

В случае мнимых порядков  $i\gamma$  полиномы дифференцирования будут

$$C_{-i\gamma}(x) = \begin{cases} C_0(x) = 0; \gamma = 0; \\ C_{-i\gamma}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-k-i\gamma}; \\ \gamma \in \mathbb{R}; \gamma > 0; a_k \in \mathbb{C}; \gamma, a_k = \text{const}. \end{cases}$$

Неопределённый интеграл мнимого порядка  $i\gamma$  от полинома дифференцирования того же порядка будет

$$d^{i\gamma} x : C_{-i\gamma}(x) = C_{i\gamma}(x).$$

Если полином интегрирования  $C_{i\gamma}(x)$  приравнять к нулю, то будет

$$d^{i\gamma} x : C_{-i\gamma}(x) = 0.$$

Существование полиномов дифференцирования говорит о том, что операция дифференцирования нецелочисленных порядков может оказаться такой же неоднозначной, т. е. с точностью до сложения с полиномами дифференцирования, как неоднозначна операция интегрирования с точностью до сложения с полиномами интегрирования, что можно записать

$$d^{-s} x : f(x) = f^{(s)}(x) + C_{-s}(x).$$

Неопределённый интеграл порядка  $s$  от полученной функции будет

$$\begin{aligned} d^s x : (f^{(s)}(x) + C_{-s}(x)) &= \\ &= (f^{(s)}(x) + C_{-s}(x))^{(s)} + C_s(x) = \\ &= f^{(s-s)}(x) + C_{-s}^s(x) + C_s(x) = f(x) + C_s(x). \end{aligned}$$

Если вначале проинтегрировать функцию, получим

$$d^{-s} x : f(x) = F^{(s)}(x) + C_s(x).$$

Последующее дифференцирование даёт

$$\begin{aligned} d^{-s} x : (F^{(s)}(x) + C_s(x)) &= \\ &= (F^{(s)}(x) + C_s(x))^{(s)} + C_{-s}(x) = \\ &= F^{(s-s)}(x) + C_s^{(s)}(x) + C_{-s}(x) = \\ &= F^{(0)}(x) + C_{-s}(x) = f(x) + C_{-s}(x). \end{aligned}$$

Тогда легко получить коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} [d^s x; d^{-s} x] : f(x) &= (d^s x : d^{-s} x - d^{-s} x : d^s x) f(x) = \\ &= d^s x : d^{-s} x : f(x) - d^{-s} x : d^s x : f(x) = \\ &= f(x) + C_s(x) - f(x) + C_{-s}(x) = C_s(x) - C_{-s}(x). \end{aligned}$$

Здесь  $[d^s x; d^{-s} x]$  – коммутатор.

При перестановке операторов в коммутаторе получим обратное коммутационное соотношение

$$\begin{aligned} [d^{-s} x; d^s x] : f(x) &= -[d^s x; d^{-s} x] : f(x) = \\ &= d^{-s} x : d^s x : f(x) - d^s x : d^{-s} x : f(x) = \\ &= f(x) + C_{-s}(x) - f(x) + C_s(x) = C_{-s}(x) - C_s(x). \end{aligned}$$

Полиномы интегрирования [3, 4] и полиномы дифференцирования можно для удобства объединить в одну функцию.

**Определение.** Полиномом интегродифференцирования комплексного порядка  $s$  будем называть функцию  $C_{\pm s}(x)$ , задаваемую равенствами

$$C_{\mp s}(x) = \begin{cases} C_{\alpha}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-k+\alpha}; s = \alpha; a_k \in \mathbb{C}; \\ \alpha, a_k = \text{const}; \alpha \neq 1, 2, 3, 4, \dots; \\ \alpha = \chi + i\gamma \wedge \alpha = \pm \chi \mp i\gamma; \\ \chi, \gamma \in \mathbb{R}; \chi, \gamma = \text{const}; \chi, \gamma \geq 0; \\ C_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k; s = m; a_k = \text{const}; m \in \mathbb{N}; \\ C_0(x) = 0; s = 0; \\ C_{-\alpha}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{-k-\alpha}; s = \alpha; b_k \in \mathbb{C}; \\ \alpha, b_k = \text{const}; \alpha \neq 0, 1, 2, 3, \dots; \\ \alpha = \chi + i\gamma \wedge \alpha = \pm \chi \mp i\gamma; \\ \chi, \gamma \in \mathbb{R}; \chi, \gamma = \text{const}; \chi, \gamma \geq 0; \\ C_{-m}(x) = 0; s = m; m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Если перед значением порядка  $s$  у полинома интегродифференцирования стоит знак плюс, то это соответствует полиному интегрирования порядка  $s$  (первые два равенства), а когда знак минус, то это соответствует полиному дифференцирования по-

рядка  $s$ , (четвёртое и пятое равенства). В случае порядка  $s$ , равного нулю, полиномы дифференцирования и полиномы интегрирования совпадают и равны нулю (третье равенство).

Константы  $a_k$  и  $b_k$  являются соответственно неопределёнными константами интегрирования и константами дифференцирования. Поэтому полиномы интегродифференцирования являются произвольными функциями в том же смысле, что и константы интегрирования в стандартном анализе.

В случае целочисленных порядков, включая стандартный анализ (порядок  $s=1$ ), отсутствуют полиномы дифференцирования, поэтому они в этих случаях были приравнены к нулю.

В дробном анализе целочисленных порядков, и в частности в стандартном анализе, отсутствуют полиномы дифференцирования, которые для целочисленных порядков, включая нулевой, были приравнены к нулю.

В локальном дробном анализе в общем случае производная комплексного порядка  $s$  от функции  $f(x)$  будет

$$d^{-s} x : f(x) = f^{(s)}(x) + C_{-s}(x) = F^{(-s)}(x) + C_{-s}(x).$$

Здесь функцию  $f^{(s)}(x) \equiv F^{(-s)}(x)$  будем называть базовой производной порядка  $s$  функции  $f(x)$ . Другими словами, базовая производная – это такая производная, у которой полином дифференцирования равен нулю.

Неопределённый интеграл в локальном дробном анализе комплексного порядка  $s$  от функции  $f(x)$  в общем случае будет

$$d^s x : f(x) = F^{(s)}(x) + C_s(x) = f^{(-s)}(x) + C_s(x).$$

Здесь функция  $F^{(s)}(x) \equiv f^{(-s)}(x)$  является базовой первообразной порядка  $s$  функции  $f(x)$ .

Общую объединённую формулу дробного интегродифференцирования порядка  $s$  функции  $f(x)$  можно записать

$$d^{\pm s} x : f(x) = f^{(\mp s)}(x) + C_{\pm s}(x) = F^{(\pm s)}(x) + C_{\pm s}(x).$$

В частности, при интегродифференцировании порядка  $s$  произвольных полиномов интегродифференцирования  $C_{\pm s}(x)$  и  $\tilde{C}_{\mp s}(x)$  будут выполняться равенства

$$d^{\mp s} x : C_{\pm s}(x) = \tilde{C}_{\mp s}(x).$$

Расписав данное соотношение в виде двух равенств, получим

$$d^{-s} x : C_s(x) = \tilde{C}_{-s}(x);$$

$$d^s x : C_{-s}(x) = \tilde{C}_s(x).$$

Если полиномы интегродифференцирования, в силу их произвольности, приравнять к нулю (приближение нулевого полинома интегродифференцирования),  $\tilde{C}_{\pm s}(x) = \tilde{C}_{\mp s}(x) = 0$ , то будут справедливы равенства

$$d^{\mp s} x : C_{\pm s}(x) = 0.$$

Или в виде двух равенств

$$d^{-s}x : C_s(x) = 0;$$

$$d^s x : C_{-s}(x) = 0.$$

Из этих соотношений следует важное утверждение.

**Теорема.** Базовая производная порядка  $s$  от полиномов интегрирования порядка  $s$  и базовая первообразная порядка  $s$  от полиномов дифференцирования порядка  $s$  равны нулю.

**Доказательство.** Второе и третье равенства выполняются по определению.

$$d^0 x : C_0(x) = 0; \quad d^m x : C_{-m}(x) = 0; \quad m \in \mathbb{N}.$$

Первое и четвёртое равенства легко доказываются

$$\begin{aligned} d^{\pm\alpha} x : C_{\mp\alpha}(x) &= d^{\pm\alpha} x : \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-k \mp \alpha} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(-k \mp \alpha + 1)}{\Gamma(-k \mp \alpha \pm \alpha + 1)} x^{-k \mp \alpha \pm \alpha} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(-k \mp \alpha + 1)}{\infty} x^{-k} = 0; \\ &\quad -k \mp \alpha \neq -1, -2, -3, \dots \end{aligned}$$

Доказательство пятого равенства следующее

$$\begin{aligned} d^{-m} x : C_m(x) &= d^{-m} x : \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-m+1)} x^{k-m} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(k+1)}{\infty} x^{k-m} = 0; \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned}$$

В частном случае можно приравнять к нулю полиномы дифференцирования, в силу их произволь-

ности,  $\tilde{C}_{-s}(x)=0$  (приближение нулевого полинома дифференцирования); тогда получим соотношения больше соответствующие стандартному анализу

$$d^{-s} x : C_s(x) = 0;$$

$$d^s x : 0 = \tilde{C}_s(x).$$

Аналогично если приравнять к нулю уже полиномы интегрирования,  $\tilde{C}_{+s}(x)=0$ , в силу их произвольности, будут выполняться равенства

$$d^{-s} x : 0 = \tilde{C}_{-s}(x);$$

$$d^s x : C_{-s}(x) = 0.$$

Такое приближение назовём *приближением нулевого полинома интегрирования*, которое не является привычным, но в локальном дробном анализе оно вполне возможно.

### Вывод

Полиномы интегродифференцирования делают операции интегрирования и дифференцирования неоднозначными в локальном дробном анализе для всех порядков за исключением интегродифференцирования нулевого порядка и дифференцирования целочисленных порядков, включая порядок 1, соответствующий стандартному анализу.

Полиномы интегрирования в локальном дробном анализе переходят в константы интегрирования в стандартном анализе. Что касается роли полиномов интегрирования в локальном дробном анализе и в его приложениях, то она аналогична роли констант интегрирования в стандартном анализе. Вопрос о возможном применении полиномов дифференцирования в самой математике и в приложениях не совсем ясен и требует более глубокого исследования.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуриков В.А. Дробный анализ на основе оператора Адамара // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 2. – С. 16–20.
2. Чуриков В.А. Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе  $d$ -оператора. – Томск: Изд-во ТПУ, 2010. – 118 с.
3. Чуриков В.А. Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. – Томск: Изд-во ТПУ, 2011. – 72 с.
4. Чуриков В.А. Локальный  $d$ -оператор дифференцирования и интегрирования конечных вещественных порядков для дробного анализа // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318. – № 2. – С. 5–10.

Поступила 23.01.2013 г.



УДК 519.25 (550.831.05)

## ОЦЕНКА ФУНКЦИИ АВТОКОРРЕЛЯЦИИ В ВИДЕ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ЭКСПОНЕНТ

И.Г. Устинова, Е.Г. Пахомова

Томский политехнический университет  
E-mail: igu@sibmail.com

Рассмотрена аппроксимация автокорреляционной функции в виде линейной комбинации экспонент. На примерах показательной и показательно-косинусоидальной автокорреляционных функций показана возможность такой аппроксимации.

### Ключевые слова:

Автокорреляционная функция, сейсмические данные, обработка сейсмической информации.

### Key words:

Autocorrelation function, seismic data, processing of seismic data.

Функция автокорреляции  $R[\tau]$  стационарного случайного процесса является одной из его важнейших характеристик второго порядка [1], так как позволяет решать следующие практические задачи:

- 1) оценивать корреляционные свойства сигналов и помех;
- 2) производить расчеты весовых функций и частотных характеристик оптимальных фильтров, базирующихся на знании автокорреляционной функции (АКФ) сигналов и помех [2];
- 3) оценивать разрешающую способность сейсмической записи [3].

Часто для оценки функции автокорреляции приходится использовать короткие отрезки сейсмических записей, поэтому вопрос о точности оценивания автокорреляционной функции имеет большое практическое значение. В данной статье рассмотрена возможность представления любой автокорреляционной функции в виде линейной комбинации экспонент.

### Постановка задачи

Рассмотрим некоторый случайный процесс с функцией автокорреляции  $R[\tau]=M[x(t)x(t+\tau)]$ , значения которой могут быть представлены в виде

$$R[\tau] = \sum_{k=1}^N \theta_k \varphi_k(\tau) + n(\tau), \quad (1)$$

где  $\varphi_k(\tau)$  – некоторые известные функции аргумента  $\tau$ , причем интегралы

$$\int_0^{+\infty} \varphi_i(\tau)\varphi_j(\tau)d\tau, \quad \int_0^{+\infty} R[\tau]\varphi_i(\tau)d\tau, \quad i, j = \overline{1, N} \quad (2)$$

сходятся,  $\hat{\theta}_k, k=\overline{1, N}$  – неизвестные параметры, а  $n(\tau)$  – случайные добавки, которые представляют собой независимые, одинаково распределенные случайные величины с  $M[n(\tau)]=0$  и  $D[n(\tau)]=\sigma^2$ . Задача состоит в построении оценки  $\hat{R}[\tau]$  функции  $R[\tau]$ .

### Решение задачи

Будем искать оценку автокорреляционной функции в виде:  $\hat{R}[\tau] = \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k \varphi_k(\tau)$ . Для нахождения не-

известных параметров  $\hat{\theta}_k, k=\overline{1, N}$  будем исходить из условия минимума ошибки аппроксимации:

$$\int_0^{+\infty} \left[ R[\tau] - \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k \varphi_k(\tau) \right]^2 d\tau \Rightarrow \min_{\hat{\theta}_k}. \quad (3)$$

Продифференцировав (3) по неизвестным параметрам  $\hat{\theta}_k, k=\overline{1, N}$ , получим систему  $N$  уравнений с  $N$  неизвестными:

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} \left[ R[\tau] - \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k \varphi_k(\tau) \right] \cdot \varphi_1(\tau) d\tau = 0, \\ \int_0^{+\infty} \left[ R[\tau] - \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k \varphi_k(\tau) \right] \cdot \varphi_2(\tau) d\tau = 0, \\ \dots \\ \int_0^{+\infty} \left[ R[\tau] - \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k \varphi_k(\tau) \right] \cdot \varphi_N(\tau) d\tau = 0, \end{cases}$$

из которой получаем систему в виде:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k \int_0^{+\infty} \varphi_k(\tau)\varphi_1(\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} R[\tau]\varphi_1(\tau)d\tau, \\ \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k \int_0^{+\infty} \varphi_k(\tau)\varphi_2(\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} R[\tau]\varphi_2(\tau)d\tau, \\ \dots \\ \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k \int_0^{+\infty} \varphi_k(\tau)\varphi_N(\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} R[\tau]\varphi_N(\tau)d\tau. \end{cases} \quad (4)$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} \varphi_1^2(\tau)d\tau & \int_0^{+\infty} \varphi_1(\tau)\varphi_2(\tau)d\tau & \dots & \int_0^{+\infty} \varphi_1(\tau)\varphi_N(\tau)d\tau \\ \int_0^{+\infty} \varphi_2(\tau)\varphi_1(\tau)d\tau & \int_0^{+\infty} \varphi_2^2(\tau)d\tau & \dots & \int_0^{+\infty} \varphi_2(\tau)\varphi_N(\tau)d\tau \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_0^{+\infty} \varphi_N(\tau)\varphi_1(\tau)d\tau & \int_0^{+\infty} \varphi_N(\tau)\varphi_2(\tau)d\tau & \dots & \int_0^{+\infty} \varphi_N^2(\tau)d\tau \end{bmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\theta}_1 \quad \hat{\theta}_2 \quad \dots \quad \hat{\theta}_N]^T,$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} R[\tau]\varphi_1(\tau)d\tau & \int_0^{+\infty} R[\tau]\varphi_2(\tau)d\tau & \dots & \int_0^{+\infty} R[\tau]\varphi_N(\tau)d\tau \end{bmatrix}^T,$$

тогда система (4) может быть записана в виде

$$\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Y}, \quad (5)$$

откуда получаем вектор оценок неизвестных параметров

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}. \quad (6)$$

**Частный случай**

Рассмотрим семейство автокорреляционных функций  $R_k[\tau] = \theta_k e^{-k\tau}$ ,  $k=1,2,3,\dots$ , т. е.  $\varphi_k(\tau) = e^{-k\tau}$ .

**Утверждение.** Любую автокорреляционную функцию  $R[\tau]$ , стремящуюся к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$  (что справедливо для физических приложений), можно аппроксимировать по методу наименьших квадратов линейной комбинацией экспонент [4]:

$$\hat{R}[\tau] = \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k e^{-k\tau}. \quad (7)$$

Так же как и при нахождении неизвестных параметров формулы (1) для нахождения коэффициентов  $\hat{\theta}_k$ ,  $k=1, N$  разложения (7) будем исходить из условия минимума ошибки аппроксимации (3), которое приводит к системе

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} \left[ R[\tau] - \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k e^{-k\tau} \right] \cdot e^{-\tau} d\tau = 0, \\ \int_0^{+\infty} \left[ R[\tau] - \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k e^{-k\tau} \right] \cdot e^{-2\tau} d\tau = 0, \\ \dots, \\ \int_0^{+\infty} \left[ R[\tau] - \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k e^{-k\tau} \right] \cdot e^{-N\tau} d\tau = 0, \end{cases}$$

из которой получаем, вычислив несобственные интегралы вида  $\int_0^{+\infty} e^{-(k+i)\tau} d\tau$ ,  $i = \overline{1, N}$ , систему

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N \frac{\hat{\theta}_k}{k+1} = \int_0^{+\infty} R[\tau] e^{-\tau} d\tau, \\ \sum_{k=1}^N \frac{\hat{\theta}_k}{k+2} = \int_0^{+\infty} R[\tau] e^{-2\tau} d\tau, \\ \dots, \\ \sum_{k=1}^N \frac{\hat{\theta}_k}{k+N} = \int_0^{+\infty} R[\tau] e^{-N\tau} d\tau, \end{cases} \quad (8)$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^N \frac{\hat{\theta}_k}{k+p} = \int_0^{+\infty} R[\tau] e^{-p\tau} d\tau. \quad (9)$$

Правая часть (9) есть преобразование Лапласа функции  $R[\tau]$ , тогда, используя свойство линейности, получим, что оригиналом  $\sum_{k=1}^N \frac{\hat{\theta}_k}{k+p}$  является

$$\sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k e^{-k\tau}, \text{ что и доказывает утверждение.}$$

**Пример 1**

Согласно [5] в приложениях при анализе временных последовательностей часто применяются стационарные случайные процессы с показательной функцией автокорреляции

$$R[\tau] = e^{-\alpha|\tau|}, \quad -\infty < \tau < +\infty, \quad \alpha > 0.$$

Мы рассмотрим АКФ представленного вида только для случая, когда  $0 \leq \tau < +\infty$ , т. е.  $R[\tau] = e^{-\alpha\tau}$ ,  $\alpha > 0$ . В этой ситуации система (8) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\hat{\theta}_1}{2} + \frac{\hat{\theta}_2}{3} + \dots + \frac{\hat{\theta}_N}{N+1} = \frac{1}{\alpha+1}, \\ \frac{\hat{\theta}_1}{3} + \frac{\hat{\theta}_2}{4} + \dots + \frac{\hat{\theta}_N}{N+2} = \frac{1}{\alpha+2}, \\ \dots, \\ \frac{\hat{\theta}_1}{N+1} + \frac{\hat{\theta}_2}{N+2} + \dots + \frac{\hat{\theta}_N}{2N} = \frac{1}{\alpha+N}. \end{cases} \quad (10)$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{N+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{N+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{N+1} & \frac{1}{N+2} & \dots & \frac{1}{2N} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \dots \\ \hat{\theta}_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha+1} \\ \frac{1}{\alpha+2} \\ \dots \\ \frac{1}{\alpha+N} \end{pmatrix},$$

тогда (10) может быть записана в виде (5), а ее решение в виде (6).

Нахождение матрицы  $\mathbf{X}^{-1}$  приведено в приложении, а сами элементы обратной матрицы имеют вид

$$a^{-1}_{ij} = \frac{(N+i)! \cdot (N+j)! \cdot (-1)^{i+j}}{(N-i)! \cdot (N-j)! \cdot i+j} \times \frac{1}{i! \cdot (i-1)!} \cdot \frac{1}{j! \cdot (j-1)!}.$$

В частности для диагональных элементов:

$$a^{-1}_{ii} = \left[ \frac{(N+i)!}{(N-i)!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2i} \cdot \left[ \frac{1}{i! \cdot (i-1)!} \right]^2.$$

Заметим, что  $N$  следует выбирать исходя из заданной точности приближения  $\varepsilon$ , используя тот факт, что  $R[0]=1$  и, следовательно,  $\left| 1 - \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_k \right| < \varepsilon$ .

Рассмотрим  $\alpha=1/2$ ,  $\varepsilon=0,05$ . Заданная точность до-

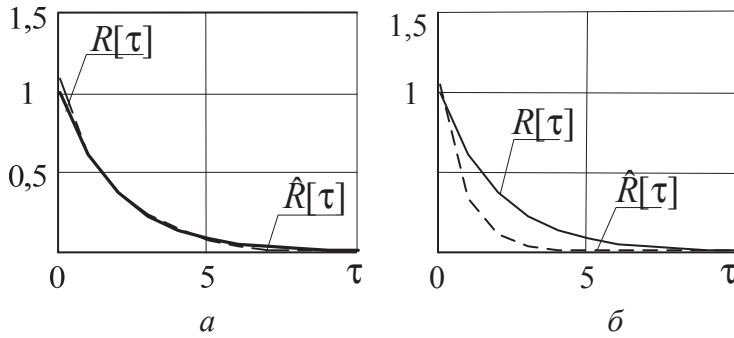


Рис. 1. Графики показательной автокорреляционной функции и ее оценки: а)  $R[\tau]=e^{-\tau/2}$ ; б)  $R[\tau]=e^{-1,1\tau}$

стигается при  $N=10$ , что представлено на рис. 1, а; при  $\alpha=1,1$  заданная точность достигается уже при  $N=2$ . На рис. 1, б представлен этот случай, когда  $N=9$ . Ситуация, когда  $\alpha \in \mathbb{N}$  тривиальная и возможность аппроксимации  $R[\tau]$  выражением (7) очевидна. Из приведенных рисунков видно, что аппроксимация показательной АКФ в виде линейной комбинации экспонент возможна даже при небольшом числе слагаемых.

Пример 2

На практике для описания формы автокорреляционной функции сейсмических колебаний часто используется показательно-косинусная АКФ

$$R[\tau] = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \quad -\infty < \tau < +\infty, \quad \alpha > 0,$$

где  $\omega_0$  – видимый период колебаний, а  $\alpha$  – коэффициент затухания. Рассмотрим данную функцию только для случая  $0 \leq \tau < +\infty$ , т. е.  $R[\tau] = e^{-\alpha\tau} \cos \omega_0 \tau$ ,  $\alpha > 0$ . В этом случае система (8) примет вид

$$\begin{cases} \frac{\hat{\theta}_1}{2} + \frac{\hat{\theta}_2}{3} + \dots + \frac{\hat{\theta}_N}{N+1} = \frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2 + \omega_0^2}, \\ \frac{\hat{\theta}_1}{3} + \frac{\hat{\theta}_2}{4} + \dots + \frac{\hat{\theta}_N}{N+2} = \frac{\alpha+2}{(\alpha+2)^2 + \omega_0^2}, \\ \dots, \\ \frac{\hat{\theta}_1}{N+1} + \frac{\hat{\theta}_2}{N+2} + \dots + \frac{\hat{\theta}_N}{2N} = \frac{\alpha+N}{(\alpha+N)^2 + \omega_0^2}. \end{cases}$$

Введя обозначения примера 1, получим данную систему в матрично-векторной форме (5), в которой

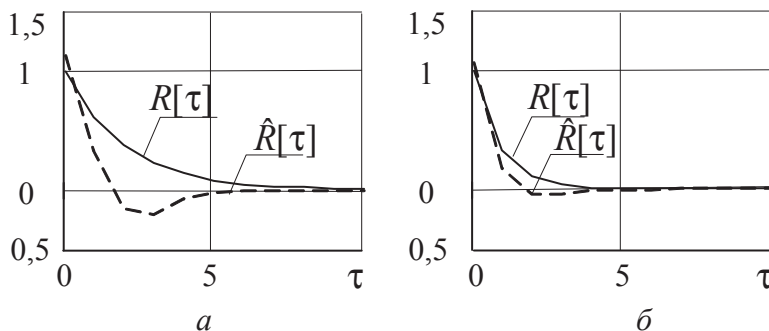


Рис. 2. Графики показательно-косинусной автокорреляционной функции и ее оценки: а)  $R[\tau]=e^{-\tau/2} \cos \tau$ ; б)  $R[\tau]=e^{-1,1\tau} \cos \tau$

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2 + \omega_0^2} \\ \frac{\alpha+2}{(\alpha+2)^2 + \omega_0^2} \\ \dots \\ \frac{\alpha+N}{(\alpha+N)^2 + \omega_0^2} \end{pmatrix}.$$

Решение системы (5) доставляется выражением (6).

Как и в примере 1 рассмотрим случай, в котором  $\alpha=1/2$ ,  $\varepsilon=0,05$  и, добавив условие  $\omega=1$ , заметим, что заданная точность достигается при  $N=7$ , что представлено на рис. 2, а; при  $\alpha=1,1$  заданная точность достигается уже при  $N=5$ . В этом случае можно сделать вывод аналогичный выводу примера 1, а именно: аппроксимация показательно-косинусной АКФ в виде линейной комбинации экспонент возможна даже при небольшом числе слагаемых.

Приложение

Пусть  $A=(a_{ij})$  – матрица порядка  $n$ , элементы которой имеют вид  $a_{ij} = \frac{1}{i+j}$ . Требуется найти ее обратную матрицу  $A^{-1}=(\alpha_{ij})$ .

Воспользуемся формулой  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot S^T$ , где  $S$  – матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы  $A$ . Поскольку  $A$  симметрическая, то  $S^T=S$  и, следовательно,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S} \Rightarrow \alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{M_{ij}}{|\mathbf{A}|},$$

где  $M_{ij}$  – дополнительный минор элемента  $a_{ij}$ .

1) Найдем  $|\mathbf{A}|$ . Введем следующее обозначение:  $|\mathbf{A}| = A_{n,2}$  ( $n$  – порядок матрицы, 2 – знаменатель элемента  $a_{11}$ ).

Выполним следующую последовательность преобразований определителя  $A_{n,2}$ :

- а) вынесем из каждого столбца определителя  $A_{n,2}$  множитель, равный элементу первой строки этого столбца;
- б) вычтем первую строку получившегося определителя из всех остальных строк:

$$A_{n,2} = \frac{1!}{(n+1)!} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{5} & \dots & -\frac{1}{n+2} \\ -\frac{2}{4} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{6} & \dots & -\frac{2}{n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1-n}{n+1} & \frac{1-n}{n+2} & \frac{1-n}{n+3} & \dots & \frac{1-n}{2n} \end{vmatrix};$$

- в) вынесем из каждой строки определителя множитель, равный элементу первого столбца этой строки;
- г) вычтем первую строку получившегося определителя из всех остальных строк:

$$A_{n,2} = \frac{1! \cdot 2!}{[(n+1)!]^2} \cdot (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{2}{5} & \dots & \frac{1-n}{n+2} \\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{6} & \dots & \frac{1-n}{n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -\frac{1}{n+2} & -\frac{2}{n+3} & \dots & \frac{1-n}{2n} \end{vmatrix};$$

д) вынесем общий множитель из каждой строки определителя и разложим определитель по элементам первого столбца:

$$A_{n,2} = \frac{1! \cdot 2!}{[(n+1)!]^2} \cdot [(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!]^2 \times \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \dots & \frac{1}{n+3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{n+4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \frac{1}{n+4} & \dots & \frac{1}{2n} \end{vmatrix}.$$

Итак, выполнив действия а–д, получили:

$$A_{n,2} = \left[ \frac{(n-1)!}{(n+1)!} \right]^2 \cdot 1! \cdot 2! \cdot A_{n-1,4}.$$

Применим к определителю  $A_{n-1,4}$  действия а–д и найдем:

$$A_{n,2} = \left[ \frac{(n-1)! \cdot (n-2)!}{(n+1)! \cdot (n+2)!} \right]^2 \cdot 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot A_{n-2,6}.$$

Продолжив этот процесс, получим формулу:

$$A_{n,2} = \left[ \frac{(n-1)! \cdot (n-2)! \cdot \dots \cdot (n-k)!}{(n+1)! \cdot (n+2)! \cdot \dots \cdot (n-k)!} \right]^2 \times \times 1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot (2k)! \cdot A_{n-k,2k+2}. \quad (11)$$

Тогда

$$A_{n,2} = \left[ \frac{(n-1)! \cdot (n-2)! \cdot \dots \cdot (n-(n-2))!}{(n+1)! \cdot (n+2)! \cdot \dots \cdot (n+(n-2))!} \right]^2 \times \times 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot (2n-4)! \cdot A_{2,2n-2},$$

где

$$A_{2,2n-2} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-1} \\ \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{2n} \end{vmatrix} = \frac{(2n-3)! \cdot (2n-2)!}{[(2n-1)!]^2} \cdot \frac{1}{2n}.$$

Таким образом,

$$|\mathbf{A}| = \left[ \frac{(n-1)! \cdot (n-2)! \cdot \dots \cdot (n-(n-1))!}{(n+1)! \cdot (n+2)! \cdot \dots \cdot (n+(n-1))!} \right]^2 \times \times 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot (2n-2)! \cdot \frac{1}{2n} = \left[ \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \right]^2 \cdot \prod_{k=1}^{2(n-1)} k! \cdot \frac{1}{2n} = \left[ \prod_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \right]^2 \cdot \prod_{k=1}^{2n} k!$$

2) Найдем дополнительные миноры  $M_{ij}$  (где  $i < j$ ).

Имеем:

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{1+(j-1)} & \frac{1}{1+(j+1)} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{2+(j-1)} & \frac{1}{1+(j+1)} & \dots & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(i-1)+1} & \frac{1}{(i-1)+2} & \dots & \frac{1}{i-1+j-1} & \frac{1}{i-1+j+1} & \dots & \frac{1}{(i-1)+(n-1)} & \frac{1}{(i-1)+n} \\ \frac{1}{(i+1)+1} & \frac{1}{(i+1)+2} & \dots & \frac{1}{i+1+j-1} & \frac{1}{i+1+j+1} & \dots & \frac{1}{(i+1)+(n-1)} & \frac{1}{(i+1)+n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{(n-1)+(j-1)} & \frac{1}{(n-1)+(j+1)} & \dots & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-1} \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{n+(j-1)} & \frac{1}{n+(j+1)} & \dots & \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{2n} \end{vmatrix}.$$

Выполнив для определителя  $M_{ij}$  действия а–д  $i-1$  раз, получим:

$$M_{ij} = \left[ \frac{(n-1)! \cdot (n-2)! \cdot \dots \cdot (n-i+1)!}{(n+1)! \cdot (n+2)! \cdot \dots \cdot (n+i-1)!} \right]^2 \times \times 1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot (2i-3) \cdot (2i-2)! \times \times \frac{(j+1) \cdot (j+2) \cdot \dots \cdot (j+i-1)}{(j-1) \cdot (j-2) \cdot \dots \cdot (j-i+1)} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{(i+1) \cdot (i+2) \cdot \dots \cdot (2i-1)}{(i-1) \cdot (i-2) \cdot \dots \cdot 1} \cdot C_{n-i} = \\ & = \left[ \prod_{k=1}^{i-1} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \right]^2 \cdot \prod_{k=1}^{2(i-1)} k! \times \\ & \times \frac{(j+i-1)! \cdot (j-i)! \cdot (2i-1)!}{(j-1)! \cdot j! \cdot (i-1)! \cdot i!} \cdot C_{n-i}, \end{aligned}$$

где  $C_{n-i}$  – определитель порядка  $n-i$  следующего вида:

$$C_{n-i} = \begin{vmatrix} \frac{1}{(i+1)+i} & \frac{1}{(i+1)+(i+1)} & \dots & \frac{1}{(i+1)+(j-1)} & \frac{1}{(i+1)+(j+1)} & \dots & \frac{1}{(i+1)+(n-1)} & \frac{1}{(i+1)+n} \\ \frac{1}{(i+2)+i} & \frac{1}{(i+2)+(i+1)} & \dots & \frac{1}{(i+2)+(j-1)} & \frac{1}{(i+2)+(j+1)} & \dots & \frac{1}{(i+2)+(n-1)} & \frac{1}{(i+2)+n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{j+i} & \frac{1}{j+(i+1)} & \dots & \frac{1}{j+(j-1)} & \frac{1}{j+(j+1)} & \dots & \frac{1}{j+(n-1)} & \frac{1}{j+n} \\ \frac{1}{(j+1)+i} & \frac{1}{(j+1)+(i+1)} & \dots & \frac{1}{(j+1)+(j-1)} & \frac{1}{(j+1)+(j+1)} & \dots & \frac{1}{(j+1)+(n-1)} & \frac{1}{(j+1)+n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n-1)+i} & \frac{1}{(n-1)+(i+1)} & \dots & \frac{1}{(n-1)+(j-1)} & \frac{1}{(n-1)+(j+1)} & \dots & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-1} \\ \frac{1}{n+i} & \frac{1}{n+(i+1)} & \dots & \frac{1}{n+(j-1)} & \frac{1}{n+(j+1)} & \dots & \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{2n} \end{vmatrix}.$$

Для определителя  $C_{n-i}$  выполним действия а–д  $j-i$  раз и придем к результату:

$$\begin{aligned} C_{n-i} &= \frac{(n-i)! \cdot (n-j)!}{(n+i)! \cdot (n+j)!} \cdot \left[ \frac{(n-i-1)! \cdot (n-i-2)! \cdot \dots \cdot (n-j+1)!}{(n+i+1)! \cdot (n+i+2)! \cdot \dots \cdot (n+j-1)!} \right]^2 \times \\ & \times (2i)! \cdot (2i+1)! \cdot \dots \cdot (2j-2)! \cdot (2j-1)! \cdot \frac{(i+1+j) \cdot (i+2+j) \cdot \dots \cdot 2j}{(j-i)!} \times \\ & \times \begin{vmatrix} \frac{1}{(j+1)+(j+1)} & \frac{1}{(j+2)+(j+1)} & \dots & \frac{1}{(j+1)+(n-1)} & \frac{1}{(j+1)+n} \\ \frac{1}{(j+2)+(j+1)} & \frac{1}{(j+2)+(j+2)} & \dots & \frac{1}{(j+2)+(n-1)} & \frac{1}{(j+2)+n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n-1)+(j+1)} & \frac{1}{(n-1)+(j+2)} & \dots & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-1} \\ \frac{1}{n+(j+1)} & \frac{1}{n+(j+2)} & \dots & \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{2n} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} C_{n-i} &= \frac{(n-i)! \cdot (n-j)!}{(n+i)! \cdot (n+j)!} \cdot \left[ \prod_{k=i+1}^{j-1} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \right]^2 \times \\ & \times \prod_{k=2i}^{2j} k! \cdot \frac{1}{(j-i)! \cdot (j+i)!} \cdot A_{n-j, 2j+2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M_{ij} &= A_{n-j, 2j+2} \cdot \left[ \prod_{k=1}^{i-1} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \cdot \prod_{k=i+1}^{j-1} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \right]^2 \times \\ & \times \frac{(n-i)! \cdot (n-j)!}{(n+i)! \cdot (n+j)!} \cdot \prod_{k=1}^{2i-2} k! \cdot \prod_{k=2i}^{2j} k! \times \\ & \times \frac{(j+i-1)! \cdot (j-i)! \cdot (2i-1)!}{(j-1)! \cdot j! \cdot (i-1)! \cdot i! \cdot (j-i)! \cdot (i+j)!} = \\ & = A_{n-j, 2j+2} \cdot \left[ \prod_{k=1}^{i-1} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \cdot \prod_{k=i+1}^{j-1} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \right]^2 \times \\ & \times \frac{(n-i)! \cdot (n-j)!}{(n+i)! \cdot (n+j)!} \cdot \prod_{k=1}^{2j} k! \times \\ & \times \frac{1}{(j-1)! \cdot j! \cdot (i-1)! \cdot i! \cdot (i+j)}. \end{aligned}$$

Согласно формуле (11)

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \left[ \frac{(n-1)! \cdot (n-2)! \cdot \dots \cdot (n-j)!}{(n+1)! \cdot (n+2)! \cdot \dots \cdot (n+j)!} \right]^2 \times \\ & \times 1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot (2j-1)! \cdot (2j)! \cdot A_{n-j, 2j+2}. \end{aligned}$$

Следовательно, при  $i < j$  справедливы утверждения

$$\begin{aligned} \frac{M_{ij}}{|\mathbf{A}|} &= \frac{1}{i+j} \cdot \frac{(n+i)! \cdot (n+j)!}{(n-i)! \cdot (n-j)!} \times \\ & \times \frac{1}{(i-1)! \cdot i! \cdot (j-1)! \cdot j!}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha_{ij} &= (-1)^{i+j} \cdot \frac{M_{ij}}{|\mathbf{A}|} = \frac{(-1)^{i+j}}{i+j} \cdot \frac{(n+i)! \cdot (n+j)!}{(n-i)! \cdot (n-j)!} \times \\ & \times \frac{1}{(i-1)! \cdot i! \cdot (j-1)! \cdot j!}. \end{aligned} \quad (13)$$

3) И, наконец, рассмотрим дополнительные миноры  $M_{ii}$ . Выполним для  $M_{ii}$  действия а–д  $i-1$  раз, получим:

$$\begin{aligned} M_{ii} &= \left[ \frac{(n-1)! \cdot (n-2)! \cdot \dots \cdot (n-i+1)!}{(n+1)! \cdot (n+2)! \cdot \dots \cdot (n+i-1)!} \right]^2 \times \\ & \times 1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot (2i-3)! \cdot (2i-2)! \times \\ & \times \left[ \frac{(i+1) \cdot (i+2) \cdot \dots \cdot (i+i-1)}{(i-1) \cdot (i-2) \cdot \dots \cdot (i-i+1)} \right]^2 \cdot A_{n-i, 2i+2} = \\ & = \left[ \prod_{k=1}^{i-1} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \right]^2 \cdot \prod_{k=1}^{2(i-1)} k! \cdot \left[ \frac{(2i-1)!}{(i-1)! \cdot i!} \right]^2 \cdot A_{n-i, 2i+2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{M_{ii}}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{2i} \cdot \left[ \frac{(n+i)!}{(n-i)!} \right]^2 \cdot \frac{1}{[(i-1)! \cdot i!]^2}. \quad (14)$$

Но формула (14) получается из (12) при  $i=j$ . Следовательно, для любых элементов  $\alpha_{ij}$  матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$  справедливо равенство (13), т. е.

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{(-1)^{i+j}}{i+j} \cdot \frac{(n+i)! \cdot (n+j)!}{(n-i)! \cdot (n-j)!} \times \\ & \times \frac{1}{(i-1)! \cdot i! \cdot (j-1)! \cdot j!}, \quad \forall i, j. \end{aligned}$$

**Выводы**

1. На основе метода наименьших квадратов получена оценка автокорреляционной функции в виде линейной комбинации функций  $\varphi_k(\tau)$ ,  $k=1, N$ , удовлетворяющих условиям (2).
2. Обоснована возможность аппроксимации АКФ линейной комбинацией экспонент.
3. На примерах продемонстрирована возможность представления автокорреляционной функции в виде (7) с заданной точностью.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Идрисов Ф.Ф., Устинова И.Г. Оценка функции корреляции стационарного случайного процесса при случайном числе измерений // Экономика, технология, предпринимательство. – Томск: Изд-во ТГПУ, 2000. – Вып. 1. – С. 75–79.
2. Устинова В.Н., Устинова И.Г. Дискретные иерархические системы в геофизике // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 1. – С. 91–97.
3. Никитин А.А. Теоретические основы обработки геофизической информации. – М.: Недра, 1986. – 342 с.
4. Бендат Дж. Основы теории случайных шумов и ее применения. – М.: Наука, 1965. – 463 с.
5. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990. – 642 с.

Поступила 10.06.2013 г.

УДК 517

**ОБОБЩЁННЫЙ G-ОПЕРАТОР КОМПЛЕКСНЫХ ПОРЯДКОВ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет  
E-mail: vachurikov@list.ru

Вводится локальный G-оператор дифференцирования и интегрирования вещественной переменной комплексных порядков, который является обобщением d-оператора вещественных порядков на случай бесконечного количества локальных операторов, для которых выполняется принцип соответствия. Рассмотрены некоторые его свойства и частные случаи.

**Ключевые слова:**

G-оператор комплексного порядка, пространство коэффициентов, полиномы интегрирования, полиномы дифференцирования.

**Key words:**

G-operator of a complex order, space of factors, integration polynomials, differentiation polynomials.

**Введение**

В работе [1] был введен обобщённый вещественный локальный оператор дробного интегрирования, но без учёта полиномов дифференцирования, или G-оператор, который представляет бесконечное множество локальных операторов дробного интегрирования вещественных порядков вещественной переменной.

Обобщим G-оператор на комплексные порядки интегрирования, действующие на степенные функции с комплексными показателями, следуя в основном [1]. Кроме того, в новый G-оператор, по сравнению с оператором из [1], внесены изменения, связанные с логарифмическими случаями.

**G-оператор комплексных порядков**

**Определение.** Оператор  $G^s x$  будем называть обобщённым локальным оператором дифференцирования и интегрирования дробных комплексных порядков  $s = \chi + i\gamma$ ,  $\chi, \gamma \in \mathbb{R}$ ;  $\chi, \gamma = \text{const}$ ;  $\chi, \gamma \geq 0$ , действующим над множеством степенных функций  $x^q$  вещественной переменной  $x$  с комплексными показателями  $q = \mu + i\nu$ ,  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ ;  $\mu, \nu = \text{const}$

$$\begin{cases} G^{-s} x : x^q = K(-s, q; x)x^{q-s} + C_{-s}(x); \\ G^0 x : x^q = K(0, q; x)x^{q+0} + C_0(x) = x^q; \\ G^s x : x^q = K(s, q; x)x^{q+s} + C_s(x); s \neq -q; \\ G^s x : x^{-s} = K(s, -s; x)\ln_s(x) + C_s(x). \end{cases} \quad (*)$$

Рассмотрим важные частные случаи порядков интегрирования  $s$ .

Если порядок нулевой,  $s = \chi = \gamma = 0$ , то это соответствует единичному оператору, который переводит функции самих в себя, что можно записать  $G^0 x = 1$ .

Если порядок интегрирования вещественный,  $s = \text{Re}(s) = \chi > 0$ , а в равенствах (\*) перед показателем порядка оператора  $s$ , стоит знак минус, то это соответствует оператору дробного дифференцирования вещественного порядка  $\chi$ , а если перед показателем порядка оператора стоит знак плюс, тогда это будет соответствовать оператору дробного интегрирования вещественного порядка  $\chi$ .

Когда порядок мнимый,  $s = i\text{Im}(s) = i\gamma$ ;  $\gamma > 0$ , а в равенствах (\*) перед показателем порядка оператора  $s$  стоит знак минус, то это будет соответствовать G-оператору дробного дифференцирования мнимого порядка  $\gamma$ , а если значение мнимого порядка оператора со знаком плюс, то это будет G-оператор дробного интегрирования мнимого порядка  $\gamma$ .

Если порядок интегрирования комплексный,  $s = \chi + i\gamma$ ;  $\chi, \gamma > 0$ , и перед ним стоит знак минус, то это соответствует дробному дифференцированию комплексного порядка  $s$ , а если знак плюс – дробному интегрированию комплексного порядка  $s$ .

В случаях, когда знаки у вещественной и мнимой части порядка интегрирования различаются, т. е.  $s = -\chi + i\gamma$  или  $s = \chi - i\gamma$ , то такие порядки будем называть смешанными комплекс-

ными порядками. Тогда нельзя говорить только о дифференцировании или только об интегрировании. Если в операторе у смешанного порядка перед вещественной частью стоит знак минус, то формально будем говорить, что это *G-оператор смешанного дифференцирования комплексного порядка s*, а если знак плюс, то это *G-оператор смешанного интегрирования комплексного порядка s*.

Далее  $C_{\mp s}(x)$  – полиномы дифференцирования порядка  $s$ ;  $C_s(x)$  и  $C_1$  – соответственно, полиномы интегрирования порядков  $s$  и  $1$ . Полиномы интегрирования являются обобщениями констант интегрирования стандартного анализа [2].

Полиномы интегрирования и полиномы дифференцирования для удобства легко объединить в полиномы интегродифференцирования  $C_{\mp s}(x)$ .

Произвольные полиномы интегродифференцирования  $C_{\mp s}(x)$  и  $\tilde{C}_{\mp s}(x)$  дробного порядка  $s$  при их интегродифференцировании порядка  $s$  удовлетворяют уравнениям

$$G^{\pm s} x : C_{\mp s}(x) = \tilde{C}_{\pm s}(x).$$

Функции  $\ln_s(x)$  являются логарифмами порядка  $s$ , которые требуют дальнейшего определения. В частности, в стандартном анализе, для  $s=1$ ,  $\ln_1(x)=\ln(x)$ .

Коэффициенты дробного интегродифференцирования  $K(s,q;x)$  определяют вид операторов дробного интегродифференцирования;  $C_{\mp s}(x)$  – полиномы интегродифференцирования дробного порядка  $s$ .

Вид полиномов интегродифференцирования определяется коэффициентами  $K(s,q;x)$ .

В каждом конкретном случае при интегродифференцировании необходимо задавать конкретный вид коэффициентов  $K(s,q;x)$ .

Кроме этого, на коэффициенты  $K(s,q;x)$  и полиномы интегродифференцирования необходимо наложить дополнительные условия, которые должны обеспечить выполнение принципа соответствия [1]. Тогда для вещественного порядка  $1$  и порядка  $0$ , дробного дифференцирования и дробного интегрирования, что соответствует стандартному анализу, эти условия будут

$$K(-1, q; x) = q;$$

$$K(0, q; x) = 1;$$

$$K(1, q; x) = (q + 1)^{-1}; q \neq -1;$$

$$K(1, -1; x) = 1; q = -1;$$

$$C_{-1}(x) = 0; C_0(x) = 0; C_1(x) = C_1 x^0 = C_1 = \text{const}.$$

Множество всех возможных функций коэффициентов  $K(s,q;x)$  образуют пространство коэффициентов обобщённого вещественного локального оператора комплексных порядков  $s$  и комплексных показателей степеней  $q$ :  $\mathbf{K}(\pm s, q) \subset \mathbf{K}(\pm s, q; x)$ .

Каждый элемент пространства  $\mathbf{K}(\pm s, q; x)$  задаёт локальный оператор дробного интегродифференцирования, отличный от других операторов, задаваемых другими элементами пространства коэффициентов. Поэтому каждый из элементов пространства  $\mathbf{K}(\pm s, q; x)$  может лежать в основе построения локаль-

ного дробного анализа, отличного от других подобных направлений, основанных на других операторах, определяемых другими элементами  $\mathbf{K}(\pm s, q; x)$ .

Заданное таким образом пространство коэффициентов  $\mathbf{K}(\pm s, q; x)$  является очень широким, поэтому имеет смысл его сузить. Для этого на коэффициенты из  $\mathbf{K}(\pm s, q; x)$  наложим дополнительные условия.

Потребуем, чтобы коэффициенты были независимы от переменной  $x$ , или

$$K(\pm s, q; x) \rightarrow K(\pm s, q); \quad \partial K(\pm s, q) / \partial x = 0.$$

Коэффициенты  $K(s, q)$  определены для всех значений  $s, q$ , однозначны и являются кусочно-непрерывными функциями по  $s$  и  $q$ .

Эти условия сужают пространство коэффициентов и приводят к пространству  $\mathbf{K}(\pm s, q)$ , которое назовём *суженным пространством коэффициентов*, тогда  $\mathbf{K}(\pm s, q) \subset \mathbf{K}(\pm s, q; x)$ .

Одним из самых простых в суженном пространстве коэффициентов, задающих конкретные направления дробного анализа, является  $d$ -оператор комплексных порядков, который в рамках обобщённого вещественного локального оператора задаётся соотношениями

$$\left\{ \begin{array}{l} K(-s, q) = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-s+1)}; q \neq -1, -2, -3, \dots; \\ K(-s, n) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)! \Gamma(-s-n+1)}; n = 0, 1, 2, 3, \dots; \\ n \in \mathbb{N}; s \neq 0, 1, 2, 3, \dots; \\ K(s, q) = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+s+1)}; \left\{ \begin{array}{l} q \neq -1, -2, -3, \dots; \\ s \neq -q; \end{array} \right. \\ K(s, n) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)! \Gamma(s-n+1)}; s \neq n; n = 0, 1, 2, 3, \dots; \\ K(s, -s) = 1. \end{array} \right.$$

Полиномом интегродифференцирования  $C_{\mp s}(x)$  вещественного порядка  $s$  для данного случая определяется

$$C_{\mp s}(x) = \left\{ \begin{array}{l} C_{-\alpha}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{-k-\alpha}; s = \alpha; \alpha, b_k \in \mathbb{R}; \\ \alpha, b_k = \text{const}; \alpha \neq 0, 1, 2, 3, \dots; \\ C_{-m}(x) = 0; s = m; m \in \mathbb{N}; \\ C_0(x) = 0; s = 0; \\ C_{\alpha}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-k+\alpha}; s = \alpha; \alpha, a_k \in \mathbb{R}; \\ \alpha, a_k = \text{const}; \alpha \neq 1, 2, 3, 4, \dots; \\ C_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k; s = m; a_k = \text{const}; m \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

В этом случае будут справедливы формулы интегродифференцирования порядка  $s$  для произвольных полиномов интегродифференцирования  $C_{\mp s}(x)$  и  $\tilde{C}_{\mp s}(x)$  порядка  $s$

$$d^{\mp s} x : C_{\pm s}(x) = \tilde{C}_{\mp s}(x).$$

### Заключение

Операторы из множества обобщённого оператора  $G^s x$  могут быть использованы в приложениях и, прежде всего, для описания пространств с дробной размерностью и описания самых разных процессов в таких пространствах.

Может оказаться, что для тех или иных конкретных процессов в пространствах дробных размерностей будут подходить одни операторы дробного интегродифференцирования из множества обобщённого оператора  $G^s x$ , а для других процес-

сов больше будут подходить другие операторы из того же множества.

При выборе операторов из множества  $G^s x$  для приложений можно исходить из теоретического принципа простоты, согласно которому их двух операторов правильным должен быть признан наиболее простой из них. Но принцип простоты носит скорее рекомендательный характер. Окончательный отбор операторов из множества  $G^s x$  следует проводить, опираясь на конкретные результаты наблюдений.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуриков В.А. Обобщённый вещественный локальный оператор дробного интегродифференцирования // Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики: Матер. II Междунар. Российско-Узбекского симпозиума. –

Кабардино-Балкарская республика, Эльбрус, 28 мая – 1 июня 2012. – Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2012. – С. 285–287.

2. Чуриков В.А. Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. – Томск: Изд-во ТПУ, 2011. – 72 с.

Поступила 22.02.2013 г.

УДК 531.01

## КОВАРИАНТНЫЕ ФОРМЫ ПРИНЦИПОВ И УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

А.И. Родионов

Новосибирский Государственный технический университет

E-mail: teormech@ngs.ru

Представлен авторский взгляд на систему дифференциальных вариационных принципов и уравнений механики систем с произвольными дифференциальными связями. Он основан на варианте расширения классической механики, описывающем динамику голономных и неголономных систем произвольных порядков. Для несвободной системы вводится ее изображающая точка. Она движется в пространстве  $E_{3n}$  по многообразию  $R_m$ , стеснённому также дифференциальными связями. На основе уравнений движения ИТ выводятся ковариантные формы уравнений и принципов механики неголономных систем высших порядков.

### Ключевые слова:

Системы с произвольными дифференциальными связями, дифференциальные вариационные принципы механики неголономных систем произвольных порядков, изображающая точка системы, уравнения движения изображающей точки системы, ковариантные формы уравнений движения и принципов.

### Key words:

Systems with any differential constraints, differential variation principles of mechanics of any orders nonholonomic systems, Affix of a system, Affix motion equations, covariant forms of motion equations and principles.

### Введение

Современное состояние и развитие мехатроники, авионики и точной электромеханики поставило вопрос об адекватных механических моделях динамики систем управляемого движения с полными и неполными дифференциальными программами движения высших порядков. К таким системам относятся системы, управляемые по резкости-рывку и производным более высоких порядков.

Во второй половине XX в. стало понятно, что большой класс движений систем, управляемых по какой-либо программе, может быть описан как класс систем с голономными и неголономными связями общего вида [1]. А уравнения связей исполняют роль программ движения. В рамках одно-

го формализма эти связи могут быть определены как дифференциальные связи высших порядков.

Известно, что построение механики твердых тел и распределенных систем на основе дифференциальных и интегральных вариационных соотношений и принципов является устоявшейся научной традицией [2–5] и с развитием вычислительных методов и техники приобрело большое практическое значение. Разделение всех принципов на вариационные соотношения и собственно принципы признается рядом авторов и имеет в рамках вариационного исчисления глубокий смысл. Придерживаясь этой точки зрения, мы всё же будем называть в дальнейшем соотношения и собственно принципы для краткости принципами. В данной



работе рассмотрим подробно только уравнения движений и дифференциальные принципы произвольных порядков. Каковы же эти уравнения и принципы?

Ответ на эти вопросы был получен в работах [6–13]. Так, в статьях [6, 9] были выведены уравнения движения систем с идеальными по Гартунгу–Добронравову [5] дифференциальными связями высших порядков непосредственно из основных положений классической механики. А в статьях [10–13] описаны основы динамики систем с произвольными дифференциальными связями, приведены примеры задач и их решения. В [7] на основе результатов работы [6] были получены дифференциальные вариационные принципы для систем с идеальными по Гартунгу–Добронравову дифференциальными связями высших порядков и доказана их необходимость и достаточность.

### О дифференциальных принципах

При дифференциальных связях вида

$$\begin{cases} \varphi^p = \varphi^p(t, \chi_i, \dot{\chi}_i, \dots, \chi_i^{(k)}) = 0 \\ p \leq 3N - 1, \quad i = 1, 2, \dots, 3N, \quad k \geq 2 \end{cases}$$

принципы систем с идеальными по Гартунгу–Добронравову дифференциальными связями высших порядков выглядят согласно [7] так:

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{d^{(k-q)}}{dt^{(k-q)}} (\mathbf{f}_\ell - m_\ell \mathbf{a}_\ell) \delta_k^{(k)} \mathbf{r}_\ell = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\delta_r$  – частная изохронная вариация вектора  $\mathbf{r}_\ell$ ,  $q=1$  для нелинейных, а  $q=2$  для линейных по  $\mathbf{r}_\ell$  связей. Оказалось, что один из Принципов (1) при  $q=2$  эквивалентен принципу из [4] для систем с линейными по  $q^j$  уравнениями связей.

Что же касается известных принципов и вариационных соотношений, то исторически они были сформулированы как независимые. И каждый имел своё собственное обоснование и интерпретацию. Принципы Даламбера–Лагранжа ( $k=0$ ), Сулова–Журдена ( $k=1$ ), Гаусса ( $k=2$ ), Манжерона–Делеану ( $k \geq 3$ ) в предложенных обозначениях

имеют вид  $\sum_{\ell=1}^N (\mathbf{f}_\ell - m_\ell \mathbf{a}_\ell) \delta_k^{(k)} \mathbf{r}_\ell = 0$ . Обратим внима-

ние на то, что принцип Даламбера–Лагранжа необходим и достаточен для описания движения голономных систем и систем с линейными по скоростям неголономными связями. Принцип Сулова–Журдена – для голономных систем и систем с произвольными по скоростям неголономными связями. Принцип Гаусса – для голономных систем, систем с произвольными по скоростям и линейными по ускорениям неголономными связями. И для описания движения классических голономных и неголономных управляемых систем этих принципов вполне достаточно. Так, именно принцип Гаус-

са позволил в работе [14] получить вариационное условие и замкнуть систему уравнений, описывающую процесс удара абсолютно твёрдого шара по упругому полупространству.

Естественно, возник вопрос о полной системе дифференциальных принципов механики в рамках парадигмы классической механики, адекватных различным типам дифференциальных связей. Такая система принципов для систем с идеальными по Гартунгу–Добронравову дифференциальными связями была выведена в векторной форме и представлена в виде таблицы в работе [8].

### Изображающая точка системы и её уравнения движения

Для вывода полной системы дифференциальных принципов мы воспользовались в [8] понятием изображающей точки системы (ИТ) [4–6], движущейся несвободно в абстрактном пространстве  $E_{3N}$  по многообразию  $R_m$ .

Представим  $\mathbf{r}_\ell(x_i, y_\ell, z_\ell)$  как  $\mathbf{r}_\ell(\chi_{3\ell-2}, \chi_{3\ell-1}, \chi_{3\ell})$  а  $\mathbf{f}_\ell(X_\ell, Y_\ell, Z_\ell)$  как  $\mathbf{f}_\ell(f_{3\ell-2}, f_{3\ell-1}, f_{3\ell})$ ,  $m_\ell = m_{3\ell-2} = m_{3\ell-1} = m_{3\ell}$ ;  
 $M = \sum_{\ell=1}^N m_\ell$ . Введем, как это сделано в [4, 7–13],

ИТ, имеющую массу  $M$ , радиус-вектор  $\mathbf{x}(x_i)$ , где  $x_i = \chi_i \sqrt{\mu_i}$ ,  $\mu_i = m_i/M$ ,  $i=1, 2, \dots, 3N$ . Тогда, согласно [10], система векторных уравнений движения ИТ, приведённая к одному дифференциальному порядку и подобная уравнениям Лагранжа 1-го рода, примет вид:

$$\begin{cases} M \mathbf{x} = \mathbf{F} + \lambda_p \partial \varphi^p / \partial \mathbf{x} + \mathbf{T}_k, \quad \mathbf{T}_k \perp \partial \varphi^p / \partial \mathbf{x} \quad \text{a)} \\ d_t \varphi^p = (\partial \varphi^p / \partial \mathbf{x}) \mathbf{x} + \Psi^p(t, x_i, \dots, x_i^{(s-1)}) = 0 \quad \text{b)} \\ p = n \leq 3N - 1; \quad q = 1, 2; \quad s = r + 2, \\ r = 0 \text{ при } k \leq 1, \quad r = k - q \text{ при } k \geq 2. \end{cases} \quad (2)$$

В уравнениях (2) и далее предполагается суммирование по двойному немому индексу в соответствии с правилом Эйнштейна. Здесь  $3N$ -мерные векторы силового фактора задаваемых сил  $\mathbf{F}_i^{(r)}$  ( $F_i$ ),  $F_i = (f_i / \sqrt{\mu_i})$ . Неопределённые множители Лагранжа  $\lambda_p$  могут быть представлены в разных видах, удобных при численном решении конкретных прикладных задач  $\lambda_p = \lambda_p(t) = \mu_p^{(r+2)} = \eta_p^{(r)}$ .  $n$  – общее число линейных и нелинейных связей  $k$ -го и связей более низких порядков, приведенных к единому дифференциальному виду  $\varphi^p = \varphi^p(t, x_i, \dot{x}_i, \dots, x_i^{(k)}) = 0$ .

Введем силовой фактор «потерянных сил»  $\mathbf{P}$  [2, 5, 6] как  $\mathbf{P} = \mathbf{F} - M\ddot{\mathbf{x}}$ . Тогда, например, принцип Даламбера–Лагранжа примет вид  $(\mathbf{P} \cdot \delta_k \mathbf{x}) = 0$ , а принципы (1) будут выглядеть так:

$$\begin{cases} (\mathbf{P} \cdot \delta_k \mathbf{x}) = 0, \quad r = k - q, \\ k \geq 2, \quad q = 1, 2. \end{cases} \quad (3)$$

Выражение (3) задаёт пару дифференциальных вариационных принципов, описывающих движение неголономных систем  $k$ -го порядка. Здесь при  $q=1$  имеем дифференциальное вариационное соотношение, а при  $q=2$  – собственно вариационный принцип [7], которому можно придать вид:

$$\delta_k Z_{k-2} = 0, \quad Z_{k-2} = (\mathbf{P})^{(k-2)} / 2M. \quad (4)$$

В этой форме принцип (4) подобен по виду принципу Гаусса и при  $k=2$  тождественен ему. При этом функция  $Z_0$  равна принуждению по Гауссу  $Zw$  [1, 2, 4–7]. Исходя из этого, назовём функцию  $Z_s$  принуждением  $s$ -го порядка. Заметим, что принцип (4) эквивалентен принципу, предложенному в работе [4]. Обратим внимание на то, что все представленные выше дифференциальные вариационные принципы могут быть заданы одной формулой  $(\mathbf{P} \cdot \delta_k \mathbf{x})^{(r)} = 0$ , где  $r=0$  при  $k \leq 1$ ,  $r=k-q$  при  $k \geq 2$ ,  $q=1, 2$ .

**Ковариантные аналитические формы уравнений движения**

Для решения конкретных практических задач механики управляемого движения выведем более удобные аналитические формы уравнений движения и дифференциальных принципов высших порядков. Соотношение  $\mathbf{x}=\mathbf{x}(i, q^j)$ , выражающее декартовы координаты через обобщенные, выделяет в  $E_{3N}$  риманово многообразии  $R_m$ . Задача состоит в представлении движения материальной системы с помощью терминов геометрии  $R_m$ . Эта задача была решена в [6, 11–13]. Согласно этим работам все ковариантные формы уравнений движения выводятся единообразно путём скалярного умножения (2) на координатные векторы  $\mathbf{e}_i = \partial \mathbf{x} / \partial q^i = \partial \dot{\mathbf{x}} / \partial \dot{q}^i = \dots$  с последующими алгебраическими и дифференциальными преобразованиями для той или иной формы уравнений. Таким образом, получим следующие ковариантные формы уравнений движения.

**$R_m Q$ -форма**, подобная уравнениям движения в обобщённых силах:

$$\begin{cases} \frac{d^{(r)}}{dt^{(r)}} [(Q_i^p) \mathbf{e}^i] \mathbf{e}_j + \lambda_p (\partial f^p / \partial q^j) + \Theta_{kj} = 0; \\ \partial f^p / \partial t = (\partial f^p / \partial q^j) q^j + W^p(t, q^j, \dots, \dot{q}^j) = 0; \\ i, j = 1, 2, \dots, m, \quad p \leq n \leq m-1, \quad q = 1, 2, \quad s = r+2, \\ r = 0 \text{ при } k \leq 1, \quad r = k - q \text{ при } k \geq 2. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $Q_i^p = Q_i^F + Q_i^\Phi$ ,  $Q_i^F$  –  $i$ -я задаваемая обобщенная сила;

$$Q_i^\Phi = - \left[ \frac{d}{dt} ((\partial T / \partial \dot{q}^i)) - \partial T / \partial q^i \right] = -\partial S / \partial \dot{q}^i = \dots$$

–  $i$ -я обобщенная сила инерции;

$$f^p = f^p(t, q^j, \dots, \dot{q}^j) = 0$$

– уравнения связей, представленные в терминах геометрии  $R_m$ ;  $\mathbf{e}^i$  – координатные векторы взаимного базиса в касательном к  $R_m$  пространству  $E_m$ ;  $\mathbf{e}^i = g^{ij} \mathbf{e}_j$ ,  $g^{ij}$  – контравариантные компоненты метри-

ческого тензора пространства  $R_m$ , определяемые выражением для кинетической энергии системы [4, 5],  $\Theta_{kj} = (\mathbf{T}_k \cdot \mathbf{e}_j)$ . Заметим, что при градиентном управлении движением  $\Theta_{kj} = 0$ .

**$R_m A$ -форма**, подобная уравнениям Аппеля:

$$\begin{cases} \partial K_{(s)} / \partial q^j = Q_j^{(r)} + \lambda_p (\partial f^p / \partial q^j) + \Theta_{kj}; \\ (\partial f^p / \partial q^j) q^j + W^p(t, q^j, \dots, \dot{q}^j) = 0; \\ j = 1, 2, \dots, m, \quad p = 1, 2, \dots, n \leq m-1, \\ \begin{cases} q = 1, 2, \quad s = r+2, \\ r = 0 \text{ при } k \leq 1, \quad r = k - q \text{ при } k \geq 2. \end{cases} \end{cases} \quad (6)$$

Здесь, согласно [6, 10–13],  $K_s$  – универсальная кинетическая мера движения  $s$ -го порядка – кинэта.

$$K_s = M(\mathbf{x})^{(s)} / 2 = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^N m_\ell (\mathbf{r}_\ell)^{(s)}{}^2; \quad K_{(s)} - \text{часть кинэты,}$$

квадратично зависящая от  $q^j$ ;  $Q^{(r)}$  – обобщенный силовой фактор  $r$ -го порядка

$$Q_j^{(r)} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_j) = \sum_{\ell=1}^N \left( \mathbf{F}_\ell \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\ell}{\partial q^j} \right).$$

Заметим, что при  $r=0$  уравнения движения в  $R_m A$ -форме становятся уравнениями Аппеля.

**$R_m \Lambda$ -форма**, подобная уравнениям Лагранжа:

$$\begin{cases} \Lambda_j^{(r+1)}(K_{(r+1)}) = Q_j^{(r)} + \lambda_p (\partial f^p / \partial q^j) + \Theta_{kj}; \quad \text{а)} \\ (\partial f^p / \partial q^j) q^j + W^p = 0; \quad \text{б)} \\ j = 1, 2, \dots, m, \quad p = 1, 2, \dots, n \leq m-1, \\ \begin{cases} q = 1, 2, \\ r = 0 \text{ при } k \leq 1, \quad r = k - q \text{ при } k \geq 2. \end{cases} \end{cases} \quad (7)$$

Здесь  $\Lambda_j^{(r+1)} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{1}{r+1} \frac{\partial}{\partial q^j}$ . Назовём этот

дифференциальный оператор оператором Эйлера–Лагранжа порядка  $(r+1)$ . Заметим, что при  $q=1$  уравнения (7а) будут выглядеть так

$$\hat{\Lambda}_j^{(k)}(K_{(k)}) = Q_j^{(k-1)} + \lambda_p \partial f^p / \partial q^j + \Theta_{kj}.$$

А при  $r=0$  эти уравнения становятся уравнениями Лагранжа 2-го рода.

**Уравнения движения в обобщенных силовых факторах ( $R_m Q^n$ -форма)**

$$\begin{cases} Q_{\Phi_j}^{(r)} + Q_j^{(r)} + Q_{\lambda_j}^{(r)} + \Theta_{kj} = 0; \\ (\partial f^p / \partial q^j) q^j + W^p = 0; \\ j = 1, 2, \dots, m, \quad p = 1, 2, \dots, n \leq m-1, \quad q = 1, 2; \\ r = 0 \text{ при } k \leq 1, \quad r = k - q \text{ при } k \geq 2. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь обобщённые силовые факторы  $Q_{\Phi_j}^{(r)}$  и  $Q_{\lambda_j}^{(r)}$ , согласно [9–11], равны

$$\begin{aligned} Q_{\Phi_j}^{(r)} &= -\partial K_{(s)} / \partial q^j = -\Lambda_j^{(r+1)}(K_{(r+1)}) \dots \\ j &= 1, 2, \dots, m, \quad s = r+2, \quad q = 1, 2; \\ r &= 0 \text{ при } k \leq 1, \quad r = k - q \text{ при } k \geq 2, \\ Q_{\lambda_j}^{(r)} &= \lambda_p \partial f^p / \partial q^j. \end{aligned}$$

Отметим, что при  $r=0$  уравнения движения в обобщённых силовых факторах эквивалентны уравнениям движения в обобщённых силах [9].

**Ковариантные аналитические формы принципов**

Получим ковариантные формы записи дифференциальных принципов механики из уравнений (6)–(9).

**$R_m Q$ -форма принципов.** Умножим (5) на  $\delta_k q^j$  и просуммируем по  $j$ . С учётом того, что  $f^p=0$  и  $\delta_k f^p = (\partial f^p / \partial q^j) \delta_k q^j = 0$ , получим:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^{(r)}}{dt^{(r)}} [(Q_i^{(r)}) \mathbf{e}^i] \mathbf{e}_j + \Theta_{kj} \right) \delta_k q^j &= 0, \\ i, j &= 1, 2, \dots, m, \quad q = 1, 2; \\ r &= 0 \text{ при } k \leq 1, \quad r = k - q \text{ при } k \geq 2 \dots \end{aligned} \quad (9)$$

В такой форме принципы (9) при  $\Theta_{kj}=0$  приведены в [9].

**$R_m A$ -форма принципов.** Уравнениям (7) соответствуют Принципы:

$$\begin{aligned} (\partial K_{(s)} / \partial q^j - Q_j^{(r)} - \Theta_{kj}) \delta_k q^j &= 0; \\ j &= 1, 2, \dots, m, \quad s = r+2, \quad q = 1, 2; \\ r &= 0 \text{ при } k \leq 1, \quad r = k - q \text{ при } k \geq 2, \end{aligned} \quad (10)$$

которые выводятся из них аналогично принципам (9). Если ввести характеристическую функцию  $R_s = K_{(s)} - Q_j^{(r)} \cdot q^j$ , определяющую состояние движения системы при векторе задаваемых сил  $\mathbf{F}=\mathbf{F}(t, q^j, \dot{q}^j)$ , то принципы (10) примут вид

$$\begin{aligned} (\partial R_s / \partial q^j - \Theta_{kj}) \delta_k q^j &= 0; \\ j &= 1, 2, \dots, m, \quad s = r+2, \quad q = 1, 2; \\ r &= 0 \text{ при } k \leq 1, \quad r = k - q \text{ при } k \geq 2. \end{aligned}$$

Заметим, что при  $q=2$  и  $\Theta_{kj}=0$  имеем собственный принцип (11):

$$\delta_k R_k = 0. \quad (11)$$

Нетрудно показать, что  $R_s = Z_{(r)}$ . Здесь  $Z_{(r)}$  – зависящая квадратично от  $q^j$  часть функции  $Z_r$ . Действительно,

$$\begin{aligned} R_s &= M(\mathbf{a})^2 / 2 - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_j) q_j = M(\mathbf{a})^2 / 2 - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}) = \\ &= (M(\mathbf{a})^2 / 2 - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{F})^2 / 2 M)_{(s)} = Z_{(r)}. \end{aligned}$$

Это доказывает эквивалентность (4) и (11).

При  $\Theta_{kj}=0$  и с учётом того, что

$$\partial Z_{(r)} / \partial q^j = \partial Z_r / \partial q^j,$$

принципы (10) и (11) примут вид

$$(\partial Z_r / \partial q^j) \delta_k q^j = 0, \quad \delta_k Z_{k-2} = 0. \quad (12)$$

Соответствующий вид будут иметь и уравнения движения в этой форме

$$\partial Z_r / \partial q^j = \lambda_p f^p / \partial q^j + \Theta_{kj}. \quad (13)$$

Назовём (12) и (13)  $R_m GA$ -формой принципов и уравнений.

**$R_m \Lambda$ -форма принципов.** В этой форме принципы выглядят так:

$$\begin{aligned} (\Lambda_j^{(r+1)}(K_{(r+1)}) - Q_j^{(r)} - \Theta_{kj}) \delta_k q^j &= 0; \\ j &= 1, 2, \dots, m, \quad q = 1, 2; \\ r &= 0 \text{ при } k \leq 1, \quad r = k - q \text{ при } k \geq 2. \end{aligned} \quad (14)$$

Они выводятся аналогично принципам (10) и при  $q=1$  и  $\Theta_{kj}=0$  имеют вид

$$\left( \Lambda_j^{(k)}(K_{(k)}) - Q_j^{(r)} \right) \delta_k q^j = 0.$$

Заметим, что эта форма принципов также допускает введение характеристической функции  $R_{r+1} = Z_{(r-1)}$  для систем с  $r=1, 2, \dots$  и вектором задаваемых сил вида  $\mathbf{F}=\mathbf{F}(t, q^j)$ . Действительно,

$$\begin{aligned} Q_j^{(r)} &= (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_j) = (\mathbf{F} \cdot \partial \mathbf{x} / \partial q^j) = \\ &= \frac{d}{dt} (\mathbf{F} \cdot \partial \mathbf{x} / \partial q^j) - (\mathbf{F} \cdot \partial \mathbf{x} / \partial q^j) / (r+1). \end{aligned} \quad (15)$$

С учётом (15) принципы (14) примут вид

$$\begin{aligned} (\Lambda_j^{(r+1)}(R_{r+1}) - \Theta_{kj}) \delta_k q^j &= 0 = \\ &= (\Lambda_j^{(r+1)}(Z_{(r-1)}) - \Theta_{kj}) \delta_k q^j; \\ j &= 1, 2, \dots, m, \quad q = 1, 2; \quad r = k - q \geq 1, \end{aligned}$$

где  $R_{r+1} = K_{(r+1)} - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}) = Z_{(r-1)}$ , а принцип (14) будет выглядеть так:

$$(\Lambda_j^{(k)}(Z_{(k-1)}) - \Theta_{kj}) \delta_k q^j = 0.$$

Соответствующий вид будут иметь и уравнения

$$\Lambda_j^{(r+1)}(Z_{(r-1)}) = \lambda_p f^p / \partial q^j + \Theta_{kj}.$$

Назовём (17)  $R_m GA$ -формой принципов и уравнений.

**$R_m Q^{\nu}$ -форма принципов.** Этой универсальной форме записи уравнений (8) соответствуют принципы:

$$\begin{aligned} (Q_{P_j}^{(r)} - \Theta_{kj}) \delta_k q^j &= 0; \\ j &= 1, 2, \dots, m, \quad q = 1, 2; \end{aligned}$$

$$r = 0 \text{ при } k \leq 1, \quad r = k - q \text{ при } k \geq 2,$$

где  $Q_{P_j}^{(r)} = Q_{\Phi_j}^{(r)} + Q_{F_j}^{(r)}$  и  $Q_{F_j}^{(r)} = Q_j^{(r)}$ .

Здесь обобщённый силовой фактор инерции  $Q_{\Phi_j}^{(r)}$  может быть вычислен по любой из приведенных выше формул, а сами принципы могут быть записаны в представлениях взаимодействующих парциальных движений и взаимодействующих тел [9].

### Заключение

Возможны и другие ковариантные формы уравнений движения и принципов неголономных систем высших порядков, которые в данной статье не рассматриваются. Интегральные вариационные

принципы, описывающие движения неголономных систем высших порядков, будут рассмотрены в следующей работе. Представленные нами результаты могут быть положены в основу целого ряда более детальных исследований в области теории неголономных систем высших порядков. Естественным образом они могут стимулировать и уже породили появление ряда прикладных работ в различных областях неголономной механики, механики, электромеханики и электродинамики [12, 13].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корнев Г.В. Введение в механику управляемого тела. – М.: Наука, 1964. – 568 с.
2. Ландош К. Вариационные принципы механики. – М.: Мир, 1965. – 408 с.
3. Полак А.С. Вариационные принципы механики. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 599 с.
4. Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П. Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2002. – 275 с.
5. Добронравов В.В. Основы механики неголономных систем. – М.: Высшая школа, 1970. – 269 с.
6. Родионов А.И. Уравнения движения неголономных систем высших порядков // Сборник научных трудов Новосибирского государственного технического университета. – 1997. – № 2 (7). – С. 85–96.
7. Родионов А.И. Принципы неголономной механики высших порядков // Сборник научных трудов Новосибирского государственного технического университета. – 1998. – № 1 (10). – С. 69–78.
8. Родионов А.И. О дифференциальных принципах механики // Сборник научных трудов Новосибирского государственного технического университета. – 1998. – № 2 (11). – С. 124–134.
9. Остроменский П.И., Родионов А.И. Составление и исследование уравнений движения голономных и неголономных систем методом обобщенных сил // Вестник Новосибирского государственного технического университета. – 1997. – № 1 (3). – С. 121–140.
10. Родионов А.И. К динамике мехатронных систем с неполными дифференциальными программами движения // Вестник Сибирской государственной геодезической академии. – 2002. – Вып. 7. – С. 205–211.
11. Rodionov A.I., Kaveshnikov V.M. On dynamics of mechatronic systems with incomplete differential programs of motion // IF-TOMM-2004: Proc. of XI World Cong. in Mech. and Machine Science. – Tianjin, China, 2004. – V. 3 «Mechatronics». – P. 1331–1335.
12. Родионов А.И., Сырецкий Г.А. Разомкнутые модели управления движением транспортных систем третьего порядка // Транспорт: Наука, техника, управление. – 2011. – № 4. – С. 12–15.
13. Родионов А.И. Уравнения аналитической динамики систем с дифференциальными связями произвольных порядков. Ч. 1 // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. – 2012. – № 4 (49). – С. 99–106.
14. Родионов А.И., Матвеев К.А. К динамике удара абсолютно твёрдого шара по упругому полупространству // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. – 2012. – № 1 (46). – С. 93–108.

Поступила 16.04.2013 г.

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ И МОДЕЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ СХЕМ РАВНОМЕРНОПЛОТНОГО ПРЕССОВАНИЯ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

Э.С. Двилис, П. Чартпук, О.Л. Хасанов, В.М. Соколов, Б.А. Ешетов

Томский политехнический университет

E-mail: khasanov@tpu.ru

Приведено сравнительное модельное и аналитическое описание спирального варианта реализации разработанного и запатентованного в ТПУ коллекторного способа прессования порошковых материалов. Принцип коллекторного способа основан на автовывравнивании плотности по всему объёму прессовки разнонаправленным перемещением формообразующих поверхностей пресс-формы. В рамках этого принципа была предложена кинематическая схема уплотнения цилиндрических прессовок в коллекторной пресс-форме со спиральными ползунами, скрученными вокруг оси прессования под некоторым оптимальным углом. Предложен аналитический аппарат для первичной аналитической оценки эффективности схем прессования. Процесс уплотнения порошков различными способами моделировали методом конечных элементов. Результаты сравнительного моделирования показали, что статистический разброс локальных значений деформации в компактах, изготовленных коллекторным методом с ползунами спирального типа, снижается до 48 % по сравнению с обычным статическим уплотнением и на 5 % по сравнению с исходным вариантом коллекторного метода. Таким образом, коллекторный метод с ползунами спирального типа позволяет дополнительно уменьшить градиенты плотности и может быть использован для изготовления керамических изделий из нанопорошков, характеризующихся при их уплотнении в закрытых жёстких пресс-формах выраженными негативными эффектами пристенного трения.

### Ключевые слова:

Нанопорошки, сухое прессование, коллекторная пресс-форма, равномерное распределение плотности.

### Key words:

Nanopowder, dry compaction, collector die, uniform density distribution.

Разнообразие различных подходов и методов уплотнения керамических порошков, в том числе нанопорошков [1–4], обусловлено специфическими особенностями их поведения при уплотнении. Основным фактором, влияющим на качество компактов, получаемых любым из «сухих» (без применения пластификаторов) способов, является пристенное трение, степень негативного влияния которого возрастает с уменьшением размеров частиц порошка. Наиболее изученным к настоящему времени является метод сухого холодного одноосного одностороннего прессования порошковых материалов в закрытых жёстких пресс-формах. Уплотнение при реализации этого метода осуществляется путем передачи усилия прессования через активные формообразующие поверхности пуансонов, встречно перемещающихся относительно пассивной формообразующей поверхности матрицы. При этом из-за потерь усилия прессования на преодоление сил пристенного трения возникает существенный градиент плотности прессовки по её высоте.

Указанного недостатка лишён коллекторный метод прессования [5], обеспечивающий автовывравнивание плотности по всему объёму прессовки любой высоты. Отличительной особенностью коллекторного метода прессования порошков является то, что матрица пресс-формы состоит из двух разнонаправленных групп идентичных ползунов, каждая из которых в процессе прессования синхронно перемещается вместе с одним из пуансонов-плунжеров.

В настоящей работе рассмотрен усовершенствованный вариант коллекторного способа, при кото-

ром формообразующим ползунам придана форма спирали. Такое кинематическое решение обеспечивает дополнительную компоненту перемещения формообразующих поверхностей, не совпадающую с осью прессования, и, предположительно, позволяет повысить равномерность распределения плотности по объёму порошкового тела.

Однако любое конструктивное усовершенствование схем прессования и оптимизация геометрических размеров пресс-форм сопряжены с дорогостоящими натурными испытаниями. В этой связи актуальна разработка аналитического аппарата, который позволил бы проводить первичную оценку результатов того или иного конструктивного решения на конечные характеристики прессуемого в заданных условиях изделия.

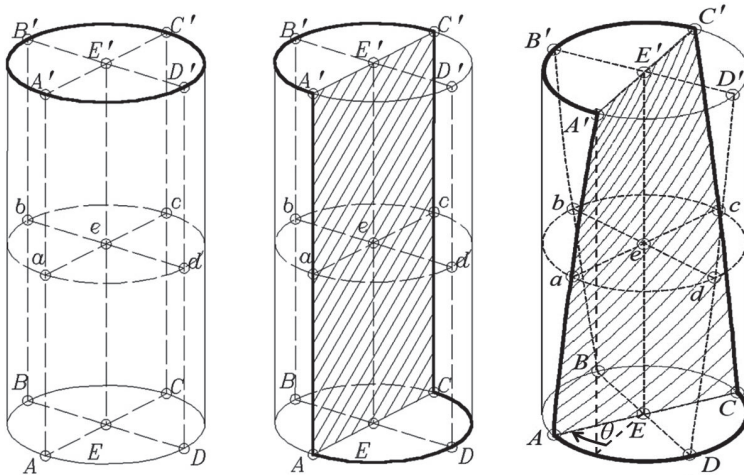
### Аналитическое сопоставление схем прессования

Схемы прессования цилиндрического тела, которое уплотняется обычным односторонним способом (а), коллекторным способом (б) и его спиральным вариантом (в), реализуемым с помощью пресс-формы, названной «коллекторная пресс-форма спирального типа», представлены на рис. 1.

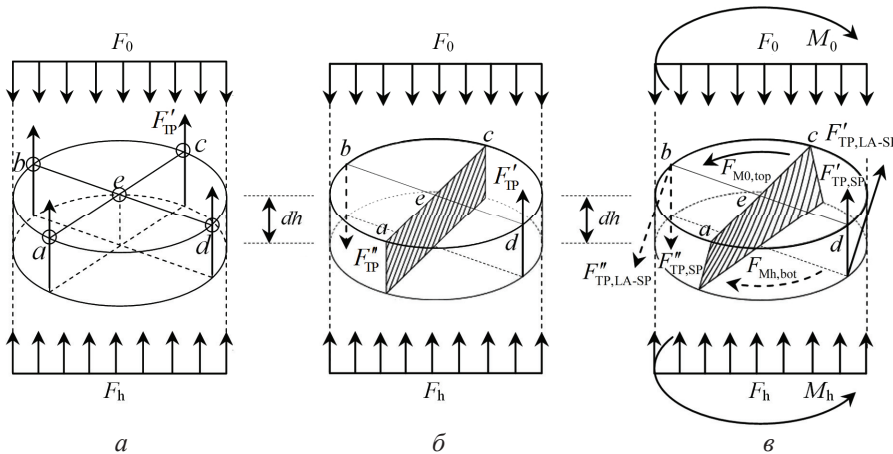
На рис. 2 представлена схема баланса сил, действующих на поверхности цилиндрической прессовки, уплотняемой различными способами прессования.

#### 1. Случай традиционного способа прессования

Из теории прессования порошковых материалов в закрытых жёстких пресс-формах известно [6], что за счёт пристенного трения перепады плотности по высоте прессовки в её центральной части



**Рис. 1.** Схемы уплотнения цилиндрического порошкового тела: а) способом статического одноосного одностороннего прессования; б) коллекторным способом; в) спиральным вариантом его реализации (жирными линиями обозначены границы подвижного сочленения формообразующих поверхностей)



**Рис. 2.** Баланс сил в тонком слое цилиндрической прессовки: а) схема одноосного прессования; б) схема прямого коллекторного прессования; в) схема спирального коллекторного прессования

(рис. 1, а) вдоль оси  $[EeE']$  всегда меньше, чем у стенок (вдоль линии  $[AaA']$ ), а величина средней плотности вдоль любой её вертикали одинакова в любой момент прессования [7].

В 1895 г. Х.А. Янсен, анализируя баланс сил в бесконечно малом выделенном элементе порошкового тела, получил простое уравнение для определения давления на дне цилиндрического бункера с сыпучим материалом [8, 9]. Позднее Г.И. Покровский использовал данный подход для вывода уравнения в приемлемой для описания процессов, проходящих при уплотнении порошков, форме [10–15]. При переходе к величинам давления, которые в цилиндрических прессовках постоянного гидравлического сечения пропорциональны величинам действующих усилий, уравнение для потери давления прессования за счёт пристенного трения можно представить в следующей форме.

$$P_h = P_0 \cdot \exp\left(-2 \cdot \xi \cdot f \cdot \frac{h}{R}\right), \quad (1)$$

где  $P_h$  – давление на высоте  $h$  от прессующего пуансона;  $P_0$  – давление прессования непосредственно у прессующего пуансона;  $\xi$  – коэффициент бокового давления (коэффициент гидростатичности порошкового тела);  $f$  – коэффициент пристенного трения;  $R$  – гидравлический радиус прессовки. В общей форме для прессовок любого постоянного по высоте сечения без переходов по высоте с площадью боковой поверхности  $S_6$  и гидравлической площадью  $S_0$ :

$$P_h = P_0 \cdot \exp\left(-\xi \cdot f \cdot \frac{S_6}{S_0}\right). \quad (2)$$

Для оценки перепада относительной плотности по высоте прессовки воспользуемся выражением (2) и безразмерным уравнением прессования логарифмического вида [16], выражающим зависимость относительной плотности  $\rho$  порошкового тела от давления прессования.

$$\rho = b \cdot \ln\left(\frac{P_0}{P_{\text{кр}}}\right) + 1. \quad (3)$$

где  $P_{кр}$  – критическое давление, при котором достигается теоретическая плотность порошкового тела;  $b$  – постоянный для данных условий прессования и данного порошкового материала коэффициент, отражающий интенсивность его уплотнения.

Из совместного рассмотрения (2) и (3) можно вывести выражение для перепада относительной плотности по высоте порошкового тела заданной геометрии.

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= \rho_0 - \rho_h = b \cdot (\ln P_0 - \ln P_h) = \\ &= b \cdot \ln \frac{P_0}{P_h} = 2 \cdot b \cdot \xi \cdot f \cdot \frac{h}{R}. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, перепад относительной плотности по высоте прессовки постоянного сечения, компактируемой традиционным способом одноосного одностороннего прессования в закрытых жёстких пресс-формах, может быть минимизирован совместным уменьшением коэффициентов пристенного трения и бокового давления.

## 2. Случай прямого коллекторного прессования

Для коллекторной схемы прессования (рис. 1, б, рис. 2, б) уплотнение порошка и пристенное трение близки к нулю вдоль дуги  $[ABC]$ , а вдоль дуги  $[ADC]$  они максимальны. Обратная картина наблюдается в окрестности точек  $A'$  и  $C'$  (рис. 1, б): величины уплотнения и пристенного трения достигают максимальных значений вдоль дуги  $[A'B'C']$ , и отсутствуют вдоль дуги  $[A'D'C']$ . Таким образом, в любой точке порошкового тела, прилегающей к рассматриваемым линиям  $[A'A]$  и  $[C'C]$ , величины смещения, сил пристенного трения (с учётом знака) и степени уплотнения будут равны среднему значению между соответствующими величинами по разные стороны от линий сопряжения. Следовательно, степень уплотнения порошка в области, расположенной вдоль линии сопряжения частей пассивной формообразующей поверхности  $[A'A]$  и  $[C'C]$ , будет одинакова. Из теории прессования порошковых материалов в закрытых пресс-формах известно [7], что за счёт пристенного трения перепады плотности  $\Delta\rho$  по высоте прессовки в её центральной части вдоль оси  $[EeE']$  всегда меньше, чем у стенок (вдоль линии  $[AaA']$ ), а величина средней плотности  $\langle\rho\rangle$  вдоль любой её вертикали одинакова в любой момент прессования:

$$\Delta\rho_{[AaA']} \geq \Delta\rho_{[EeE']}, \quad (5)$$

$$\langle\rho\rangle_{[AaA']} = \langle\rho\rangle_{[EeE']} = \langle\rho\rangle_{[CcC']}. \quad (6)$$

В любой точке плоскости сечения порошкового тела (заштрихованная область  $[A'ACC']$ ), проходящей через симметричные центральной оси прессования линии сопряжения частей пассивной формообразующей поверхности  $[A'A]$  и  $[C'C]$  степень уплотнения, а следовательно, и плотность порошкового тела будет одинакова и равна среднему по объёму прессовки значению. В плоскостях сечений, равноудалённых от областей сопряжения частей пассивной формообразующей поверхности

(рис. 1, б), плоскость  $[BB'D'D]$ , распределение плотности должно подчиняться классическим представлениям с инверсией параметров в области оси симметрии прессовки  $[E'E]$ , вдоль которой плотность порошкового тела постоянна. То есть в местах противохода активной и части пассивной формообразующих поверхностей (точки  $B'$  и  $D'$ ) будет происходить интенсивное уплотнение порошка, а в местах их неподвижного объединения (точки  $B$  и  $D$ ) степень уплотнения будет минимальной.

Рассмотрим соотношение сил, действующих в элементарном слое высотой  $dh$  порошкового тела, противоположные боковые поверхности которого формируются встречно движущимися частями пассивной формообразующей поверхности пресс-формы, (рис. 2, б).

Сила, действующая на верхнее основание слоя

$$F_0 = P \cdot S_0. \quad (7)$$

Реакция силы, действующая на нижнее основание слоя,

$$F_h = (P - dP) \cdot S_0, \quad (8)$$

$dP$  – потери давления прессования на высоте  $dh$ .

Сила пристенного трения, развитая на части пассивной формообразующей поверхности, движущейся совместно с верхней частью активной формообразующей поверхности

$$F'_{тр} = F_{бок} f' = P \cdot \xi \cdot S'_{бок} \cdot f' = P \cdot \xi \cdot f' \cdot \Pi' \cdot dh. \quad (9)$$

где  $F_{бок}$  – сила бокового давления;  $S'_{бок}$  – площадь соответствующей части пассивной формообразующей поверхности;  $f'$  – коэффициент пристенного трения, развитого на поверхности  $S'_{бок}$ .

Сила пристенного трения, развитая на части пассивной формообразующей поверхности, движущейся совместно с нижней частью активной формообразующей поверхности

$$\begin{aligned} F''_{тр} &= F_{бок} f'' = P \cdot \xi \cdot S''_{бок} \cdot f'' = \\ &= P \cdot \xi \cdot f'' \cdot \Pi'' \cdot dh. \end{aligned} \quad (10)$$

В состоянии статического равновесия сил  $F_0 = F_h + F'_{тр} - F''_{тр}$ ,

$$\begin{aligned} P \cdot S_0 &= (P - dP) \cdot S_0 + \\ &+ P \cdot \xi \cdot f' \cdot \Pi' \cdot dh - P \cdot \xi \cdot f'' \cdot \Pi'' \cdot dh. \end{aligned} \quad (11)$$

Интегрируя, получим:

$$\ln\left(\frac{P_h}{P_0}\right) = -(\Pi' \cdot f' - \Pi'' \cdot f'') \cdot \xi \cdot \frac{h}{S_0}. \quad (12)$$

Тогда величина перепада плотности прессовки по её высоте, найденная аналогично (4):

$$\Delta\rho = b \cdot (\Pi' \cdot f' - \Pi'' \cdot f'') \cdot \xi \cdot \frac{h}{S_0}. \quad (13)$$

Сравнение полученных выражений (6) и (13) показывает, что при коллекторном прессовании распределение вертикальных давлений и средней в горизонтальном сечении плотности по высоте порошкового тела, кроме коэффициента бокового давления и геометрических параметров прессовки,

зависит от соотношения величин сил трения, развитых на разнонаправленных частях пассивной формообразующей поверхности. Перепад давления прессования по высоте прессовки отсутствует при равенстве встречно движущихся частей общего гидравлического периметра ( $P' = P''$ ) и при одинаковых условиях пристенного трения на этих поверхностях ( $f' = f''$ ).

При практической реализации описанной схемы прямого коллекторного прессования следует учитывать, что перепад плотности по объёму прессовки будет зависеть от количества линий подвижного сопряжения разнонаправленных частей пассивных формообразующих поверхностей, то есть от количества плоскостей [А'АСС']. Поскольку это количество напрямую связано с количеством формообразующих элементов, то оно ограничивается сложностью изготовления и эксплуатации коллекторной пресс-формы.

Практика заказов коллекторных пресс-форм на машиностроительных предприятиях показала, что 12 – максимально допустимое (без существенного удорожания и с приемлемой сложностью эксплуатации) количество таких элементов. При этом в перпендикулярных оси прессования сечениях реальных прессовок, полученных в такой пресс-форме, угловое чередование периферийных зон с максимальной и минимальной плотностью будет наблюдаться через каждые 30 градусов. Дальнейшее повышение равномерности распределения плотности по всему объёму порошкового тела возможно путём увеличения не количества, а общей площади плоскостей [А'АСС']. Именно этот вариант усовершенствования коллекторного способа прессования представляется перспективным и подлежащим дальнейшему анализу.

При конструктивной реализации коллекторной схемы прессования возникают дополнительные поверхности трения, которые приводит к потерям усилия прессования на его преодоление. Внешние поверхности формообразующих элементов испытывают терние о поверхность единой обоймы, которая удерживает их от неосевых перемещений. Величина таких потерь зависит от коэффициента бокового давления, коэффициента трения материала пресс-формы (сталь по стали), а также отношения высоты прессовки к её гидравлическому радиусу. Для учёта влияния указанных потерь усилия прессования на плотность прессовки воспользуемся выражением (3) и после его преобразований с учётом потерь на преодоление дополнительных сил трения получим:

$$\rho = b \cdot \ln \left( \frac{P_0}{P_{кр}} \right) + \ln \left( 1 - 2 \cdot \xi \cdot f_s \cdot \frac{h}{R} \right) + 1, \quad (13)$$

где  $f_s$  – коэффициент взаимного трения элементов пресс-формы.

В наиболее неблагоприятных условиях прессования порошковых материалов с коэффициентом гидростатичности, равным единице, приведённая высота  $h/R$  порошкового изделия будет ограниче-

на величиной  $1/(2f_s)$ , при которой усилие прессования будет полностью уравновешено дополнительной силой трения формообразующих элементов матрицы о сопряжённые с ними поверхности удерживающих элементов. Несмотря на то, что для таких порошковых материалов применение коллекторного способа прессования не имеет практического смысла (перепады плотности в них полностью отсутствуют), указанное обстоятельство следует учитывать при проектировании коллекторных пресс-форм для компактирования порошков с меньшими коэффициентами гидростатичности. Минимизация сил трения формообразующих элементов достигается применением смазочных материалов на неформообразующих поверхностях либо иными технологическими приёмами, например подведением ультразвуковых колебаний [17].

### 3. Случай спирального варианта коллекторного прессования

Исходя из ограничений на количество формообразующих элементов, сформулированных в предыдущем разделе, увеличение площади [А'АСС'] (при неизменных высоте и диаметре порошкового тела) возможно только путём придания этим поверхностям некоторой кривизны, например, путём их равномерного по высоте скручивания вокруг оси прессования (рис. 1, в; рис. 2, в). В таком спиральном варианте коллекторной схемы взаимное перемещение формообразующих поверхностей остаётся таким же, как при прямом коллекторном прессовании, однако линии подвижного сопряжения разнонаправленных частей пассивной формообразующей поверхности [А'аА] и [С'сС] закручены по образующей поверхности цилиндра на некоторый угол  $\theta$ .

При использовании такой схемы, кроме уже отмеченных выше дополнительных потерь усилия прессования на преодоление трения между формообразующими и удерживающими элементами коллекторной пресс-формы, следует ожидать возникновения сил трения между скользящими друг по другу формообразующими элементами. Величина этой силы трения будет зависеть от коэффициента трения  $f_s$ , угла скручивания  $\theta$ , приведённой высоты прессовки  $h/R$  и при определённых условиях может полностью компенсировать усилие прессования, делая процесс уплотнения порошка невозможным. Выражение зависимости предельного коэффициента трения от угла скручивания можно вывести из отношения высоты прессовки к длине дуги скручивания.

$$f_s \leq \frac{h}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot \frac{\theta}{360}}. \quad (14)$$

Однако расчёты по этому выражению показывают, что такая ситуация на стальных пресс-формах с коэффициентом трения 0,15 при уплотнении порошкового тела с приведённой высотой  $h/R=4$  может возникнуть при углах скручивания значи-



тельно больше 360 градусов (четыре полных оборота по высоте), а потери усилия прессования при углах скручивания до 90° не превысят 6 %.

Представленный в предыдущих разделах аппарат описания перепада плотности по высоте компактов нельзя применить для оценки перепада плотности в ортогональных направлениях. Однако в первом приближении правомерно предположить, что уменьшение перепада плотности по объёму порошкового тела, полученному в спиральном варианте коллекторного способа прессования, по сравнению с прямым коллекторным прессованием будет пропорционально коэффициенту увеличения площади поверхности [A'ACC'] при её скручивании на заданный угол с образованием двойного прямого геликоида. Площадь этого геликоида зависит от угла скручивания, гидравлического радиуса и высоты порошкового тела. В результате преобразований и переноса результатов на полный объём прессовки получено следующее выражение для искомого объёмного коэффициента увеличения равномерности распределения плотности при использовании спирального варианта коллекторной схемы прессования.

$$q = \left( \frac{\sqrt{R^2 + t^2}}{2t} + \frac{t}{2R} \cdot \ln \frac{R + \sqrt{R^2 + t^2}}{t} - 1 \right) \cdot 2\pi, \quad (15)$$

где  $t = \frac{h}{\pi \cdot \frac{\theta}{180}}$ .

Графическая зависимость процентной величины коэффициента  $q$  по объёму прессовки с отношением высоты к гидравлическому радиусу  $h/R=4$  от угла скручивания  $\theta$  представлена на рис. 3.

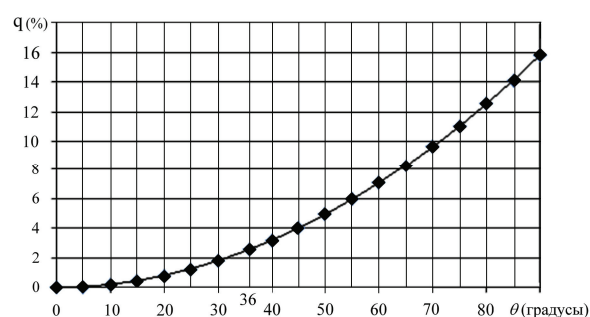


Рис. 3. Процент увеличения равномерности распределения плотности по объёму прессовки в зависимости от угла скручивания формообразующих элементов коллекторной пресс-формы спирального типа

Из представленной предварительной оценки видно, что значимое повышение равномерности распределения плотности прессовки в коллекторной схеме прессования за счёт искривления поверхности [A'ACC'] достигается при углах скручивания более 30 градусов. Проверка корректности этих выводов возможна только проведением натуральных или модельных экспериментов, которые позволят учесть большее количество факторов влияния на рассматриваемый процесс. Натурные

эксперименты ограничены дороговизной изготовления множества коллекторных пресс-форм с различными углами скручивания формообразующих элементов. Более предпочтительным является компьютерное моделирование сравниваемых способов прессования.

### Моделирование

Моделирование процесса деформирования уплотнения порошковых тел одинаковой геометрии односторонним статическим прессованием и рассматриваемыми коллекторными вариантами прессования (рис. 4) проводили с использованием метода конечных элементов. Начальные условия, режимы прессования и параметры трения на контактирующих поверхностях задавали одинаковыми для всех способов прессования. Исходя из выводов предыдущего раздела, для угла скручивания спирального варианта коллекторной схемы прессования была выбрана величина 36 градусов. Расчётное значение процентного повышения степени равномерности распределения плотности для этого угла по сравнению с прямым коллекторным прессованием составило 2,6 %.

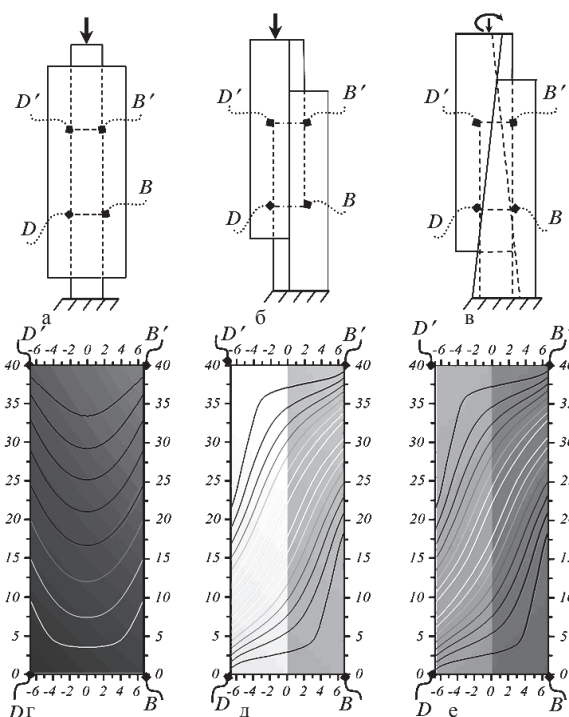


Рис. 4. Модели схем прессования с соответствующими этим схемам слоями деформации порошкового тела: традиционной одноосной схемы (а, г), прямой коллекторной (б, д) и спиральной коллекторной (в, е - выпрямленное сечение)

В случае традиционной схемы прессования (рис. 4, а, г) порошкового тела с большим значением приведённой высоты можно наблюдать резко неоднородное по высоте искривление слоев. Картина осесимметрична, то есть не зависит от положения плоскости сечения вдоль оси прессования. В случае прямого коллекторного прессования

(рис. 4, б, д) и коллекторного прессования спирального типа (рис. 4, в, е) видно, что деформация на поверхности  $[DBD'B']$  приобретает совершенно иной – более равномерный по высоте – характер, который при этом не является осесимметричным, и, таким образом, не позволяет оценить степень повышения равномерности на основе анализа одного сечения. Кроме того, на выбранном сечении  $[DBD'B']$  отличия картин распределения деформации слоёв порошкового тела между прямой и спиральной схемами коллекторного прессования минимальны.

В качестве примера, иллюстрирующего эту особенность, можно представить аналогичные картины распределения деформации слоёв в ортогональных сечениях  $[ACA'C']$  (рис. 5). Для корректного количественного сопоставления схем прессования необходимо рассмотрение объёмного распределения слоёв деформации порошковых тел с вычислением интегральной характеристики разброса количественных значений локальной деформации по всему объёму прессуемого изделия (рис. 6).

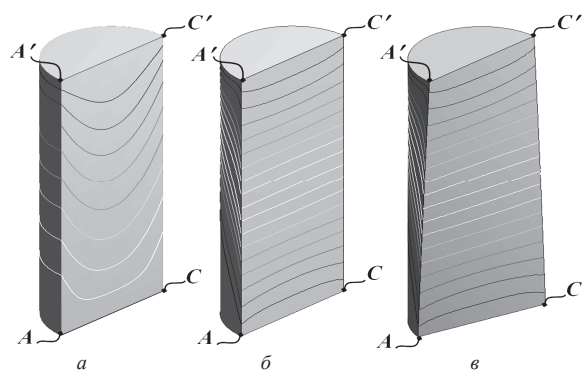


Рис. 5. Модели деформации слоёв порошкового тела в сечении  $[ACA'C']$  для: а) традиционного прессования; б) коллекторного прессования; в) коллекторного прессования спирального типа

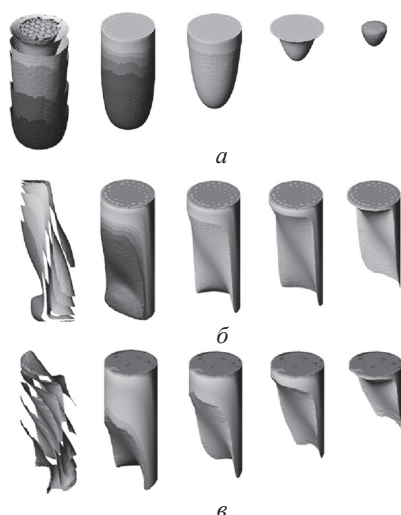


Рис. 6. Трёхмерные изолинии (изоповерхности) деформаций слоёв порошкового тела, уплотняемого по: а) традиционной; б) прямой; в) спиральной схемам коллекторного прессования

В качестве единого сопоставляемого результата моделей допустимо принять величину статистической дисперсии значений локальных деформаций в объёме порошкового тела, которые отражают степень локального уплотнения. На рис. 7 представлен количественный результат сравнительного моделирования рассматриваемых процессов прессования. Из рисунка видно, что прессование с применением спирального варианта коллекторной схемы при прочих равных условиях позволяет на 48 % повысить равномерность распределения степени уплотнения по сравнению с односторонним прессованием и на 5 % по сравнению с прямым коллекторным методом прессования. Последнее превысило результат предварительной аналитической оценки (2,6 %), что объясняется более корректным учётом взаимного влияния локальных областей деформации при использовании метода конечных элементов, а также возможностью задания при таком моделировании реологических свойств деформируемого материала, аналитический учёт объёмного влияния которых на конечный результат уплотнения не представляется возможным.

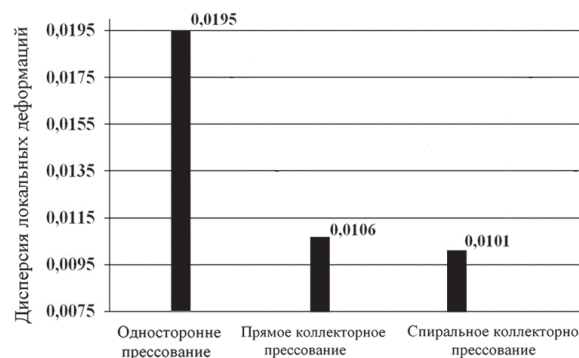


Рис. 7. Дисперсия величины локальных деформаций порошкового тела, уплотняемого различными схемами прессования

### Выводы

Коллекторная пресс-форма спирального типа позволяет достигнуть дополнительного повышения равномерности распределения плотности по объёму порошкового тела, однако для максимальной реализации этой возможности требуется выбор угла скручивания, оптимальная величина которого будет зависеть как от приведённой высоты прессуемого изделия, так и от реологических характеристик порошкового материала. Следует заметить, что в отличие от прямого коллекторного прессования, способом коллекторного прессования спирального типа можно изготовить только те изделия, внешняя поверхность которых имеет цилиндрическую форму или форму винтовой поверхности с постоянным по высоте углом скручивания. При этом соотношения поперечных размеров изделия и его габариты принципиальных ограничений не имеют.

Результаты проведённой аналитической и модельной оценки равномерности распределения степени уплотнения по высоте и объёму порошковых тел, прессуемых различными способами, позволяют использовать изложенный подход для оптимизации кинематических схем перемещения формообразующих элементов пресс-форм коллекторного типа.

Предложенный аналитический аппарат позволяет провести первичную оптимизацию геометрических размеров коллекторных пресс-форм и режимов прессования для достижения требуемых характеристик изделия без дорогостоящих натуральных оптимизационных исследований.

*Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (государственное задание «Наука»; госконтракт № 14.518.11.7017).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Glass S.J., Ewsuk K.G. Ceramic Powder Compaction // MRS Bulletin. – 1997. – V. 22. – P. 24–28.
2. Lannutti J.J. Characterisation and control of compact microstructure // MRS Bulletin. – 1997. – V. 22. – P. 38–44.
3. Groza J.R. Sintering of Nanocrystalline Powders // Inter journal Powder Metall. – 1999. – V. 35. – P. 59.
4. Kear B.H., Colaizzi J., Mayo W.E., Liao S.C. On the processing of nanocrystalline and nanocomposites ceramics // Scripta Mater. – 2001. – V. 44. – P. 2065–2068.
5. Способ прессования порошковых материалов (варианты) и устройство для его осуществления: пат. 2225280 Рос. Федерация; заявл. 14.12.01; опубл. 10.03.04.
6. Shtern M.B., Serdyuk G.G., Maksimenko L.A., Truhan Yu.V., Shulyakov Yu.M. Phenomenological Theories of Compacting Powders. – Kiev: Naukova Dumka Publishers, 1982. – 254 p.
7. Popilsky R.Ya., Pivinsky Yu.E. Compacting Powder Ceramic Masses. – Moscow: Metallurgiya Publishers, 1983. – 1127 p.
8. Janssen H.A. Tests on Grain Pressure Silos // Z. Vereinschr. Dtsch. Ing. – 1895. – 39 (35). – P. 1045–1049.
9. Nedderman R.M. Statics and Kinematics of Granular Materials. – N.Y.: Cambridge University Press, 1992. – 372 p.
10. Покровский Г.И. Исследования по физике грунтов. М.; Л.: Изд-во Института ВООГЕО Гл. ред. строительной литературы, 1937. – 136 с.
11. Li Y., Liu H., Rockabrand A. Wall friction and lubrication during compaction of coal logs // Powder Technology. – 1996. – V. 87. – P. 259–267.
12. Briscoe B.J., Rough S.L. The effects of wall friction on the ejection of pressed ceramic parts // Powder Technology. – 1998. – V. 99. – P. 228–233.
13. Briscoe B.J., Rough S.L. The effect of wall friction in powder compaction, Colloids and surfaces A // Physicochemical and Engineering Aspects. – 1998. – V. 137. – P. 103–116.
14. Tien Y.M., Wu P.L., Chu C.A., Chuang W.S., Wu L.H. The friction-free compressibility curve of bentonite block // Physics and Chemistry of the Earth. – 2007. – V. 32. – P. 809–819.
15. Tien Y.M., Wu P.L., Huang W.H., Kuo M.F., Chu C.A. Wall friction measurement and compaction characteristics of bentonite powders // Powder metallurgy. – 2007. – V. 173. – P. 140–151.
16. Хасанов О.Л., Двилис Э.С., Соколов В.М. Построение кривых уплотнения керамических порошков на основе однопараметрического уравнения прессования // Огнеупоры и техническая керамика. – 2001. – № 1. – С. 40–44.
17. Хасанов О.Л., Похолоков Ю.П., Соколов В.М., Двилис Э.С. Ультразвуковое компактирование циркониевой керамики из ультрадисперсных порошков // Стекло и керамика. – 1995. – № 7. – С. 15–18.

*Поступила 12.02.2013 г.*

УДК 62–531.7

## ДИНАМИКА ФРЕЗЕРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИОННЫХ СТАЛЕЙ КОНЦЕВЫМИ ФРЕЗАМИ

А.Н. Гаврилин, Г.И. Коровин\*, П.С. Рожков\*

Томский политехнический университет

E-mail: tom-gawral@list.ru

ООО «ПК МИОН», г. Томск

E-mail: pk-mion@mail.ru

Статья посвящена оптимизации режимов фрезерной обработки конструкционных сталей при использовании специального виброустойчивого инструмента оригинальной конструкции ПК МИОН, г. Томск.

**Ключевые слова:**

Вибрация, неравномерный окружной шаг зубьев фрезы.

**Key words:**

Vibration, irregular circle pitch of the mill teeth.

Задача повышения виброустойчивости технологической системы имеет одно из решающих значений при обработке конструкционных и других сталей на современных высокоскоростных станках.

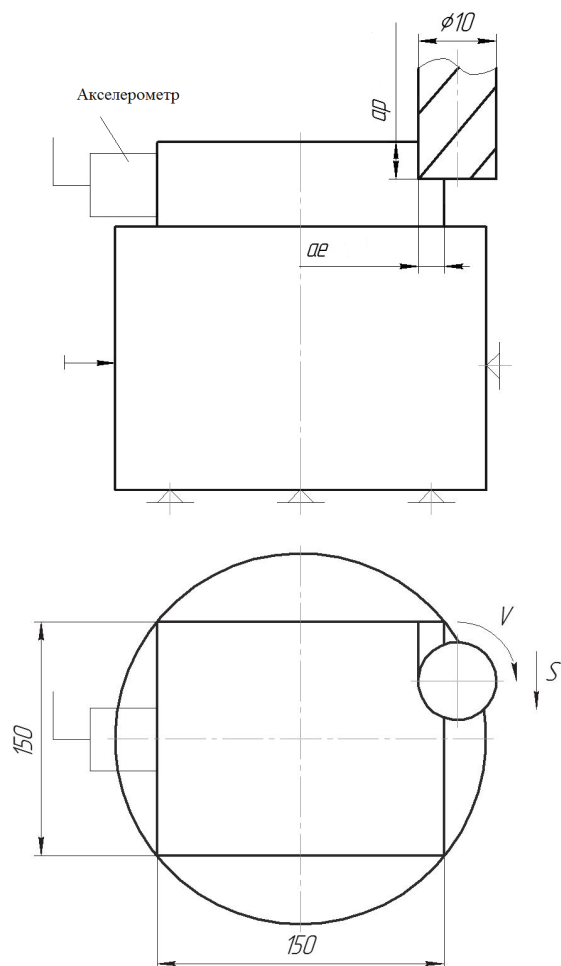


Рис. 1. Схема установки обрабатываемой детали, фрезы и акселерометра во время эксперимента

Для снижения уровня вибрации при фрезеровании проведены эксперименты посредством измене-

ния геометрии фрез и режимов фрезерования. В эксперименте варьировались следующие параметры: угол наклона винтовой канавки  $\omega$  и неравномерность окружного шага зубьев фрез  $\varphi_{1-4}$ , а также режимы фрезерования, скорость резания  $V$  и подача  $S_z$ .

Следует отметить, что такой способ используется в ряде работ [1–3].

Эксперимент проводился на фрезерном станке модели MCV-400 (фирма «AMS» LTD (ACE MANUFACTURING SYSTEM LTD) производства Индии 2011 г.), фрезерованием заготовки диаметром 250 мм и высотой 200 мм, из стали 40X с твердостью HB 200, рис. 1.

Для оценки влияния геометрии инструмента были изготовлены три фрезы  $\varnothing=10$  мм, с числом зубьев  $z=4$ , разным углом наклона винтовой канавки  $\omega=30, 45, 60^\circ$  и неравномерным окружным шагом зубьев  $\varphi_{1-4}$ , (табл. 2), специальной конструкции ООО «ПК МИОН», г. Томск.

Режимы фрезерования, по которым проводился эксперимент, представлены в табл. 1.

Схема установки акселерометра на заготовке приведена на рис. 1 (марка акселерометра AP2037–100 ООО «Глобал Тест», Россия).

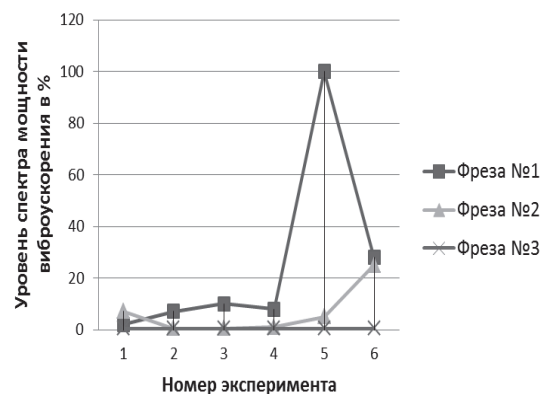


Рис. 2. Спектрограммы мощности виброускорений испытываемых фрез с параметрами эксперимента, приведенными в табл. 1

Обработка и анализ полученных данных виброускорения проводились при помощи прибора К-5101 (фирма ВИТЭКСибирь, г. Томск, Россия) и программно-математического обеспечения LabView 2011 National Instruments.

Полученные спектрограммы мощности виброускорений при фрезеровании представлены на рис. 2.

Таблица 1. Режимы фрезерования

№ эксперимента	Режимы резания		
	Скорость резания $V$ , м/мин	Подача на зуб инструмента $S_z$ , мм/зуб	Объём снятого материала $Q$ , мм <sup>3</sup> /об
1	100	0,02	0,323
2	100	0,048	0,766
3	120	0,017	0,27
4	120	0,04	0,64
5	140	0,014	0,231
6	140	0,034	0,547

Таблица 2. Геометрические параметры фрез

№ фрезы	$\omega$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	Материал фрез
	град.					
1	30	92	90	88	90	Твердый сплав марки Н10F фирмы Sandvik Coromant
2	45	92	88	92	88	
3	60	93	91	85	91	

Примечание:  $\omega$  – угол наклона винтовой канавки фрезы,  $\varphi_{1-4}$  – окружной шаг зубьев фрез.

Была также проведена серия экспериментов при различных глубинах резания  $a_p=2,5...14$  мм ( $a_e=3$  мм – const) фрезами № 1, 2, 3 с разным углом наклона винтовой канавки  $\omega$ .

На основании выполненных исследований выявлено, что при работе фрезы № 3 уровень вибрации минимален в сравнении с фрезами № 1, 2. Дальнейшие экспериментальные исследования сведены в номограмме (рис. 3), посредством которой можно выбирать оптимальные режимы для указанной фрезы с минимальным уровнем вибрации. На рис. 4 приведена зависимость амплитуды виброускорения от объёма снимаемого материала и режимов фрезерования (№ эксперимента).

Из анализа номограммы на рис. 3 и зависимости на рис. 4 определяются зоны оптимальной работы инструмента при минимальном уровне вибрации для конкретной обработки с максимальной производительностью обработки.

### Выводы

1. Проведенные эксперименты показали работоспособность фрез повышенной виброустойчивости, а также перспективность дальнейшего совершенствования аппаратно-программной части и методики проведения исследований для оптимизации геометрических и технологических параметров фрез в условиях производства.
2. Установлено влияние режимов резания на уровень вибрации технологической системы (рис. 2). Уровень виброускорения обрабатываемой заготовки снизился на 70 % с увеличением угла винтовой канавки фрезы от 30 до 60 градусов.
3. Значительное повышение уровня вибрации, которое отмечено при режимах фрезерования,  $n=4460$  об/мин объясняется резонансом, т. е. совпадением собственной частоты колебаний

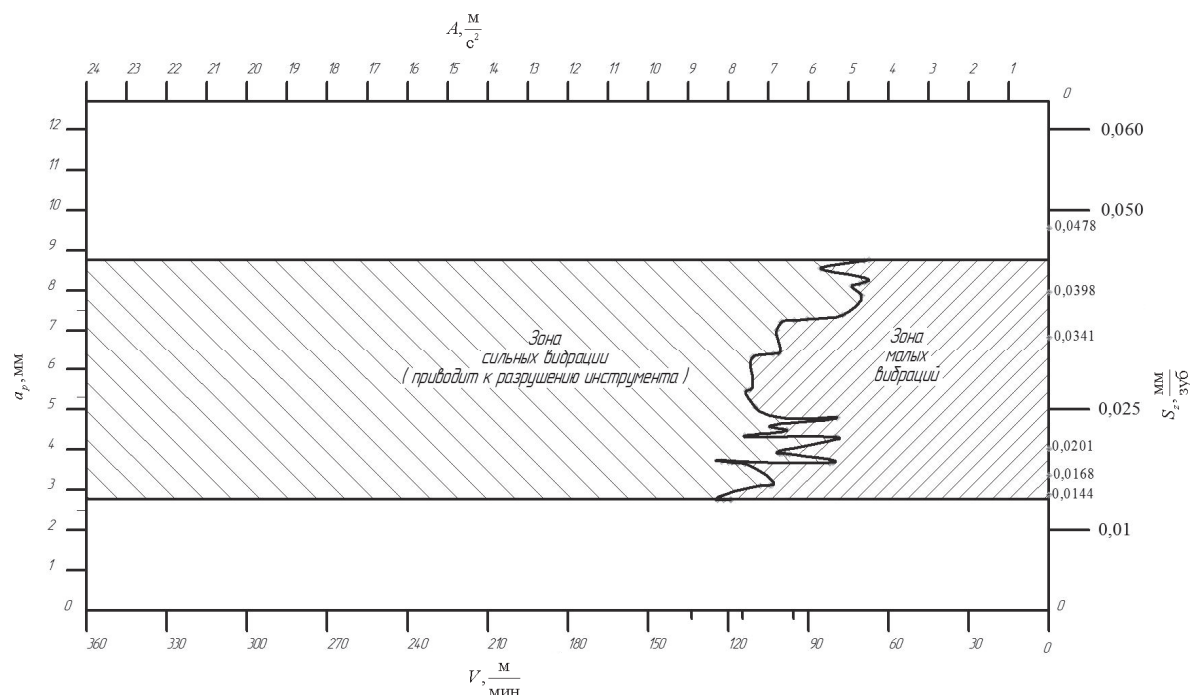
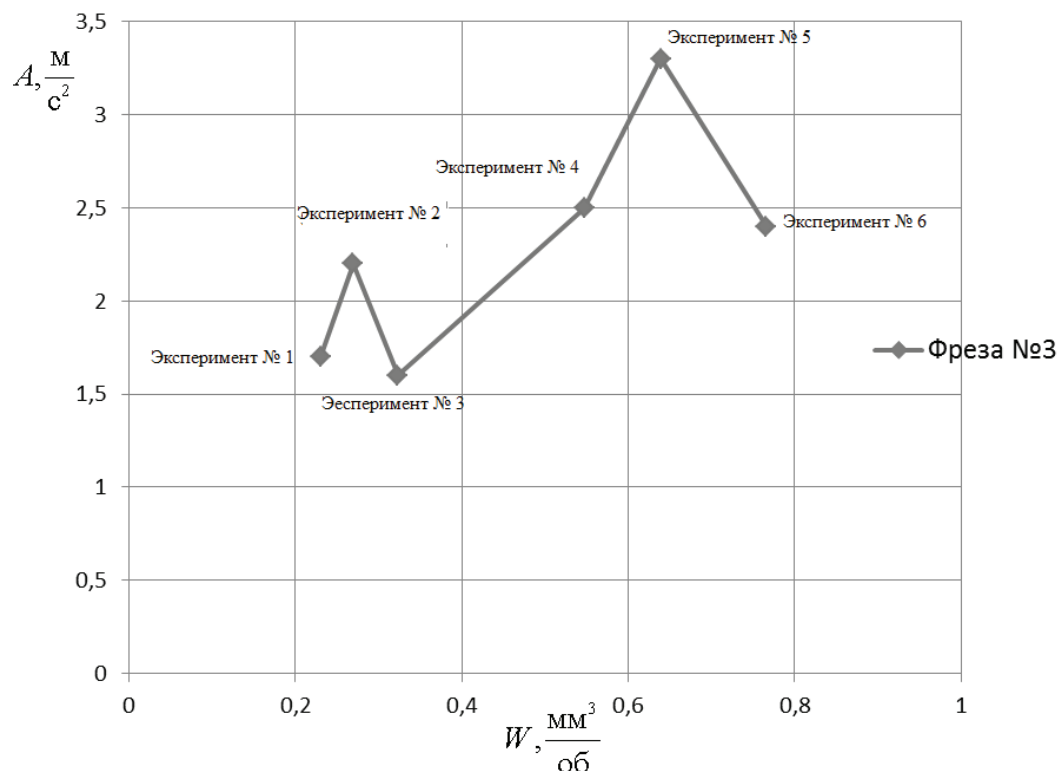


Рис. 3. Номограмма для определения оптимальных условий работы инструмента при различных глубинах резания  $a_p$  ( $a_e=3$  мм – const)



**Рис. 4.** Зависимость амплитуды виброускорения от объёма снимаемого материала при значениях  $a_p=5,3$ ;  $a_e=3$  мм – const для фрезы № 3

одного из элементов технологической системы и частоты возбуждения  $f_{\text{возб.}}=z \times n / 60$  ( $n$  – число оборотов шпинделя;  $z$  – число зубьев фрезы).

4. Наибольшее влияние неравномерного окружного шага зубьев фрез на величину вибрации отмечено для фрезы № 3. Это можно объяснить динамическим эффектом «быстрого» прохождения колебательной системы инструмента че-

рез резонансную частоту, что приводит к значительному снижению уровня вибрации [3. место эффект «виброгашения».

5. Полученные данные позволяют определять зоны оптимальной работы инструмента при минимальном уровне вибрации с максимальной производительностью и стойкостью режущего инструмента.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивович В.А., Онищенко В.Я. Защита от вибраций в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1990. – 272 с.
2. Андреев В.Н., Боровский Г.В., Боровский В.Г., Григорьев С.Н. Инструмент для высокопроизводительного и экологически чистого резания. – М.: Машиностроение, 2010. – 479 с.
3. Вибрация в технике: Справочник в 6 т. Т. 6 / под ред. В.Н. Челомея. – М.: Машиностроение, 1978. – 456 с.
4. Жарков И.Г. Вибрации при обработке лезвийным инструментом. – М.: Машиностроение, 1986. – 180 с.

Поступила 11.03.2013 г.



УДК 621.822.6.001

## ОСОБЕННОСТИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДВУХПОЛЮСНОЙ ПЕРЕДАЧИ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ТЕЛАМИ КАЧЕНИЯ

Е.А. Ефременков, С.Н. Сорокова, Е.Е. Кобза

Томский политехнический университет  
E-mail: ephrea@mail.ru

Рассмотрены особенности проектирования передачи с промежуточными телами качения и свободной обоймой с двумя полюсами зацепления. Показаны особенности прямого проектирования, через исходные параметры передачи, и проектирования, исходя из заданного межосевого расстояния.

### Ключевые слова:

Циклоидальная передача, свободная обойма, двухполюсное зацепление, промежуточные тела качения, проектирование.

### Key words:

Cycloid drive, iron ring free, couple pitch point, intermediate rolling elements, design.

Исследованию передач с промежуточными телами качения (ПТК) в настоящее время уделяется все больше внимания. Это связано с высокими техническими характеристиками, обеспечиваемыми данным видом передач в комплексе: высокая точность, надежность, компактность вместе со способностью передавать высокие крутящие моменты. Одной из наиболее перспективных передач, наиболее полно обеспечивающей указанные характеристики, является передача с ПТК и свободной обоймой (рис. 1, а).

Передача с ПТК и свободной обоймой (рис. 1, б) включает эксцентриковое водило – 1 (генератор), являющийся входным звеном, внутреннее колесо – 2 с циклоидальным профилем (кулачок), промежуточные тела качения – 3, обойму с телами качения (сепаратор, показан на рис. 1, а), наружное колесо – 4 с циклоидальным профилем (венец), выходной вал – 5 с механизмом параллельных кривошипов – 6. Выходным звеном в данной передаче может являться как кулачок, так и венец. Генератор и кулачок установлены на опорах качения.

Циклоидальный профиль и тела качения позволяют обеспечить непрерывность контакта звеньев передачи и многопарность зацепления, что

обеспечивает высокую нагрузочную способность механизмов, сконструированных на базе передачи с ПТК и свободной обоймой.

Синтез геометрии однополюсной передачи с ПТК и свободной обоймой и проектирование механизмов на ее основе рассмотрен в работах [1, 2]. При проектировании передачи с ПТК и свободной обоймой с одним полюсом зацепления силы в контакте тела качения с профилями кулачка и венца действуют по одной нормали. Если разработать передачу с двумя полюсами зацепления, то контактные силы будут направлены под углом друг к другу. Кроме того, варьируя относительное положение полюсов зацепления, можно расширить варианты выбора кинематики передачи. Таким образом, рассмотрение особенностей синтеза двухполюсной передачи с ПТК и свободной обоймой является актуальным.

Описывая профили передачи с ПТК и свободной обоймой, примем следующие обозначения: 1 – кулачок; 2 – производящее колесо с телами качения; 3 – центральное колесо (венец).

Тогда  $Z_1$  – число профилей кулачка;  $Z_2$  – число промежуточных тел качения;  $Z_3$  – число профилей венца.

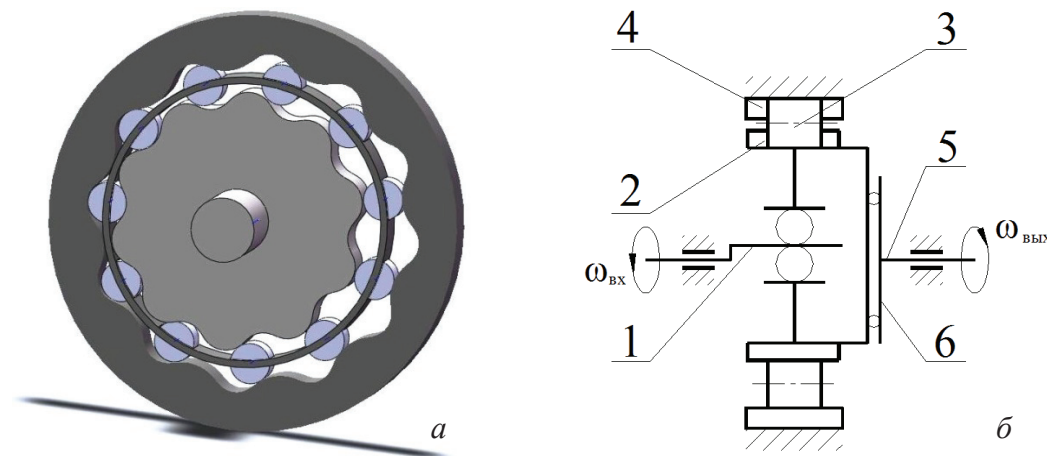


Рис. 1. Передача с промежуточными телами качения и свободной обоймой: а) общий вид; б) кинематическая схема

Исходными параметрами для двухполусной передачи с ПТК и свободной обоймой при проектировании являются:

- $r_{21}$  – радиус производящей окружности (обоймы) при зацеплении обоймы и кулачка;
- $r_{\text{тк}}$  – радиус промежуточных тел качения;
- $Z_2$  – число промежуточных тел качения;
- $\chi_1$  – коэффициент смещения при зацеплении обоймы и кулачка.

Радиус (диаметр), на котором будут располагаться центры тел качения  $r_c$ , находится в зависимости от радиуса производящей окружности  $r_{21}$  через коэффициент смещения  $\chi_1$  и выражается зависимостью:

$$r_c = r_{21} \chi_1. \quad (1)$$

Из формулы (1) следует, что если коэффициент  $\chi_1=1$ , то окружность центров тел качения совпадет с производящей окружностью и тогда радиус (диаметр) тел качения равен нулю, что недопустимо.

Для циклоидных передач в [3] рекомендуется принимать значение коэффициента смещения в пределах  $\chi=1,25-1,6$ .

Условие зацепления определим как:

$$Z_1 < Z_2 < Z_3,$$

где

$$Z_1 = Z_2 - 1; \quad Z_3 = Z_2 + 1.$$

Для вывода уравнения профиля внутреннего циклоидального колеса (кулачка) изобразим расчетную схему зацепления производящего колеса – 2 с кулачком – 1 (рис. 2). Здесь у кулачка и производящего колеса вертикальная ось  $Y$  общая, а горизонтальные оси  $X$  смещены на межосевое расстояние  $a_{w1}$ , или эксцентриситет  $e_1$ . Межосевое расстояние (эксцентриситет) определяется как отношение радиуса производящей окружности и числа промежуточных тел качения [1]:

$$a_{w1} = e_1 = \frac{r_{21}}{Z_2}. \quad (2)$$

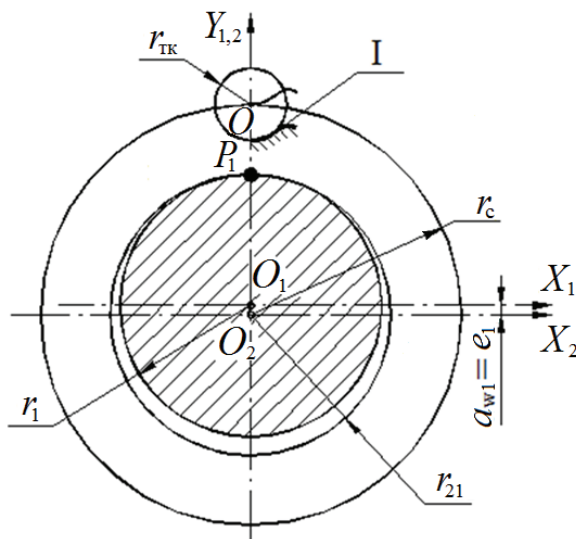


Рис. 2. Схема зацепления производящего колеса с кулачком

Полюс зацепления  $P_1$  кулачка и тел качения, находящийся в обойме, находится в точке контакта производящего колеса и основной окружности кулачка, радиус которой, с учетом формулы (2):

$$r_1 = r_{21} \left( 1 - \frac{1}{Z_2} \right), \quad (3)$$

где  $1 - \frac{1}{Z_2} = i_{21}$  – передаточное отношение от второго колеса к первому.

Тогда угол поворота первого колеса (кулачка) в зависимости от угла поворота производящего колеса:

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_2}{\left( 1 - \frac{1}{Z_2} \right)}. \quad (4)$$

Уравнения профиля I кулачка (рис. 2) в координатах  $X_1 O_1 Y_1$  через угол поворота обоймы с телами качения запишем, как:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_{2A} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + Y_{2A} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - e_1 \sin \varphi_1, \\ Y_1 &= -X_{2A} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + Y_{2A} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - e_1 \cos \varphi_1, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $X_{2A}, Y_{2A}$  – координаты точки профиля в координатных осях с началом координат в центре производящего колеса.

Последние определим из следующих выражений:

$$\begin{aligned} X_{2A} &= \frac{r_{\text{тк}} r_{21} \sin \varphi_2}{L_1}, \\ Y_{2A} &= \frac{r_c L_1 + r_{\text{тк}} (r_{21} \cos \varphi_2 - r_c)}{L_1}, \end{aligned}$$

где  $L_1$  – расстояние от полюса  $P_1$  зацепления обоймы с кулачком до центра тела качения  $O$ , находящегося на окружности центров.

Расстояние  $L_1(P_1 O)$  определим через угол поворота производящего колеса из треугольника  $O_2 O P_1$  (рис. 3) по теореме косинусов:

$$O P_1 = L = \sqrt{r_2^2 + r_c^2 - 2r_2 r_c \cos \varphi_2}. \quad (6)$$

Выражение (6) справедливо для обоих зацеплений с обоймой (кулачка и венца), а  $r_2$  следует понимать как  $r_{21}$  для зацепления кулачка с телами качения и  $r_{23}$  для зацепления венца с телами качения. При этом радиус  $r_c$  центров тел качения для обоих зацеплений остается постоянным.

Для зацепления производящего – 2 и центрального – 3 (венец) колес изобразим расчетную схему (рис. 4), аналогично предыдущему зацеплению, только со смещением межосевого расстояния (эксцентриситета) в противоположную сторону. Определим параметры такого зацепления.

При проектировании компактной двухполусной передачи с ПТК и свободной обоймой необходимо учитывать, что для обоих зацеплений  $r_c = \text{const}$ . При этом вычисляется радиус центров  $r_c$  по формуле (1), через параметры первого зацепления, а потом для второго зацепления, через найденный  $r_c$ , определяется радиус производящей окружности:



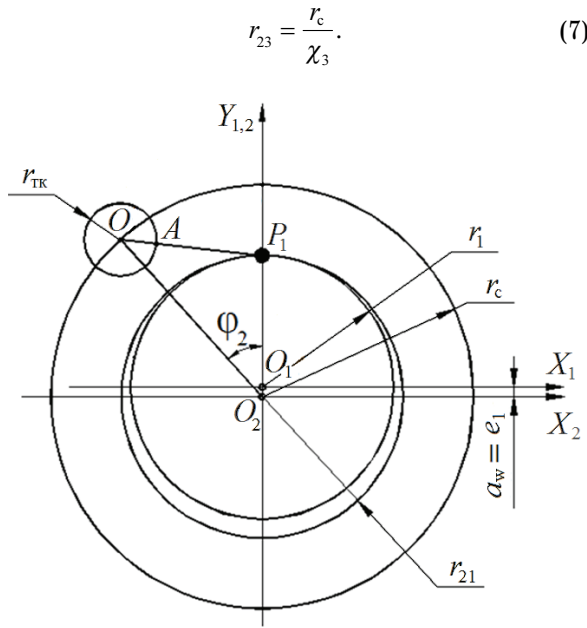


Рис. 3. К определению координат точек профиля кулачка при зацеплении с производящим колесом

Тогда радиус основной окружности венца и угол ее поворота соответственно равны:

$$r_3 = r_{23} \left( 1 + \frac{1}{Z_2} \right), \quad (8)$$

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2}{\left( 1 + \frac{1}{Z_2} \right)}. \quad (9)$$

Межосевое расстояние (эксцентриситет) для второго зацепления определяется из выражения:

$$e_3 = \frac{r_{23}}{Z_2}. \quad (10)$$

Общий эксцентриситет передачи с ПТК и свободной обоймой равен:

$$e = e_1 + e_3.$$

При проектировании передачи, смещаем центр венца  $O_3$  вниз по оси  $Y_2$  относительно центра производящего колеса  $O_2$  (рис. 4).

Уравнения профиля центрального колеса II в координатах  $X_3O_3Y_3$ , с началом координат в центре венца, запишутся в виде:

$$\begin{aligned} X_3 &= X_{2B} \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + Y_{2B} \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + e_3 \sin \varphi_3, \\ Y_3 &= -X_{2B} \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + Y_{2B} \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + e_3 \cos \varphi_3. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь по аналогии с предыдущим профилем абсцисса и ордината точки профиля центрального колеса в координатных осях  $X_2O_2Y_2$  определяются как:

$$\begin{aligned} X_{2B} &= -\frac{r_{ТК} r_{23} \sin \varphi_2}{L_3}, \\ Y_{2B} &= \frac{r_c L_3 - r_{ТК} (r_{23} \cos \varphi_2 - r_c)}{L_3}. \end{aligned}$$

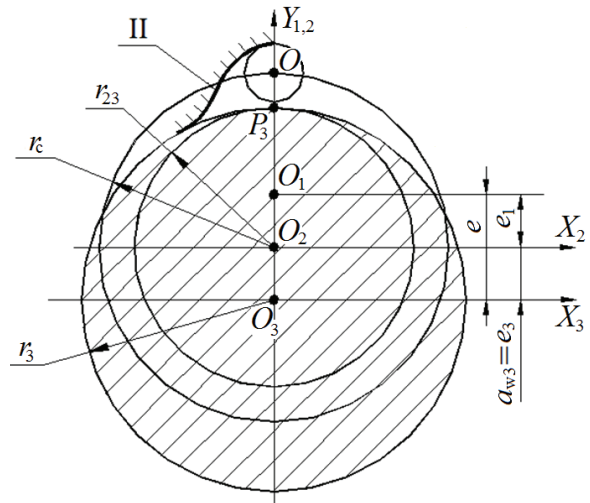


Рис. 4. Схема зацепления венца и производящего колеса

Расстояние от полюса зацепления  $P_3$  до центра тела качения определяется из выражения (6).

Один угловой шаг передачи равен  $\frac{2\pi}{Z_2}$ , следовательно, для определения точек профиля по уравнениям (5), (11) необходимы различные значения угла  $\varphi_2$  в пределах от  $0^\circ$  до  $\frac{2\pi}{Z_2}$ .

Построив оба зацепления в одних координатных осях с единым радиусом центров  $r_c$  и числом  $Z_2$  тел качения, получим двухполюсную передачу с ПТК и свободной обоймой (рис. 5).

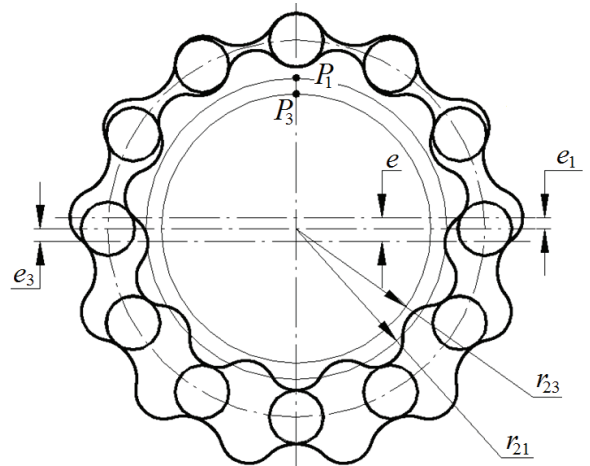


Рис. 5. Схема двухполюсной передачи с разгруженным сепаратором

Проектирование двухполюсной передачи можно вести исходя из известного межосевого расстояния (эксцентриситета), что иногда бывает предпочтительнее. Тогда, задавшись частью параметров первого зацепления, из выражения (2) определим радиус производящего колеса  $r_{21}$ , потом радиус центров  $r_c$  (1), а затем расчет производят в уже описанной последовательности (3)–(11).

### Выводы

Полученные выражения относятся к передачам с ПТК и свободной обоймой, когда передача имеет два полюса зацепления (рис. 5): один – кулачок с сепаратором; другой – сепаратор с венцом. При этом полюсы разнесены только по вертикальной оси передачи. Описаны особенности прямого про-

ектирования передачи, через исходные параметры зацепления, и особенности обратного проектирования, когда необходимо обеспечить заданное межосевое расстояние (эксцентриситет).

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (ГК № 14.В37.21.1143 от 14.09.2012).*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ефременков Е.А. Разработка методов и средств повышения эффективности передач с промежуточными телами качения: дис. ... канд. техн. наук. – Томск, 2002. – 126 с.
2. Ефременков Е.А. Разработка и проектирование передач с промежуточными телами качения нового вида // Известия Том-

- ского политехнического университета. – 2005. – Т. 308. – № 1. – С. 131–135.
3. Кудрявцев В.Н. Планетарные передачи. – Л.: Машиностроение, 1966. – 308 с.

*Поступила 18.01.2013 г.*

УДК 535.36

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ СПОСОБНОСТИ СЛОИСТОЙ ДИСПЕРСНОЙ СРЕДЫ

Б.В. Горячев, С.Б. Могильницкий

Томский политехнический университет  
E-mail: msb@tpu.ru

*Рассмотрен перенос излучения в трехслойной дисперсной среде с отражающей поверхностью. Получены аналитические выражения для определения величины отражательной способности и коэффициента пропускания дисперсной среды, состоящей из трех плоских слоев, ограниченных отражающей поверхностью. Показано, что стратосферный и приземный слои атмосферы даже при малой величине оптической плотности и ее слабом изменении оказывают существенное влияние на отражательную способность системы «трехслойная среда–отражающая поверхность» при всех значениях коэффициента отражения подстилающей поверхности. Установлено, что увеличение степени вытянутости индикатрисы рассеяния излучения в слое облачности приводит к уменьшению отражательной способности всей дисперсной среды; действие этого эффекта аналогично уменьшению оптической плотности облачного слоя атмосферы.*

### **Ключевые слова:**

*Радиация, атмосфера, дисперсная среда, слой, отражающая поверхность.*

### **Key words:**

*Radiation, atmosphere, dispersion media, layer, reflective surface.*

Исследование отражательной способности и коэффициентов пропускания дисперсных сред проводится на основе методов теории переноса излучения и численных методов [1]. При проведении исследований используются различные модели атмосферы с подстилающей поверхностью [2–4]. Точность получаемых результатов зависит от точности используемых приближений и учета всех эффектов, существенно влияющих на результат, например эффекта пространственной ограниченности дисперсной среды [5–8].

Целью данной работы является решение задачи переноса излучения в аналитическом виде и определение некоторых закономерностей переноса в системе «трехслойная дисперсная среда–отражающая поверхность». Решение получено с использованием метода многократных отражений [5]. Дисперсная среда представляется в виде прямоугольного параллелепипеда, разделенного на три слоя, где отражающей является поверхность на задней грани (по направлению распространения излучения), при нормальном падении потока излучения на поверхность дисперсной среды. Получены аналитические выражения для определения коэффициента пропускания  $A_{123}(\tau, a, \Lambda)$  и отражательной способности  $B_{123}(\tau, a, \Lambda)$  слоистой дисперсной среды с отражающей поверхностью.

Введем обозначения: оптические размеры  $\tau = \alpha l$  ( $\alpha$  – коэффициент ослабления,  $l$  – геометрические размеры дисперсной среды) первого слоя параллелепипеда  $\tau_{1x_0} \times \tau_{1y_0} \times \tau_{1z_0}$  (излучение распространяется по оси  $x$ , поперечные оптические размеры одинаковы для всех слоев и равны  $\tau_{1y_0} \times \tau_{1z_0}$ ), второго слоя  $\tau_{2x_0} \times \tau_{2y_0} \times \tau_{2z_0}$ ; третьего слоя  $\tau_{3x_0} \times \tau_{3y_0} \times \tau_{3z_0}$ ; индикатриса рассеяния излучения, характеризующая степень вытянутости  $a = (\eta + 2\mu) / (\beta + 2\mu)$ ,  $\eta$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  – интегральные параметры индикатрисы рассеяния [5, 7]; вероятность выживания кванта в первом слое  $\Lambda_1$ , во втором –  $\Lambda_2$ , в третьем –  $\Lambda_3$ ; коэффициент отражения поверхности  $r$ , пропускания  $t$ . В данной модели дисперсной среды, используемой для расчета радиационных характеристик атмосферы, первый слой представляется в виде стратосферного слоя с релеевской индикатрисой рассеяния излучения, второй – слой облачности, индикатрисы рассеяния излучения которого зависят от типа облаков [9], третий слой – приземный аэрозоль, индикатрисы рассеяния которого также весьма разнообразны [4] и изменяются от релеевской до резко вытянутой [9]. Коэффициент отражения подстилающей поверхности изменяется от 0 до 1. На основе метода многократных отражений получены формулы:

$$A_{123} = \frac{tA_1A_2A_3F_2}{F_1F_2F_5 - r(A_1^2B_2F_5 + F_6)};$$

$$B_{123} = \frac{B_1F_2 + A_1^2B_2 + F_6/F_5}{F_2} + \frac{r(A_1A_2A_3)^2F_2}{F_5\{F_2F_5 - r[F_5(B_1F_2 + A_1^2B_2) + F_6]\}}.$$

Обозначения:

$$F_1 = 1 - rB_1(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda);$$

$$F_2 = 1 - B_1(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)B_2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda);$$

$$F_3 = 1 - B_1(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)B_3(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda);$$

$$F_4 = A_1^2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)B_2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)B_3(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda);$$

$$F_5 = F_2F_3 - F_4;$$

$$F_6 = A_1^2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)A_2^2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)B_3(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda).$$

Радиационные характеристики каждого из слоев  $A_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)$ ,  $B_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)$ , где  $i=1,2,3$ , определяются следующим образом [5]:

$$A_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) = \frac{[1 - R_i^2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)] \exp[-k_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)\tau_{ix_0}]}{1 - R_i^2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) \exp[-2k_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)\tau_{ix_0}]},$$

$$B_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) = \frac{R_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) \{1 - \exp[-2k_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)\tau_{ix_0}]\}}{1 - R_i^2(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) \exp[-2k_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)\tau_{ix_0}]}.$$

Переменные коэффициенты  $k(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)$  и  $R(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)$ , зависящие от поперечных оптических размеров дисперсной среды, индикатрисы рассеяния излучения и вероятности выживания кванта, разные для каждого слоя и имеют вид:

$$k_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) = \sqrt{P_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)[1 - \Lambda_i(\eta - \beta_i \Lambda)]};$$

$$R_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) = \frac{k_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) - P_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)}{k_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) + P_i(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)}.$$

Функция  $P(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda)$  определяет рассеяние и поглощение излучения по оси  $x$  и в частном случае релеевской индикатрисы рассеяния и полубесконечной среды [5]:

$$P(\tau_y, \tau_z, a, \Lambda) = \frac{(1 - \Lambda)(32 - 23\Lambda + 4\Lambda^2)}{2(16 - 17\Lambda + 4\Lambda^2)}.$$

Рассмотрим некоторые результаты расчетов по данным формулам потоков монохроматического излучения в слоистой дисперсной среде с отражающей поверхностью.

Результаты расчетов приведены на рис. 1–3. Поперечные оптические размеры дисперсной среды равны  $\tau_{1y_0} \times \tau_{1z_0} = 10^5$ . На рис. 1 представлены зависимости отражающей способности  $B_{123}$  системы «трехслойная дисперсная среда–отражающая поверхность» от коэффициента отражения подстилающей поверхности, при различных значениях оптической плотности приземного и стратосферного слоев.

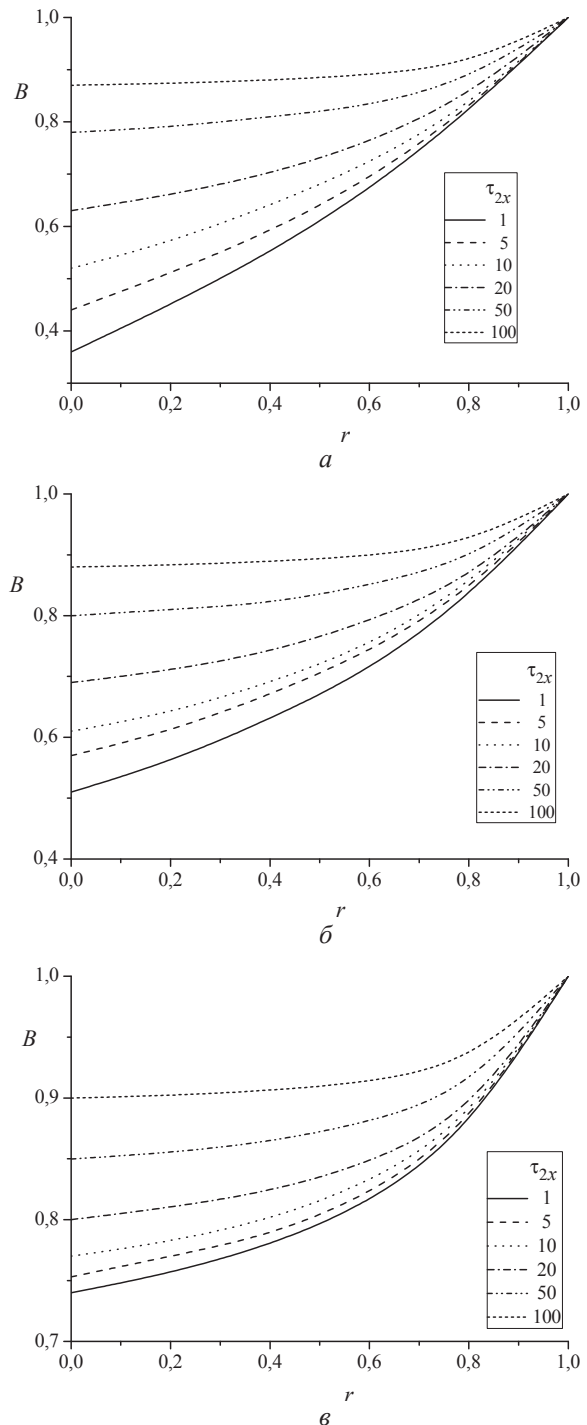
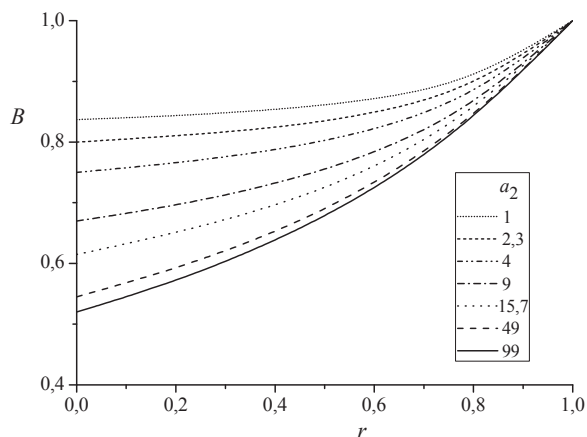


Рис. 1. Зависимость отражательной способности  $B_{123}$  системы «трехслойная дисперсная среда–отражающая поверхность» от коэффициента отражения подстилающей поверхности  $r$ , вероятность выживания кванта  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 1$ , степень вытянутости индикатрисы рассеяния излучения  $a_1 = 1$ ;  $a_2 = 15,7$ ;  $a_3 = 1$ , а) оптическая плотность приземного и стратосферного слоев  $\tau_{1y_0} = \tau_{3y_0} = 0,5$ ; б)  $\tau_{1y_0} = \tau_{3y_0} = 1$ ; в)  $\tau_{1y_0} = \tau_{3y_0} = 5$

Представленные на рис. 1 данные показывают, что величина уходящей радиации сильно зависит от коэффициента отражения подстилающей поверхности при небольшой величине оптической

плотности облачного слоя атмосферы, и практически не зависит при  $\tau_{2x_0} > 50$ . Влияние слоя облачности на отражение солнечной радиации существенно зависит от оптических характеристик стратосферного и приземного слоев атмосферы. Как видно из рисунка, даже небольшое присутствие аэрозоля приводит к значительному изменению отражательной способности всей атмосферы, причем наличие отражающей поверхности нивелирует этот эффект.

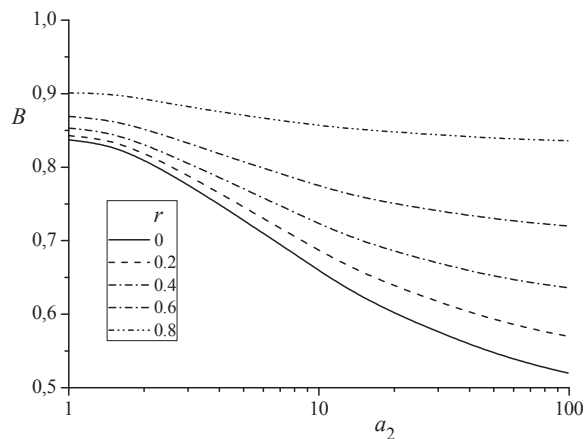


**Рис. 2.** Зависимость отражательной способности  $B_{123}$  системы «трехслойная дисперсная среда – отражающая поверхность» от коэффициента отражения подстилающей поверхности  $r$ , вероятность выживания кванта  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 1$ , оптическая плотность приземного и стратосферного слоев  $\tau_{1x_0} = \tau_{3x_0} = 1$ ; оптическая плотность среднего слоя  $\tau_{2x_0} = 10$

Рис. 2 иллюстрирует влияние индикатрисы рассеяния излучения на отражательную способность атмосферы. Из полученных данных следует, что зависимость отражательной способности атмосферы от величины коэффициента отражения подстилающей поверхности при различных типах облачности аналогична подобной зависимости при разных оптических плотностях слоя облачности.

На рис. 3 представлены результаты расчетов величины отражательной способности атмосферы при различных индикатрисах рассеяния излучения облачного слоя и коэффициентах отражения подстилающей поверхности. Значение степени вытянутости  $a=1$  соответствует сферической или релеевской индикатрисе рассеяния,  $a=100$  – резко вытянутой. В данном диапазоне изменения значений степени вытянутости индикатрисы рассеяния

излучения наблюдается значительное уменьшение отражательной способности атмосферы с ростом анизотропии индикатрисы рассеяния. Увеличение коэффициента отражения подстилающей поверхности нивелирует этот эффект.



**Рис. 3.** Зависимость отражательной способности  $B_{123}$  системы «трехслойная дисперсная среда – отражающая поверхность» от степени вытянутости индикатрисы рассеяния излучения  $a_2$ , вероятность выживания кванта  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 1$ , оптическая плотность приземного и стратосферного слоев  $\tau_{1x_0} = \tau_{3x_0} = 1$ ; оптическая плотность среднего слоя  $\tau_{2x_0} = 10$

### Выводы

1. Получены аналитические выражения для расчета коэффициента пропускания и отражательной способности трехслойной дисперсной среды с отражающей поверхностью.
2. Показано, что стратосферный и приземный слой атмосферы даже при малой величине оптической плотности или ее малом изменении оказывает существенное влияние на отражательную способность системы «трехслойная дисперсная среда – отражающая поверхность» независимо от величины коэффициента отражения подстилающей поверхности.
3. Установлено, что увеличение степени вытянутости индикатрисы рассеяния излучения в слое облачности приводит к уменьшению отражательной способности всей дисперсной среды и действие этого эффекта аналогично уменьшению оптической плотности облачного слоя атмосферы.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ленобль Ж. Перенос радиации в рассеивающих и поглощающих атмосферах. – Л.: Гидрометеоздат, 1990. – 264 с.
2. Kokhanovsky A.A., Budak V.P., Cornet C., et al. Benchmark results in vector atmospheric radiative transfer // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 2010. – V. 111. – P. 1931–1946.
3. Seidel F.C., Kokhanovsky A.A., Schaepman M.E. Fast and simple model for atmospheric radiative transfer // Atmos. Meas. Tech. Discuss. – 2010. – V. 3. – P. 2225–2273.
4. Панченко М.В., Козлов В.С., Полькин В.В., Терпугова С.А., Тумаков А.Г., Шмаргунов В.П. Восстановление оптических

- характеристик тропосферного аэрозоля Западной Сибири на основе обобщенной эмпирической модели, учитывающей поглощающие и гигроскопические свойства частиц // Оптика атмосферы и океана. – 2012. – Т. 25. – № 1. – С. 46–54.
5. Горячев Б.В., Могильницкий С.Б. Некоторые особенности переноса излучения в пространственно ограниченных дисперсных средах // Известия Томского политехнического университета. – 2000. – Т. 303. – № 3. – С. 91–104.
6. Горячев Б.В., Могильницкий С.Б. Исследование влияния размеров и формы рассеивающего объема на радиационные характеристики переноса излучения // Известия Томского поли-

- технического университета. – 2003. – Т. 306. – № 5. – С. 12–15.
7. Горячев Б.В., Могильницкий С.Б. Влияние отражающей поверхности на радиационный баланс дисперсной среды // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 2. – С. 39–42.
8. Горячев Б.В., Могильницкий С.Б. Перенос оптического излучения в слоистой дисперсной среде с отражающей поверхностью // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322. – № 2. – С. 78–81.
9. Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. – М.: Мир, 1971. – 168 с.

Поступила 14.06.2013 г.

УДК 543.544.72

## ХРОМАТОГРАФИЧЕСКАЯ СИСТЕМА С РАДИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

О.В. Жданев

Томский политехнический университет  
Schlumberger Norge AS, г. Берген, Норвегия  
E-mail: OZhdaneev@slb.com

*Описан принцип хроматографической системы с радиальной геометрией. Предложенный вариант хроматографической колонки позволит упростить производство по сравнению с традиционными образцами колонок переменной геометрии и контролировать его наносить слой стационарной фазы.*

### Ключевые слова:

*Хроматография, радиальная геометрия, оптимизация, дисперсия, моделирование.*

### Key words:

*Chromatography, radial geometry, optimization, dispersion, modeling.*

### Введение

Работа посвящена развитию новых принципов и оборудования хроматографического анализа пластовых жидкостей.

Аналитическая хроматография была введена в лабораторную практику более века назад. При традиционном подходе [1] смесь компонент вводится в хроматографическую колонку (ХК) и за счет различной скорости перемещения компонент происходит их пространственное разделение для определения относительной концентрации компонент в анализируемой смеси. В классическом случае используются открытые капиллярные или набивные хроматографические колонки, в которых стационарная фаза (СФ) нанесена на стенки капиллярной колонки или на частицы, которыми наполнена колонка. Относительно недавно была разработана теория ХК модулированной геометрии, где за счет изменения радиуса ХК (для случая капиллярной ХК) или толщины СФ возможно значительно увеличить разрешающую способность хроматографической системы. Было показано [2, 3], что наиболее перспективными для целей разрешения компонент в смеси являются ХК с крутым профилем изменения радиуса ХК. Однако такой профиль ХК очень сложно изготовить и нанести контролируемый слой СФ.

С целью решения данных проблем в работе предлагается новый тип хроматографической колонки – ХК радиальной геометрии. С использованием ХК предложенной геометрии возможно не

только улучшить разрешение между интересующими компонентами смеси, но и существенно сократить время анализа, что является, порой, определяющим фактором при проведении внутрискважинных каротажных работ.

Предложенная в данной работе конфигурация ХК сочетает нелинейный профиль давления по длине колонки с возможностью изменения СФ, контактирующей с анализируемой смесью, проста в изготовлении и нанесении СФ с использованием микроэлектромеханических (MEMS) методов.

Хроматографическая система с использованием ХК радиальной геометрии будет состоять из следующих основных элементов:

- система ввода анализируемой смеси;
- непосредственно ХК;
- детектор или матрица детекторов;
- программное обеспечение для обработки сигнала с детектора, введения калибровочных поправок и взаимодействия с оператором.

На рис. 1 представлены варианты ХК радиальной геометрии с нанесением СФ на стенки колонки и набивной вариант ХК.

При использовании ХК с радиальной геометрией для анализа пластового флюида в режиме реального времени во внутрискважинном приборе или на поверхности небольшая часть жидкости для исследования подается в прибор. При проведении исследований пластового флюида непосредственно в скважине отбор пробы из пласта может быть произведен модульным динамическим пластоиспытателем.

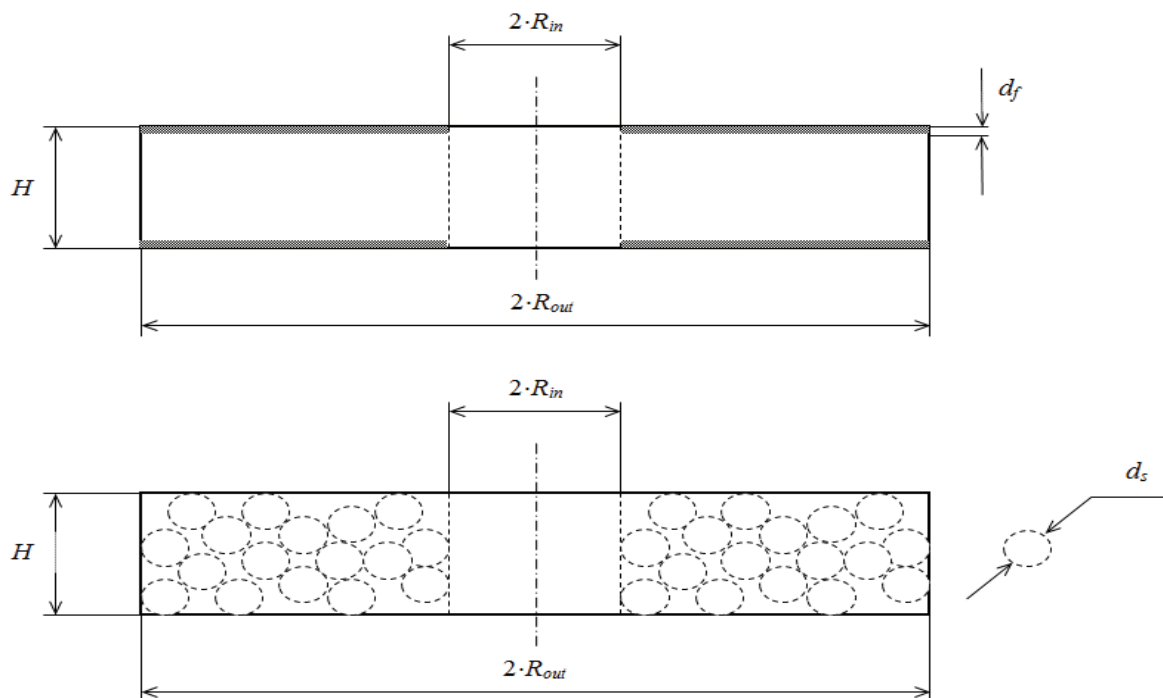


Рис. 1. ХК радиальной геометрии с нанесением СФ на стенки колонки и набивная ХК радиальной геометрии (внизу).  $d_f$  – толщина стационарной фазы,  $d_s$  – диаметр адсорбента

телем на кабеле или буровой трубе [4]. После предварительной фильтрации для удаления взвешенных частиц часть отобранной жидкости анализируется оптическими методами и для последующего анализа направляется в хроматографический модуль (ХМ). В ХМ небольшой объем этой жидкости динамически переводится в газовую фазу, после чего через клапан ижектирования несколько микролитров смеси подается в хроматографическую колонку радиальной геометрии.

Распределение компонентов смеси между стационарной и подвижной фазами приводит к тому, что каждый элемент анализируемого раствора (максимум распределения концентрации) перемещается со своей уникальной скоростью, которая меньше скорости потока газа-носителя. Эта скорость определяется величиной коэффициента удержания и объемным соотношением стационарной и подвижной фаз. Разная скорость перемещения приводит к разделению компонентов смеси и последовательному попаданию в детектор (например, гелий ионизационному).

Профиль давления вдоль хроматографической колонки является одним из наиболее важных ее характеристик. В случае постоянной температуры произведение  $PSv = \text{inv}$ , где  $P$  – давление;  $S$  – площадь поперечного сечения;  $v$  – средняя скорость полосы компонента, является инвариантом. Используя линейный закон Дарси [5] и интегрируя в интервале от  $R_{in}$  до  $R$ , где  $R_{in}$  – внутренний радиус ХК в первом случае и от  $R_{out}$  до  $R$ , где  $R_{out}$  – внешний радиус ХК во втором, можно оценить распределение давления вдоль ХК:

$$p(R) = \sqrt{\gamma^2 - (\gamma^2 - 1) \frac{\ln(R_{out}/R)}{\ln(R_{out}/R_{in})}},$$

где  $\gamma = P_{in}/P_{out}$ ,  $P_{in}$ ,  $P_{out}$  – давление на входе и выходе ХК; (рис. 2).

$$p(R) = \sqrt{\gamma^2 - (\gamma^2 - 1) \frac{\ln(R/R_{in})}{\ln(R_{out}/R_{in})}}.$$

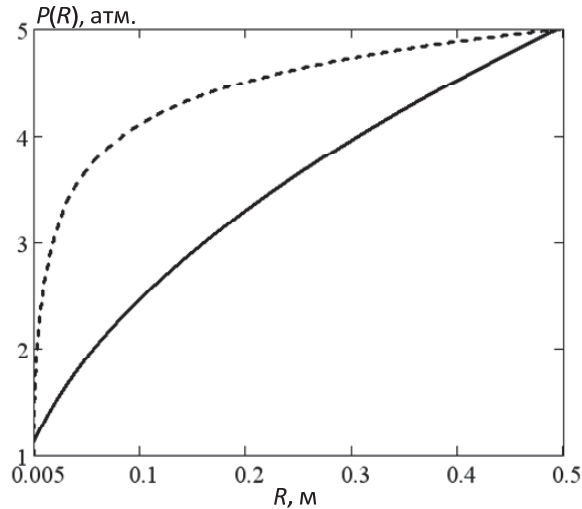
Первое уравнение описывает профиль давления для случая введения пробы с внешней, а второе – для внутренней стороны колонки. Можно видеть (рис. 2), что в случае ХК радиальной геометрии можно достичь гораздо более резкого изменения давления в начальной секции ХК, что и требуется для повышения степени разделения компонентов смеси.

Процесс разделения компонент для ХК радиальной геометрии может быть описан при использовании подхода, разработанного в [3] для ХК прямоугольного сечения. Для данного случая длина ХК – это расстояние между  $R_{out}$  и  $R_{in}$ ,  $W$  – ширина ХК, высота ХК постоянна и равна расстоянию между пластинами и  $d_f$ , толщиной СФ. Отношение объемов подвижной и стационарной фаз может быть оценено согласно

$$\beta = \frac{V_{mobile}}{V_{st. phase}} = \frac{\pi H (R_{out}^2 - R_{in}^2)}{2\pi d_f (R_{out}^2 - R_{in}^2)} = \frac{H}{2d_f}$$



и не зависит от радиуса ХК, как и в случае капиллярной колонки.



**Рис. 2.** Распределение давления вдоль ХК  $P(R)$  для случая радиальной (пунктирная кривая) и капиллярной геометрий ХК (сплошная линия). Внутренний радиус  $R_{in}=5 \cdot 10^{-3}$  м,  $R_{out}=0,5$  м, давление на входе 5 атм., давление на выходе ХК 1 атм

Коэффициент удержания вычисляется по формуле

$$k = \frac{\exp\left\{\frac{A}{T_i} - B\right\}}{\beta},$$

где термодинамические постоянные  $A$  и  $B$ , уникальные для каждого компонента (детали по вычислению данных констант [6]), также не зависят от радиуса ХК.

Зная скорость перемещения компонента в ХК  $v$  и коэффициент удержания  $k$ , можно оценить расстояние, которое максимум полосы компонента проходит за конечный интервал времени  $\Delta$

$$\Delta L_i = \frac{\Delta t v_i}{1 + k_i}.$$

Скорость перемещения компонента по ХК и уширение пика изменяются нелинейно по мере продвижения по ХК и вычисляются на каждом  $i$ -интервале для определения времени удержания и ширины полосы компонента.

$$v_i = \frac{v_{out} j_2 \eta_{He_i} R_{i+1}^2 (2\pi R_i)^2 + H^2}{p(R_i) \eta_{He_{i+1}} R_i^2 (2\pi R_{i+1})^2 + H^2},$$

$$v_{out} = \frac{W^2 H^2 P_{out} j_1}{24 \cdot \eta_{He}(p) L_{column} (W^2 + H^2) j_2} (\gamma^2 - 1) = \frac{(\pi R H)^2 P_{out} j_1}{6 \eta_{He}(p) (R_{out} - R_{in}) ((2\pi R)^2 + H^2) j_2} (\gamma^2 - 1),$$

$\eta_{He}(R)$  – вязкость гелия,  $j_1, j_2$  – коэффициенты сжимаемости:

$$j_1 = \frac{9(\gamma^2 - 1)(\gamma^4 - 1)}{8(\gamma^3 - 1)^2}, \quad j_2 = \frac{3(\gamma^2 - 1)}{2(\gamma^3 - 1)}.$$

Момент, когда выполняется условие

$$\sum_i \Delta L_i = R_{out} - R_{in},$$

соответствует моменту, когда анализируемый компонент покидает ХК, и сумма временных отрезков  $\sum_i \Delta t_i = t_{ret}$  определяет время удержания.

Ширина хроматографического пика рассчитывалась с использованием уравнений массопереноса [7–9]:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_m}{\partial t} + v_g \frac{\partial N_m}{\partial x} - D_m \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \\ + k_f (KN_m - N_{st}) \Big|_{z=d_f} = 0, \\ \frac{\partial N_{st}}{\partial t} - D_{st} \frac{\partial^2 N_{st}}{\partial z^2} = 0, \end{cases}$$

где  $N_{m,st}$  – концентрации в подвижной и неподвижной фазах;  $D_{m,st}$  – коэффициенты диффузии;  $K$  – коэффициент удержания;  $v_g$  – средняя скорость газа носителя;  $k_f$  – коэффициент массопереноса через границу стационарной фазы.

Зная первый  $m_1$  и второй  $m_2$  моменты распределения концентрации компонента, можно вычислить дисперсию и вывести уравнение, описывающее возрастание дисперсии пика на единице длины колонки [9]:

$$\sigma_i^2 = \frac{L_{column}^2 m_2}{m_1^2} = H_i L_{column} = \left( \frac{2D_m j_1}{v_i} + \dots + \frac{0,9 + 2k_i + 35k_i^2 (2\pi R_i)^2}{96(1+k_i)^2} \frac{v_i j_1}{D_m} + \dots + \frac{2}{3} \frac{k_i}{(1+k_i)^2} \frac{d_f^2}{D_{st}} Y v_i j_2 \right),$$

где в случае использования подхода Спанглера (Spangler) [7] и Гиддингса-Грушки (Giddings-Grushka) [8, 9]  $Y_{S-G}=1$ , в случае следования работе Голая (Golay) [10]:

$$Y_G = \frac{(W + H)^2}{H^2},$$

где  $k_i$  – коэффициент распределения;  $D_{m,st}$  – коэффициенты диффузии в газе и стационарной фазе;  $W_{column}$  и  $H_{column}$  – ширина и высота ХК;  $\gamma$  – отношение входного и выходного давлений.

После вычисления значения  $H_i$  ширина пика может быть вычислена:

$$\sigma_{peak-Time} = \sqrt{\sum_i H_i \Delta L_i} v_{i_{last}} (1 + k_{i_{last}}).$$

Нанесение стационарной фазы на стенки ХК предложенной формы возможно способом вращательного напыления, в процессе которого, изменяя скорость вращения, можно варьировать толщину СФ.



Дополнительным преимуществом ХК радиальной геометрии является снижение потребления газа-носителя, что особенно актуально при проведении внутрискваженных экспериментов. С целью

увеличения эффективной длины ХК предлагается составлять ХК в стержни.

*Автор признателен компании Шлюмберже за возможность опубликования результатов данной работы.*

#### Список литературы

1. Purnell J.H. Comparison of efficiency and separating power of packed and capillary gas chromatographic columns // *Nature*. – 1959. – V. 184. – № 4704. – P. 2009.
2. Жданев О.В. Хроматография переменной геометрии // *Известия Томского политехнического университета*. – 2012. – Т. 320. – № 3. – С. 100–104
3. Жданев О.В. Хроматография переменной геометрии в случае прямоугольных хроматографических колонок // *Известия Томского политехнического университета*. – 2012. – Т. 320. – № 3. – С. 104–108.
4. Apparatus and Method for Analyzing the Composition of Formation Fluids: US Patent 5166747; filing date 01.06.90, published 24.11.92. URL: <http://www.google.com/patents/US5166747> (дата обращения: 15.05.2013).
5. Jahn F., Cook M., Graham M. Hydrocarbon exploration and production. – Germany: Elsevier, 2008. – 444 p.
6. Neue U.D. HPLC columns. Theory, technology, and practice. – New York: Wiley-VCH Inc., 1997. – 416 p.
7. Spangler G. Height equivalent to a theoretical plate theory for rectangular GC column // *Analytical Chemistry*. – 1998. – V. 70. – P. 4805–4816.
8. Giddings J.C. Plate height of nonuniform chromatographic columns // *Analytical Chemistry*. – 1963. – V. 35. – № 3. – P. 353–356.
9. Grushka E. Chromatographic Peak Shapes. Their Origin and Dependence on the Experimental Parameters // *Journal of Physical Chemistry*. – 1973. – V. 76. – № 18. – P. 2586–2593.
10. Golay M.J.E. Theory of chromatography in open and coated tubular columns with round and rectangular cross-section // *Gas Chromatography*. – London: Butterworths, 1958. – P. 36–55.

*Поступила 31.05.2013 г.*

УДК 544.452.14

## ВЛИЯНИЕ ОКСИДА АЛЮМИНИЯ НА ПОРОГИ ЛАЗЕРНОГО ЗАЖИГАНИЯ СМЕСИ НАНОПОРОШКА АЛЮМИНИЯ И ОКСИДА ЖЕЛЕЗА

В.В. Медведев, А.П. Ильин, А.А. Решетов\*

Томский политехнический университет

\*Тюменский государственный нефтегазовый университет

E-mail: medvedev@tpu.ru

*Приведены результаты экспериментальных исследований по зажиганию пиротехнического состава (нанопорошок алюминия+оксид железа) лазерным излучением ( $\lambda=1,06$  мкм) с длительностью импульса 3,5 мс. Измерены энергетические пороги лазерного зажигания исследуемого состава и состава с добавками оксида алюминия при различных плотностях запрессовки. Исследован фазовый состав конечных продуктов сгорания. Установлено, что добавки нанопорошка оксида алюминия в железо-алюминиевый термит с увеличением плотности образцов снижают энергетические пороги зажигания.*

#### Ключевые слова:

*Лазерное излучение, зажигание, пиротехнический состав.*

#### Key words:

*Laser radiation, ignition, pyrotechnic composition.*

#### Введение

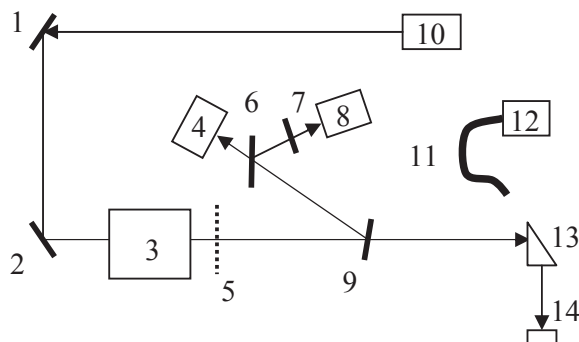
Применение ряда материалов в виде нанопорошков (НП) приводит к резкому увеличению химической активности как отдельных НП, так и их смесей с различными веществами. Поэтому становится актуальной проблема понижения чувствительности наносистем к нагреву, трению, удару и т. д.

Целью данной работы являлось изучение влияния добавок нанопорошка гамма-оксида алюминия на устойчивость термитной смеси (25 % НП алюминия + 75 % НП  $Fe_2O_3$ ) к действию лазерного излучения.

#### Характеристика исходных материалов и методики эксперимента

Соотношение термит/оксид алюминия составляло 70/30. Среднеповерхностный диаметр частиц алюминия составлял ~ 0,25, оксида железа ~ 1, оксида алюминия ~ 0,04 мкм. Смесь вышеперечисленных компонентов тщательно растирали в агатовой ступке. Навески массой ~ 10 мг засыпали в пресс-форму и запрессовывали до требуемой плотности. Получали образцы в виде таблеток диаметром 4 мм и толщиной 1...3 мм (толщина зависела от давления прессования). Плотность меняли в интервале  $-0,1 < \rho / \rho_m < 0,7$  (наибольшая возможная

плотность  $\rho_m \sim 4,16 \text{ г/см}^3$ ). Облучали по нормали центральную часть диаметром 3 мм торцевой поверхности образца. Такой метод лазерного облучения связан с тем, что при прессовании края образцов пропрессовывались хуже, чем центральная часть, и это могло повлиять на измерение энергетических порогов зажигания (ЭПЗ). В работе использовалось излучение неодимового лазера, генерирующего квазипрямоугольный, квазинепрерывный (глубина модуляции не более 30 %) лазерный импульс длительностью  $\sim 3,5 \text{ мс}$  (многомодовый режим генерации). Неравномерность облучения торцевой поверхности образца составила не более 20 %. Методика определения неравномерности лазерного излучения по сечению пучка приведена в работе [1]. Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1.



**Рис. 1.** Схема установки зажигания пиротехнической смеси лазерным излучением: 1, 2) поворотные зеркала; 3) импульсный лазер; 4) калориметр; 5, 7) нейтральные светофильтры; 6, 9) светоделительные пластины; 8) фотоприемник ФЭК-09К; 10) юстировочный лазер ЛГН-109; 11) световодный жгут; 12) фотоприемник ФЭУ-118; 13) поворотная призма; 14) образец

Величины ЭПЗ определяли по методике, описанной в работе [2]. Вначале строили вероятностные кривые зажигания от 0 до 100 % ( $P$  = количество зажиганий/количество опытов), как функцию  $P$  от плотности энергии  $E$  подводимого излучения. Каждой точке зависимости соответствовал статистический набор из 25 опытов при точности показаний калориметра не более  $\pm 10$  % от среднего значения. За величину ЭПЗ принимали значения  $E_{50}$ , при которых реализовалось зажигание с вероятностью  $P=50$  %.

В работе использовали НП алюминия, полученный в условиях электрического взрыва проводников (газовая среда – аргон) [3] и пассивированный медленным окислением в воздухе; такой НП устойчив до  $350...450 \text{ }^\circ\text{C}$  [4].

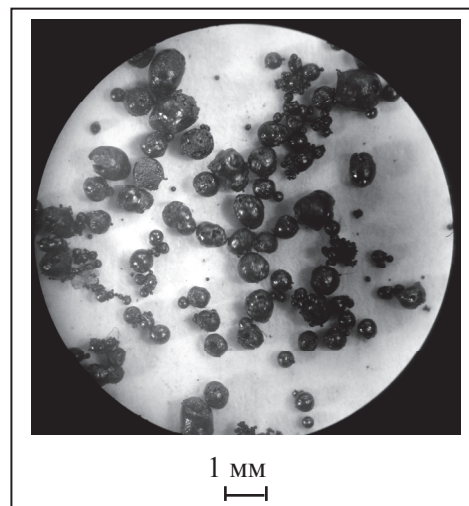
#### Результаты эксперимента

В смеси с НП  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  температура начала окисления НП алюминия снижается незначительно. Скорость горения такой смеси резко возрастает и, в отличие от смеси грубодисперсных порошков, сопровождается факелом и выбросом продуктов горения (рис. 2), которые представляют собой оплавленные

сферические частицы, большая часть которых является полыми (рис. 3).



**Рис. 2.** Фотография факела горящего прессованного образца термитной смеси (25 % НП алюминия + 75 % НП  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ )



**Рис. 3.** Фотография осажденных частиц продуктов горения термитной смеси (25 % НП алюминия + 75 % НП  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ )

Повышение скорости горения создает практически адиабатические условия, при которых температура в зоне горения увеличивается и достигает больших значений, чем при сгорании штатного термита. Все эти процессы затрудняют возможность использования термитных смесей на основе НП по назначению. Для определения химической активности НП алюминия и их смесей использовали четыре параметра, которые получают по данным дифференциально-термического анализа [5]. Конечными продуктами горения смесей нанопорошков алюминия и оксида железа является также интерметаллид  $\text{AlFe}_3$  и, в качестве основной кристаллической фазы, обнаружен шпинелеподобный алюминат железа  $\text{FeAl}_2\text{O}_4(\text{II})$ . Заметных количеств других фаз с помощью рентгенофазового анализа не обнаружено. Продуктами сгорания

классического железо-алюминиевого термита являются металлическое железо и  $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$ , причем эти продукты достаточно компактны: в процессе горения отсутствует факел и не происходит их выброса.

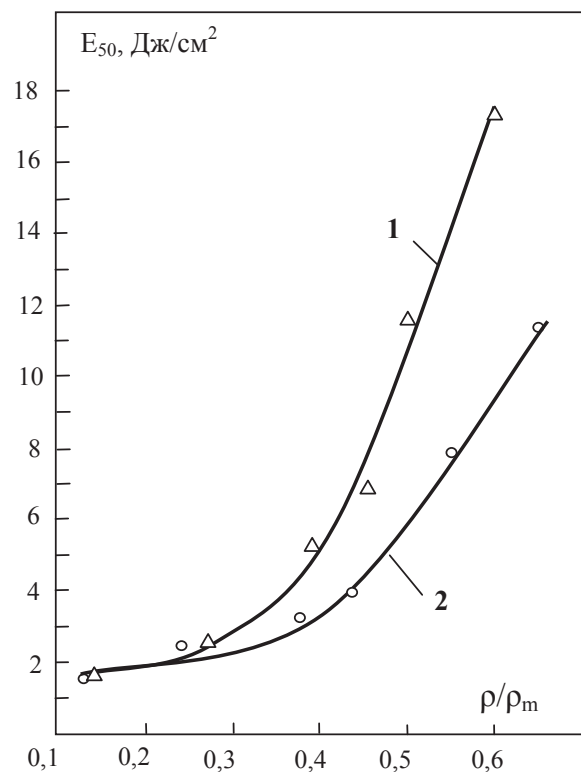


Рис. 4. Зависимость энергетических порогов зажигания от плотности образцов: 1 – состав: 25 % НП алюминия + 75 % НП  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ; 2 – состав 70 % плотности состава 1: 25 % НП алюминия + 75 % НП  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  + 30 %  $\text{Al}_2\text{O}_3$

Эксперименты по лазерному зажиганию термита насыпной плотности с добавками оксида алюминия и без него показали, что данные составы имеют незначительную разницу в порогах зажигания. Если предположить, что некоторое снижение ЭПЗ связано с меньшей теплопроводностью частиц  $\text{Al}_2\text{O}_3$  по сравнению с частицами алюминия, а в насыпном со-

стоянии контакт между частицами невелик, тогда при увеличении уплотнения смеси эффект уменьшения ЭПЗ должен быть более значимым.

С этой целью были проведены эксперименты по влиянию плотности образцов на ЭПЗ. Результаты приведены на рис. 4.

Согласно полученным зависимостям с увеличением плотности образцов разница величин ЭПЗ растет, что подтверждает выдвинутое предположение. Горение смеси (50 % НП  $\text{Al}$  + 50 % НП  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) отличалось от горения других термитов. Данный состав зажигался и горел в конденсированной фазе, без разбрызгивания продуктов. После сгорания образовывался пустотелый шарик бурого цвета, если масса навески была не более 10 мг. При массе более 10 мг образовывалась полусфера. Образование пустотелого шарика можно объяснить тем, что при горении поверхностный слой жидкого металла препятствует воздуху, находящемуся в порах, выходить наружу и разбрызгивать жидкий металлический слой. За счет сил поверхностного натяжения образуется шарик, а воздух перемещается внутрь образца. Когда давление становится достаточным, воздух выходит наружу. Обращает также на себя внимание, что образцы с нанопорошком алюминия горят иначе, чем образцы с грубодисперсным порошком алюминия, которые после сгорания обычно сохраняют свою форму [6].

#### Выводы

1. Добавки нанопорошка оксида алюминия в железо-алюминиевый термит с увеличением плотности образцов снижают энергетические пороги зажигания.
2. Замена грубодисперсных порошков на нанопорошки алюминия и оксида железа меняет не только внешние параметры: увеличение скорости горения, появление факела и вынос продуктов горения, но и состав конечных продуктов сгорания. За счет более высоких температур в зоне горения образуется шпинелеподобный продукт  $\text{FeAl}_2\text{O}_4$ , представляющий собой основную кристаллическую фазу.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Медведев В.В. Лазер с регулируемой длительностью импульса на базе о.к.г. ГОС301 // Приборы и техника эксперимента. – 2000. – № 6. – С. 89–91.
2. Медведев В.В. Влияние интенсивности лазерного излучения на пороги зажигания пористого двухосновного топлива // Химическая физика. – 2004. – Т. 23. – № 3. – С. 73–78.
3. Назаренко О.Б. Электровзрывные нанопорошки: получение, свойства, применение / под ред. А.П. Ильина. – Томск: Изд-во Том. Политех. ун-та, 2005. – 148 с.
4. Ильин А.П., Громов А.А. Горение алюминия и бора в сверхтонком состоянии. – Томск: Изд-во Том. ун-та. 2002. – 154 с.
5. Ильин А.П., Яблуневский Г.В., Громов А.А. Об активности порошков алюминия // Физика горения и взрыва. – 2001. – Т. 37. – № 4. – С. 58–62.
6. Максимов Э.И., Мержанов А.Г., Шкиро В.М. Безгазовые составы как простейшая модель горения нелетучих конденсированных систем // Физика горения и взрыва. – 1965. – Т. 1. – № 4. – С. 24–30.

Поступила 14.03.2013 г.

УДК 669.141.32:620.192.7

**РАЗРУШЕНИЕ НИТРОЦЕМЕНТОВАННОЙ СТАЛИ**

А.М. Апасов, А.А. Апасов\*, Э.В. Козлов\*\*

Томский политехнический университет

E-mail: mchmyti@rambler.ru

\*Строительная компания, г. Юрга

\*\*Томский государственный архитектурно-строительный университет

E-mail: kozlov@tsuab.ru

*Проведено исследование строения стали, подвергнутой нитроцементации и последующей термообработке, с целью выявления причин ее разрушения. Установлен механизм зарождения микротрещин, и определены их траектории развития.*

**Ключевые слова:**

*Нитроцементация, сталь, разрушение, микроскоп, образец, зерно, фаза,  $\alpha$ -фаза,  $\gamma$ -фаза, низкий отпуск, микротрещина, цементит, перлит, бейнит, мартенсит, дислокация.*

**Key words:**

*Carbonitriding, steel, destruction, microscope, sample, grain, phase, alpha phase, gamma phase, low tempering, hear crack, cementite, pearlite, bainite, martensite, location.*

**Методика исследования стали**

Известно, что одним из основных несовершенств металла, подвергнутого цементации и, в особенности, азотированию, являются внутренние остаточные напряжения. При этом в поверхностном слое создаются сжимающие напряжения, в середине – растягивающие. Они могут достигать значительных величин, особенно при сложной и переменной конфигурации деталей, узлов, изделия. Возникающие большие внутренние напряжения являются источниками зарождения, формирования и развития микротрещин, которые в дальнейшем (при определенных условиях) трансформируются в магистральную трещину с образованием свободных поверхностей, приводящих в итоге к разрушению изделия в целом.

Нитроцементация поверхности детали (зубья шестерни) из стали 20Х2Н4А была проведена при температуре 920 °С. При этом толщина нитроцементованного слоя составила 1500 мкм. Термическая обработка после нитроцементации состояла из высокого отпуска при 620 °С (1 час), закалку от 820 °С в масло и низкий отпуск при 180 °С в течение 1 часа.

Структуру и фазовый состав нитроцементованной стали исследовали методами оптической, просвечивающей электронной дифракционной микроскопии и рентгеноструктурного анализа [1].

*Металлографические исследования* были проведены в поперечном направлении на микрошлифах, приготовленных из образцов стали, вырезанных на электроискровом станке как перпендикулярно нитроцементованной поверхности зуба шестерни, так и параллельно ей. Для определения среднего размера зерен поверхность образцов предварительно механически обрабатывали с последующей электролитической полировкой и химическим травлением. Структуру металла на поверхности микрошлифа изучали в оптическом микроскопе МИМ-10 при увеличениях в 50, 100, 380 крат.

*Рентгеноструктурный анализ (РСА)* осуществляли на дифрактометре ДРОН-3 с автоматическим сканированием пучка рентгеновского излучения в диапазоне углов от 19 до 150° в фильтрованном  $K_{\alpha}$ -излучении железа. Запись производилась на диаграммную ленту в автоматическом режиме со скоростью 0,5° в минуту. С целью определения количественных данных по фазовому составу и основным фазовым составляющим на рентгенограммах индифицировались рефлексы. Анализ основных дифракционных максимумов  $\alpha$ -,  $\gamma$ -фаз железа с использованием методик экстраполяции по функции  $\cos^2\alpha$  позволил рассчитать параметры кристаллической решетки, а также внутренние искажения и напряжения на микроуровне.

Методы *просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ)* были применены для изучения тонкой структуры металла на тонких фольгах с использованием электронных микроскопов ЭМ-125 и ЭМ-125К при ускоряющем напряжении 125 кВ рабочем увеличении микроскопа от 8000 до 25000 крат. В качестве образцов исследовались металлические пластинки толщиной 0,25 мм, вырезанные на электроискровом станке, химически очищенные и электролитическим способом доведенные до толщины 0,17 мкм в пересыщенном растворе хромового ангидрида в ортофосфорной кислоте.

Качественный и количественный фазовый анализ проводили по снимкам, подтвержденными микродифракционными картинками и темнопольными изображениями, полученными в соответствующих рефлексах. По фотографиям микроструктур, полученным в оптическом и электронном микроскопах, фиксировали размеры зерен и их распределение, объемные доли  $\alpha$ -,  $\gamma$ -фаз и карбидов, а также скалярную и избыточную плотность дислокаций, амплитуду кривизны-кручения кристаллической решетки и моментальные напряжения. Линейные размеры и скалярную плотность дислокаций определяли методом секущей амплитуду

кривизны-кручения кристаллической решетки, предложенным в работе [2].

Послойное изучение методами ПЭМ металла образца стали 20Х2Н4А на строго фиксированных расстояниях от его поверхности после ее нитроцементации показало, что данная сталь является многофазным материалом, состоящим из  $\alpha$ -,  $\gamma$ -фаз и карбидов  $(Cr,Fe)_3C$ , а после низкого отпуска еще и дополнительно карбонитридов  $(Cr,Fe)_{23}(C,N)_6$ ,  $(Cr,Fe)_2C_{0,61}N_{0,39}$  (таблица).

**Таблица.** Тип, пространственная группа и параметры кристаллических решеток фаз

Фаза	Решетка				
	тип	группа	параметр*, нм		
			a	b	c
$\alpha$	ОЦК	Im3m	$a = a_0 + 0,01095\Delta C_{(C+N)}$ , $a_0 = 0,28664$		
$\gamma$	ГЦК	Fm3m	$a = a_0 + 0,0072\Delta C_N$ , $a = a_0 + 0,0070\Delta C_C$ , $a_0 = 0,3573$		
$(Cr,Fe)_3C$	Орторомбическая	Pnma	0,5080	0,6774	0,4520
$M_{23}(C,N)_6$	Кубическая	Fm3m	1,0585	1,0585	1,0585
$M_2C_{0,61}N_{0,39}$	Орторомбическая	Pbcp	0,4878	0,5604	0,4440
$M_{6,2}C_{3,5}N_{0,3}$	Орторомбическая	Ama2	0,6956	0,9260	0,2844

\* $\Delta C_C$ ,  $\Delta C_N$  и  $\Delta C_{(C+N)}$  – концентрации в фазах углерода, азота и совместно углерода с азотом, % (ат.).

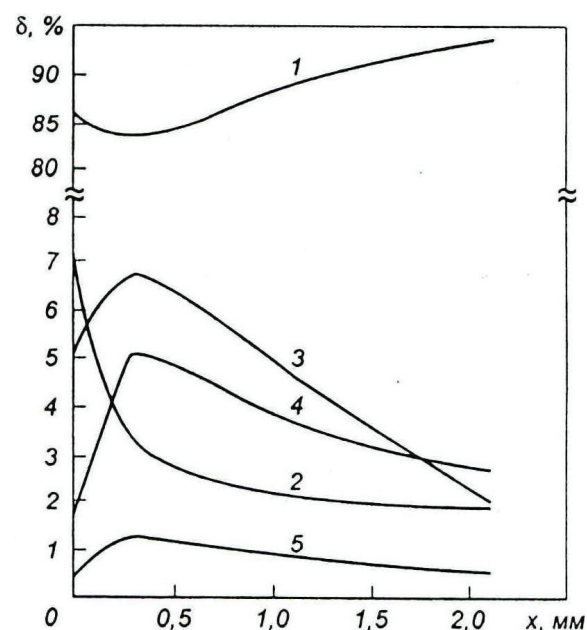
Матрицей стали 20Х2Н4А является  $\alpha$ -фаза различной степени легированности, которая представляет собой твердый раствор атомов внедрения (углерода и азота) и замещения (хрома и никеля) на основе  $\alpha$ -Fe в объемноцентрированной кубической (ОЦК) решетке [3]. Кроме того, присутствует  $\gamma$ -фаза твердого раствора атомов замещения и внедрения в гранецентрированной кубической (ГЦК) решетке [3], а также цементит, имеющий орторомбическую решетку, параметры которой приведены в таблице.

Цементит может растворять до 50 % хрома, поэтому химическую формулу данного соединения можно представить в виде  $(Cr,Fe)_3C$  или  $M_3C$  [4]. В небольших количествах присутствуют сложные карбонитриды  $M_{23}(C,N)_6$  и  $M_2(C,N)$ . Кристаллическая решетка фазы  $M_{23}(C,N)_6$  сложная (ее параметры указаны в таблице, а структура подробно описана в работе [3]). Элементарная ячейка содержит более 100 атомов, занимающих различные неэквивалентные позиции. Кристаллическая решетка карбонитрида  $M_2(C,N)$  имеет орторомбическую симметрию [3]. Он присутствует в двух модификациях:  $(Cr,Fe)_2C_{0,61}N_{0,39}$  и  $(Cr,Fe)_{6,2}C_{3,5}N_{0,3}$ .

В карбонитридах  $M_{23}(C,N)_6$  и  $M_2(C,N)$  растворимость углерода и азота значительна. В результате исследований, проведенных методами РСА и просвечивающей электронной микроскопии с применением темнопольной методики, установлено, что фазовый состав и объемная доля фаз в образцах до и после низкого отпуска меняется в зависимости от

расстояния до поверхности зуба шестерни, после низкого отпуска имеет место пятифазная метастабильная конфигурация. При этом других фаз не обнаружено. Применение термина «метастабильность» обусловлено тем, что исследование было проведено при температуре 20 °С, а выявленные фазы и их число отвечают смеси фаз, соответствующих температурному интервалу 500...700 °С.

Результаты фазового анализа образца стали после низкого отпуска представлены на рис. 1 [1], из которого следует, что основой слоя, обогащенного углеродом и азотом, является  $\alpha$ -твердый раствор с объемной долей в поверхностном слое, равной 0,86. В поверхностном слое объемная доля:  $\gamma$ -фазы  $\delta=0,06$ , карбидной фазы (цементит)  $\delta=0,05$ , карбонитрида  $M_{23}(C,N)_6$   $\delta=0,02$ .



**Рис. 1.** Распределение по глубине нитроцементованного слоя после низкого отпуска фаз: 1 –  $\alpha$ ; 2 –  $\gamma$ ; 3 – цементита; 4 и 5 – карбонитридов  $M_{23}(C,N)_6$  и  $M_2(C,N)$

В интервале глубин 100...1500 мкм от поверхности второй (по количеству) фазой является цементит, практически не содержащий азота, но включающий в себя наряду с железом значительную долю хрома [5]. Далее следует объемная доля карбонитрида  $M_{23}(C,N)_6$ , составляющая ~ 0,02 на глубине около 2000 мкм от поверхности. Объемная доля карбонитрида  $M_2(C,N)$  практически не зависит от глубины залегания и равна ~ 0,01. Из рис. 1 следует, что градиентная структура приповерхностного слоя нитроцементованной стали 20Х2Н4А формируется на количественном уровне.

Кроме того, измерены длина микротрещины и зоны впереди нее; скалярная и избыточная плотность дислокаций; амплитуда кривизны-кручения кристаллической решетки; поля напряжений в различных участках материала с имеющимися микротрещинами и без них. Измерения проведены согласно методикам, указанным в [1, 2, 6].



### Результаты исследования

#### Фазовый состав

Установлено, что в различных слоях металла присутствуют  $\alpha$ -фаза,  $\gamma$ -фаза, карбид железа  $Fe_3C$  и карбонитриды  $M_{23}(C,N)_6$  и  $M_2(C,N)$  [7].

$\alpha$ -фаза представляет собой ОЦК твердый раствор атомов внедрения (углерода и азота) и замещения (хрома и никеля) на основе  $Fe_\alpha$ . Она всегда составляет основную часть металла.  $\alpha$ -фаза в качестве одной из структурных компонент присутствует в виде отпущенного мартенсита – пакетного (речного), пластинчатого и высокотемпературного.

$\gamma$ -фаза (остаточный аустенит) – ГЦК твердый раствор атомов замещения (хрома и никеля) и внедрения (углерода и азота) в железе.  $\gamma$ -фаза имеет вид тонких длинных прослоек и располагается по границам мартенситных кристаллов, а также внутри их.

Фаза  $Fe_3C$  (цементит) присутствует во всех слоях металла. Крупные частицы цементита имеют сложную форму и располагаются группами или отдельными частицами по границам зерен, или образуют колонии по типу перлитных. Они всегда имеют продолговатую форму. Мелкие частицы цементита вытянуты в виде стержней, находятся только внутри кристаллов  $\alpha$ -фазы и не связаны с дислокационной структурой. Причем в бейните частицы цементита крупнее, чем в отпущенном мартенсите.

Частицы карбонитрида  $M_{23}(C,N)_6$  и  $M_2(C,N)$  также присутствуют во всех слоях металла. Фаза  $M_{23}(C,N)_6$  имеет сложную ГЦК решетку,  $M_2(C,N)$  – простую орторомбическую. Состав обоих карбонитридов комплексный как по Fe и Cr, так по C и N.

Крупные частицы ( $\delta \geq 1$  мкм) карбонитрида  $M_{23}(C,N)_6$  располагаются как внутри, так и по границам зерен. Мелкие частицы ( $\delta \leq 200$  нм) сегрегируются на дислокациях в кристаллах  $\alpha$ -фазы и  $\gamma$ -фазы. Все частицы имеют округлую форму.

Частицы  $M_2(C,N)$  ( $\delta \sim 10$  нм) также округлы и располагаются на дислокациях в  $\alpha$ -фазе и на межфазных границах « $M_{23}(C,N)_6$ – $\alpha$ -фаза».

#### Структура зоны пластической деформации перед фронтом растущей микротрещины

В упрочненном поверхностном слое микротрещин не выявлено. Однако по мере удаления от нитроцементованной поверхности вероятность обнаружения микротрещин растет.

Первоначально источниками зарождения микротрещин служат крупные частицы  $M_{23}(C,N)_6$  сферической формы. В процессе роста частиц увеличивается и концентрация напряжений по поверхности раздела «частица–матрица металла». При достижении критических значений происходит релаксация напряжений с последующим разрывом межатомных связей по границе раздела «частица–матрица металла», формированием микропустот и микропор, слияние которых согласно теории Мак-Клинтока приводит к зарождению микротрещины.

В глубине металла встречаются микротрещины несколько иного типа. Изначально они формируются по границам зерен. Однако в дальнейшем при своем развитии они начинают перерезать кристаллы мартенсита (бейнита), создавая перед фронтом своего движения значительную зону пластической деформации.

На электронно-микроскопических изображениях эта зона представлена экстинкционными контурами кривизны-кручения в виде «факела» перед фронтом микротрещины. Экстинкционные контура свидетельствуют о возникновении значительных внутренних напряжений. Протяженность микротрещин и их «острота» возрастают по мере удаления от нитроцементованного слоя вглубь металла (рис. 2).

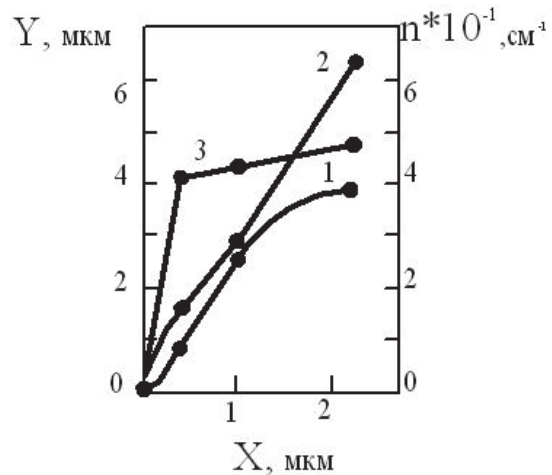
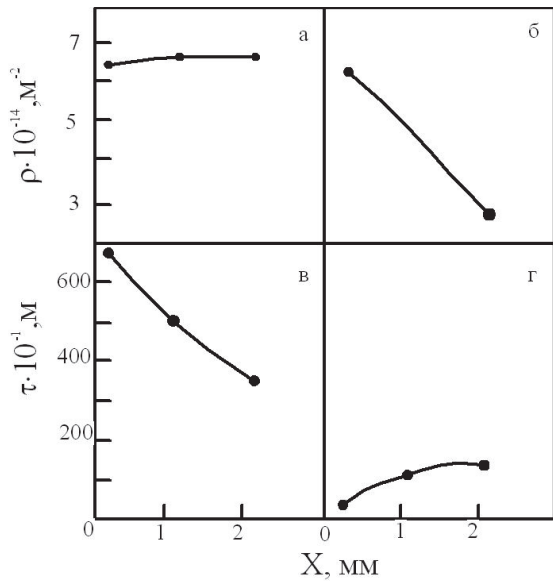


Рис. 2. Изменение средней длины микротрещины (1), размеров упруго деформированной зоны впереди нее (2) и плотности микротрещин (3) в зависимости от расстояния до поверхности металла

Размер зоны пластической деформации пропорционален размеру «факела» экстинкционных контуров, а «заостренность» микротрещины – плотности этих контуров в «факеле». Данные параметры также увеличиваются при удалении от нитроцементованной поверхности (рис. 2). Структура зоны пластической деформации перед фронтом растущей микротрещины характеризуется высокой плотностью дислокаций и значительной концентрацией полей внутренних напряжений (рис. 3). Поэтому структура металла в зоне пластической деформации значительно отличается от строения вдали от микротрещины.

Следует отметить, что до момента начала роста микротрещин средняя скалярная плотность дислокаций составила  $\rho = (2-5) \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$ .

Известно, что микротрещина, как концентратор напряжений, в процессе своего роста формирует перед собой пластическую зону, в которой сконцентрированы дислокации с определенной величиной плотности (рис. 4, а). В окрестностях этой зоны металл находится в упруго-напряженном, но в недеформированном состоянии. Тем не менее, поле напряжений микротрещины проектируется на этот металл. Вдали от трещины металл находится в ненапряженном состоянии [7].



**Рис. 3.** Зависимость средних значений скалярной плотности дислокаций (а, б) и амплитуды внутренних напряжений (в, г) в голове микротрещин (а, в) и в зоне впереди них (б, г) от расстояния до поверхности металла

В исследуемой стали 20Х2Н4А строение микротрещин принципиально иное (рис. 4, б). Это объясняется тем, что металл находится в предварительно деформированном состоянии и содержит высокую плотность дислокаций. Кроме того, концентрация напряжений в голове трещины является причиной формирования высокого уровня упругих полей напряжений и повышенной скалярной плотности дислокаций, причем упругая деформация металла значительно превосходит пластическую.

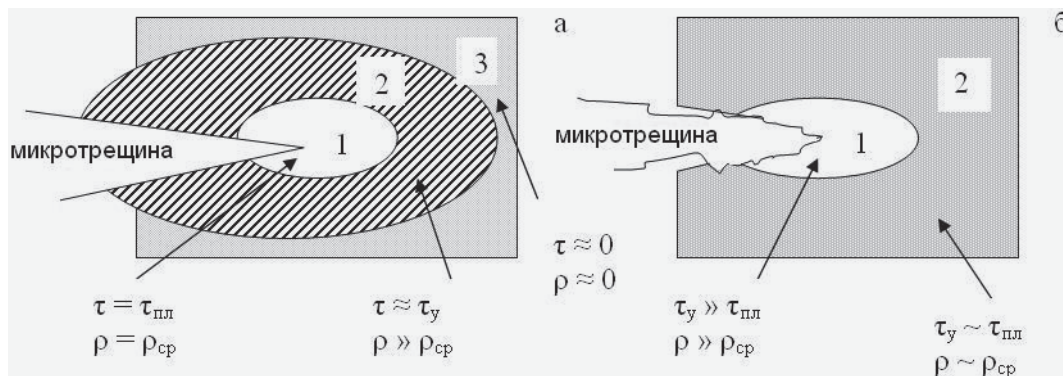
**Выводы**

1. Изучена структура нитроцементованного слоя зуба шестерни после низкого отпуска на глубину от поверхности более 2,5 мм. Установлено, что при увеличениях в 50 крат и выше в слое сформировалась градиентная структура. Это подтверждается как качественной картиной структуры стали, так и ее количественными характеристиками. При этом изменяются доля и размеры выделений в металле.

2. В бездефектной части металла вклад упругой и пластической составляющих деформации соизмерим. В частности, в данном случае средняя длина микротрещины по мере удаления от нитроцементованной поверхности зуба шестерни изменяется в пределах от 1,0 до 4,0 мкм (рис. 2, кривая 1). Длина зоны упругой деформации перед фронтом растущей микротрещины находится в интервале от 1,0 до 7,0 мкм (рис. 2, кривая 2). При этом плотность дислокаций в данной зоне может превосходить среднюю плотность дислокаций в 1,5–2 раза (рис. 3).
3. Кроме того, величина напряжений перед фронтом микротрещины такова, что они могут выступить в качестве источников зарождения новых микротрещин – эмиссаров, приводящих к разрушению металла. Это становится возможным, потому что для исследуемой стали 20Х2Н4А  $\sigma_{0,2}=850...1100$  МПа, а  $\sigma_s=1050...1300$  МПа [3].
4. Исходя из условия неоднородности полей напряжения по объему металла следует, что только максимальные (пиковые) напряжения будут служить источниками зарождения, формирования и развития новых микротрещин. Поэтому только упрочнение металла перед фронтом распространения микротрещины может предотвратить его разрушение. С другой стороны, при таком уровне полей напряжений можно с очень высокой вероятностью ожидать разрушение металла сразу же за нитроцементованным слоем.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору, д-ру физ.-мат. наук Н.А. Коневой, а также Н.А. Поповой и Л.Н. Игнатенко за анализ и обсуждение данных эксперимента.

В работе использованы материалы, полученные при выполнении хозяйственного договора № 4-Д/22 по теме «Исследование цементированных и азотированных деталей изделий К-500 СПЦ 271.38 Л.00.000СВ из сталей 20Х2Н4А, 38ХНЗМА, 18ХГТ с различным содержанием вредных примесей (S, P, неметаллических включений) с целью установления причин трещинообразования на различных этапах технологического процесса изготовления на базе ПО «Юргинский машиностроительный завод» (руководитель темы в рамках хозяйственного договора А.М. Апасов).



**Рис. 4.** Схематическое изображение микротрещины в предварительно деформированном состоянии

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов Э.В., Попова Н.А., Малиновская В.А., Апасов А.М. Фазовый состав и градиентная структура нитроцементованной стали 20Х2Н4ФА после низкого отпуска // Изв. вуз. Черная металлургия. – 2005. – № 8 – С. 26–29.
2. Козлов Э.В., Тришкина Л.И. Фазовые переходы в подсистеме дефектов деформируемых материалов // Новые методы в физике и механике деформируемого твердого тела. – Томск: Изд-во ТГУ, 1990. – С. 94–101.
3. Курдюмов Г.В., Утевский Л.М., Энтин Р.И. Превращения в железе и стали. – М.: Наука, 1997. – 236 с.
4. Диаграммы состояния двойных и многокомпонентных систем на основе железа. Справочник. – М.: Металлургия, 1986. – 440 с.
5. Блантер М.Е. Теория термической обработки. – М.: Металлургия, 1984. – 328 с.
6. Физика прочности гетерогенных материалов / Э.В. Козлов, Д.В. Лычагин, Н.А. Попова и др. – Л.: ФТИ, 1988. – С. 3–13.
7. Козлов Э.В., Попова Н.А., Игнатенко Л.Н., Апасов А.А., Апасов А.М., Конева Н.А. Структура трещины в нитроцементованной стали // Современные проблемы прочности: Научные труды V Междунар. семинара имени В.А. Лихачева. – Старая Русса, 17–21 сентября 2001. – Т. 1. – С. 76–81.

Поступила 27.03.2013 г.

УДК 621.791.92

## ОСОБЕННОСТИ ИЗНАШИВАНИЯ КОМПОЗИЦИОННОГО ПОКРЫТИЯ НА ОСНОВЕ СТАЛИ Р6М5 В ТРИБОКОНТАКТЕ СО СТАЛЬЮ ШХ15 В ШИРОКОМ ИНТЕРВАЛЕ СКОРОСТЕЙ И НАГРУЗОК

С.Ф. Гнусов, А.А. Игнатов, В.Г. Дураков

Томский политехнический университет  
E-mail: gnusov@rambler.ru

Приведены результаты исследования структуры поверхностей трения и триботехнических характеристик композиционных покрытий на основе стали Р6М5 после трения по стальному диску в диапазонах скоростей скольжения от 1,2 до 3,6 м/с и нагрузок от 20 до 100 Н. В паре трения сталь Р6М5–сталь ШХ15 установлено две области катастрофического изнашивания и две области установившегося износа. Для пары трения «сталь Р6М5+20 вес. % WС»–сталь ШХ15 установлено значительное снижение интенсивности изнашивания композиционного покрытия (2–3 раза) по сравнению с покрытием на основе стали Р6М5. Интенсивность изнашивания композиционного покрытия линейно растет с нагрузкой, что связано с развитием окислительного изнашивания.

#### Ключевые слова:

Быстрорежущая сталь, композиционное покрытие, трение скольжения, износ, микроструктура.

#### Key words:

High speed steel, composition coating, sliding friction, wear, microstructure.

#### Введение

Условия работы в экстремальных режимах трения предъявляют особые требования к триботехническим свойствам современных конструкционных материалов. В таких режимах работают тяжело нагруженные пары трения при высоких линейных скоростях и высоких приложенных давлениях. Обычно эти процессы могут сопровождаться вынужденным дефицитом смазывающих веществ. В данных условиях степень окисления имеет большое значение в поведении трения и износа: оксидный слой должен быть однородный, тонкий и иметь хорошую адгезию, чтобы быть эффективным против износа. Перспективным материалом для использования в тяжело нагруженных узлах трения является быстрорежущая сталь [1]. Согласно [2–4] это обусловлено большей способностью карбидов и матрицы к окислению. Снижение коэффициента трения в основном связано с образованием оксидного слоя. Температуру начала образования оксидных слоев авторы не изучали. Более того, как отмечается в работе [4], за счет низкой

микротвердости матрицы по сравнению с эвтектическими карбидами, находящимися по границам зерен, происходит преимущественный ее износ, что приводит к преждевременному выкрашиванию упрочняющей фазы. В работах [5, 6] показано, что при формировании покрытий из стали Р6М5 и композиционного материала на ее основе «сталь Р6М5+20 вес. % WС» с применением метода электронно-лучевой наплавки в вакууме удается сформировать равномерное мультимодальное распределение упрочняющих фаз в аустенитно-мартенситной матрице. Данное распределение, наряду со структурно-неустойчивой связующей фазой, обеспечивает значительное повышение абразивной износостойкости данным покрытиям.

Целью настоящих исследований явилось изучение процессов изнашивания и изменения структурно-фазового состояния композиционных покрытий на основе стали Р6М5 в паре со стальным контртелом в интервале скоростей скольжения 1,2...3,6 м/с, нагрузок 20...100 Н и температур до 200 °С.



### Материал, оборудование и методы исследования

**Технология наплавки.** Для электронно-лучевой наплавки в вакууме (остаточное парциальное давление не менее 0,013 Па) использовался порошок быстрорежущей стали P6M5 (C – 1, Cr – 4, W – 6, 5, Mo – 5, V – 1,5, Si < 0,5, Mn < 0,55, Ni < 0,4, S < 0,03, O<sub>2</sub> < 0,03, Fe – основа (вес. %)), полученный распылением в воду расплава, производства ОАО «Тулачермет», и композиционный порошок «сталь P6M5+20 вес. % WC» дисперсностью 50...350 мкм. Композиционный порошок для наплавки получали смешиванием вышеназванных порошков, спеканием смеси в вакууме (остаточное парциальное давление не менее 10<sup>-2</sup> Па), последующим дроблением и рассевом на фракции полученных спёков [7].

Наплавку проводили на плоские заготовки размером 30×200 мм (толщина основного металла (подложки) 20 мм), изготовленные из стали 30. Ширина наплавочной дорожки не превышала 20 мм. Для формирования толщины наплавленного слоя ~3 мм число проходов электронного луча было равно 4. Для сохранения постоянного размера жидкометаллической ванны (~100 мм<sup>2</sup>) в процессе наплавки в условиях роста температуры заготовки необходимо уменьшать мощность электронного луча на каждом последующем проходе. Поэтому мощность электронного луча согласно ранее проведенной работе [8] изменялась в зависимости от номера прохода: 1) 4050...4300; 2) 2900...3200; 3) 2160...2300; 4) 2000...2100 Вт. Диаметр электронного луча, длина развертки и скорость движения подложки не изменялись и составили 1, 20 мм и 2,8 мм/с соответственно. Время процесса наплавки заготовки за один проход электронного луча составляло ~80 с. Время между проходами, необходимое для возвращения заготовки в исходное состояние, составляло ~80 с. Таким образом, в ходе многопроходной наплавки материал покрытия в зоне действия луча неоднократно испытывает нагрев/охлаждение (термоциклирование).

**Испытания на трение-скольжение.** Испытания на трение проводились на машине трения СМТ-20 с использованием схемы «колесо–две плоские колодки» при ступенчатом повышении скорости (1, 2; 2, 4 и 3, 6 м/с) и нагрузки (20, 40, 60, 80 и 100 Н) в условиях трения без смазки. Исходные образцы с покрытием вырезались из массивных ранее наплавленных заготовок электроэрозионным методом. Размер образцов был равен 10×10×7 мм. Толщина покрытия 2 мм. Поверхность покрытия перед испытанием полировалась на алмазных пастах различной дисперсности.

Контртелом служило колесо диаметром 62 мм и шириной 15 мм, изготовленное из закаленной шарикоподшипниковой стали ШХ15 (HRC 63...65). При каждой фиксированной скорости и нагрузке проводились четыре эксперимента с путем трения 2000 м независимо от частоты вращения контртеле-

ла. В качестве меры интенсивности изнашивания было использовано отношение объема материала, потерянного образцами в ходе испытания, к дистанции трения (мм<sup>3</sup>/км).

Для оценки температуры образцов в процессе испытаний с противоположной стороны от поверхности трения (со стороны основного металла) вводилась вольфрам-рениевая термопара, располагающаяся на границе сплавления подложка–покрытие. Реальная температура в зонах контакта была значительно выше, однако данная интегральная температура одновременно с анализом интенсивности изнашивания позволяла оценить работоспособность данной пары трения.

**Анализ структурно-фазового состава покрытий.** Структуру наплавленных покрытий до и после испытаний на износ исследовали с помощью оптического микроскопа (ОМ) *Olympus GX 51*, снабженного анализатором *SIAMS 700*, растрового электронного микроскопа (РЭМ) *Philips SEM 515*, снабженного микроанализатором *EDAX ECON IV* и ионно-электронного микроскопа *Quanta 200 3D*. Поперечные сечения по отношению к поверхности трения размером ~10×10×7 мкм изготавливали путем распыления материала сфокусированным ионным пучком при ускоряющем напряжении 30 кВ. РЭМ изображение сечений получали при наклоне образца 52 градуса. Использовали сигнал вторичных и обратно-рассеянных электронов. Анализ химического состава в локальной области проводили методом микрорентгеноспектрального анализа с использованием системы «Genesis 2000» фирмы EDAX. Получали химический состав области в точке и распределение элементов по линии.

Структурные исследования исходного покрытия и дорожки трения после испытаний пары трения проводили с помощью рентгеноструктурного анализа (РСА) на рентгеновском дифрактометре ДРОН-7 в фильтрованном Со<sub>Kα</sub>-излучении в интервале углов 2Θ=15–120° с шагом 0,1°. Для количественного фазового анализа использовали значения интегральной интенсивности дифракционных линий. Для определения параметров тонкой кристаллической структуры (размеров кристаллитов (D)) полученные экспериментальные данные аппроксимировались гадкими профилями (как правило, Коши), из которых определялись уширения линий. Из уширения дифракционных максимумов согласно [9] были получены размеры кристаллитов (областей когерентного рассеяния) γ-фазы (аустенита) композиционных покрытий. Истинное физическое уширение рентгеновских линий получали сравнением ширины рефлексов исследуемых кристаллитов с шириной рефлексов от эталонного образца, в качестве которого был взят крупнокристаллический α-кварц.

Оценку параметров шероховатости поверхности после испытаний на износ проводили на установке сканирующего интерференционного микроскопа *ZYGO NewView 7300*.

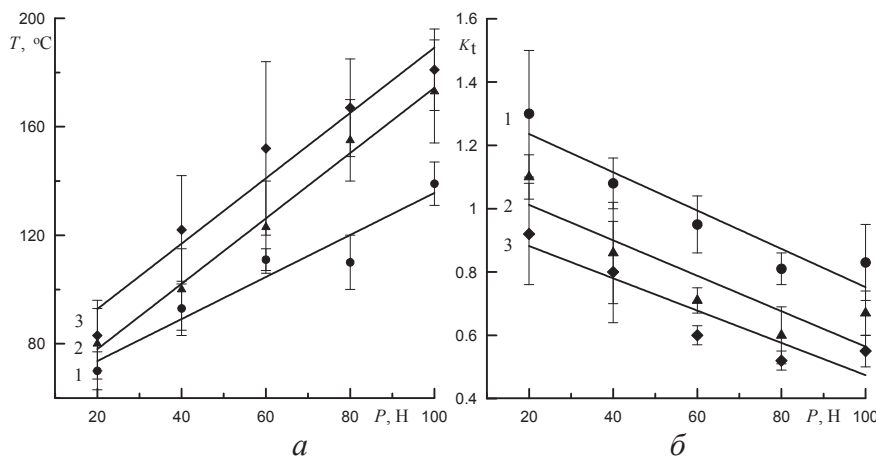
**Результаты и обсуждение**

Для формирования мультимодального распределения упрочняющих частиц по размерам [10] (мелкозернистые выделения эвтектического карбида  $M_6C$  по границам зерна с размером  $d_{1cp}=3,8...5,9$  мкм, субмикрочастицы выделения с размерами зерен  $d_{2cp}=0,65$  мкм (VC) и  $d_{3cp}<0,25$  мкм (вторичный карбид  $M_6C$  в объеме зерен матрицы)) наплавке предшествовал предварительный проход электронного луча малой мощности с силой тока 25...40 мА для подогрева и рафинирования поверхности образцов основного металла, многопроходного режима наплавки и окончательного подогрева наплавленной поверхности, позволяющих осуществить процесс старения в каждом предыдущем наплавленном слое уже в ходе наплавки. Матрица в упрочненном слое представляла аустенитно-мартенситную смесь. Количество аустенита в покрытии на основе стали Р6М5 составляло 22...30 %, а в композиционном покрытии «сталь Р6М5+20 % WC» – 80...87 % от общего объема матрицы. Исходный размер кристаллитов для матрицы ( $\gamma$ -фаза) покрытия на основе стали Р6М5 равен 85 нм, а для композиционного покрытия «сталь Р6М5+20 % WC» – 77 нм.

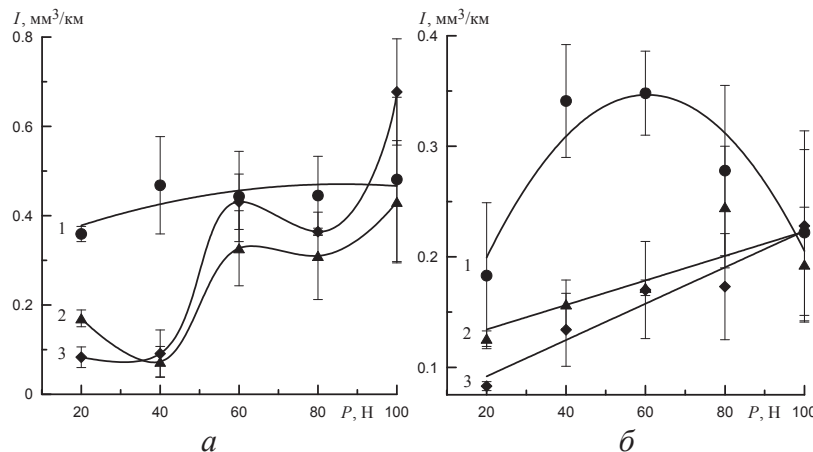
Все режимы трения сопровождались выделением тепла в зоне триботехнического контакта, что приводило к разогреву всего объема образцов. С увеличением скорости и нагрузки в трибологическом контакте температура росла по закону, близкому к линейному, и для скорости 3,6 м/с и нагрузки 100 Н достигала 180...200 °С (рис. 1, а).

Коэффициент трения с ростом скорости и нагрузки уменьшается с 1,3–0,9 до 0,9–0,5 (рис. 1, б). Необходимо заметить, что на рис. 1, б представлены установившиеся значения коэффициента трения, характерные для конца испытаний пары трения сталь Р6М5–сталь ШХ15. На начальном этапе в течение первых 1...2 минут временная зависимость момента трения (и, соответственно, коэффициента трения) имела значительный разброс, а затем его значение практически не менялись до конца испытаний. Аналогичные зависимости характерны и для пары трения «сталь Р6М5+WC»–сталь ШХ15.

Анализ результатов проведенных испытаний показал, что увеличение нагрузки для скорости скольжения 1,2 м/с практически не приводит к изменению интенсивности изнашивания покрытия на основе стали Р6М5 и она максимальна по



**Рис. 1.** Влияние скорости скольжения и нагрузки на: а) температуру образцов; б) коэффициент трения при трении покрытия сталь Р6М5 в паре со сталью ШХ15; скорость скольжения: 1) 1,2; 2) 2,4; 3) 3,6 м/с



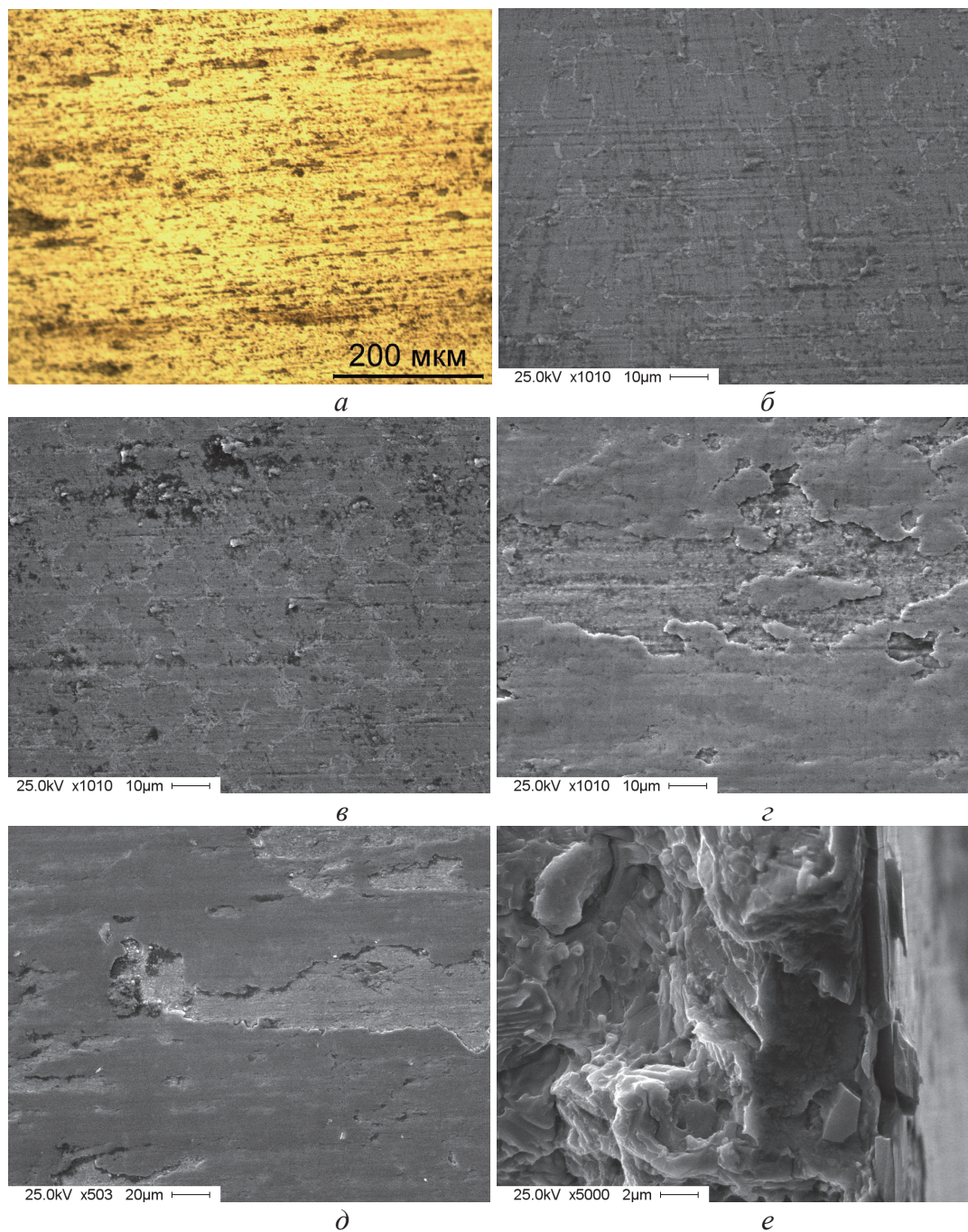
**Рис. 2.** Зависимость интенсивности изнашивания от скорости скольжения и нагрузки для покрытия: а) сталь Р6М5; б) «сталь Р6М5+WC». Скорость скольжения: 1) 1,2; 2) 2,4; 3) 3,6 м/с

сравнению со скоростями скольжения 2,4 и 3,6 м/с (рис. 2, а, кривая 1). Исключение составляет только скорость скольжения 3,6 м/с и нагрузка 100 Н, при которых интенсивность изнашивания данного покрытия максимальна ( $0,677 \pm 0,119 \text{ мм}^3/\text{км}$ ).

Для скоростей скольжения 2,4 и 3,6 м/с зависимости интенсивности изнашивания от нагрузки близки друг к другу и носят более сложный характер (рис. 2, а, кривые 2 и 3). В интервале нагрузок 20...40 Н интенсивность изнашивания минималь-

на для данного покрытия и не изменяется для скорости скольжения 3,6 м/с, а для скорости 2,4 м/с даже падает с 0,17 до 0,073  $\text{мм}^3/\text{км}$ . С ростом нагрузки до 60 Н интенсивность изнашивания резко возрастает (в ~4,5 раза). Далее до 80 Н интенсивность изнашивания практически не меняется. И, наконец, при нагрузке 100 Н она вновь возрастает, особенно интенсивно для скорости скольжения 3,6 м/с (на ~70 %, кривая 3).

Композиционные покрытия «сталь Р6М5+20 % WC» в исследуемых интервалах скоростей скольже-



**Рис. 3.** а) макро-; б-е) микроструктура поверхности трения покрытия на основе стали Р6М5; а, в) 60 Н, 1,2 м/с; б) 40 Н, 1,2 м/с; г) 60 Н, 2,4 м/с; д, е) 80Н, 3,6 м/с

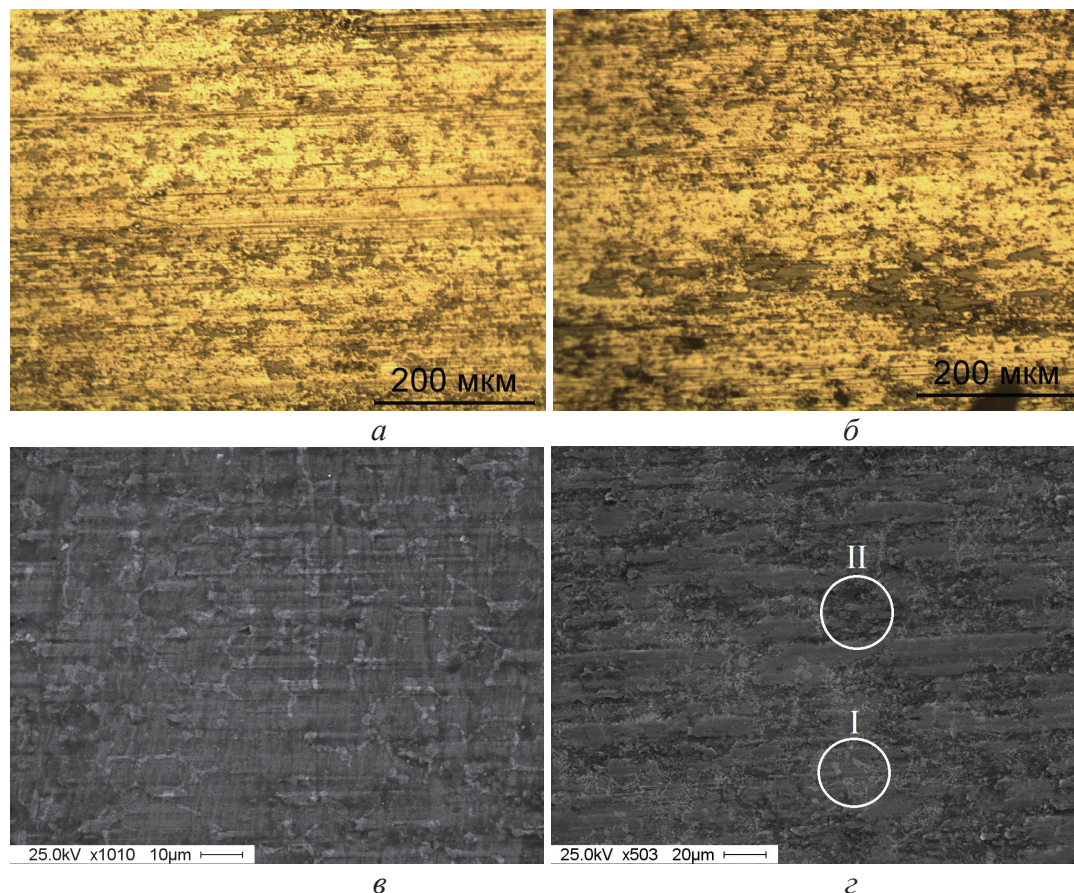


ния и нагрузок показывают интенсивность изнашивания, не превышающую  $0,348 \pm 0,038 \text{ мм}^3/\text{км}$  (рис. 2, б). При увеличении нагрузки для скорости скольжения 1,2 м/с интенсивность изнашивания изменяется по кривой с максимумом, которому соответствует нагрузка 40...60 Н (рис. 2, б, кривая 1). При больших скоростях скольжения интенсивность изнашивания линейно растет с нагрузкой и не превышает  $0,228 \text{ мм}^3/\text{км}$  (рис. 2, б, кривые 2 и 3), что в 2–3 раза меньше по сравнению с покрытиями на основе стали Р6М5 (рис. 2, а). Для всех исследуемых скоростей скольжения при нагрузке 100 Н интенсивность изнашивания практически одинакова.

Макроструктура (ОМ) поверхности трения покрытий сталь Р6М5 после скорости скольжения 1,2 м/с независимо от нагрузки представлена в основном в виде участка светлого цвета и в небольшом количестве отдельными темно-серыми участками, вытянутыми в направлении скольжения (рис. 3, а). По данным рентгеноструктурного анализа, слой темно-серого цвета представляет собой оксид  $\text{FeWO}_4$ . Белые участки представляют собой структуру покрытия исходного материала: мелкозернистые выделения эвтектического карбида  $\text{M}_6\text{C}$  по границам зерен аустенитно-мартенситной матрицы, интенсивность выкрашиваний которых растет с увеличением нагрузки (рис. 3, б, в).

С ростом скорости скольжения (2,4 и 3,6 м/с) увеличивается площадь темно-серых участков, от отдельных островков при малых нагрузках (20...40 Н) до практически сплошного слоя (60...80 Н) (рис. 3, г, д). Толщина оксидного слоя растет до ~500...700 нм (рис. 3, е). Далее с увеличением нагрузки до 100 Н оксидный слой начинает интенсивно разрушаться, что приводит к увеличению интенсивности изнашивания, особенно при скорости скольжения 3,6 м/с (рис. 2, а, кривая 3). Увеличение изнашивания при возрастании нагрузки до 60 Н для скоростей скольжения 2,4 и 3,6 м/с связано, по-видимому, с ростом пластичности матрицы, что приводит к распаду сетки эвтектических карбидов, интенсивному ее окислению, формированию слоя окислов с частичным их удалением с трибоконтакта (рис. 3, д).

Для композиционного покрытия «сталь Р6М5+20 % WC» при скорости скольжения 1,2 м/с и нагрузке 20...80 Н сплошной оксидный слой не формируется (рис. 4, а). На поверхности трения присутствуют только отдельные участки оксидов, количество которых с ростом нагрузки увеличивается, и при 100 Н формируется тонкая сетка из этих оксидов (рис. 4, б), что приводит к уменьшению интенсивности изнашивания (рис. 2, б, кривая 1). При нагрузках 20...40 Н микроструктура поверхности



**Рис. 4.** а, б) макро- (ОМ); в, г) микроструктура (РЭМ) поверхности трения композиционного покрытия «сталь Р6М5+20 % WC» после скорости скольжения 1,2 м/с



трения полностью соответствует микроструктуре исходного материала (эвтектическая сетка карбидов  $M_6C$  по границам зерен, вторичные мелкие карбиды внутри зерен аустенитно-мартенситной матрицы, рис. 4, *в*). В интервале нагрузок 60...80 Н начинает разрушаться эвтектическая сетка карбидов по границам зерен с формированием структуры равноосных карбидов в матрице. На рис. 4, *г* видно присутствие областей материала как с эвтектическими древовидными карбидами (I), так и с уже претерпевшими разрушение в виде равноосных частиц (II).

Необходимо отметить, что участки материала с эвтектическими древовидными карбидами остаются гладкими и сохраняют свою работоспособность. Участки материала, где идет процесс разрушения эвтектической сетки карбидов, подвергаются большому износу.

С увеличением скорости скольжения до 2,4...3,6 м/с эвтектические древовидные карбиды сохраняются при нагрузке до 60 Н (рис. 5, *а*), и только при 80 Н они полностью распадаются на равноосные мелкие частицы, равномерно распре-

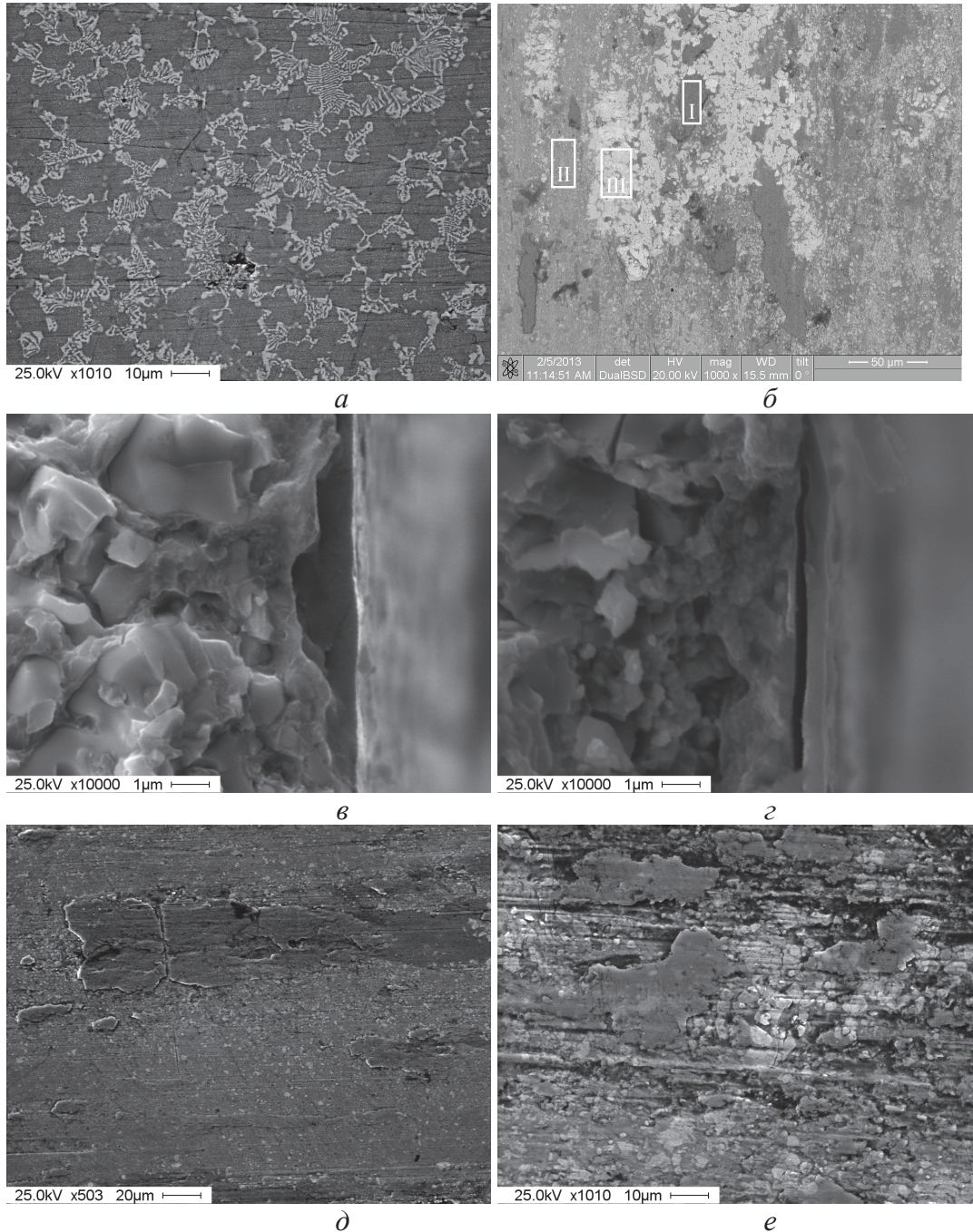


Рис. 5. Микроструктура (РЭМ) поверхности трения композиционного покрытия «сталь Р6М5+20 % WC» после скорости скольжения: а-г) 2,4; д, е) 3,6 м/с. а, д) 60; б-г, е) 80 Н

деленные в матрице. При 80...100 Н наряду с мелкими карбидами формируются конгломераты крупных карбидов (рис. 5, б).

Темно-серые участки оксидов, вытянутые вдоль направления скольжения, начинают формироваться уже при 20 Н. Занимаемая ими площадь контакта достигает к 100 Н и скорости 2,4...3,6 м/с 40...60 %. В зависимости от профиля поверхности контакта участки оксидного слоя либо плотно связаны с поверхностью, либо постепенно отслаиваются от нее (рис. 5, в, г). Кроме того, они растрескиваются поперек направления скольжения (рис. 5, д). Подобные трещины формируются и в крупных конгломератах карбидов (рис. 5, е).

По данным микрорентгеноспектрального анализа поверхности трения покрытия сталь Р6М5 (рис. 3, б) и «сталь Р6М5+20 % WC» (рис. 5, а) имеют следующий химический состав (вес. %): С – 0,8; Мо – 4,56; W – 7,25; Cr – 4,6; V – 2,4; остальное Fe и С – 2; Мо – 2,8; W – 23,2; Cr – 2,92; V – 1,7; остальное Fe соответственно, что практически соответствует их исходным составам.

Химический состав темно-серых участков оксидов (рис. 5, б, зона I; ат. %): О – 61,55; Fe – 34,92; W – 2,13; Cr – 1,4. Данный оксидный слой формируется на поверхности композиционного покрытия в результате процесса преимущественного изнашивания матрицы и последующего окисления химических элементов продуктов износа. Это обусловлено большим разогревом покрытия по сравнению с контртелом, так как коэффициент взаимного перекрестия данной пары трения равен 0,2.

В процессе трения происходит разрушение эвтектической сетки карбидов типа  $M_6C$  с формированием, наряду с вторичными дисперсными карбидами, равноосных карбидов в матрице (рис. 5, б, зона II,) и отдельных конгломератов крупных карбидов (рис. 5, б, зона III). Химический состав зоны II: С – 1,6; Мо – 4,96; W – 20,75; Cr – 3,2; V – 3,9; остальное Fe. Сравнивая данный химический состав с исходным (С – 2; Мо – 2,8; W – 23,2; Cr –

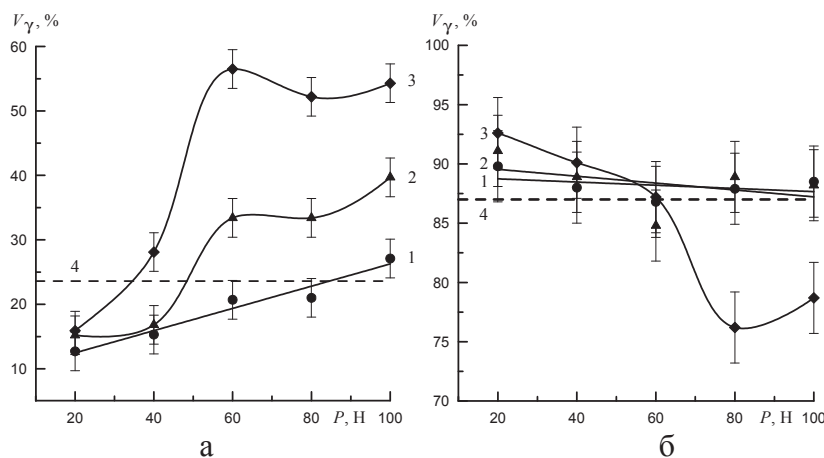
2,92; V – 1,7; остальное Fe) видно, что он отличается более высоким содержанием молибдена и ванадия. Это обусловлено частичным окислением таких элементов, как железо, вольфрам и хром. Данное обстоятельство, судя по металлографическим данным, приводит к некоторому увеличению объемного содержания карбидной фазы на поверхности трения (рис. 5, а, б).

Химический состав зоны III: С – 3,8; Мо – 3,6; W – 63; Cr – 1,65; V – 1,4; остальное Fe. Судя по данному химическому составу, конгломераты крупных карбидов представляют фазу типа  $M_6C$ .

При скорости скольжения 1,2 м/с и нагрузках 20 и 40 Н остаточный аустенит матрицы претерпевает заметное (40...50 %)  $\gamma \rightarrow \alpha'$  мартенситное превращение (рис. 6, а, кривая 1), а далее с увеличением нагрузки содержание остаточного аустенита находится на уровне его исходного значения (~23,6 %). Аналогичное  $\gamma \rightarrow \alpha'$  мартенситное превращение наблюдается и при увеличении скорости скольжения до 2,4 м/с в интервале нагрузок 20...40 Н, и скорости 3,6 м/с при нагрузке 20 Н. Далее с увеличением нагрузки для этих скоростей за счет роста температуры в трибоконтакте наблюдается обратное  $\alpha \rightarrow \gamma$  превращение (рис. 6, а, кривые 2 и 3). Быстрое охлаждение тонкого приконтактного слоя покрытия позволяет сохранить в нем до 55 % аустенита от общего объема матрицы при скорости скольжения 3,6 м/с и нагрузке 60...100 Н.

Наблюдается существенное уменьшение кристаллитов  $\gamma$ -фазы (до 30...45 нм) независимо от скорости скольжения уже при нагрузке 20 Н, а далее с увеличением нагрузки для скоростей скольжения 2,4 и 3,6 м/с они плавно уменьшаются до 20...25 нм (рис. 7, а, кривые 2 и 3). Для скорости скольжения 1,2 м/с в интервале нагрузок 40...60 Н наблюдается некоторое повышение  $D$ , а далее их размер падает с ростом нагрузки (рис. 7, а, кривая 1).

В случае композиционного покрытия «сталь Р6М5+20 % WC» для скоростей скольжения 1,2 и



**Рис. 6.** Влияние скорости скольжения и нагрузки на количество аустенита в приконтактном слое покрытия на основе: а) стали Р6М5; б) композита «сталь Р6М5+20 % WC»; скорость скольжения: 1) 1,2; 2) 2,4; 3) 3,6 м/с; 4) исходное содержание аустенита в покрытии



2,4 м/с во всем интервале исследуемых нагрузок объемная доля аустенита сохраняется на уровне исходного количества (рис. 6, б, кривые 1 и 2). Только для скорости 3,6 м/с и нагрузки 80...100 Н наблюдается уменьшение аустенита на ~10 %. Размер кристаллитов  $\gamma$ -фазы при скоростях скольжения 2,4 и 3,6 м/с резко уменьшается уже при нагрузке 20 Н по сравнению с исходным значением (77 нм) и далее с ростом нагрузки не изменяется (рис. 7, б, кривые 2 и 3). Для скорости скольжения 1,2 м/с уменьшение  $D$  до 40 нм с ростом нагрузки более плавное (рис. 7, б, кривая 1). Уменьшение размеров кристаллитов обусловлено как ростом плотности дислокаций, так и ростом микроискажений в матрице.

*Пара трения сталь Р6М5–сталь ШХ15.* Основным результатом настоящей работы можно считать установленный факт наличия двух областей катастрофического изнашивания покрытия на основе стали Р6М5 при скоростях скольжения 2,4 и 3,6 м/с и нагрузках 60 и 100 Н соответственно. В интервале нагрузок 20...40 и 60...80 Н наблюдается установившийся износ в паре с закаленной сталью ШХ15. Обычно столь резкое увеличение скорости изнашивания (в два раза, рис. 2, а) связано со сменой механизмов изнашивания [11].

Процессы износа, происходящие при скоростях 1,2 м/с во всем диапазоне нагрузок и при скоростях 2,4 и 3,6 м/с в интервале нагрузок 20...40 Н, можно связать с процессом пластического отеснения и микрорезания продуктами износа (частицами карбидов и оксидов). Для такого режима изнашивания характерен гладкий рельеф поверхности изнашивания, отсутствие вырывов больших объемов материала и трещин, что и наблюдается на рис. 3, а, б. С увеличением нагрузки при скорости 1,2 м/с наблюдается увеличение выкрашиваний части карбидной эвтектической сетки (рис. 3, в), что связано с общим охрупчиванием материала за счет частичного превращения остаточного аустенита в мартенсит деформации (рис. 6, а, кривая 1).

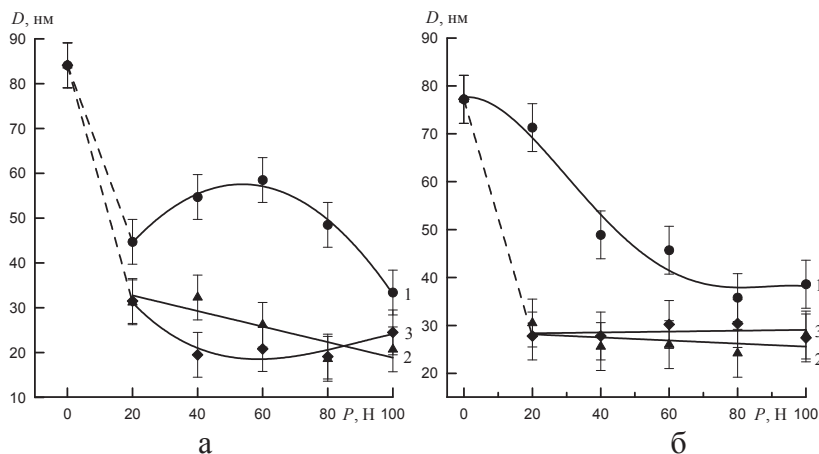
Резкое повышение интенсивности изнашивания (2,4 и 3,6 м/с, 60 Н, рис. 2, а, кривые 2 и 3) связано с повышением температуры в зоне трибоконтакта [12], что приводит к размягчению связи в приповерхностных областях покрытия, высоко-температурному фазовому  $\alpha \rightarrow \gamma$ -переходу в матрице (рис. 6, а, кривые 2 и 3), разрушению сетки древовидных эвтектических карбидов (рис. 3, в, з), экструзии матрицы в зону трибологического контакта между покрытием и стальным колесом и, следовательно, ее интенсивным окислением и частичным удалением оксидов в продукты износа.

Второй интервал установившегося износа (60...80 Н, рис. 2, а, кривые 2 и 3) обусловлен формированием практически сплошного оксидного слоя на поверхности покрытия (рис. 3, г, д). Далее с ростом нагрузки до 100 Н начинается вторая область катастрофического изнашивания, особенно ярко проявляющаяся для скорости скольжения 3,6 м/с. Это обусловлено ростом толщины оксидного слоя и, как следствие, его разрушением (рис. 3, е).

*Пара трения «сталь Р6М5+20 % WC»–сталь ШХ15.* Основным результатом для пары трения «сталь Р6М5+20 % WC»–сталь ШХ15 является установленный факт значительного снижения интенсивности изнашивания композиционного покрытия по сравнению с покрытием на основе стали Р6М5. Это обусловлено одновременным увеличением объемных долей карбидной фазы и остаточного аустенита матрицы.

При скоростях скольжения 2,4 и 3,6 м/с интенсивность изнашивания композиционного покрытия «сталь Р6М5+20 % WC» линейно растет с нагрузкой (рис. 2, б, кривые 2 и 3) и в 2–3 раза меньше по сравнению с покрытиями на основе стали Р6М5 (рис. 2), что в основном связано с развитием окислительного изнашивания. Участки оксидного слоя начинают формироваться уже при 20 Н. Занимаемая ими площадь контакта достигает к 100 Н 40...60 %.

Эвтектические древовидные карбиды сохраняются при нагрузке до 60 Н (рис. 5, а), и только при



**Рис. 7.** Влияние скорости скольжения и нагрузки на размер кристаллитов аустенита при трении покрытия на основе: а) стали Р6М5; б) композита «сталь Р6М5+20 % WC». Скорость скольжения: 1) 1,2; 2) 2,4; 3) 3,6 м/с

80 Н они полностью распадаются на равноосные мелкие частицы, равномерно распределенные в матрице, и конгломераты крупных карбидов (рис. 5, б). Линейный рост интенсивности изнашивания от нагрузки связан с постепенным разрушением и отслаиванием оксидного слоя (рис. 5, в, г), формированием поперечных трещин по отношению к направлению скольжения в крупных конгломератах карбидов  $M_6C$  (рис. 5, е) и их выкрашиванием.

Для скорости скольжения 1,2 м/с интенсивность изнашивания изменяется по кривой с максимумом, которому соответствует нагрузка 40...60 Н (рис. 2, б, кривая 1). При нагрузке 20...80 Н сплошной оксидный слой не формируется (рис. 4, а), и только при 100 Н формируется тонкая сетка из этих оксидов (рис. 4, б), что приводит к уменьшению интенсивности изнашивания (рис. 2, б, кривая 1).

В интервале нагрузок 60...80 Н начинает разрушаться эвтектическая сетка карбидов с формированием структуры равноосных карбидов в матрице (рис. 4, г). На поверхности трения присутствуют как области материала с эвтектическими древовидными карбидами (I), так и области с равноосными мелкими частицами в матрице (II). Области I, оставаясь гладкими, сохраняют свою работоспособность в контакте с контртелом, а области II в этот период, судя по рельефу поверхности, подвергаются более интенсивному износу.

#### Выводы

В паре трения сталь Р6М5–сталь ШХ15 установлено две области катастрофического изнашивания покрытия при скоростях скольжения 2,4 и 3,6 м/с и нагрузках 60 и 100 Н соответственно. В интервале нагрузок 20...40 и 60...80 Н наблюдаются две области установившегося износа.

Процессы износа, происходящие при скоростях 1,2 м/с во всем диапазоне нагрузок и при скоростях 2,4 и 3,6 м/с в интервале нагрузок 20...40 Н,

связаны с процессом пластического оттеснения и микрорезания продуктами износа. С увеличением нагрузки при скорости 1,2 м/с наблюдается увеличение выкрашиваний части карбидной эвтектической сетки, что связано с общим охрупчиванием материала за счет частичного превращения остаточного аустенита в мартенсит деформации.

Резкое повышение интенсивности изнашивания (2,4 и 3,6 м/с, 60 Н) связано с размягчением связки в приповерхностных областях покрытия, высокотемпературным фазовым  $\alpha \rightarrow \gamma$ -переходом в матрице, разрушением сетки древовидных эвтектических карбидов, экструзией матрицы в зону трибологического контакта между покрытием и стальным колесом и, следовательно, ее интенсивным окислением и частичным удалением окислов в продукты износа.

Второй интервал установившегося износа (60...80 Н) обусловлен формированием практически сплошного оксидного слоя на поверхности покрытия, который с ростом нагрузки до 100 Н начинает разрушаться, что обуславливает развитие второй области катастрофического изнашивания.

Для пары трения «сталь Р6М5+20 % WC»–сталь ШХ15 установлено значительное снижение интенсивности изнашивания композиционного покрытия (2–3 раза) по сравнению с покрытием на основе стали Р6М5. Это обусловлено одновременным увеличением объемных долей карбидной фазы и остаточного аустенита матрицы. При скоростях скольжения 2,4 и 3,6 м/с интенсивность изнашивания композиционного покрытия линейно растет с нагрузкой, что в основном связано с развитием окислительного изнашивания. Участки оксидного слоя начинают формироваться уже при 20 Н.

*Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ на проведение научно-исследовательских работ ТПУ № 8.3664.2011.*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Hanlon D.N., Rainforth W.M. The rolling sliding wear response of conventionally processed and spray formed high speed steel at ambient and elevated temperature // *Wear*. – 2003. – V. 255. – P. 956–966.
- Molinari A., Pellizzari M. Oxidation behaviour of ledeburitic steels for hot rolls // *Mater. Sci. Eng. A*. – 2000. – V. 280. – P. 255–262.
- Pellizzari M., Molinari A., Straffelini G. Tribological behaviour of hot rolling rolls // *Wear*. – 2005. – V. 259. – P. 1281–1289.
- Joos O., Boher C., Vergne C., Gaspard C., Nysten T., Reza-Aria F. Assessment of oxide scales influence on wear damage of HSM work rolls // *Wear*. – 2007. – V. 263. – P. 198–206.
- Gnyusov S.F., Ignatov A.A., Durakov V.G., Tarasov S.Yu. The effect of thermal cycling by electron-beam surfacing on structure and wear resistance of deposited M2 steel // *Applied Surface Science*. – 2012. – V. 263. – P. 215–222.
- Gnyusov S.F., Durakov V.G., Tarasov S.Yu. Structure and Abrasive Wear of Composite HSS M2/WC Coating // *Advances in Tribology*. – 2012. – Article ID 502714, doi: 10.1155/2012/502714.
- Гнюсов С.Ф., Дураков В.Г., Гнюсов К.С. Вакуумная электронно-лучевая наплавка карбидосталей. I. Особенности технологии наплавки и подготовки композиционных наплавочных смесей // *Сварочное производство*. – 2007. – № 11. – С. 8–12.
- Гнюсов С.Ф., Гнюсов К.С., Дураков В.Г. Вакуумная электронно-лучевая наплавка карбидосталей. II. Особенности формирования структуры и свойств покрытий сталь Р6М5 – WC // *Сварочное производство*. – 2007. – № 12. – С. 12–15.
- Русаков А.А. Рентгенография металлов. – М.: Атомиздат, 1977. – 480 с.
- Способ электронно-лучевой наплавки покрытий с мультимодальной структурой: пат. № 2309827 Рос. Федерация, заявл. 26.06.06; опубл. 10.11.07, Бюл. № 31. – 4 с.
- Lee S.W., Hsu S.H., Shen M.C. Ceramic Wear Maps: Zirconia // *J. Am. Ceram. Soc.* – 1993. – V. 76. – № 8. – P. 1937–1947.
- Lim S.C., Ashby M.F. Wear mechanism maps // *Acta Metallurgica*. – 1987. – № 35. – P. 1–24.

*Поступила 08.04.2013 г.*



УДК 669:621.7

## ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЛАКСАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЯХ НА ОСНОВЕ НИКЕЛИДА ТИТАНА И МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ ИХ НАДЕЖНОСТИ

В.А. Хохлов, А.И. Потехаев\*, С.В. Галсанов

Томский государственный университет

\*Сибирский физико-технический институт им. акад. В.Д. Кузнецова, г. Томск

E-mail: potekaev@spti.tsu.ru

В результате изучения окружной прочности и рассеяния энергии в термомеханических соединениях трубопроводов втулками из никелида титана получены изменения напряжений во времени. Разработаны методы повышения их надежности.

### Ключевые слова:

Никелид титана, термомеханические соединения, релаксация напряжений.

### Key words:

Titanium nickelide, thermomechanical connections, stress relaxation.

### Введение

Термомеханические соединения (ТМС) – это соединения, в которых натяг между элементами осуществляется за счет термического сжатия предварительно нагретой втулки или расширения предварительно охлажденного вала. Это требует точного расчета размеров втулки и вала.

Задача создания надежных и высокопрочных соединений значительно упрощается при использовании материалов с памятью формы (ПФ), в частности на основе никелида титана. В отличие от обычных материалов никелид титана, обладая высокими – до 12...15 % – обратимыми деформациями, позволяет создать натяг, соизмеримый с прочностными характеристиками материалов самих соединяемых элементов при относительно невысоких точности и качестве поверхностей [1–4].

Один из вариантов такого соединения показан на рис. 1. Здесь концы трубопроводов – 2, выполненных из любого материала, соединяются втулкой – 1 из никелида титана. Для обеспечения большей прочности и надежности втулка выполнена с поясками. Процесс сборки включает в себя этап радиальной раздачи втулки при низких температурах, например, в среде жидкого азота, этапа свободной насадки втулки на концы трубопроводов при комнатной температуре и этапа ее термовозврата. В процессе разогрева за счет проявления эффекта ПФ радиальные размеры втулки уменьшаются почти до исходных, в результате чего происходит обжим концов. Величина натяга в данном случае обусловлена разностью исходных посадочных размеров труб и втулки, а сборочный зазор и свобода сборки обеспечиваются большими степенями раздачи в пределах указанных выше обратимых деформаций.

Термомеханические соединения широко используются в гидравлических, газовых и топливных системах двигателей, где требуется компактность трубопроводов со сложной траекторией их расположения, например в двигателях самолетов [5] и подводных лодках, а также есть возможность

их широкого применения в системах трубопроводов нефтеперерабатывающих заводов [6, 7].

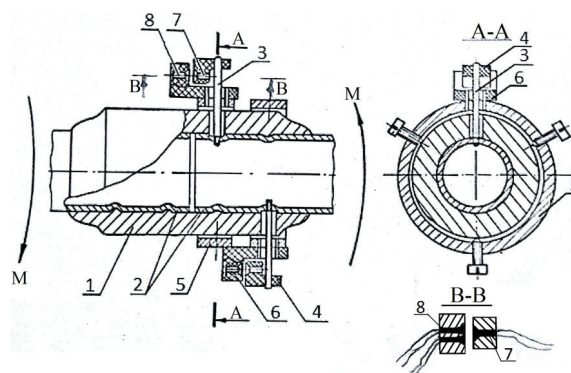


Рис. 1. Термомеханическое соединение трубопроводов. 1 – втулка из TiNi, 2 – соединяемые трубопроводы, 3 – шток для установки кронштейна, 4 – кронштейны со светодиодами, 5 – кольцо для крепления кронштейнов, 6 – кронштейны для крепления фотодиодов, 7 – светодиод, 8 – фотодиоды

По статистическим данным Республиканского инженерно-технического центра (РИТЦ) ТФ СО АН СССР (см. отчет РИТЦ по теме «Создание на основе сплавов с памятью формы технологии и оснастки несварных соединений трубопроводов» шифр Криофит № 28/98 от 29.05.89) нефтеперерабатывающий завод производительностью 6 миллионов тонн в год имеет протяженность трубопроводов до 2000 км диаметрами от 6 до 1200 мм и сотни тысяч стыков, значительное число которых являются сварными. Как известно, во водимых мощностях число отказов из-за сварных соединений составляет 40...45 % от общего числа отказов всех систем, а в процессе эксплуатации доля их составляет 11 %. Поэтому вполне оправдан поиск альтернативных способов соединений, в число которых входит ТМС. Преимущества таких соединений очевидны:

- возможность соединения трубопроводов из различных материалов;
- простота и легкость сборки;

- возможность сборки в труднодоступных местах;
- отсутствие высокотемпературного нагрева, который неизбежен при пайке и сварке, исключается изменение и ухудшение свойств материала в области стыка;
- высокая надежность соединений (до 700 МПа), т. к. никелид титана, имея повышенную прочность (предел текучести у него выше, чем у обычных материалов), обладает высокой долговечностью в условиях циклического нагружения и пульсирующих нагрузок;
- возможно соединение в полевых условиях при ремонтных и капитальных работах при отсутствии источников энергии;
- возможность проведения работ во взрыво- и пожароопасных условиях.

Недостатком этих соединений является относительно высокая стоимость материала.

Однако, как показывает технико-экономический анализ, проведенный РИТЦ, затраты на подготовительные работы, доставку материалов и оборудования к месту сборки, эксплуатацию оборудования и непосредственно на монтаж ТМС ниже, чем производство сварных соединений. При этом общая стоимость с учетом затрат на материалы становится почти одинаковой для обоих видов соединений. Но учитывая указанные выше преимущества ТМС, эффективность их неоспорима (данные РИТЦ).

Наиболее оптимальными с точки зрения экономичности и востребованности размеры соединяемых трубопроводов авторы считают диаметры 14...52 мм. Достаточно сказать, что только на одном самолете США F14A в гидравлических системах устанавливается 800 муфт, обеспечивающих давление 210 МПа, а с 1973 по 1983 гг. было поставлено для авиации 35 тыс. муфт. В газовых системах и системах подачи пресной и морской воды подводных лодок соединения ТМС из никелида титана выдерживают давление 420 МПа. На гражданских объектах перспективы применения ТМС колоссальны.

Термомеханическое соединение, как видно, включает контакт тел классических материалов (трубопроводы) с материалом с ПФ (соединительная втулка). Причем здесь в наличии все атрибуты контактного взаимодействия, трения, предварительного смещения, изнашивания.

В самом деле, в указанных выше системах реализуются статические контактные деформации в результате натяга при сборке соединений, радиальные и тангенциальные смещения при действии давления жидкости и газов, цикличность однозначная и знакопеременная по нагрузкам.

Для оптимизации характеристик ТМС и повышения их долговечности нами были проведены обширные исследования свойств контакта никелида титана с традиционными материалами, релаксационных характеристик соединений, и на основе исследований выработаны рекомендации для по-

вышения эксплуатационных характеристик термомеханических соединений.

Результатом этой работы явилось внедрение в производство оптимальной и конкурентоспособной технологии создания ТМС на основе никелида титана с высоким экономическим эффектом.

#### Материалы, образцы, приборы и оборудование

Механические и кинетические характеристики (прочность, герметичность, долговечность, релаксация, ползучесть) соединений с использованием материалов с термомеханической памятью формы определяются материалами соединяемых труб, их поперечными размерами, конструкцией соединения (гладкие с уплотняющими плоскими элементами, комбинированные с промежуточными элементами), размерами соединительных муфт, допусками на наружные и внутренние диаметры элементов соединения, степенью предварительной раздачи втулки, расчетным натягом и, в наибольшей степени, материалом соединительных муфт.

Для обеспечения заданных характеристик соединения по герметичности, релаксационностойкости, прочности, долговечности и рабочему интервалу температур был выбран материал соединительной втулки с повышенными термомеханическими характеристиками  $Ti_{50}Ni_{47,5}Fe_{2,5}$  ТН-1К с температурами начала  $M_n$  ( $-80^\circ C$ ) и конца мартенситного превращения ( $-140^\circ C$ ), коэффициентом восстановления не менее 95 %.

Выбор этого сплава обусловлен достаточно низкими температурами формовосстановления, ростом параметров прочности и пластичности с повышением температур до 300...350  $^\circ C$ , высокими значениями (до 15 %) обратимой деформации, а главное тем, что ТН-1К единственный из материалов с памятью формы, достаточно полно изученный и освоенный промышленностью [5].

Термообработка: отжиг в вакууме при  $T=800^\circ C$  с выдержкой 1 час в печи. Конструкция втулки – с четырьмя уплотняющими поясками.

Трубопроводы: нержавеющая сталь 12Х18Н10Т с наружным диаметром 14 и 20 мм и толщиной стенок 1 мм.

Уплотняющие пояски деформируют при обжатии стенки трубы, и внутренние их поверхности имеют волнообразный профиль (рис. 1).

Измеритель перемещений – прибор на основе оптического бесконтактного способа измерения перемещений с применением фотодиодных датчиков микроперемещений, установка [7] и работа которых описана в следующем разделе.

Для создания крутящего момента использовалась машина для испытаний на кручение фирмы «Амслер–Лафон».

Измерение площади петель гистерезиса и энергии псевдоупругой деформации проводилось с помощью планиметра.

Сборка соединений проводилась следующим образом: втулка из TiNi помещалась в среду жидкого азота в специальную камеру, раздавливалась

по диаметру металлическим дорном, извлекалась из камеры и сразу насаживалась на концы трубопроводов. При ее нагреве втулка, возвращаясь к прежнему расчетным размерам, обжимала концы трубопроводов.

#### Методика исследования релаксации напряжений

Под релаксацией напряжений понимают самопроизвольное снижение во времени механических напряжений в материале при постоянных линейных размерах элемента. Релаксация происходит за счет возникновения микропластических деформаций в локальных областях материала при действии упругих напряжений, уменьшая последние.

Поскольку все количественные теоретические и экспериментальные методы определения напряжений базируются на определении смещения между отдельными элементами материала, то и экспериментальное исследование релаксации напряжений сводится в той или иной форме к определению изменений во времени перемещений или деформаций при упругом возврате после снятия напряжений. Используется классический аппарат механики деформируемого твердого тела.

Экспериментальное исследование релаксации напряжений возможно при различных схемах нагружения: изгибе, растяжении, кручении, сжатии, комбинированном виде нагружения. Все они имеют свои преимущества и недостатки. Например, в одном случае возможно точное определение кинетики деформации, но сложный математический аппарат пересчета в напряжения, в других случаях связь между деформациями и напряжениями выражается, например, в виде простейшего закона Гука, однако сложно зафиксировать изменение деформации.

В термомеханических соединениях после сборки элементов в результате фазового превращения и формовосстановления во втулке и трубах возникают осевые и радиальные напряжения, обеспечивающие определенные натяг, герметичность и прочностные характеристики соединения.

Поставленная задача исследования релаксации напряжений в соединении является намного более сложной, чем определение кинетики напряжений в материале по ряду причин. *Во-первых*, общая релаксация напряжений определяется релаксацией собственно в материале втулки, релаксацией в материале труб и релаксацией в зоне контакта. Причем последняя, как показали наши исследования, в начальный момент времени интенсивней, чем в материалах, и именно она определяет в наибольшей степени процессы разупрочнения соединения. Это связано с тем, что в контакте ввиду малости площадей касания возникают напряжения, близкие к предельным, даже при весьма малых общих расчетных напряжениях, действующих в элементах. Следовательно, и интенсивность релаксации выше.

*Во-вторых*, возникает проблема точного измерения деформаций и в материалах, и в контакте,

фиксирования их изменений во времени, принимая во внимание, что последние являются малыми высших порядков по сравнению с самими деформациями и требуется измерительная аппаратура с точностью на класс выше определяемых величин. Кроме того, необходимы сложные вычисления для расчета напряжений по деформациям, требующие анализа напряженно-деформированного состояния в зоне контакта, установления аналитической связи между деформациями и напряжениями, учета целой гаммы эмпирических коэффициентов, использования гипотез и допущений. В настоящее время такой, хотя и сложный, математический аппарат обработки экспериментально полученных деформаций и расчет напряжений разрабатывается авторами.

*В-третьих*, на характеристики соединения оказывают влияние два конкурирующих процесса. Первый из них – снижение напряжений во времени в результате релаксации, приводящее к понижению прочности, так как уменьшается усилие обжатия или натяга. Второй – это увеличение площади фактического контакта, происходящее в результате эффектов ползучести микронеровностей под напряжением. Ползучесть локальных областей контакта сопровождается, кроме того, адгезионными процессами и усилением механического сцепления. Все это приводит к упрочнению контакта и соединения в целом.

Однако увеличение фактической площади сопровождается падением контактных давлений. Для опытных соединений с натягом падение фактического контактного давления незначительно, так как деформация от ползучести тут же компенсируется деформацией упругого возврата втулки и трубы.

В термомеханических соединениях могут быть две ситуации, определяющие прочность и герметичность соединения. В одном случае, когда скорость ползучести контакта превышает скорость релаксации напряжений в материале втулки и трубы, прочность соединения не уменьшается, так как успевает произойти компенсация деформации за счет упругого восстановления. В другом случае, когда скорость релаксации в самом материале выше скорости ползучести контакта, рост фактической площади контакта, который сопровождается уменьшением фактического контактного давления, будет происходить в условиях уменьшения номинального контактного давления вследствие релаксации напряжений. При этом прочность соединений должна уменьшаться.

В обоих случаях прочность соединения зависит не только от разности скоростей, но и от величины релаксируемых напряжений и от величины изменяющейся фактической площади, т. е. от способности контакта к ползучести. Так, для поверхности с низким качеством обработки (с большой шероховатостью) величина прироста фактической площади касания из-за ползучести будет больше, чем для поверхностей более гладких.

Таким образом, рассматривая ТМС с позиций механики контактного взаимодействия, можно утверждать, что кинетика прочности соединения определяется не только релаксацией напряжений в теле элементов, но и в большей степени кинетикой микрометрических характеристик контакта и объема материала в шероховатом слое. Поэтому исследования релаксации в соединениях, имеющие цель – прогнозирование прочности, должны быть сведены к изучению кинетики контактных напряжений и прочности, которые учитывают как собственно временные изменения свойств контакта, так и релаксацию напряжений в материале.

Известные способы определения релаксации в материалах неприемлемы для соединения. Методик оценки релаксации напряжений в соединениях и в контакте, судя по литературным данным, не существует. В связи с этим предлагается новый метод оценки релаксации напряжений в соединениях и в ТМС в частности, где в качестве критериев оценки релаксационных свойств приняты изменения окружной прочности соединения и энергетической характеристики соединения – рассеяние энергии в трибосопряжении за цикл знакопеременного нагружения крутящим моментом. Величина последнего должна быть такой, чтобы исключить дополнительные контактные деформации, т. е. чтобы контакт работал в условиях предварительного смещения. Рассеяние энергии определяется по площади гистерезисной петли. Третьим равноценным критерием может быть изменение во времени при фиксированном предельном крутящем моменте величины предварительного смещения, которое отражает степень сопротивления контакта внешним силовым воздействиям. Поскольку существует связь, хотя и нелинейная, между смещением и рассеянием энергии, третий критерий в данной работе не рассматривается.

При исследовании микроперемещений и диссипативных свойств контакта в условиях предварительных смещений необходима регистрация микроперемещений, составляющих сотые доли микрона.

В связи с этим изготовлен прибор на основе фотодиодных датчиков микроперемещений.

На рис. 1 приведена схема установки датчиков. Один элемент датчика (светодиод) 1 устанавливается по одной из трубок. Второй элемент (два фотодиода) 2 закрепляется на втулке таким образом, чтобы элемент 1 располагался симметрично относительно фотодиодов.

При возникновении деформации в контакте луч света от светодиода смещается в сторону одного из фотодиодов, изначальная равномерность светового потока нарушается, появляется ток разбалансировки на выходе фотодиодов, который фиксируется токоизмерителем, протарированным на линейное микросмещение.

Для создания микросмещений к концам трубопроводов прикладывался крутящий момент. При

этом возникало предварительное смещение правой трубки относительно втулки, которое фиксировалось датчиками. Увеличение амплитуды момента велось до наступления проскальзывания (срыва) соединения.

### Релаксация напряжений в термомеханических соединениях

На рис. 2 представлены петли механического гистерезиса в различных точках контакта термомеханического соединения. На основании анализа данных зависимостей и результатов исследований, проведенных ранее, можно сделать вывод, что процессы, происходящие в плоском контакте в условиях высоких нормальных давлений под действием сдвигающих сил, и процессы, происходящие в контакте термомеханических соединений под действием крутящих моментов, качественно идентичны. Это легко доказывается тем, что, выделив условно в цилиндрическом контакте малую площадку, представляющую в пределе плоскость, можно увидеть, что нормальной нагрузкой являются радиальные силы от напряжений упругого возврата втулки, а сдвигающими – силы от действия крутящего момента; т. е. получим схему, полностью эквивалентную плоскому контакту. Поэтому при теоретическом описании контакта в отмеченных соединениях достаточно рассмотреть условия деформирования плоского контакта. В силу малых перемещений относительно радиуса соединения геометрией стыка можно пренебречь.

Результаты исследования предельной силы сдвига от времени после сборки соединения представлены на рис. 3. На данных графиках показано, что окружная прочность соединения независимо от времени после сборки в пределах исследуемых 2500 часов почти постоянна. Разброс экспериментальных данных не превышал 10 %.

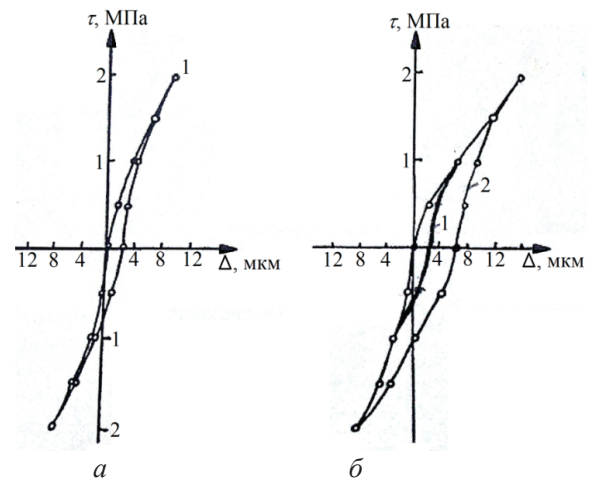


Рис. 2. Петли гистерезиса при деформации в окружном направлении: а) левый датчик,  $\tau=2$  МПа; б) правый датчик, петли: 1 –  $\tau_{\max}=1$  МПа, 2 –  $\tau_{\max}=2$  МПа

Поскольку предельные сдвигающие силы и рассеяние энергии являются очень чувствительными характеристиками контактного взаимодействия

тел, отражающими и напряжения, и прочность, и жесткость, и их кинетику, то можно с уверенностью сказать, что в рассмотренном интервале времени изменение напряженного состояния незначительно и не фиксируется в опытах. Фактически это изменение должно проявляться наиболее сильно в начальный после сборки период времени (часть этого изменения удалось зафиксировать – см. левую сторону графика). Однако методика измерения микроперемещений, требующая установки датчиков, настройки аппаратуры, установки в крутильную машину, позволяла провести измерения не ранее, чем через 40...60 мин после сборки. Далее, если предположить, что релаксация все же есть, то увеличение податливости контакта в результате релаксации напряжений должно компенсироваться уменьшением податливости из-за ползучести, увеличением фактической площади контакта и образованием адгезионных связей в зонах контакта.

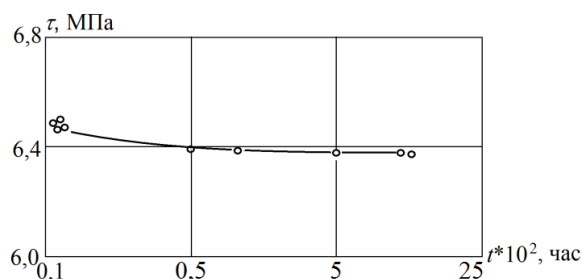


Рис. 3. Зависимость предельной силы сдвига от времени после сборки ТМС

Учитывая накопленный авторами опыт эксплуатации соединения в экспериментальных целях (при исследовании контактного взаимодействия пар-труба-втулка, микротрения в контакте, предварительного смещения и релаксации), можно рассмотреть несколько вариантов повышения надежности ТМС. При этом под надежностью понимаем обеспечение заданных герметичности, прочности в условиях действия статических и циклических нагрузок, а также долговечности в заданном временном интервале.

1. Повышение характеристик соединения за счет предварительного приложения крутящего момента, вызывающего микросмещение, близкое к предельному. Происходит упрочнение локальных контактных зон за счет наклепа материалов в приконтактных областях и усиления адгезионных связей в зонах физического контакта. Это положение подтверждается экспериментально и является одним из способов повышения жесткости соединений, включая и соединения с натягом.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Escobar J.C., Clifton R.J. On pressure-shear plate impact for studying the kinetics of stress-induced phase transformations // *Materials, Science and Engineering*. – 1993. – V. 170. – P. 125–142.
2. Комиссарова Н.П., Тертюк С.В., Хохлов В.А. Никелид титана – эффективный материал для элементов ТМС трубопрово-

2. Повышение характеристик за счет улучшения качества обработки рабочих поверхностей втулки и труб. Известно, что с уменьшением высоты микронеровностей увеличивается нормальная и тангенциальная жесткости контакта. При этом уменьшается объем контактного зазора, и соответственно возрастает объем материала, испытывающего предельные напряжения. Уменьшение высоты микронеровностей приводит к снижению интенсивности кинетических процессов – релаксации и ползучести.
3. Повышение характеристик ТМС можно достичь путем увеличения количества поясков на втулке. В первом приближении можно считать, что увеличение прочности соединения пропорционально числу рабочих поясков. В этом случае лимитирующим фактором может оказаться прочность трубы вне зоны соединения.
4. Немаловажным методом повышения надежности может служить выбор материала трубы по прочностным параметрам упрочняемости и пластическим свойствам, а также толщины стенок. Однако в этом случае зачастую выбор размеров и материала труб определяется конструктивными соображениями, экономичностью систем и условиями эксплуатации.
5. В случае заданных параметров труб для тонкостенных конструкций целесообразно использовать так называемые втулки жесткости, которые устанавливаются внутри трубопроводов и тем самым увеличивают жесткость соединения.

#### Заключение

В качестве критериев оценки релаксационных свойств приняты изменения окружной прочности соединений и их энергетической характеристики – рассеяние энергии в контакте втулка-трубопровод. Показано, что в измеряемом интервале времени (1...2500 ч) в начальный период времени (1...50 ч) наблюдается некоторое снижение прочности, затем прочность стабилизируется. Однако некоторые элементы релаксации в течение времени все же есть, но разупрочнение, вызываемое ею, должно компенсироваться уменьшением податливости контакта в результате ползучести, увеличения площади фактического контакта, образованием адгезионных связей в этих зонах, а также за счет упругого довосстановления материалов втулки и труб.

Разработано несколько рекомендаций, предназначенных для повышения надежности соединений, таких как герметичность и прочность.

- дов // Проблемы геологии и освоения недр: Тр. III Междунар. науч. симпозиума. – Томск, 1999. – С. 301–302.
3. Вестбрук Д.К. Интерметаллические соединения. – М.: Металлургия, 1970. – 438 с.
  4. Тихонов А.С., Герасимов А.П., Прохорова И.И. Применение эффекта памяти формы в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1981. – 81 с.



5. Термомеханические соединения элементами с памятью формы / Чернов Д.Б., Паперский А.П., Дасьянов У. и др. // *Авиационная промышленность*. – 1984. – № 6. – С. 63–68.
6. Хохлов В.А., Саруев А.Л., Закусов А.С., Судницкий А.А. Рациональные технологии создания термомеханических соединений // *Проблемы геологии и освоения недр: Тр. XII Международ. симпозиума*. – Томск, 2007. – С. 67–68.
7. Максак В.И., Хохлов В.А., Зитов А.И. Методика и оборудование для исследования свойств тяжело нагруженного контакта тел из материалов с ПФ // *Сб. исследований по строительной механике и строительным конструкциям*. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. акад., 1990. – С. 79–86.

Поступила 01.03.2013 г.

УДК 669:539.612

## РАССЕЯНИЕ ЭНЕРГИИ И АДГЕЗИОННЫЕ СВОЙСТВА КВАЗИГЕРЦЕВСКОГО КОНТАКТА МАТЕРИАЛОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

А.И. Потекаев\*, В.А. Хохлов, С.В. Галсанов, И.А. Шулепов\*\*

Томский государственный университет

\*Сибирский физико-технический институт им. акад. В.Д. Кузнецова, г. Томск

\*\*Томский политехнический университет

E-mail: potekaev@spti.tsu.ru

Установлена связь между рассеянием энергии в контакте материалов, определяемым параметрами петли гистерезиса, и адгезионным взаимодействием на площадках физического контакта при его циклическом сжатии. Отмечены особенности формирования петель в дискретном контакте тел из никелида титана.

### Ключевые слова:

Рассеяние энергии, адгезия, материалы с памятью формы.

### Key words:

Dissipation of energy, adhesion, shape memory materials.

### Введение

Приложение давления вызывает упруго-пластические деформации отдельных микронеровностей (МкН) и образование площадок физического контакта, размеры которых определяются сжимающими силами, геометрией контактирующих микрорельефов и материалами контактирующих тел. Естественно, что часть микронеровностей не деформируется, часть находится в упругом состоянии, а часть – в упруго-пластическом. Циклическое действие давления вызывает у ранее пластически деформированных микронеровностей упругие деформации. Считается, что параметры контакта (давления  $q$ , сближение  $\delta$  и размеры площадки, определяемые через радиус  $a$ ) малонагруженных микронеровностей определяются теорией Герца, остальные – теорией упруго-пластического контакта.

Исследование особенностей контактной области весьма актуально для трибологии, в прикладных задачах трибосопряжений, фреттинг износа, а также конструкционного демпфирования колебаний.

Контакт, описываемый теорией Герца, предполагает сжатие в пределах упругих деформаций двух однородных или разнородных микронеровностей, моделируемых телами, например сферами. При сближении  $\delta$  контактирующих тел происходит образование площадки контакта радиусом  $a$ , а распределение давлений на ней представляется па-

работой с  $q=q_{\max}$  в центре площадки и  $q=q_{\min}=0$  на ее периферии. Снятие давления возвращает тело в исходное состояние без остаточных деформаций, причем адгезионно-молекулярное взаимодействие в областях соприкосновения теория Герца не учитывает.

Реальный процесс деформирования и возврата при снятии нагрузки выглядит иначе. Удалось, используя высокоточную измерительную аппаратуру, отследить процесс формирования деформационной зависимости сближение–нагрузка и образование петель гистерезиса при циклическом сжатии контакта [1].

В настоящей работе проводится анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) в контакте единичных микронеровностей с целью установить связь между деформационными зависимостями сближение  $\delta$  – давление  $q$ , представленными в виде петель гистерезиса, и адгезией в дискретном циклически сжимаемом контакте.

### Материалы, образцы, приборы и оборудование

Исследовались следующие материалы: сталь Ст3, сталь 45, сталь 40Х, медь М1, алюминий, свинец, индий, оргстекло, сплав ТН-1К ( $Ti_{50}Ni_{47.5}Fe_{2.5}$ ).

Образцы имели осесимметричную форму с контактной площадью  $10^{-4} \text{ м}^2$ .

Все металлические образцы отжигались по стандартной методике кроме никелида титана, ко-

торый отжигался в вакууме при температуре 800 °С с выдержкой 1 час.

В качестве измерительных приборов использовались емкостные датчики и датчики на основе фотодиодов, а также оптико-механическая система установки для исследования контактных деформаций УИКД-1 [2]. Точность измерений составляла  $10^{-8}$  м.

Нагружение нормальными силами проводилось на установке УИКД-1 и на прессе Лафона-Амслера.

### Формирование петли гистерезиса

Рассмотрим стадии циклического деформирования на примере контакта двух поверхностей из стали 45 с дискретным контактом. При первом нагружении имеет место упруго-пластическая деформация микронеровностей (рис. 1, линия 1), подчиняющаяся параболическому закону. Нелинейность зависимости сближения  $\delta$  от нагрузки  $q$  связана, естественно, с ростом площади контакта при увеличении нагрузки и наблюдается как при первом, так и при повторных нагружениях. Если постепенно внешнюю нагрузку снижать до нуля, то при ее изменения значения  $\delta$  будут все больше приближаться к соответствующим значениям при той же нагрузке в процессе ее увеличения (рис. 1, линия 2). Таким образом, величины перемещений при нагружении и разгрузке различаются, причем разгрузочная ветвь располагается выше нагрузочной.

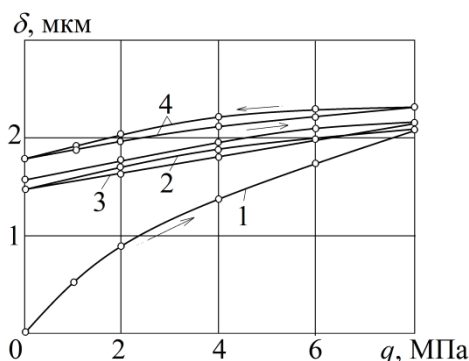


Рис. 1. Зависимость сближения от нагрузки при первом и повторном нагружениях. Сталь 45,  $Ra=12,5$  мкм

При повторном нагружении без изменения тангенциального расположения образцов новая кривая нагрузки не совпадает с разгрузочной ветвью, хотя и близко к ней располагается (рис. 1, линия 3). Амплитуда сближения в этом случае будет смещена по оси  $\delta$  в сторону больших ее значений. После шести–восьми циклов деформирования контакта нагрузочные и разгрузочные ветви имеют общие точки при  $q=0$  и  $q_1=q_n=0,8$  МПа, а промежуточные значения  $\delta$  не совпадают (рис. 1, линия 4). Если продолжать циклически нагружать контакт, форма и величина петли практически не изменится. Контакт приобретает упругие свойства. Необходимость неоднократного нагружения для получения замкнутой петли объясняется тем, что в процессе первого нагружения выбрана основная

часть пластической деформации, соответствующая данной нагрузке. При последующем сжатии микронеровности продолжают деформироваться упруго-пластически, но с меньшей пластической составляющей [3].

Число циклов, необходимое для получения петли, зависит от упруго-пластических свойств материала и равно 6–7 для малопластичных (стали) и до 10–12 для пластичных (свинец, индий) металлов, для никелида титана – 2–3 цикла.

Несовпадение линий упругого сближения под нагрузкой и упругого возврата после снятия, приводящее к рассеянию энергии, указывает на то, что в контакте возникают силы, препятствующие упругому восстановлению тел. Иными словами, в области контакта и в ее окрестности действуют атомно-молекулярные силы – силы адгезии, на разрыв связей которых затрачивается часть упругой энергии возврата.

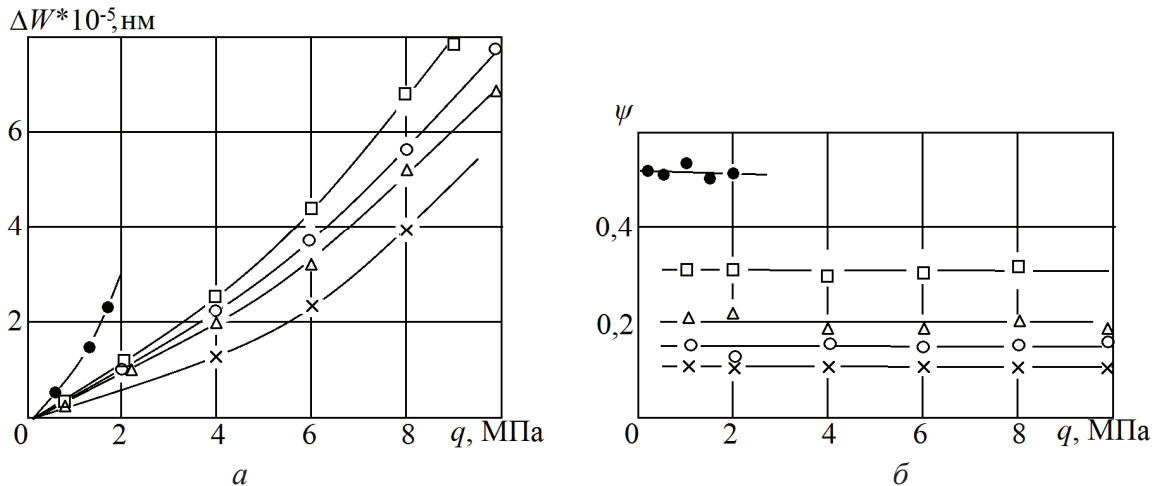
Таким образом, имеем последовательную цепочку явлений: деформация–упругий возврат, сопровождающиеся несовпадением нагрузочных и разгрузочных ветвей деформационных зависимостей, – рассеяние (потери) энергии на возврате в исходное состояние. В основе этих явлений лежит только адгезионное взаимодействие, так как другие факторы (такие, например, как внутреннее трение) экспериментально в явном виде не проявляются.

### Диссипативно-демпфирующие свойства циклически сжимаемого контакта

Рассмотрим вторую часть демонстрируемой последовательности – рассеяние энергии и адгезию с целью установления связи между ними.

Важными факторами процесса контактирования являются демпфирующие свойства контакта, находящие отражение в величине рассеянной за цикл деформации энергии  $\Delta W$  и коэффициенте поглощения,  $\psi = \Delta W / W$ , где  $W$  – полная энергия деформации. Эти свойства двояко отражаются на работоспособности контактных пар. С одной стороны, рассеяние энергии может рассматриваться как положительный эффект, улучшающий динамические свойства оборудования. С другой стороны, рассеяние энергии является следствием отрицательных явлений молекулярного взаимодействия тел, приводящих к усталостным повреждениям поверхностей в результате образования зон сцепления. Рассеяние энергии и особенно коэффициент поглощения могут быть показателями интенсивности адгезионного взаимодействия. В то же время коэффициент  $\psi$  качественно определяет среднюю ширину петли гистерезиса. Как показывают опыты, рассеяние энергии  $\Delta W$  и коэффициент поглощения  $\psi$  зависят от сжимающей нагрузки  $q$ , физико-механических свойств материалов контактных пар, микрогеометрии поверхностей, площадей контакта, являющихся функциями  $q$ .

Используя методы контактной механики, можно рассчитать значения  $\Delta W$ ,  $W$  и  $\psi$ .



**Рис. 2.** Зависимости рассеяния энергии (а) и коэффициента поглощения (б) от нагрузки для различных контактных пар: о – сталь 45,  $Ra=0,78 \text{ мкм}$ ;  $\Delta$  – медь,  $Ra=1,7 \text{ мкм}$ ;  $\times$  – алюминий,  $Ra=4,5 \text{ мкм}$ ;  $\square$  – свинец,  $Ra=6,2 \text{ мкм}$ ;  $\bullet$  – индий,  $Ra=6,0 \text{ мкм}$

Площадь петли гистерезиса, а следовательно,  $\Delta W$ ,  $\psi$  зависят от ряда геометрических факторов: ширины, определяющей степень несовпадения нагрузочных и разгрузочных линий, длины или величины деформации контакта и формы. Первый фактор зависит исключительно от среднего для всех взаимодействующих неровностей напряжения сцепления и их упругих констант. Второй и третий факторы определяются геометрией поверхностей, сжимаемыми и сдвигающими силами, физико-механическими свойствами поверхностных слоев и материала тел в целом.

Зависимости рассеяния энергии от величины внешней сжимающей нагрузки близки к параболическим (рис. 2, а) и качественно сравнительно мало различаются между собой для различных контактных пар. По мере увеличения сил рассеяние энергии возрастает. При средних и больших нагрузках зависимость  $\Delta W$  от амплитуды  $q_a$  близка к линейной. Подобный характер изменения  $\Delta W$  объясняется, во-первых, увеличением деформации контакта и, во-вторых, повышением прочности связи с ростом сжимаемых сил. Последний фактор приводит к возрастанию ширины петли, особенно существенному на средних участках деформационной зависимости ( $\delta$ - $q$ ).

Рассеяние энергии является мерой энергетических потерь в контакте. Как видно из графиков, оно весьма чувствительно ко многим параметрам, определяющим процесс контактирования. В этом отношении относительное рассеяние энергии представляет более инертную характеристику диссипативных свойств, но в то же время достаточно точно отражающую основные свойства взаимодействующих тел. Подобная малая чувствительность коэффициента связана с деформационными свойствами контакта. Изменения величины или характера деформации влияют на  $\Delta W$ . В то же время аналогичные изменения происходят с величиной потенциальной энергии упругой деформации  $W$ , кото-

рая обратно пропорциональна  $\psi$ . Следовательно, увеличение  $\Delta W$  при изменении деформации сопровождается возрастанием  $W$  и, как следствие, слабым изменением  $\psi$ . Изменение коэффициента поглощения на различных материалах показано на рис. 2, б. Несложно видеть, что амплитуда силы слабо влияет на  $\psi$ : в ряде случаев наблюдается некоторое увеличение  $\psi$  с ростом  $q_a$ , в других – слабое уменьшение. Иногда относительное рассеяние энергии снижается до некоторого значения  $q_a$ , а затем происходит возрастание. В целом из большого объема экспериментов можно сделать вывод о незначительном влиянии внешней силы на  $\psi$ , а для практического использования можно принять независимость  $\psi$  от  $q_a$ .

Так как в основу данных исследований положен адгезионный механизм контактного взаимодействия, то целесообразно полученные данные по рассеянию энергии сравнить с исследованиями по адгезии. Идентичность тех и других параметров будет подтверждением версий связи  $\Delta W$ ,  $\psi$  с адгезией. В связи с этим интересно отметить аналогию между экспериментами по исследованию  $\psi$  в нашей работе и опытами, проведенными по исследованию коэффициента адгезии на различных одноименных контактных парах [4, 5]. Было показано, что коэффициент адгезии  $K^*$ , равный отношению усилия отрыва одной поверхности от другой в случае адгезионного взаимодействия к усилию сжатия образцов, возрастает с уменьшением модуля упругости, твердости, температуры образцов, толщины пленок и т. п. В [5] приводится зависимость коэффициента адгезии от температуры плавления для различных контактных пар (рис. 3, пунктирная линия). Приводимый анализ данных по исследованию рассеяния энергии обнаруживает в одинаковых условиях (рис. 2, б; рис. 3) такое же изменение, как и в случае коэффициента адгезии. Например, как видно из рис. 3, зависимость коэффициента поглощения от температуры плавления



материала образцов идентична зависимости коэффициента адгезии.

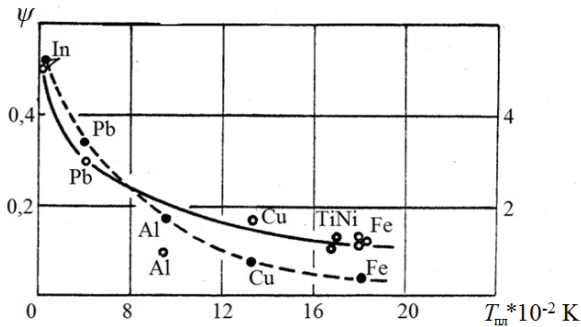


Рис. 3. Зависимость коэффициента адгезии  $K'$  (пунктирная линия) и коэффициента поглощения  $\psi$  от температуры плавления различных материалов

На рис. 2, б и 3 можно заметить, что точки для алюминия выпадают из указанной закономерности. Это обстоятельство, по нашему мнению, связано с прочностью окисной пленки на алюминии, которая в процессе деформации препятствует образованию контакта ювенильных участков. Кроме того, на пунктирной линии отсутствует  $K'$  для TiNi, т. к. в 60-е гг. этот материал был малоизвестен.

Теоретически связь между двумя этими процессами ( $\psi$  и  $K'$ ) можно представить следующим образом. Прежде всего, единая механика образования зон сцепления: образование физического контакта и физико-химическое взаимодействие между поверхностями. Далее коэффициент адгезии измерялся на последней стадии деформационного процесса, когда внешняя сжимающая нагрузка снята, и прикладывалось отрицательное (разрывающее) усилие. Промежуточные стадии разгрузки не учитывались. При этом большую роль играло упругое восстановление поверхностей, приводящее к разрушению участков сцепления [6]. Результатом явилось уменьшение  $K'$  вплоть до значений, близких к нулю (сила разрыва поверхностей была крайне мала) на твердых материалах. Однако на промежуточных стадиях разгрузки участки сцепления хотя и разрываются, но создают силу сопротивления (сцепления)  $P_{\text{сц}}$ , непрерывную на всей изменяющейся площади контакта в силу большого числа контактных пятен, которая фиксируется при изменении деформации в интервале  $q_0 - q_a$ .

В результате действия силы сопротивления  $P_{\text{сц}}$  возник параметр  $q_{\text{сц}}$  — напряжение сцепления, который качественно не отличается от коэффициента адгезии. Доказано [2], что величины  $q_{\text{сц}}$  как подсчитанные с помощью экспериментальных значений ( $P_{\text{сц}}$ ), так и через усилие отрыва  $P_{\text{отр}}$ , одинаковы.

Таким образом, имеется две стороны процесса адгезионного взаимодействия: существование двойной деформационной зависимости при нагружении и разгрузке. Как следствие, существуют энергетические потери при существовании определенной силы сопротивления при разделении тел. Если прикладывать к адгезионному контакту отрывающее усилие, то разрыв на малоэластич-

ных материалах будет происходить не по всей площади, а на отдельных участках, последовательно вытягивающихся и разрушающихся. При этом получают заниженные значения коэффициента адгезии, несмотря на значительную прочность связи в отдельных участках контакта. В связи с этим замерить какое-либо усилие отрыва для таких металлов как сталь, медь или алюминий не представлялось возможным. Однако оно существенно на образцах из индия, например, изменялось в пределах  $P_{\text{сц}} = 5 \dots 50 \text{ Н}$  в диапазоне сжимающих нагрузок  $P_{\text{сж}} = 50 \dots 200 \text{ Н}$ .

#### Адгезия в циклически сжимаемом контакте

Сформулируем условия возникновения адгезионных связей в герцевских упругом и упруго-пластическом (при малых глубинах внедрения) контактах. Контакт двух единичных микронеровностей будем моделировать контактом сферических сегментов. Один из них представляем как жесткое тело с конечным радиусом кривизны  $R_1$ , а другой —  $R_2 = \infty$ , т. е. фактически рассматривается классическая задача о внедрении сферического штампа в упруго-пластическое полупространство.

Существует две основные версии упругого контакта с адгезией применительно к сформулированной задаче: модель Дерягина–Мюллера–Топорова (ДМТ) и модель Джонсона–Кенделла–Робертса (ДКР) [7]. Первая из них предусматривает возникновение сил притяжения вне зоны контакта. Вторая модель базируется на представлении о бесконечно малом радиусе действия поверхностных сил, которые возникают в зонах физического контакта. С нашей точки зрения более корректной является модель ДКР, поскольку в модели ДМТ силы взаимодействия более слабые и не могут обеспечить должный уровень затрат энергии на разрыв связей.

В связи с возникновением адгезии при снятии нагрузки будет изменяться только  $\delta$ , а площадки контакта будет неизменной. Тогда в силу этого разгрузка будет происходить таким образом, как будто с полупространством взаимодействует своим основанием жесткий цилиндрический штамп (задача Буссинеско [7]). Поэтому результирующее давление будет равно сумме давлений по Герцу и Буссинеску.

На рис. 4 показано распределение давлений при их снижении на площадке контакта радиуса  $a$  по Герцу (линия 1), Буссинеску (2) и результирующее суммарное (3). Видно, что результирующее давление состоит из двух частей: сжимающие напряжения по площадке радиусом  $a'$  (верхняя часть кривой 3) и растягивающие в кольцевой области ( $a - a'$ ) на периферии (асимптотические ветви кривой 3). Таким образом, при нагружении напряжение определяется параболой Герца (1), а разгрузка сопровождается растягивающими напряжениями на периферии площадки контакта и разрывом адгезионных связей в этой области, что требует дополнительной энергии за счет упругого восстано-

вления и является причиной несовпадения нагрузочной и разгрузочной ветвей деформации (рис. 1).

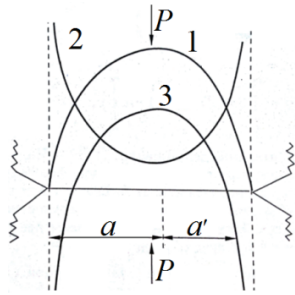


Рис. 4. Распределение нормальных давлений на адгезионном контакте

Используя модель ДКР, рассмотрим контакт однородных тел, в котором отсутствует проскальзывание. На рис. 5 показаны три стадии упругого контакта: начальное касание в точке (рис. 5, а), упругое внедрение (рис. 5, б) и стадия разгрузки (рис. 5, в). Видно, что при нагружении площадка контакта ограничивается линией  $ab$  (рис. 5, б), на которой возникают зоны сцепления, а при разгрузке – линией  $a'b'$  (рис. 5, в). На отрезках  $aa'$  и  $bb'$  произошел разрыв контакта и, следовательно, разрыв адгезионных связей. На линии  $a'b'$  эта связь сохранилась. В случае упруго-пластического контакта ряд повторных циклов нагружение–разгрузка приводят в конечном счете к упругой, но уже негерцевской деформации. Однако сохраняется та же последовательность в пределах упругих деформаций: образование и разрушение зон физического контакта на периферии контактной области и, соответственно, адгезионных связей. В контакте шероховатой и гладкой или двух шероховатых поверхностей существуют область стабильного сцепления и микрзоны, в которых адгезионный контакт нарушается при разгрузке.

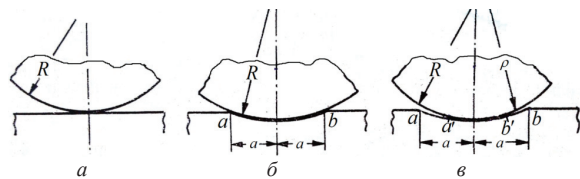


Рис. 5. Разгрузка шарового индентора: а) до нагружения; б) под нагрузкой; в) после разгрузки

Если контактирующие тела имеют различные упругие константы, то взаимное контактное давление вызывает различные тангенциальные смещения вдоль площадки контакта, в результате чего происходит проскальзывание на периферии, прилегающей к зоне стабильного сцепления контактной области (рис. 6). В этом случае периодические образования с проскальзыванием и разрыв адгезионных связей вызывают особый вид износа – фреттинг износа в кольцевой зоне на краях площадки контакта. Существование кольцевой зоны проскальзывания и фреттинг износа подтверждены в [3], и там же описано их образование в результате

фреттинга и усталостного разрушения. Глубина выработки в некоторых случаях превышает глубину лунки в центре площадки контакта.

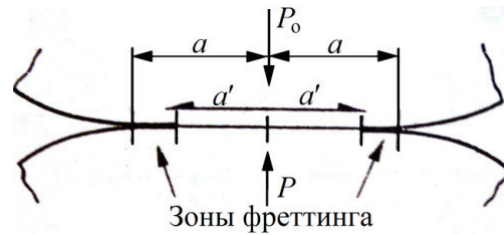


Рис. 6. Влияние профилей контактирующих тел на наличие зон проскальзывания и фреттинга

В осесимметричном контакте при увеличении нагрузки зона стабильного сцепления возрастает, охватывая зоны проскальзывания, в которых смещение прекращается.

**Формирование петель гистерезиса, рассеяние энергии и адгезия материалов с памятью формы на основе никелида титана**

Особенности поведения никелида титана в условиях дискретного контакта можно сформулировать следующим образом.

1. Качественного отличия в кривых нагружения не наблюдается; по характеру все они монотонно возрастающие  $\delta$  с увеличением нагрузки, как показано на рис. 7.
2. Количественные различия существенны в сравнении с вышеприведенными экспериментальными данными, а с теоретическими расхождение по никелиду титана составляет 100...120 %.
3. Обнаружено несущественное влияние микрогеометрии на кривые нагружения, тогда как для традиционных материалов с  $Ra=0,3$  и  $Ra=0,83$  мкм различие в  $\delta$  превышает 50 % (сталь).

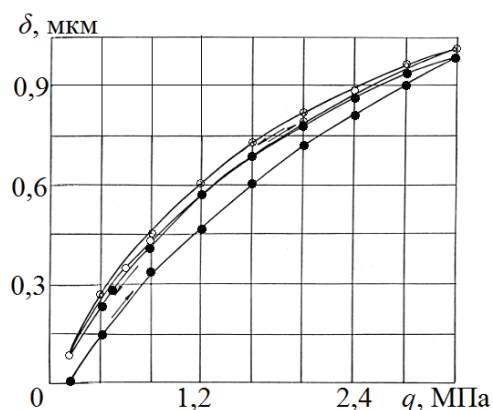


Рис. 7. Формирование гистерезиса при циклическом действии нормальной нагрузки. Контакт шероховатых поверхностей сплава ТН-1К,  $Ra=0,3$  мкм

4. При циклическом действии сжимающих сил пластическая деформация (в традиционных представлениях деформации) составляет малую долю от общей деформации, а замыкание

петли гистерезиса происходит уже на втором цикле нагружения. У прочих материалов оно происходит лишь на 6–8 цикле.

5. Демпфирующие свойства контакта тел из сплавов TiNi выше, чем у обычных материалов, что видно по ширине петель гистерезиса тех и других материалов.
6. Стабилизация параметров рассеяния энергии наступает уже на четвертом цикле нагружения.
7. Важно отметить, что влияние адгезионного взаимодействия на демпфирующие свойства контакта из никелида титана незначительно. Это подтверждено экспериментами с использованием тангенциальных срывов (условия трения скольжения), существенно влияющих на свойства контакта обычных материалов.

Отмеченные отличия контактного взаимодействия никелида титана можно объяснить лишь с позиций фазовых превращений под нагрузкой. При этом следует считать, что в отличие от контактирования пластических материалов, где микронеровности испытывают лишь деформационное упрочнение, в контакте из никелида титана на разных уровнях сближения материал может находиться в различных состояниях. Это могут быть

однофазное – исходное, двухфазное – мартенсит-аустенитное состояние, мартенситное (в областях прилегающих непосредственно к контакту) и высокопрочное, сложные с точки зрения механических свойств состояния.

#### Заключение

Установлена связь между рассеянием энергии в контакте материалов, определяемым параметрами петли гистерезиса, и адгезионным взаимодействием на площадках физического контакта при его циклическом сжатии. Показано, что в условиях сцепления (адгезии) на контакте отдельных микронеровностей распределение давлений при снятии сжимающей нагрузки отличается от традиционного использования теории упругого контакта Герца: на периферии контактной области возникают растягивающие напряжения, приводящие к несовпадению нагрузочных и разгрузочных деформационных зависимостей и образованию петель гистерезиса.

Отмечены особенности формирования петель в дискретном контакте тел из никелида титана, что объясняется сложным структурно-фазовым состоянием поверхностей, связанным с возникновением мартенсита деформации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хохлов В.А., Потекаев А.И., Галсанов С.В. Исследование поверхностей трения материалов с памятью формы на основе никелида титана // Технические науки: Труды I Междунар. научно-техн. конф. – Йошкар-Ола, 2012. – С. 83–85.
2. Хохлов В.А., Сикорский Д.Ю., Катапухина С.Л. Трение и изнашивание никелида титана // Современные проблемы машиностроения: Тр. II Междунар. конф. – Томск, 2004. – С. 102–104.
3. Карасик В.А. О накоплении пластических остаточных деформаций в условиях пульсирующего контактного нагружения // Машиноведение. – 1973. – № 3. – С. 88–92.
4. Keller D.V. Adhesion between solids metals // Wear. – 1963. – V. 6. – P. 64–68.
5. Sikoraky M.E. The adhesion of metals and the factors that influence it. Bell Telephone Laboratories // Wear. – 1964. – V. 7. – P. 74–78.
6. Bowden F.P., Rowe G.W. The adhesion of clean metals // Proceeding of the Royal Society. – 1956. – 233A. – № 1195. – P. 18–22.
7. Мышкин Н.К., Петроковец М.И. Трение, смазка и износ. Физические основы и технические приложения трибологии. – Изд-во: ФИЗМАЛИТ, 2007. – 368 с.

*Поступила 28.09.2012 г.*

УДК 538.911

## ТРОЙНЫЕ ДИАГРАММЫ НА ОСНОВЕ АЛЮМИНИДА ТИТАНА. АНАЛИЗ И ПОСТРОЕНИЕ

В.Д. Клопотов, А.И. Потекаев\*, А.А. Клопотов\*\*, В.В. Кулагина\*\*, Е.А. Кнестяпин\*\*, Т.Н. Маркова\*\*\*, М.М. Морозов\*\*\*

Томский политехнический университет

\*Сибирский физико-технический институт, г. Томск

\*\*Томский государственный архитектурно-строительный университет

\*\*\*Сибирский государственный индустриальный университет, г. Новокузнецк

На основе систематизации диаграмм состояния Ti-Al-Me (Me=V, Cr, Mn, Fe, Co, Ni, Cu) установлено, что происходит уменьшение размеров областей гомогенности твердого раствора на основе  $\beta$ -Ti в ряду легирующих элементов V→Cr→Mn→Fe→Co→Ni→Cu с ростом числа интерметаллических соединений внутри изотермического треугольника. Обнаружено, что практически все «внутренние» соединения обладают кубической или гексагональной сингонией.

**Ключевые слова:**

Интерметаллические соединения, тройные фазовые диаграммы, алюминиды титана, температурный фактор, размерный фактор.

**Key words:**

Intermetallic compounds, triple phase diagrams, titanium aluminides, thermal factor, size factor.

**Введение**

Проблема систематизации и сравнительного анализа тройных диаграмм состояний титановых сплавов является достаточно сложной. В классических работах И.И. Корнилова проводилась систематизация двойных и тройных диаграмм путем разделения их на десять групп в зависимости от способности элементов образовывать твердые растворы и химические соединения с титаном и от характера фазовых превращений в твердом состоянии [1]. Этот подход не получил дальнейшего развития ввиду громоздкости и чрезмерной схоластики. Причина кроется в том, что единственным классификационным признаком считался только геометрический, без достаточного учета особенностей химического взаимодействия компонентов рассматриваемой системы. Не учитывалась определяющая роль алюминия в подавляющем большинстве титановых сплавов промышленного значения. Известен, параллельно с приведенным, другой более широко известный рациональный подход, в котором используется принцип систематизации тройных диаграмм состояния титановых сплавов на основе двух фундаментальных положений. Первый основан на том, что основная масса титановых сплавов, имеющих широкое практическое применение, использует системы с твердыми растворами замещения. В то же время как системы, имеющие твердые растворы внедрения, как правило, не представляют практического интереса, а образующие их элементы обычно относят к категории вредных примесей. Второй основан на том, что алюминий является основным легирующим элементом для титана и оказывает влияние на свойства всех титановых сплавов. Очень важно, что алюминий является единственным широкодоступным элементом, стабилизирующим  $\alpha$ -Ti. Необходимо отметить, что в настоящее время происходит ревизия первого положения. Это связано с тем, что сейчас находят широкое практическое применение так называемые металлокерамики, к которым относятся МАХ-фазы, например Ti<sub>2</sub>AlN, Ti<sub>2</sub>AlC и др. [2].

Наряду с вышесказанным принято деление всех тройных диаграмм на две основные группы: твердые растворы замещения и твердые растворы внедрения (а также смешанные твердые растворы замещения-внедрения). Каждая из этих основных групп подразделяется на две подгруппы: сплавы, содержащие алюминий, и сплавы без алюминия.

Цель излагаемого исследования – провести систематизацию и анализ строения тройных диаграмм состояния систем Al-Ti-Me.

**Анализ тройных систем Al-Ti-X**

При создании сплавов на основе алюминидов титана необходимо упорядочение знаний и установление общих закономерностей о влиянии третьего элемента на структурно-фазовые состояния в тройных системах Al-Ti-X.

Анализ влияния алюминия на тройные системы с титаном позволяет выделить следующие важные особенности. *Во-первых*, основной тройной системой, на которой базируются почти все промышленные титановые сплавы, является система типа Ti-Al-Me. При этом Me – это элемент, который является стабилизатором  $\beta$ -Ti. Как правило, это элементы типа V, Cr, Mo и Mn. *Во-вторых*, алюминий ограничивает область существования твердого раствора  $\beta$ -Ti. *В-третьих*, легирование алюминием сплавов с титаном повышает точку фазового перехода  $\alpha \rightarrow \beta$ . *В-четвертых*, алюминий хорошо растворим в  $\beta$ -Ti, что и приводит к повышению стабильности этой кристаллической модификации титана. *В-пятых*, алюминий увеличивает растворимость изоморфных и эвтектоидообразующих  $\beta$ -стабилизаторов в  $\beta$ -Ti [1].

На рис. 1 и 2 приведены изотермические сечения тройных систем Ti-Al-Me (Me=V, Cr, Mn, Fe, Co, Ni) при 1000 °C и Ti-Al-Cu при 800 °C. Анализ этих систем показывает, что происходит уменьшение размеров областей гомогенности твердого раствора на основе  $\beta$ -Ti в ряду легирующих элементов V→Cr→Mn→Fe→Co→Ni→Cu. При этом наблюдается рост числа интерметаллических соединений внутри изотермических треугольников, кото-

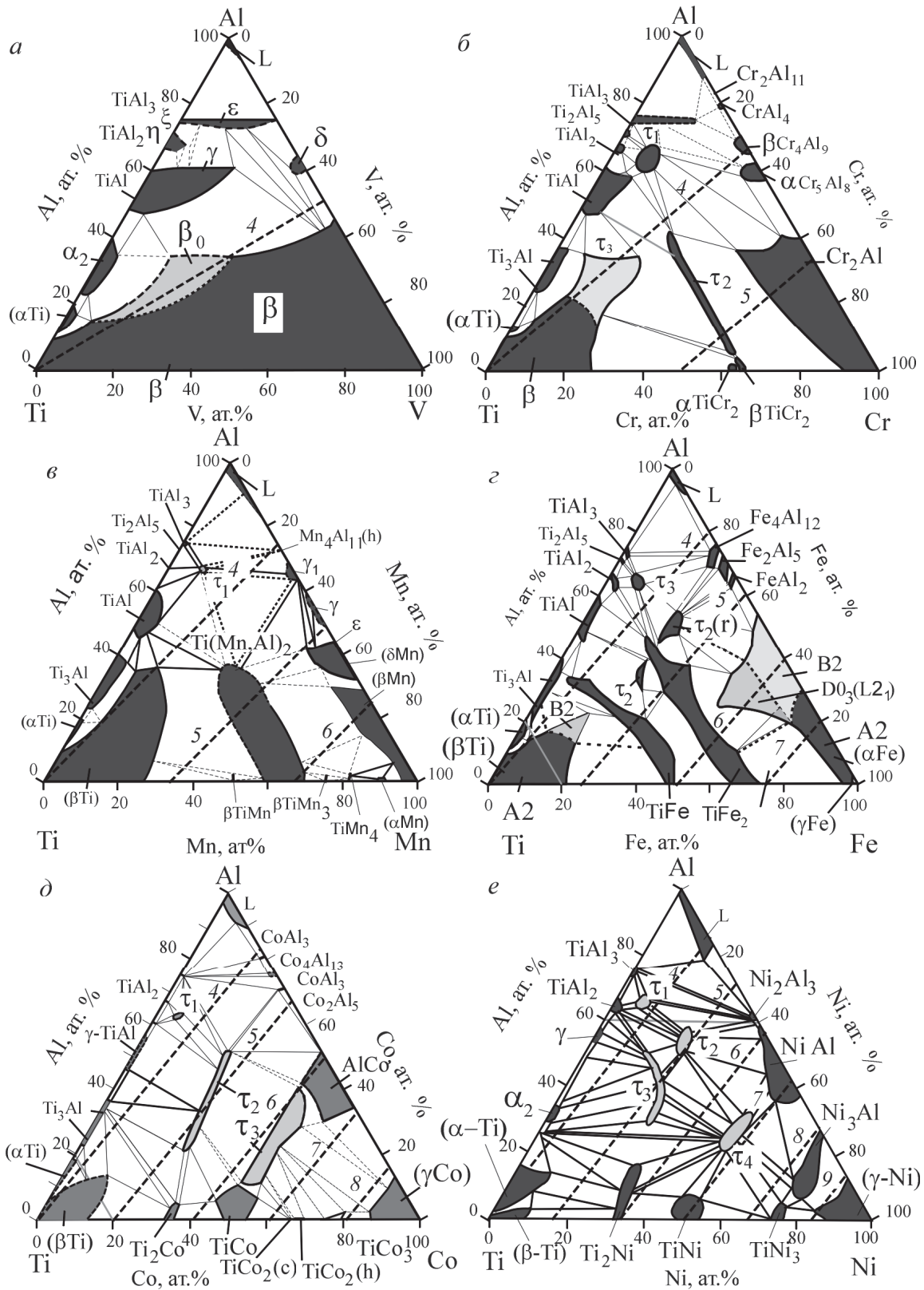


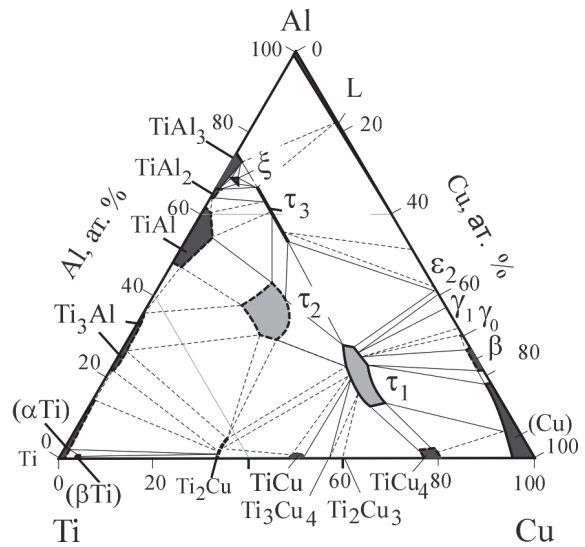
Рис. 1. Изотермические сечения при температурах от 900 до 1000 °С тройных фазовых диаграмм систем Ti-Al-Me по данным [3–8, 10, 12, 15–21, 24–26, 27, 28]. Штриховыми линиями и цифрами над ними показаны изолинии и значения средних групповых чисел



рые не соприкасаются со сторонами треугольника. Очень важно отметить, что практически все «внутренние» соединения обладают кубической или гексагональной сингонией (таблица).

**Таблица.** Составы и кристаллические структуры некоторых тройных интерметаллических соединений в системах Ti-Al-Me

Фаза	Состав	По Пир-сону	Пространств. гр.	Тип структуры	Прототип	Источник
Система Ti-Al-Cr						
$\tau_1$	$(Ti_{1-x}Cr_x)Al_{3-y}$	cP4	Pm $\bar{3}m$	L <sub>12</sub>	AuCu <sub>3</sub>	[3]
$\tau_2$	Ti(Cr, Al) <sub>2</sub>	hP12	P6 <sub>3</sub> /mmc	C14	MgZn <sub>2</sub>	[4]
$\tau_3$	Ti <sub>56,9</sub> Cr <sub>7,6</sub> Al <sub>35,5</sub>	cP2	Pm $\bar{3}m$	B2	CsCl	[5]
Система Ti-Al-Mn						
$\tau_1$	Ti <sub>25</sub> Mn <sub>9</sub> Al <sub>66</sub>	cP4	Pm $\bar{3}m$	L <sub>12</sub>	AuCu <sub>3</sub>	[6]
Система Ti-Al-Fe						
$\tau_1$	TiFe <sub>2</sub> Al	cF16	Fm $\bar{3}m$		Cu <sub>2</sub> AlMn	[7]
$\tau_2$	Ti <sub>50,9</sub> Fe <sub>24,5</sub> Al <sub>24,6</sub>	cF	F $\bar{4}3m$	-		[8]
	Ti <sub>43</sub> Fe <sub>24</sub> Al <sub>33</sub>					[9]
$\tau_2(r)$	Ti <sub>30,8</sub> Fe <sub>21,4</sub> Al <sub>47,8</sub>	cF116	Fm $\bar{3}m$	-	Th <sub>6</sub> Mn <sub>23</sub>	[8]
	Ti <sub>38,48</sub> Fe <sub>23</sub> Al <sub>38,6</sub>					[10]
	Ti <sub>42,2</sub> Fe <sub>23,7</sub> Al <sub>34,7</sub>					[10]
	Ti <sub>20,3</sub> Fe <sub>23,3</sub> Al <sub>56</sub>					[11]
	Ti <sub>42</sub> Fe <sub>23,3</sub> Al <sub>34,7</sub>					[11]
	Ti <sub>22</sub> Fe <sub>23</sub> Al <sub>55</sub>					[9, 10]
$\tau_3$	Ti <sub>8</sub> Fe <sub>3</sub> Al <sub>22</sub>	cP4	Pm $\bar{3}m$	L <sub>12</sub>	AuCu <sub>3</sub>	[12]
	Ti <sub>22</sub> Fe <sub>9</sub> Al <sub>66</sub>					[13]
	Ti <sub>27,7</sub> Fe <sub>9,7</sub> Al <sub>62,6</sub>					[14]
	Ti <sub>28,6</sub> Fe <sub>7,5</sub> Al <sub>63,9</sub>					[8]
	Ti <sub>25,6</sub> Fe <sub>7,6</sub> Al <sub>66,6</sub>					[8]
Ti <sub>28</sub> Fe <sub>8</sub> Al <sub>64</sub>	[15]					
Ti-Al-Co						
$\tau_1$	Ti <sub>8</sub> Co <sub>3</sub> Al <sub>22</sub>	cF4	Fm $\bar{3}m$	L <sub>12</sub>	Cu <sub>3</sub> Au	[16]
$\tau_2$	Ti <sub>1+x</sub> CoAl <sub>2-x</sub>	cF116		Th <sub>6</sub> Mn <sub>23</sub>		[17]
$\tau_3$	TiCo <sub>2</sub> Al	cF16		BiF <sub>3</sub>		[18]
Ti-Al-Ni						
$\tau_1$	Ti(Ali-xNix) <sub>3</sub> x=0,12	cP4	Pm $\bar{3}m$	L <sub>12</sub>	Cu <sub>3</sub> Al	[19]
$\tau_2$	Ni <sub>1</sub> Ti <sub>1</sub> Al <sub>2</sub>	cF116	Fm $\bar{3}m$	$\mu$ -фаза	Mn <sub>23</sub> Th <sub>6</sub>	[20]
$\tau_3$	Ni <sub>1-x</sub> Ti <sub>1+y</sub> Al <sub>1+x-y</sub>	hP12	P6 <sub>3</sub> /mmc	C14 ( $\lambda$ -фаза)	MgZn <sub>2</sub>	[20]
$\tau_4$	Ni <sub>2</sub> TiAl	cF16	Fm $\bar{3}m$	фаза Гейслера	MnCu <sub>2</sub> Al	[20]
				L <sub>21</sub>	BiF <sub>3</sub>	
$\tau_2$	Al <sub>2</sub> NiTi	cF16	Fm $\bar{3}m$	-	Mn <sub>23</sub> Th <sub>6</sub>	[20]
$\tau_3$	AlNiTi	hP12	P6 <sub>3</sub> /mmc	-	MgZn <sub>2</sub>	[20]
$\tau_4$	AlNi <sub>2</sub> Ti	cF16	Fm $\bar{3}m$	-	BiF <sub>3</sub>	[20]
$\tau_5$	Al <sub>65</sub> Ni <sub>20</sub> Ti <sub>15</sub>			-		[21]
Ti-Al-Mn						
$\tau_1$	Ti <sub>25</sub> Mn <sub>8</sub> Al <sub>67</sub>	cP4		-		[22]
	Ti <sub>23</sub> Mn <sub>11</sub> Al <sub>66</sub>	cP4	Pm $\bar{3}m$	L <sub>12</sub>	AuCu <sub>3</sub>	[23]
Ti-Al-Cu						
$\tau_1$	TiCu <sub>2</sub> Al	cF16	Fm $\bar{3}m$			
-	MnCu <sub>2</sub> Al	[24]				
$\tau_2$	TiCuAl	hP12	P6 <sub>3</sub> /mmc	-	MgZn <sub>2</sub>	[25]
$\tau_3$	Ti <sub>2</sub> CuAl <sub>5</sub>	cP4	Pm $\bar{3}m$	L <sub>12</sub>	Cu <sub>3</sub> Au	[25]



**Рис. 2.** Изотермическое сечение при температуре 800 °C тройной фазовой диаграммы системы Ti-Al-Cu по данным [24, 25]

**Электронный и температурный факторы**

На приведенных диаграммах изотермического сечения прослеживается эволюция заполнения их тройными фазами с ростом средних групповых чисел (СГЧ). Среднегрупповым числом элементов будем считать число электронов за пределами оболочки соответствующего инертного газа, т. е. для нашего случая число s, d и p-электронов. Видно, чем больше СГЧ, тем разнообразнее как наличие тройных фаз, так и морфология их расположения на изотермических сечениях. На тройных диаграммах рост плотности изолиний с одинаковыми значениями СГЧ отражает увеличение различия электронной структуры образующих сплав элементов.

На изотермических сечениях тройных диаграмм с третьим элементом из V периода таблицы Д.И. Менделеева систем Ti-Al-Me (Me=V, Nb, Ta) видно, что практически не образуется тройных соединений внутри изотермического треугольника (рис. 1 и 3). Все тройные фазы образуются на основе бинарных соединений из систем Al-Ti, Al-V и Al-Nb. При этом область гомогенности соединений на основе твердого раствора (b?Ti) заметно «сжижается» в ряду третьих элементов V→Nb→Ta, входящих в рассматриваемые системы. Необходимо отметить, что все третьи элементы V, Nb и Ta в системах Ti-Al-Me имеют одинаковое значение СГЧ, равное 5, а различие СГЧ между всеми тремя образующими сплав элементами минимальное (СГЧ<sub>Al</sub>=3, СГЧ<sub>Ti</sub>=4 и СГЧ<sub>Me</sub>=5).

Такое изменение изотермических сечений в ряду систем Ti-Al-Me (Me=V, Nb, Ta) позволяет утверждать, что необходимо учитывать другие факторы (размерные, температурные, направленные межзатомные связи и т. п.), которые в кристаллических решетках соединений или твердых растворов ха-

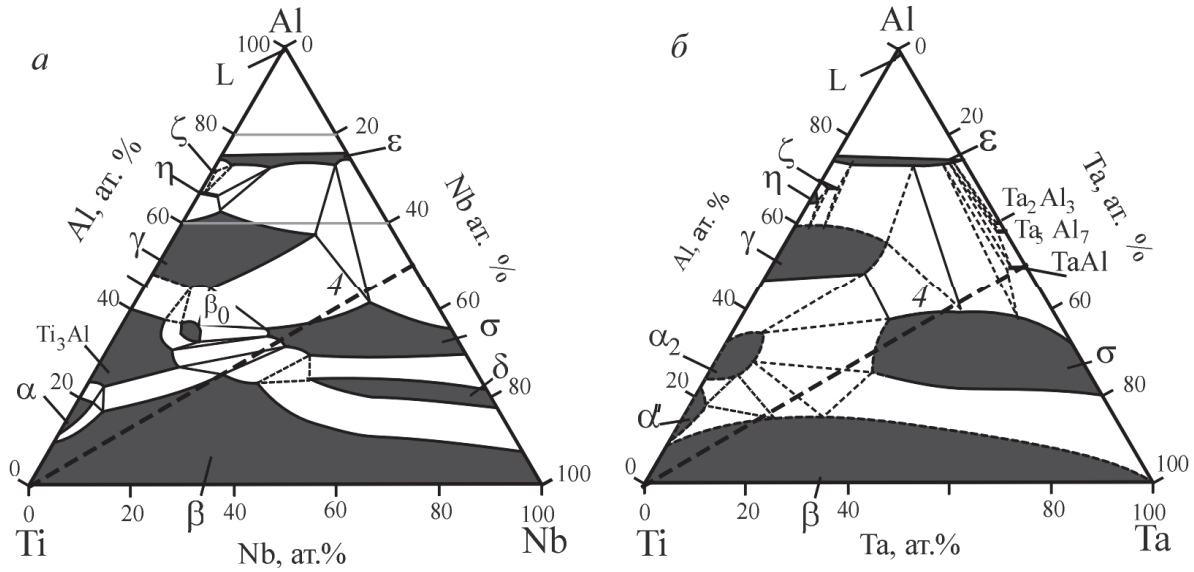


Рис. 3. Изотермические сечения при температуре от 1000 °С тройных фазовых диаграмм систем Ti-Al-Nb (а) и Ti-Al-Ta (б) по данным из работ [29, 30]. Штриховыми линиями и цифрами показаны изолинии и значения средних групповых чисел

рактически характеризуют величину и тип межатомной связи и проявляются в образовании интерметаллических соединений различного стехиометрического состава. Так, в [31] для анализа двух- и трехкомпонентных диаграмм состояния используют температурный фактор, который для рассматриваемых тройных диаграмм состояний Ti-Al-Me используем в виде:

$$n_T = 1 - \frac{T_{Al}^{пл}}{T_{Me}^{пл}},$$

где  $T_{Al}^{пл}$  и  $T_{Me}^{пл}$  – температуры плавления Al и третьего элемента.

На рис. 4 приведены диаграммы распределения температурного фактора в тройных системах Ti-Al-Me (а), размеров атомов (б) в зависимости от положения в Периодической системе (I–X). Видно, что температурный фактор в ряду V→Nb→Ta тройных диаграмм Ti-Al-Me отличается значительно. Это коррелирует с наличием и изменением размеров и формы областей гомогенности соединений в этих тройных системах. Следует отметить, что размеры атомов между образующими сплав элементами отличаются незначительно (рис. 4, б).

**Выводы**

1. Происходит уменьшение размеров областей гомогенности твердого раствора на основе β-Ti в ряду легирующих элементов V→Cr→Mn→Fe→Co→Ni→Cu. При этом наблюдается рост числа интерметаллических соединений внутри изотермических треугольников.
2. С ростом средних групповых чисел (число s, d и p-электронов) становится разнообразнее как

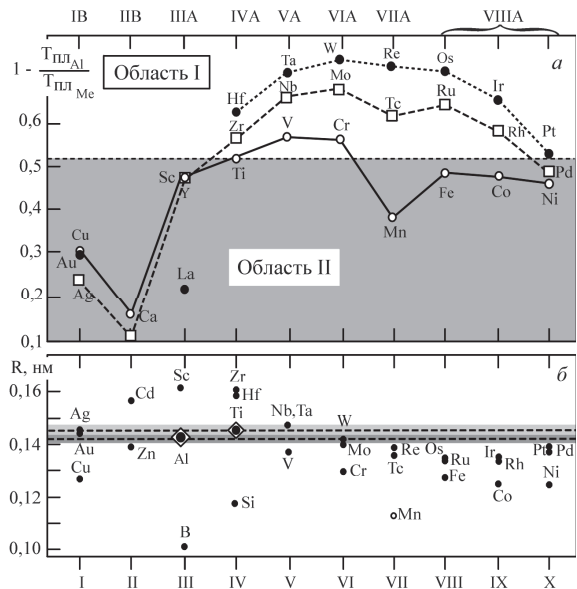


Рис. 4. Диаграммы распределения температурного фактора в тройных системах Ti-Al-Me (а), размеров атомов (б) в зависимости от положения в Периодической системе (I–X). В область I входят элементы, у которых температура плавления выше температуры плавления Ti, а в область II – металлы с  $T_{пл}$  ниже температуры плавления Ti

- наличие тройных фаз, так и морфология их расположения на изотермических сечениях.
3. Температурный фактор в ряду V→Nb→Ta тройных диаграмм Ti-Al-Me меняется значительно. Это коррелирует с различием в размерах и формах областей гомогенности в соединениях таких тройных систем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Корнилов И.И., Будберг П.Б. Химическое взаимодействие титана с другими элементами // Успехи химии. – 1955. – Т. 25. – Вып. 1. – С. 1474–1501.
- Sum Z.M. Progress in research and development on MAX phases: a family of layered ternary compounds // International mater. Rev. – 2011. – V. 56. – № 33. – P. 143–166.
- Nic J.P., Klansky J.L., Mikkola D.E. Structure/property observations for Al-Ti-Cr alloys near the cubic (Al,Cr)<sub>3</sub> Ti phase // Mater. Sci. Eng. A. – 1992. – V. 152. – № 1/2. – P. 132–137.
- Jewett T., Dahm M. Stability of the Ti(Cr,Al)<sub>2</sub> phase // Zeitschrift für Metallkunde. – 1996. – V. 87. – № 4. – P. 254–261.
- Jewett T.J., Ahrens B., Dahms M. Stability of TiAl in the Ti-Al-Cr system // Mater. Sci. Eng. A. – 1997. – V. 225. – P. 29–37.
- Nic J.P., Zhang S., Mikkola D.E. Alloying of Al<sub>2</sub>Ti with Mn and Cr to form cubic L1<sub>2</sub> phases // Mater. Res. Soc. Symp. Proc.: High-Temp. Ordered intermetallic alloys IV. – 1991. – V. 213. – P. 697–702.
- Buschow K.H.J., van Engen P.G., et al. Magneto-optical properties of metallic ferromagnetic materials // J. Magn. Mater. – 1983. – V. 38. – P. 1–22.
- Palm M., Inden G., Thomas N. The Fe-Al-Ti system // J. Phase equilib. – 1995. – V. 6. – № 3. – P. 209–222.
- Goerz A., Palm M., Sauthoff G. Constitution-based alloy selection for the screening of intermetallic Ti-Fe-Al alloys // Zeitschrift für Metallkunde. – 1999. – Bd. 90. – № 1. – S. 64–70.
- Grytsiv A., Ding J.J., Rogl P., Weill F., Chevalier B., Etourneau J., Andre G., Bouree F., Noel H., Hundegger P., Wiesinger G. // Crystal chemistry of the G-phases in the systems Ti-(Fe, Co, Ni)-Al with a novel filled variant of the Th<sub>6</sub>Mn<sub>23</sub>-type // Intermetallics. – 2003. – V. 11. – P. 351–359.
- Kogachi M., Minamigawa S., Kakahigashi K. Long Range Order in L1<sub>2</sub> ternary intermetallic compound Al<sub>3</sub>Ti-X (X=Fe, Ni, Cu, Ag) // Scripta metall. mater. – 1992. – V. 27. – P. 407–412.
- Nic J.P., Zhang S., Mikkola D.E. Observations on the systematic alloying of Al<sub>3</sub>Ti with fourth period elements to yield cubic phases // Scripta Metall. Mater. – 1990. – V. 24. – P. 1099–1104.
- Winnicka M.B., Varin R.A. Microstructure and ordering of L1<sub>2</sub> titanium trialuminides // Metall. Trans. A. – 1992. – V. 23A. – № 11. – P. 2963–2972.
- Nic J.P., Zhang S., Mikkola D.E. Alloying of Al<sub>3</sub>Ti with Mn and Cr to form cubic L1<sub>2</sub> phases // Mater. Res. Soc. Symp. Proc.: High-Temp. Ordered intermetallic alloys IV. – Cambridge: Cambridge University Press, 1991. – V. 213. – P. 697–702.
- Mabuchi H., Nagayama H., Tsuda H., Matsui T., Mori K. Formation of ternary L1<sub>2</sub> intermetallic compound and phase relation in the Al-Ti-Fe system // Mater. Trans. JIM. – 2000. – V. 41. – № 6. – P. 733–738.
- Диаграммы состояния металлических систем / под ред. Н.В. Агеева. – М.: ВИНТИ, 1966. – Вып. 12. – 352 с.
- Markiv V.Ya., Teslyuk M.Y. Crystal structure of ternary compounds TiCo<sub>2</sub>Al, MgNi<sub>2</sub>Zn, TiNi<sub>2</sub>Zn and TiCu<sub>2</sub>Zn // Dop. Akad. Nauk Ukr. RSR. – 1962. – № 12. – P. 1607–1609.
- Grytsiv A., Chen X-Q., Witusiewicz V.T., Rogl P., Podloucky R., Pomjakushim V., et al. Atom order and thermodynamic properties of the ternary Laves phase Ti (Ti<sub>γ</sub>Ni<sub>χ</sub>Al<sub>1-χ-γ</sub>)<sub>2</sub> // Zeitschrift für Kristallographie. – 2006. – V. 221. – P. 334–348.
- Schuster J.C. Critical data evaluation of the aluminium-nickel-titanium system // Intermetallics. – 2006. – V. 14. – P. 1304–1311.
- Schuster J.C., Pan Z., Liu S., Weitzer F., Du Y. On the constitution of the ternary system Al-Ni-Ti. Intermetallics. – 2007. – V. 15. – P. 1257–1267.
- Milman Yu.V., Miracle D.B., Chugunova S.I., et al. Mechanical behaviour of Al<sub>3</sub>Ti intermetallic and L1<sub>2</sub> phases on its basis // Intermetallics. – 2001. – V. 9. – P. 839–845.
- Nakayama Y., Mabuchi H. Formation of Ternary L1<sub>2</sub> compounds in Al<sub>3</sub>Ti-base alloys // Intermetallics. – 1993. – V. 1. – P. 41–48.
- Raman A., Schubert K. On the crystal structure of some alloy phases related to TiAl<sub>3</sub>, III, investigations in several T-Ni-Al and T-Cu-Al alloy systems // Zeitschrift für Metallkunde. – 1965. – V. 56. – P. 99–104.
- Крыпачев П.И., Маркив В.Я., Троян А.А. Crystal structures of the ternary compounds TiCuAl and TiNiAl // Dop. Akad. Nauk Ukr. RSR, A, Fiz.-Mat. Tekh. Nauki. – 1964. – № 7. – P. 922–924.
- Markiv V.Ya., Kripyakevich P.I. Compounds of the type R(X',X'')<sub>2</sub> in the systems with R=Ti, Zr, Hf; X'=Fe, Co, Ni, Cu and X''=Al, Ga and their crystals structures // Sov. Phys. Crystallogr. – 1967. – V. 11. – P. 733–738.
- Chen Z., Jones I.P., Small C.J. Laves phase in Ti-42Al-10Mn alloy // Scr. Mater. – 1996. – V. 35. – № 1. – P. 23–27.
- Kainuma R., Fujita Y., Mitsui H., Ishida K. Phase equilibria among α (hcp), β (bcc) and γ-L1<sub>0</sub> phases in Ti-Al base ternary alloys // Intermetallics. – 2000. – V. 8. – P. 855–867.
- Hellwig A., Palm M., Inden G. Phase equilibria in the Al-Nb-Ti system at high temperatures // Intermetallics. – 1998. – V. 6. – P. 79–94.
- Raman A. X-Ray Studies of Some T-T'-Al-Systems // Zeitschrift für Metallkunde. – 1966. – V. 57. – P. 535–540.
- Воздвиженский В.М. Прогноз двойных диаграмм состояния. – М.: Металлургия, 1975. – 224 с.
- Козлов Э.В., Клопотов А.А., Федорищева М.В., Никоненко Е.Л., Клопотов В.Д. Особенности строения тройных диаграмм состояния систем на основе Ni-Al // Известия РАН. Сер. Физ. – 2011. – Т. 75. – № 8. – С. 1161–1164.

Поступила 26.03.2013 г.



## КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ ПРОДУКТЫ СГОРАНИЯ В ВОЗДУХЕ НАНОПОРОШКА АЛЮМИНИЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А.П. Ильин, А.В. Мостовщиков

Томский политехнический университет  
E-mail: pasembellum@mail.ru

*Исследована микроструктура микрокристаллических продуктов сгорания нанопорошка алюминия в воздухе и влияние на их структуру постоянного магнитного поля. Установлено, что продуктами сгорания свободно насыпанного нанопорошка алюминия являются двухуровневые нитевидные кристаллы. В условиях горения в воздухе в однородном магнитном поле формируются монокристаллы гексагональной формы, а в случае неоднородного магнитного поля образуются ограненные кристаллы вытянутой формы микронных размеров. Формирование продуктов вытянутой структуры объясняется массопереносом продуктов горения в направлении тепловых потоков. Упорядоченные шестигранные кристаллические структуры, вероятно, образуются за счёт перегрева продуктов окисления при действии магнитного поля и повышения подвижности их структурных единиц в тепловой волне кристаллизации. Формирование ограненных кристаллов, согласно электронной микроскопии, возможно при оптимальных размерах частиц продуктов сгорания.*

### Ключевые слова:

*Нанопорошок алюминия, нитрид алюминия, монокристаллы, магнитное поле, массоперенос, сжигание, окисление, переход, перенос фазы.*

### Key words:

*Aluminum nanopowder, aluminum nitride, monocrystals, magnetic field, mass transfer, combustion, oxidation, pass, phase transition.*

### Введение

Нанопорошок алюминия представляет собой совокупность сферических частиц, распределение которых близко к нормально-логарифмическому с максимумом 120 нм. В пассивированном малыми добавками воздуха нанопорошке алюминия содержание металлического алюминия составляет 88 мас. %, содержание оксидов и гидрооксидов максимально достигает 6 мас. %, общее содержание ад- и абсорбированных газов составляет около 6 мас. %. При этом содержание металлических примесей (железо, марганец, медь) не превышает 0,3 мас. %. Насыпная плотность исследуемого образца нанопорошка алюминия равна 0,2 г/см<sup>3</sup>. Горение нанопорошка алюминия легко инициируется с помощью нагретой электрическим током нихромовой спирали, и его горение протекает в две стадии [1]. В процессе горения на второй стадии происходит формирование кристаллической фазы нитрида алюминия (более 30 мас. %) [2]. Не пассивированный нанопорошок алюминия, полученный с помощью электрического взрыва проводников в аргоне [3], пирофорен и при нагревании взаимодействует практически со всеми известными веществами.

Согласно существующим представлениям [4], формирование самостоятельной кристаллической фазы нитрида алюминия предполагает взаимодействие алюминия только с азотом, в определенном объёме в течение короткого времени в присутствии кислорода. Стабилизация нитрида может быть связана с кинетическим торможением диффузии кислорода через слой нитрида: термодинамически разрешённого процесса окисления нитрида алюминия кислородом воздуха. Ранее выполненные термодинамические расчеты показали [5], что нитрид алюминия может образовываться в качестве

промежуточного продукта при горении порошкообразного алюминия, но он должен доокисляться кислородом воздуха и не сохраняться в конечных продуктах [6].

Процесс формирования нитрида алюминия при горении в воздухе является неравновесным и протекает в условиях теплового взрыва, поэтому интерес представляло изучить фазообразование продуктов сгорания под влиянием внешнего воздействия.

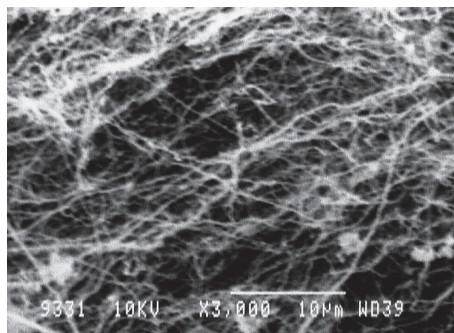
Целью работы являлось экспериментальное обоснование образования кристаллических фаз нитрида алюминия различной микрокристаллической структуры в условиях теплового взрыва без внешнего воздействия и в постоянном магнитном поле.

### Формирование нитевидных кристаллов AlN

Процесс горения свободно насыпанного нанопорошка алюминия в виде конусообразного образца протекал в две стадии в режиме теплового взрыва. В этих условиях нитрид алюминия образовывался в виде нитевидных кристаллов (вискеров), причем процесс горения на второй высокотемпературной стадии сопровождался колебательными процессами, что отражалось на понижении-повышении скорости прироста массы, и характеризовался соответствующими температурными колебаниями ( $\pm 200$  °C) [7]. Благодаря температурным колебаниям в работе [8] были получены двухуровневые нитевидные кристаллы.

С увеличением массы навески температура сгорания нанопорошка алюминия возрастала. Тем не менее, при сжигании достаточно большого количества образцов нанопорошка алюминия (даже при массе образца 15 г) в воздухе не было обнаружено ограненных продуктов сгорания, основную их до-

лю составляли тонкие нитевидные кристаллы, состоявшие из нанокристаллитов толщиной менее 100 нм и длиной до 30 мкм (рис. 1, масса образца 5 г, коническая форма сжигаемого образца).

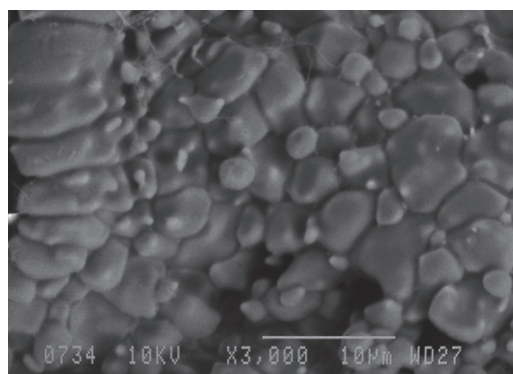


**Рис. 1.** Микрофотография продуктов сгорания нанопорошка алюминия в воздухе без внешних воздействий

Таким образом, повышенная температура при горении не является фактором, обеспечивающим образование монокристаллов нитрида алюминия. Согласно микрофотографии (рис. 1), нитевидные кристаллы ориентированы в направлении тепловых потоков и массопереноса при горении.

#### **Формирование продуктов при горении нанопорошка алюминия в однородном магнитном поле**

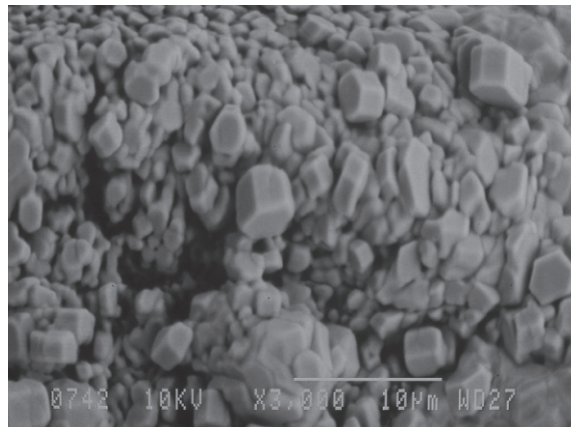
Для исследования влияния температуры на формирование продуктов сгорания нанопорошок алюминия помещали в алундовые тигли объемом 20 см<sup>3</sup>. Это способствовало формированию направления теплоотвода от поверхности горящего образца преимущественно в вертикальном направлении – вдоль восходящего конвективного потока воздуха, нагретого поверхностью горящего образца. В то же время горение в тигле способствовало сохранению тепла внутри тигля. При сжигании нанопорошка алюминия в этих условиях (рис. 2) конечные продукты представляли собой неограниченные кристаллиты с характерными размерами от 1 до 5–8 мкм.



**Рис. 2.** Микрофотография продуктов сгорания нанопорошка алюминия в алундовом тигле без воздействия магнитного поля

При этом кристаллиты разделены поверхностью раздела, и лишь у небольшого количества имелись признаки начала формирования кристал-

лической структуры. При горении нанопорошка алюминия в однородном постоянном магнитном поле (напряженностью 1500 эрстед) в открытом алундовом тигле в условиях теплового взрыва в атмосфере воздуха были синтезированы монокристаллы нитрида алюминия гексагонального габитуса (рис. 3) [9].



**Рис. 3.** Микрофотография продуктов сгорания нанопорошка алюминия в алундовом тигле при воздействии однородного магнитного поля

Согласно полученным экспериментальным данным, шестигранные монокристаллы хорошо окристаллизованы и имеют характерный размер 2–4 мкм. В то же время на микрофотографии отсутствуют остроконечные кристаллы, размер которых составляет менее 1 мкм. Для больших агломератов также не наблюдается формирование остроконечных кристаллов (рис. 3).

Таким образом, повышение температуры сгорания (в тигле) без внешнего воздействия не привело к формированию остроконечных структур. В то же время одновременное действие высокой температуры и однородного постоянного магнитного поля способствовало кристаллизации нитрида алюминия и формированию монокристаллов гексагонального габитуса.

#### **Продукты сгорания нанопорошка алюминия в неоднородном магнитном поле**

Для проверки влияния внешних факторов (магнитного поля, температуры и т. п.) на процесс кристаллизации продуктов сгорания образцы нанопорошка алюминия сжигали на керамической подложке между двумя магнитами. В этом случае для создания неоднородного магнитного поля в работе использовали систему из двух постоянных магнитов Fe-Nd-B (напряженность поля 1800 эрстед), разделенных воздушным зазором 50 мм. Для придания конструкции механической прочности притягивающиеся магниты были разделены двумя вставками из диэлектрического материала. Первый образец в свободно насыпанном виде в форме конусообразной навески размещали между магнитами и инициировали процесс горения. При этом конечные продукты представляли собой многоуровневые ориентированные вис커еры, напра-

вленные в различных направлениях, исходящих из нескольких центров (рис. 4).

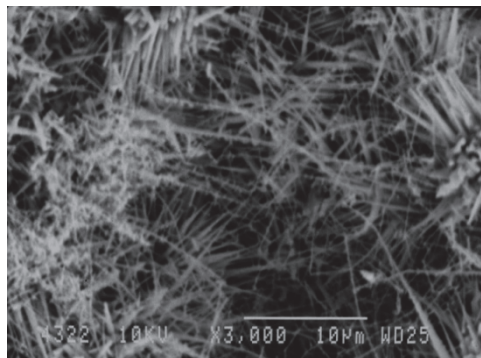


Рис. 4. Микрофотография продуктов сгорания свободно насыпанного нанопорошка алюминия при воздействии неоднородного магнитного поля

Вероятно, на процесс формирования нитевидных кристаллов оказали сильное влияние потоки, связанные с переносом массы и тепла.

При сжигании нанопорошка алюминия в алундовом тигле, помещенном в неоднородное магнитное поле, происходило формирование вытянутых ограниченных кристаллов нитрида алюминия (рис. 5).

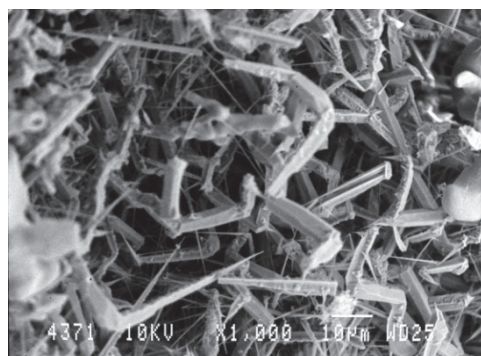


Рис. 5. Микрофотография продуктов сгорания нанопорошка алюминия в алундовом тигле при воздействии неоднородного магнитного поля

Монокристаллы имели изогнутую форму и состояли из нескольких линейных участков. Диаметр этих кристаллов составлял 4 мкм, а длина линейной части кристалла – 16 мкм.

Более тонкие кристаллы (диаметром менее 1 мкм) не имеют огранки. Зависимость степени ограниченности микрокристаллов можно проследить на рис. 5: игольчатый кристалл по мере увеличения его толщины приобретает огранку и при толщине около 4 мкм принимает окончательную шестигранную форму.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин А.П., Проскуровская Л.Т. Двухстадийное горение ультрадисперсного порошка алюминия на воздухе // Физика горения и взрыва. – 1990. – Т. 26. – № 2. – С. 71–72.
2. Ильин А.П., Громов А.А. Горение алюминия и бора в сверхтонком состоянии. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. – 154 с.

#### Заключение

Таким образом, продуктами сгорания свободно насыпанного нанопорошка алюминия в воздухе (без действия магнитного поля) являются нитевидные кристаллы (рис. 1) [7]; при сгорании нанопорошка алюминия в алундовом тигле (без действия магнитного поля) получают неограниченные кристаллиты (рис. 2). При воздействии магнитным полем на горящий образец нанопорошка алюминия формируются кристаллы различного габитуса в зависимости от условий теплоотвода (тигель или конический образец на подложке) и от конфигурации магнитного поля (однородное или неоднородное). При сгорании в тигле в однородном магнитном поле формируются кристаллы с преимущественно гексагональной огранкой (рис. 3); при сгорании свободно насыпанной конической навески нанопорошка алюминия в неоднородном магнитном поле формируются многоуровневые ориентированные вискеры, направленные в различных направлениях, исходящих из нескольких центров (рис. 4); при сгорании в тигле в неоднородном магнитном поле происходит формирование вытянутых ограниченных кристаллов нитрида алюминия с характерной линейной частью 16 мкм (рис. 5).

Наиболее вероятно, магнитное поле способствует сохранению ориентации кристаллов продуктов сгорания и их стабилизации в неокристаллизованном состоянии, что приводит к переохлаждению. В однородном магнитном поле процесс кристаллизации, протекающий в тепловой волне и обусловленный выделением энергии, сопровождается переходом неупорядоченных структур в монокристаллы AlN. В неоднородном магнитном поле процесс кристаллизации после переохлаждения также приводит к тепловой волне, которая распространяется по линейно вытянутым структурам продуктов. При достижении длины прохождения волны 16 мкм и толщине 4 мкм энергия, накопленная при кристаллизации, достаточна для окристаллизации в другом направлении, что связано с высокой подвижностью структурных единиц. Согласно электронной микроскопии (рис. 5), при меньшей толщине структурного фрагмента выделившегося при кристаллизации тепла недостаточно для предания ему кристаллической огранки, и линейный рост кристалла вырождается в линейный (без изгибов) вискер.

*Выполнено при частичной финансовой поддержке проекта № 3.3055.2011 Разработка научных основ получения наноструктурированных неорганических и органических материалов.*

3. Назаренко О.Б. Электровзрывные нанопорошки: получение, свойства, применение / под ред. А.П. Ильина. – Томск: Изд-во ТПУ, 2005. – 148 с.
4. Ильин А.П., Громов А.А., Толбанова Л.О. Явление химического связывания азота воздуха с образованием кристаллических фаз нитридов при горении порошкообразных металлов, бора и

- кремния // *Фундаментальные исследования*. – 2008. – № 4. – С. 13–18.
5. Боборыкин В.М., Гремячкин В.М., Истратов А.Г. и др. О влиянии азота на горение алюминия // *Физика горения и взрыва*. – 1983. – № 3. – С. 22–29.
  6. Роот Л.О., Сморгыгина К.С., Звягинцева Е.С., Ильин А.П. Каталитическое действие добавок оксида хрома (III) на процесс горения нанопорошка алюминия в воздухе // *Известия Томского политехнического университета*. – 2012. – Т. 320. – № 3. – С. 5–9.
  7. Ильин А.П., Толбанова Л.О., Мостовщиков А.В. Состав промежуточных продуктов горения нанопорошка алюминия в воздухе // *Известия Томского политехнического университета*. – 2008. – Т. 313. – № 3. – С. 19–24.
  8. Ильин А.П., Толбанова Л.О. Формирование нитевидных кристаллов в промежуточных продуктах горения в воздухе нанопорошка алюминия и его смесей с нанопорошками молибдена и вольфрама // *Известия Томского политехнического университета*. – 2007. – Т. 310. – № 2. – С. 77–80.
  9. Ильин А.П., Мостовщиков А.В., Толбанова Л.О. Рост монокристаллов нитрида алюминия в условиях теплового взрыва // *Письма в ЖТФ*. – 2011. – Т. 37. – Вып. 20. – С. 49–53.

Поступила 19.12.2012 г.

УДК 621.762.3

## ВЛИЯНИЕ РАВНОКАНАЛЬНОГО УГЛОВОГО ПРЕССОВАНИЯ НА СТРУКТУРУ И СВОЙСТВА АНТИФРИКЦИОННОГО СПЛАВА Al-40Sn

А.Л. Скоренцев\*, Н.М. Русин\*, Е.А. Колубаев\*.\*

\*Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск

\*\*Томский политехнический университет

E-mail: skoralexan@mail.ru; rusinnm@mail.ru; eak@ispms.tsc.ru

*Исследовано влияние равноканального углового прессования на структуру и свойства спеченного сплава Al-40Sn. Было установлено, что в результате деформационной обработки в сплаве формируется слоистая структура, причем толщина прослоек фаз уменьшается с ростом числа прессований. Установлено, что помимо упрочнения Холла–Петча прочность сплава дополнительно повышается вследствие утонения межфазовых прослоек. Обнаружено, что обработка методом равноканального углового прессования уменьшает интенсивность изнашивания исследуемого сплава и практически не влияет на величину его коэффициента трения при сухом трении.*

### Ключевые слова:

*Самосмазывающийся антифрикционный материал, интенсивность изнашивания, интенсивная пластическая деформация.*

### Key words:

*Self-lubrication antifriction material, wear intensity, severe plastic deformation.*

Трение твёрдых тел сопровождается износом их поверхностных слоёв, в результате которого меняется форма и геометрические размеры трущихся деталей. В том случае, когда замена или восстановление изношенных деталей обходится слишком дорого, между ними помещают легко заменяемый вкладыш с антифрикционным покрытием, который предохраняет ответственные детали узла трения от прямого механического контакта. Как правило, покрытие гораздо мягче контртела, поэтому в процессе эксплуатации механизма оно изнашивается гораздо быстрее. Продление сроков работоспособности покрытия значительно повышает эффективность используемого агрегата. Следовательно, разработке новых антифрикционных материалов с высокими триботехническими свойствами, а также улучшению свойств известных материалов уделяется большое внимание.

В настоящее время в технике широко используются вкладыши с покрытием из антифрикционных алюминиевых сплавов [1], поскольку составляющий их основу пластичный металл способен выдерживать без разрушения многократные переде-

формации. Однако Al имеет один существенный недостаток – склонен к схватыванию с находящимися с ним в фрикционном контакте металлами при разрушении в месте контакта поверхностной оксидной плёнки. Для того чтобы изолировать образующиеся в местах разрушения оксидной плёнки участки чистой поверхности алюминия, в сплавы вводят вещества, способные размазываться по поверхности трения и образовывать антизадиристую плёнку. Наиболее часто для этих целей используют олово (сплавы марки АО). Объёмная доля Sn, особенности распределения его включений по объёму сплава и их форма могут существенно повлиять на процесс формирования и качество антизадиристой плёнки.

Объёмное содержание олова в алюминиевых отливках обычно ограничивают 10 % из-за опасности формирования по границам зёрен непрерывной сетки из мягкого Sn. При наличии такой сетки напряжение течения сплава и его пластичность резко снижаются по причине локализации деформации в прослойках мягкой фазы. Избежать образования оловянной сетки в литых алюминиевых



сплавах сложно из-за большой разности температур плавления Al и Sn и снижения практически до нуля растворимости последнего в твёрдом алюминии. Однако если прибегнуть к получению сплавов Al-Sn методами спекания смесей заданного состава, то можно увеличить содержание в них олова и сохранить при этом цельность алюминиевого каркаса, так как в смеси порошков он существует изначально, и задачей спекания является укрепление стыков частиц алюминия. При наличии непрерывного алюминиевого каркаса сплавы можно подвергать деформации, не опасаясь её локализации. Более того, подвергнув спечённый материал интенсивной пластической деформации (ИПД), можно не только существенно упрочнить алюминиевую матрицу [2], но и модифицировать макроскопическую структуру сплава, приведя её к состоянию, наиболее благоприятному для реализации самосмазывания поверхности трения оловом.

Целью настоящей работы было исследование возможностей по управлению структурой и механическими свойствами сплавов системы Al-Sn и изучение их влияния на триботехнические характеристики этих сплавов при использовании такого метода ИПД, как равноканальное угловое прессование (РКУП) [3]. В отличие от обычных методов обработки металлов давлением (ОМД), РКУП позволяет не только подвергать материалы большим деформациям, но и сохранять при этом исходный поперечный размер обрабатываемых образцов, что позволяет существенно расширить ассортимент изделий из обработанного материала.

#### Материалы и методика эксперимента

В работе использовался сплав состава Al-40Sn, полученный жидкофазным спеканием смеси порошков АСД-4 и ПО2. Спеченные образцы подвергали интенсивной пластической деформации методом РКУП в пресс-форме с перпендикулярными каналами сечением 10×10 мм. Среднее расстояние между фазовыми прослойками определяли по методу секущей. Образцы для механических испытаний на сжатие вырезали из середины полученных прессовок. Направление сжатия образцов совпада-

ло с направлением течения материала при РКУП. Испытания проводили на машине Instron 3369 при скорости осадки образцов 0,5 мм/мин.

Триботехнические испытания проводили без применения смазки по схеме «палец–диск» при скорости скольжения 0,6 м/с и давлении на образец 1...5 МПа. Величина коэффициента трения регистрировалась каждую секунду автоматически с помощью встроенного микропроцессора. Интенсивность изнашивания образцов определяли после прохождения ими пути трения длиной 500 м как относительное укорочение (мкм) образца за метр скольжения.

#### Результаты и их обсуждение

Спечённый сплав Al-40Sn состоит из непрерывных, вложенных друг в друга оловянной и алюминиевой сеток (рис. 1, а). Твёрдость отожжённого Al низкая, поэтому такой сплав имеет низкую несущую способность. Структура сплава также не вполне благоприятна для самосмазывания, так как на отдельных участках поверхности трения расстояния между прослойками олова могут быть довольно большими.

С целью устранения указанных недостатков спечённые образцы были подвергнуты интенсивной пластической обработке методом РКУП по так называемому маршруту прессования А, далее – РКУП (А). Из-за того что плоскость течения материала на данном маршруте не меняется, уже через несколько прессований структура сплава в данной плоскости состоит из чередующихся тонких прослоек алюминиевой и оловянной фаз (рис. 1, б). Если указанную плоскость использовать как поверхность трения, организовав скольжение контртела перпендикулярно вытянутым прослойкам фаз, то дистанция размазывания олова резко сократится, по сравнению со спечённым образцом.

Степень утонения межфазовых прослоек зависит от числа испытанных образцом прессований ( $N$ ) по закону

$$h = h_0[(\gamma N)^2 + 1]^{-0.5}. \quad (1)$$

Здесь  $\gamma$  – интенсивность простого сдвига при РКУП, а  $h_0$  – средняя исходная толщина прослоек

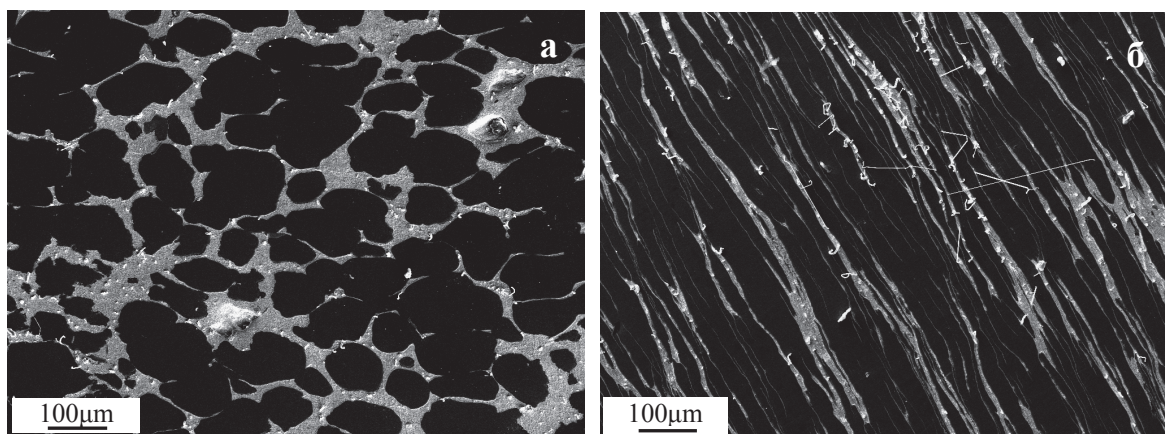


Рис. 1. Структура сплава Al-40Sn: а) после спекания; б) после 4-х прессований методом РКУП (А)

Al или Sn фаз [4]. Между рассчитанными (прерывистая линия на рис. 2) по формуле (1) и экспериментальными значениями  $h/h_0$  имеется хорошее совпадение, поэтому здравый смысл подсказывает, что, увеличивая число проходов, дистанцию размазывания олова можно значительно сократить. Алюминиевая матрица в это время будет испытывать наклёп, прочность и твёрдость её возрастут, а несущая способность и износостойкость сплава повысятся.

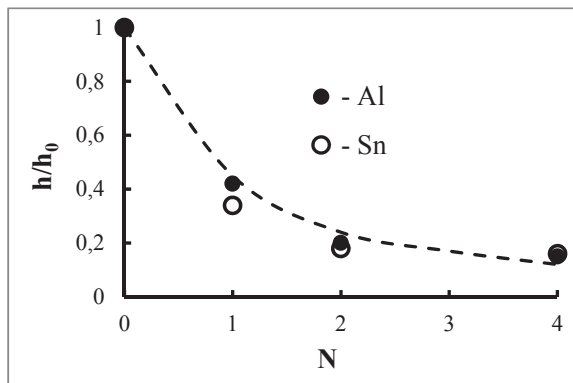


Рис. 2. Отклонение измеренной интенсивности утонения слоев фаз от рассчитанной в сплаве Al-40Sn при РКУП (А)

В случае перпендикулярного расположения каналов в пресс-форме интенсивность сдвига при РКУП  $\gamma=2$ , что эквивалентно деформации образца растяжением на величину  $\varepsilon=1,155$ . В случае чистого поликристаллического алюминия данной величины деформации обычно достаточно, чтобы достичь его предельного деформационного упрочнения. В нашем случае прочность двухфазного сплава Al-40Sn продолжает расти и при большем числе прессований (рис. 3). Причём, начиная со второго прохода и выше, величина приращения прочности примерно одинакова. То есть в целом при  $N>1$  прочность сплава можно описать функцией типа  $\sigma=\sigma(1)+\kappa/h$ . Здесь  $\kappa$  – константа, характеризующая эффективность дислокационных барьеров в алюминиевой матрице, а  $\sigma(1)$  – её упрочнение после первого РКУП.

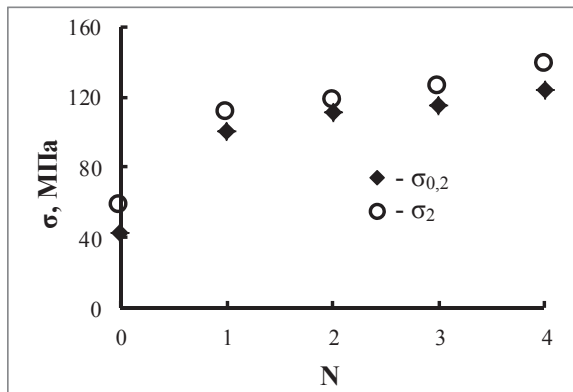


Рис. 3. Зависимость прочности сплава Al-40Sn от числа РКУП (А)

Микроскопические исследования показали, что в ходе первого РКУП происходит значительная фрагментация зёрен алюминиевой фазы за счёт образования субзёрен со средним диаметром  $0,45\pm 0,03$  мкм. После повторных прессований размер субзёрен алюминиевой фазы оставался неизменным. Средний размер субзёрен после 5-го РКУП (А) был  $0,50\pm 0,05$  мкм. Таким образом, скачок прочности сплава в результате первого РКУП обусловлен измельчением зёрненной структуры алюминиевой матрицы (эффект Холла-Петча). При этом последующий её рост не вполне понятен.

Единственным заметным изменением в структуре сплава при многократном РКУП (А) является утонение межфазовых прослоек, оловянные включения при этом вытягиваются, то есть площадь межфазной поверхности растёт. Границы фаз некогерентны и являются непроницаемыми барьерами для решёточных дислокаций. Поэтому наиболее вероятной причиной упрочнения сплава при многократном РКУП (А) является увеличение их удельной площади, вернее – сопутствующее ему сокращение свободного расстояния между границами фаз, действующими как дислокационные барьеры.

Естественно, что описанные изменения структуры и механических свойств подвергнутого РКУП (А) сплава Al-40Sn должны сказаться на его трибологических свойствах. В таблице приведены значения коэффициента трения и интенсивности изнашивания сплава при давлении 1, 3 и 5 МПа и скорости скольжения 0,6 м/сек по сухому стальному диску.

Как следует из таблицы, влияние обработки неоднозначно. Так, при заданном давлении и скорости скольжения число РКУП и, значит, упрочнение и утонение алюминиевых прослоек, практически не сказывается на величине коэффициента трения сплава. Он остаётся высоким при малом давлении и резко снижается при большом. Интенсивность изнашивания сплава также почти не меняется при малом давлении, но резко возрастает при увеличении нагрузки на образец. Причём при всех трёх давлениях усматривается некоторая связь с толщиной алюминиевых прослоек. Пока прослойки толстые ( $N=0$  и 1), интенсивность изнашивания образцов высока.

Таблица. Влияние числа РКУП (А) на трибологические свойства сплава Al-40Sn при различном давлении

№ РКУП	Коэффициент трения, $\mu$			Интенсивность изнашивания, мкм/м		
	Давление, МПа					
	1	2	3	1	3	5
0	0,63	0,20	0,11	0,1	0,18	0,24
1	0,63	0,20	0,11	0,1	0,18	0,22
2	0,64	0,19	0,11	0,08	0,14	0,16
3	0,65	0,20	0,11	0,1	0,14	0,18
4	0,59	0,21	0,11	0,12	0,14	0,18

При более сильном их утонении скорость износа сплава понижается примерно на 25 % и далее остаётся постоянной. Видимо, при утонении прослоек алюминиевой фазы до определённой величины выдавленное олово размазывается по всей их поверхности и дальнейшее их утонение ситуацию не меняет. Излишки выдавленного олова на поверхности трения не задерживаются, поскольку образуемая им плёнка имеет строго заданную толщину, определяемую силами адгезионного сцепления олова с алюминием.

Полученные значения величины коэффициента трения сплава хорошо согласуются с теорией преимущественно адгезионной природы силы трения твёрдых тел, где коэффициент адгезионного трения определяется как

$$\mu_a = \tau_0 / \rho_r + \beta. \quad (2)$$

Здесь  $\rho_r$  – фактическое давление в зонах контакта (полная нагрузка на суммарную площадь пятен фактического контакта!), а  $\tau_0$  и  $\beta$  – характеристики поверхностных слоев. При малых нагрузках удельное давление на фактических контактных площадках низкое, и, следовательно, значение  $\mu_a$  большое. При возрастании давления на образец площадь контактных площадок остаётся практически неизменной, но величина  $\rho_r$  растёт пропорционально нагрузке, что приводит к снижению  $\mu_a$ .

При этом величина силы трения, определённая как произведение коэффициента трения на нормальную нагрузку (закон Амонтона–Кулона) в нашем случае остаётся примерно постоянной. Это заставляет предположить, что на поверхности трения сплава формируется специфический слой материала, имеющий постоянную прочность на сдвиг  $\tau_0$ . Отметим, что величина коэффициента трения сплава в начале испытаний на трение имеет низкое

значение. Далее в процессе притирки она растёт и достигает значения, которое далее не меняется при неизменной действующей нагрузке. То есть поверхностный слой, свойства которого обсуждались выше, формируется в процессе сухого трения. Поэтому связь между триботехническими параметрами сплава и его механическими свойствами обнаружена не была.

Таким образом, объяснение полученных результатов триботехнических испытаний не простое и требует тщательного изучения механизмов износа сплавов системы Al-Sn при сухом трении. На основании изложенных результатов в настоящий момент можно сделать лишь промежуточные выводы, в основном касающиеся структуры и механических свойств сплава Al-40Sn.

1. Деформационная обработка спечённого сплава Al-40Sn методом РКУП (А) позволяет трансформировать его исходную матричную структуру в структуру слоистого типа.
2. Толщина фазовых прослоек уменьшается практически в два раза после каждого прессования.
3. Прочность сплава Al-40Sn растёт с увеличением числа прессований. Максимальный её прирост происходит в ходе первого РКУП и далее она увеличивается на постоянную величину после каждого прохода образца через матрицу.
4. Обработка сплава Al-40Sn методом РКУП (А) улучшает его сопротивление изнашиванию при сухом трении, особенно эффективно после первых двух прессований.
5. При отсутствии жидкой смазки величина коэффициента трения сплава Al-40Sn по стали практически не зависит от структуры и прочности сплава.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ по проекту № 11-08-00460а.*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буше Н.А. и др. Подшипники из алюминиевых сплавов. – М.: Транспорт, 1974. – 256 с.
2. Xu K., Wongpreedee K., Russell A.M. Microstructure and strength of a deformation processed Al-20 % Sn in situ composite // Journal of materials science. – 2002. – V. 37. – P. 5209–5214.
3. Сегал В.М., Резников В.И., Копылов В.И. и др. Процессы пластического структурообразования металлов. – Мн.: Навука і тэхніка, 1994. – 232 с.

4. Русин Н.М., Скоренцев А.Л., Коростелёва Е.Н. Микроструктура и механические свойства двухфазного сплава Al-Sn, подвергнутого интенсивной пластической обработке методом РКУП (А) // Известия вузов. Физика (спец. выпуск). – 2011. – № 11/3. – С. 208–214.

*Поступила 23.05.2013 г.*

УДК 621.791

## ФОРМИРОВАНИЕ ИЗНОСОСТОЙКИХ ПОКРЫТИЙ ВНЕВАКУУМНОЙ ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ НАПЛАВКОЙ КАРБИДА ВОЛЬФРАМА И ПОСЛЕДУЮЩЕЙ ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКОЙ

И.М. Полетика, Т.А. Крылова, М.В. Тетюцкая, С.А. Макаров

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск

E-mail: poletika@list.ru

Наплавкой на ускорителе ЭЛВ-6 порошка карбида вольфрама на низкоуглеродистую сталь получены покрытия с повышенной твердостью, но низкой износостойкостью. С целью увеличения износостойкости проведены эксперименты по влиянию термической обработки на структуру и свойства покрытий, наплавленных карбидом вольфрама.

### Ключевые слова:

Пучок релятивистских электронов, наплавка, структура, термическая обработка, твердость, износостойкость.

### Key words:

Relativistic electron beam, surfacing, structure, heat treatment, hardness, wear resistance.

### Введение

Абразивный износ поверхностей деталей многих машин и механизмов при эксплуатации существенно снижает срок их службы. Для восстановления и упрочнения деталей широко применяется метод электродуговой наплавки. С этой же целью может быть использован метод электронно-лучевой наплавки на ускорителе электронов, который характеризуется высоким качеством получаемых покрытий и простотой введения легирующих элементов [1, 2]. В практике электродуговой наплавки высокая твердость и удовлетворительная стойкость против абразивного износа с умеренными ударами или без них достигается при наплавке карбидом вольфрама [3]. Вместе с тем более интенсивное нагружение приводит к снижению пластичности, появлению склонности к трещинообразованию, что способствует разрушению наплавленного слоя. Улучшение структуры и свойств слоев, наплавленных карбидом вольфрама, может быть достигнуто термической обработкой [4, 5]. Так, для снятия остаточных напряжений в электродуговых наплавках используют отпуск. Существует также принципиальная возможность увеличения твердости наплавленных слоев закалкой от температур выше  $A_{c3}$  за счет образования мартенситной структуры. Влияние термической обработки на структуру и свойства слоев электронно-лучевой наплавки малоизучены, и требуется постановка специального систематического исследования в этом направлении.

### Материалы и методики эксперимента

На низкоуглеродистую сталь наплавливали порошок карбида вольфрама WC. Слой порошка толщиной в 1 мм наносили на поверхность образца перед обработкой. Энергия электронов  $U$  составляла 1,4 МэВ, ток пучка  $I$  менялся в пределах от 27 до 51 мА, скорость обработки  $V$  принимала значения 2,5; 1,6; 1,0 м/с. Для защиты от влияния окружающей среды в наплавочную смесь вводили флюс  $MgF_2$ . Для увеличения площади наплавливаемой поверхности пучок сканировался с шириной магнит-

ной развертки  $l=50$  мм. Структуру покрытий исследовали на металлографическом микроскопе «Neophot» на полированных шлифах, протравленных раствором кислот: 20 мл  $HNO_3$  и 100 мл  $HCl$  при температуре 20 °С. Фазовый состав покрытий определяли методом рентгеноструктурного фазового анализа на дифрактометре ДРОН-2М. Измеряли распределение микротвердости на приборе ПМТ-3 и находили ее среднее значение в покрытии  $H_{\mu}^{cp}$ . Проводили испытания на абразивную износостойкость  $K_{и}$  по ГОСТ 23.208–79.

### Результаты эксперимента

После наплавки карбида вольфрама на поверхности образцов стали Ст3 образуются слои толщиной 1,5–3,0 мм. Распределение микротвердости в поперечных срезах носит характер локальных колебаний, что связано с гетерофазностью образующейся структуры. По данным рентгеноструктурного фазового анализа в структуре покрытий присутствует  $\alpha$ -железо, незначительное количество  $\gamma$ -железа, соединение  $Fe_3W_3C$ , некоторое количество карбидов WC,  $W_2C$ ,  $W_{23}C_6$ .

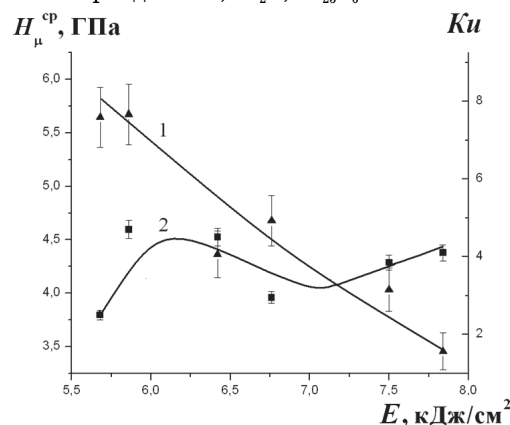


Рис. 1. Зависимость: 1) твердости; 2) износостойкости от энергии излучения при наплавке карбидом вольфрама

С ростом плотности энергии излучения средние значения микротвердости в слое уменьшаются (рис. 1, кривая 1). Падение микротвердости при



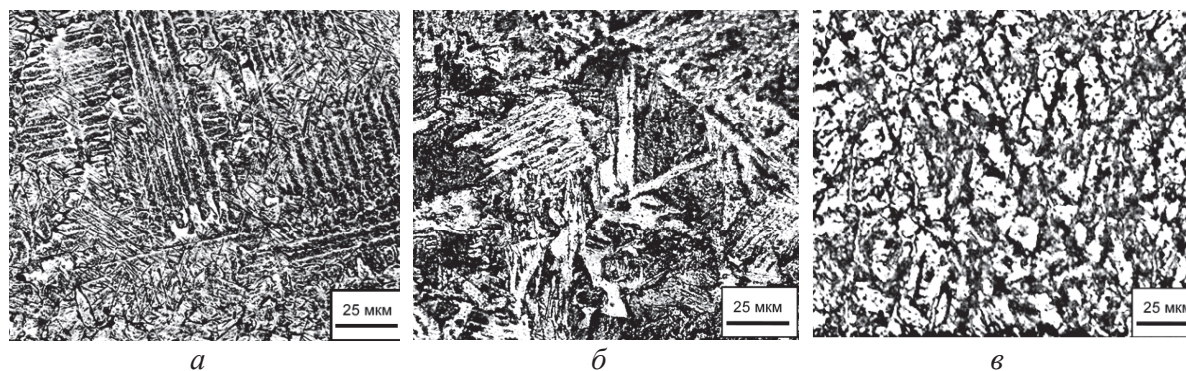


Рис. 2. Структура слоя, наплавленного карбидом вольфрама, при  $E$ : а) 5,68; б) 6,42; в) 7,84 кДж/см<sup>2</sup>

увеличении  $E$  (удельная поверхностная энергия излучения) связано с изменением одновременно двух параметров – средней концентрации легирующих элементов в покрытии и скорости охлаждения расплавленного металла. С ростом  $E$  переплавляется более глубокий слой, что приводит к уменьшению в нем среднего содержания W и C. Одновременно уменьшается скорость охлаждения и происходит переход от менее равновесной структуры к более равновесной. При этом в слое наплавки образуется целый спектр структур.

При малых значениях  $E$  структура слоя доэвтектической, закаленная на мартенсит (рис. 2, а). С увеличением  $E$  мартенситная структура сменяется сначала мартенситно-бейнитной (рис. 2, б), а затем ферритно-мартенситной (рис. 2, в).

Структура слоя определяет и его износостойкость (рис. 1, кривая 2). Появление твердых, но хрупких мартенситной и бейнитной составляющих в структуре обуславливает низкие значения износостойкости. Выделение ферритной фазы в основе слоя обеспечивает снижение как твердости, так и износостойкости.

Известно, что при абразивном изнашивании твердые частицы абразива действуют на металл как множество режущих инструментов. Поэтому хрупкие структуры мартенсита и бейнита прорезаются абразивными частицами. Возникают микротрещины, что является началом разрушения. Кроме того, в хрупких мартенситной и бейнитной матрицах создаются благоприятные условия для вы-

крашивания карбидов. Феррит же, как самая мягкая фаза в стали, хуже других сопротивляется разрушению (срезанию) частицами абразива и в силу своей низкой прочности плохо удерживает карбидные частицы. Это также приводит к потере износостойкости.

Рассмотрим влияние термической обработки на структуру, твердость и износостойкость слоя. Термические обработки проводили в лабораторной печи СШОЛ с использованием известковой обмазки. Поскольку образцы с наплавленным слоем уже претерпели самозакалку при охлаждении из расплава, необходимо было устранить эти закалочные структуры путем отпуска, а затем закалить покрытие вновь, используя стандартную термическую обработку. Отпуск проводили при температуре 650 °С в течение часа. Закачивали в воду после выдержки в печи при 850 °С в течение 0,5 часа.

В процессе отпуска слоя при 650 °С в нем протекает  $\gamma \rightarrow \alpha$ -превращение, и весь аустенит распадается на ферритно-карбидную смесь (рис. 3, а). На рентгенограммах полностью исчезают линии  $\gamma$ -железа, зато интенсивности линий  $\alpha$ -железа и фазы  $Fe_3W_3C$  резко возрастают.

Дополнительное выделение карбида при отпуске связано с распадом пересыщенного твердого раствора Fe-W-C, образовавшегося при самозакалке расплавленного слоя, и дополнительным выделением карбидов вольфрама из аустенита, где предельно допустимое содержание легирующих элементов существенно выше по сравнению с их содержанием в

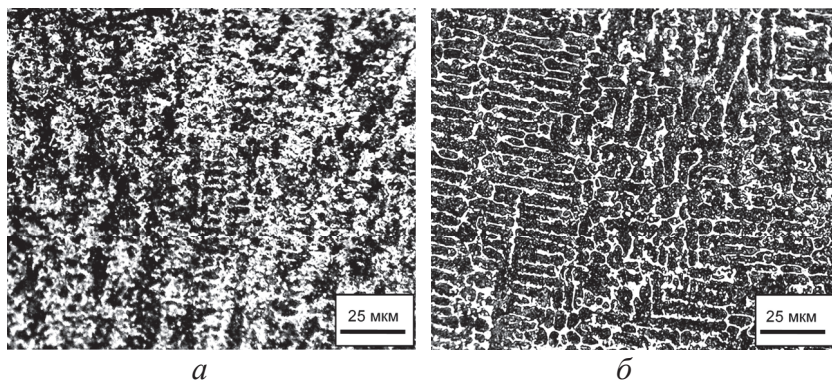


Рис. 3. Структура наплавленного: а) после отпуска при 650 °С; б) после закалки от 850 °С

феррите. Обнаруженные ранее неравновесные карбиды  $WC$ ,  $W_2C$  и  $W_{23}C_6$  после отпуска на рентгенограммах не выявляются, что, очевидно, свидетельствует о приближении системы к равновесию.

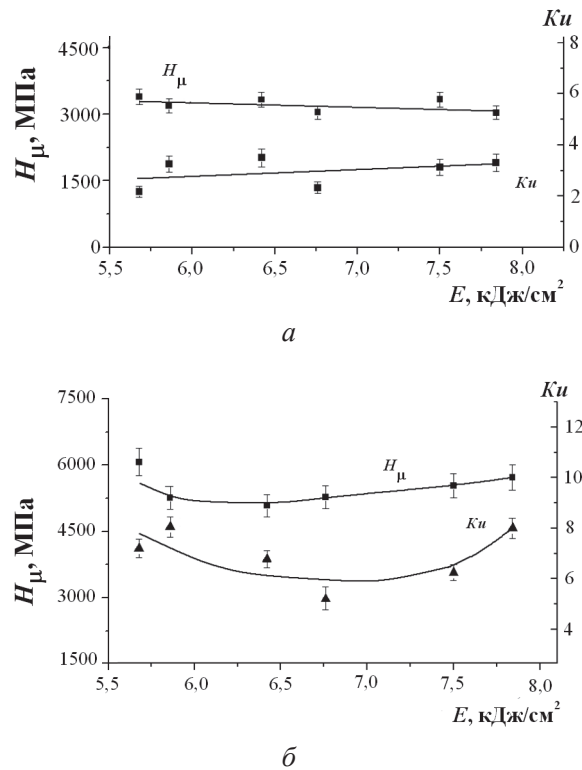


Рис. 4. Зависимость твердости и износостойкости покрытия от плотности энергии излучения  $E$  после: а) отпуска; б) закалки

Главной особенностью отпущенных слоев является то, что наблюдавшееся ранее разнообразие структур – от мартенситной до ферритной, после отпуска исчезает. Вне зависимости от параметров облучения, на микрофотографиях наблюдается однообразная структура – зерна твердого раствора в окружении карбидной эвтектики. Единственным отличием является то, что объемная доля эвтектической составляющей с увеличением  $E$  и увеличением глубины переплавленного металла сокращается, что связано с уменьшением среднего содержания вольфрама и углерода на единицу объема слоя.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полетика И.М., Борисов М.Д., Краев Г.В., Вайсман А.Ф., Голковский М.Г. Особенности формирования структуры и свойств поверхностного слоя стали при облучении пучком релятивистских электронов // *МиТОМ*. – 1997. – № 4. – С. 13–16.
2. Полетика И.М., Голковский М.Г., Борисов М.Д., Салимов Р.А., Перовская М.В. Формирование упрочняющих покрытий методом наплавки в пучке релятивистских электронов // *Физика и химия обработки материалов*. – 2005. – № 5. – С. 29–41.

Значения твердости и износостойкости покрытий после отпуска заметно ниже, чем в исходном состоянии (рис. 4, а), и за счет выделения мягкой ферритной фазы в основе слоя и, вследствие формирования однотипной структуры, с увеличением  $E$  меняются незначительно.

При нагреве под закалку от 850 °С происходит растворение частиц карбидов, возврат к аустенитной структуре, а затем закалка основы слоя на мартенсит (рис. 3, б). Значения твердости и износостойкости после обычной термической закалки возрастают по сравнению с твердостью и износостойкостью исходных наплавленных покрытий (рис. 4, б), претерпевших самозакалку на воздухе. Это связано с формированием в этом случае гораздо более однородной и дисперсной структуры мартенсита. Увеличению твердости способствует и некоторое рассасывание дендритной неоднородности в процессе выдержки в печи при высокой температуре, а также дополнительное выделение карбидов вольфрама во время предшествующего отпуска.

Значения твердости и износостойкости закаленных покрытий от режима наплавки зависят слабо (рис. 4).

#### Заключение

1. Электронно-лучевой вневакуумной наплавкой карбида вольфрама на низкоуглеродистую сталь получены слои наплавки, обладающие повышенной твердостью, но низкой износостойкостью, что связано с образованием в их основе хрупких мартенситной и мартенситно-бейнитной структур, а также мартенситно-ферритной структуры, содержащей хрупкую мартенситную и легко изнашиваемую ферритную фазу.
2. При отпуске покрытий значения твердости и износостойкости падают в связи с протеканием в слое ферритно-перлитного превращения, но зависят от объемной доли ферритной фазы, которая возрастает с увеличением энергии излучения. Закалка от 850 °С приводит к повторному мартенситному превращению с выделением более дисперсного, чем в исходном состоянии, мартенсита, что обеспечивает увеличение как твердости, так и износостойкости.

3. Лившиц А.С., Гринберг Н.А., Куркумелли Э.Г. Основы легирования наплавленного металла. – М.: Машиностроение, 1969. – 188 с.
4. Фролов В.В. Теория сварочных процессов. – М.: Высшая школа, 1988. – 559 с.
5. Хасуи А., Моригаки О. Наплавка и напыление. – М.: Машиностроение, 1985. – 240 с.

Поступила 29.01.2013 г.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ ЭЛЕМЕНТОВ КАБЕЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СВЕРХПРОВОДНИКОВ НА ОСНОВЕ СПЛАВА Nb-Ti ПРИ МНОГОСТУПЕНЧАТОМ ВОЛОЧЕНИИ

С.А. Баранникова<sup>1,2,3</sup>, Г.В. Шляхова<sup>1,4</sup>, Л.Б. Зуев<sup>1,2</sup>, Ю.А. Мальцев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск

<sup>2</sup>Томский государственный университет

<sup>3</sup>Томский государственный архитектурно-строительный университет

<sup>4</sup>Северский технологический институт НИЯУ МИФИ

E-mail: bsa@ispms.tsc.ru

*Методами атомно-силовой, электронной и оптической микроскопии исследована эволюция структуры на промежуточной стадии волочения при переходе  $\varnothing 1,3 \rightarrow \varnothing 1,2$  мм сверхпроводящего кабеля на основе сплава Nb+47 % Ti, который используют в магнитной системе Международного термоядерного экспериментального реактора. Целью работы является анализ влияния холодной деформации волочением на структуру многожильного сверхпроводника на основе сплава Nb-Ti. Исследованы микроструктура, фазовый состав и их влияние на свойства сверхпроводящего сплава Nb-Ti после холодного волочения и промежуточного отжига. Выявлены зоны локализации пластической деформации в местах обрывов сверхпроводника. Обнаружено изменение формы и химического состава волокон Nb-Ti в бездефектной области и в зоне разрыва кабеля. Выявлен диффузионный Nb барьер вокруг волокон Nb-Ti, размещенных в медной матрице. Установленные закономерности должны приниматься во внимание при разработке технологии холодной деформации волочением до получения сверхпроводниковых жил требуемых размеров.*

### Ключевые слова:

Сверхпроводники, дефекты, микроструктура, локализация пластической деформации, волочение.

### Key words:

Superconductors, defects, microstructure, plastic deformation localization, cold drawing.

Среди различных сверхпроводящих материалов [1] сплав Nb-Ti, используемый для изготовления токонесущих элементов в магнитной системе Международного термоядерного экспериментального реактора (ИТЭР), занимает особое положение. Конструкция сверхпроводящего кабеля состоит из нескольких тысяч сверхпроводящих жил диаметром 2...5 мкм, фиксируемых медной матрицей [2]. К таким кабелям предъявляются высокие требования, наиболее важными из которых являются величина и стабильность критических параметров, стабильность токовых характеристик, безобрывность сверхпроводящих волокон (жил), их структурная однородность по длине провода и малые отклонения от геометрических размеров поперечного сечения [3-6]. При производстве проводников из сверхпроводящего сплава Nb-Ti наиболее ответственным этапом является холодное волочение, в ходе которого исходная композиционная заготовка деформируется от  $\varnothing 60...70$  до  $\varnothing 0,1...1,0$  мм. На этом этапе необходимо обеспечить безобрывность процесса и заданную плотность микродефектов в сверхпроводнике, контролирующую образование центров пиннинга (закрепления магнитных вихрей Абрикосова в сверхпроводниках II-го рода [1]). Настоящая работа направлена на анализ влияния холодной деформации волочением на структуру многожильного сверхпроводника на основе сплава Nb-Ti.

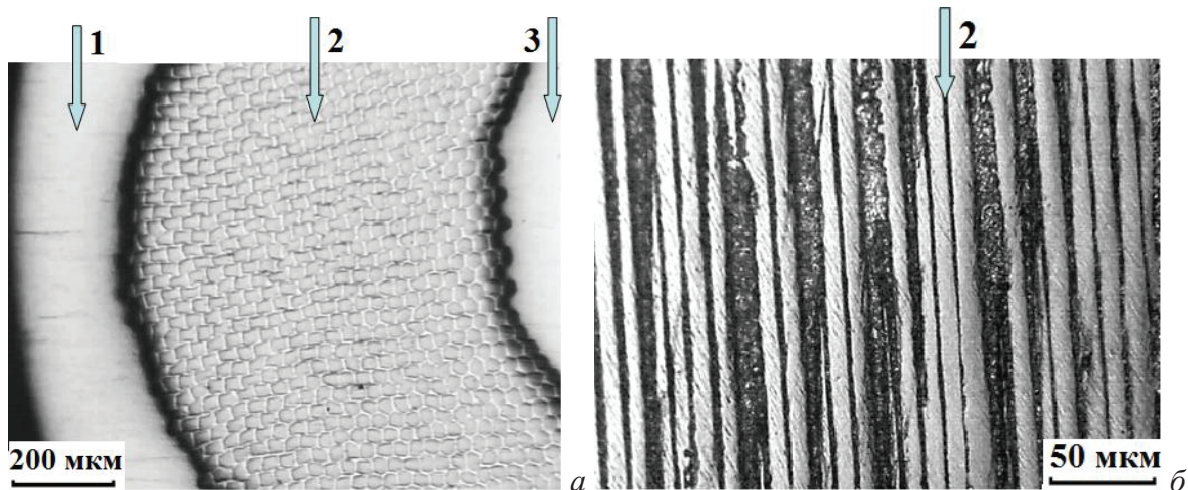
Деформационная структура и субструктура многожильного кабеля со сверхпроводящими жилами из сплава Nb-47,5 мас. % Ti (63,7 ат. % Ti) исследовалась на промежуточной стадии волочения при переходе  $\varnothing 1,3 \rightarrow \varnothing 1,2$  мм. Для анализа

состава и структуры композитного многожильного провода использовались несколько методик, обеспечивающих необходимое пространственное разрешение: оптическая микроскопия (Neophot-21 и Olympus GX 71), растровая электронная микроскопия (Philips SEM 515) и атомно-силовая микроскопия (Solver PH47-PRO).

Распределение элементов в зоне границы жилы из сплава Nb-Ti с медной матрицей определялось методом растровой электронной микроскопии на растровом ионно-электронном микроскопе Quanta 200 3D с использованием детекторов вторичных и обратно рассеянных электронов. Элементный состав сплава определялся энергодисперсионным рентгеновским микроанализом с использованием приставки EDAX на этом же микроскопе по зависимости числа характеристических рентгеновских фотонов определенной энергии, отвечающих Ti, Nb, Cu, от координат вдоль линии, проходящей через границу «волокон-матрица». Растровая электронная микроскопия на приборе Carl Zeiss EVO 50 с приставкой для рентгеновского дисперсионного микроанализа Oxford Instruments позволила с необходимой точностью определить такие структурные параметры, как размеры зерен и субзерен, их однородность по химическому и фазовому составу.

Комплекс разнообразных аналитических методик позволил получить новые сведения о структуре сверхпроводящего композитного провода и о распределении основных химических элементов в нем. Многожильный сверхпроводящий кабель на основе сплава Nb-Ti представляет собой трехслойную конструкцию, в которой между медными сер-





**Рис. 1.** Металлография поперечного (а) и продольного (б) сечения сверхпроводящего кабеля на основе сплава Nb-Ti на промежуточной стадии волочения при переходе  $\varnothing 1,3 \rightarrow \varnothing 1,2$  мм: 1 – медная оболочка, 2 – волокна Nb-Ti; 3 – медный сердечник

дечником и внешней оболочкой располагается промежуточный слой из волокон Nb-Ti (рис. 1), размещенных в медной матрице (композит). Такой композит может также содержать резистивные или диффузионные барьеры, стабилизирующие оболочки, и прочные армирующие элементы [2, 3].

Металлографические исследования поперечных сечений проводников показали, что в промежуточном слое на границе с медным сердечником проводника жилы Nb-Ti имеют округлую форму со средним диаметром  $\sim 10$  мкм. В промежуточном слое на границе с медной оболочкой все Nb-Ti волокна приобретают ромбическую форму с диагоналями  $\sim 13$  и  $11$  мкм соответственно вследствие деформации волочения.

Для более точного выявления рельефа поперечных сечений элементов кабеля использовали атомно-силовую микроскопию с применением контактного метода в режиме «постоянной силы» [7]. Существо метода заключается в том, что сигнал системы обратной связи, возникающий в процессе сканирования, устанавливается таким образом, что система способна обрабатывать относительно гладкие особенности рельефа достаточно быстро и в то же время быть достаточно медленной, чтобы обрабатывать крутые ступеньки поверхности. В результате слабо отображаются гладкие особенности рельефа волокна и с высоким контрастом отображаются высокоамплитудные максимумы диффузионного барьера. Такой способ отображения применяется для поиска небольших элементов структуры на большом участке относительно гладкой поверхности.

Вокруг волокон Nb-Ti, размещенных в медной матрице, обнаружен диффузионный Nb барьер, который отчетливо проявляется в виде выступов рельефа в зоне сопряжения жилы с матрицей (рис. 2, а). На профилограмме, построенной методом секущих, ниобиевый барьер обнаруживается по высокоамплитудным максимумам шириной до  $250 \dots 260$  нм,

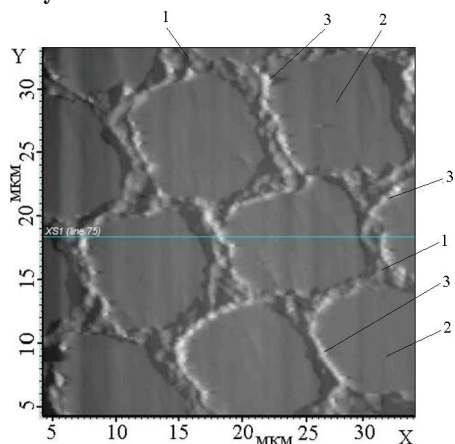
разделенных низкоамплитудными линиями рельефа для волокон Nb-Ti и медной матрицы (рис. 2, б). На фоне гладкого рельефа волокон Nb-Ti и медной матрицы выявляется высокоамплитудный ниобиевый барьер (рис. 2, в).

В результате интенсивной пластической деформации медь в сердечнике приобретает субмикроструктурную структуру со средним размером зерен  $\sim 800$  нм. В такой структуре чередуются одиночные зерна и их конгломераты, насчитывающие до 8 зерен. Сильнее всего медь в сердечнике продеформирована по границе «сердечник–промежуточный слой проводника», где максимальный размер зерна составил  $\sim 2120$  нм, а минимальный  $\sim 310$  нм. В промежуточном слое между волокнами в матрице медь представлена равноосными зернами со средним размером  $\sim 800$  нм. В то же время средний размер зерен меди в оболочке проводника составил  $\sim 1050$  нм [8].

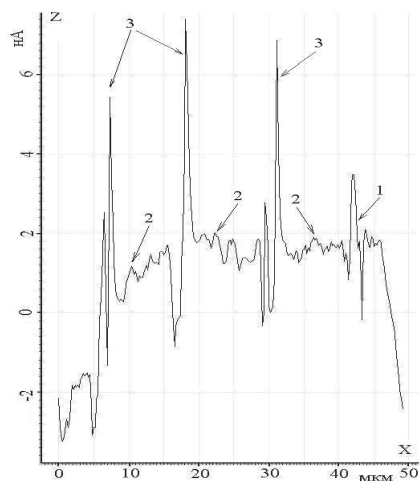
Топография поперечного сечения в месте обрыва проводника показала, что в области, прилегающей к сердечнику, близлежащие волокна Nb-Ti имеют неправильную форму и образуют зону локализации деформации (рис. 3). В месте обрыва проводника в матрице промежуточного слоя между Nb-Ti волокнами средний размер зерна меди составил  $\sim 850$  нм. Следует отметить, что по результатам статистической обработки, средний размер зерна меди в матрице  $\sim 800$  нм сопоставим с размером зерна меди  $\sim 850$  нм в месте обрыва проводника. Согласно двойному  $t$ -критерию для данной пары значений  $|t|=1,69$ , а коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности  $\alpha=0,9$  составляет  $t_{\alpha,t}=1,89$ , то есть  $|t| < t_{\alpha,t}$  и различие среднего размера зерна меди незначимо [9, 10].

Для исследования морфологии зоны локализации пластической деформации по глубине шлифа снимали дважды слой на шлифовальной бумаге по  $500$  мкм. В месте обрыва, вокруг волокон Nb-Ti, размещенных в медной матрице, обнаружен Nb

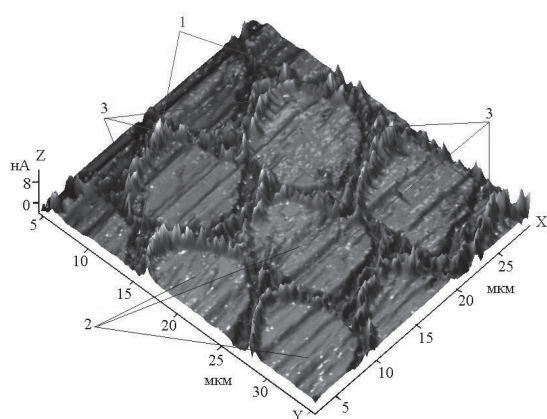
барьер, который проявляется на профилограмме в виде высоких, тонких высокоамплитудных максимумов шириной до 250 нм (рис. 4). Такой же Nb барьер обнаруживается вокруг волокон Nb-Ti в месте обрыва после послойного шлифования на глубину 1000 мкм.



а



б



в

**Рис. 2.** Ниобиевый барьер вокруг Nb-Ti волокон в матрице проводника: а) 2D изображение; б) профилограмма участка 30×30 мкм; в) 3D изображение; 1 – медная матрица, 2 – волокна Nb-Ti; 3 – ниобиевый барьер

Исследования, проведенные с помощью растрового электронного микроскопа Carl Zeiss EVO 50 с

приставкой для рентгеновского дисперсионного микроанализа Oxford Instruments, показали, что внешняя оболочка и сердечник проводника состоят полностью из меди. В то же время часть элементов промежуточного слоя проникает в медный сердечник кабеля и на границу раздела «промежуточный слой–внешняя оболочка». В промежуточном слое на границе с сердечником все волокна Nb-Ti имеют округлую форму. Химический состав волокон одинаков и составляет 35,66 ат.% Nb и 63,07 ат.% Ti (таблица).

По результатам РЭМ-исследования можно построить карты распределения элементов, которое по яркости изображения качественно отображает распределение химических элементов в пределах выделенной области исследования. Такой анализ показал, что титан находится только в волокнах Nb-Ti, медь – между волокнами, а ниобий присутствует как в волокнах Nb-Ti, так и между ними в матрице.

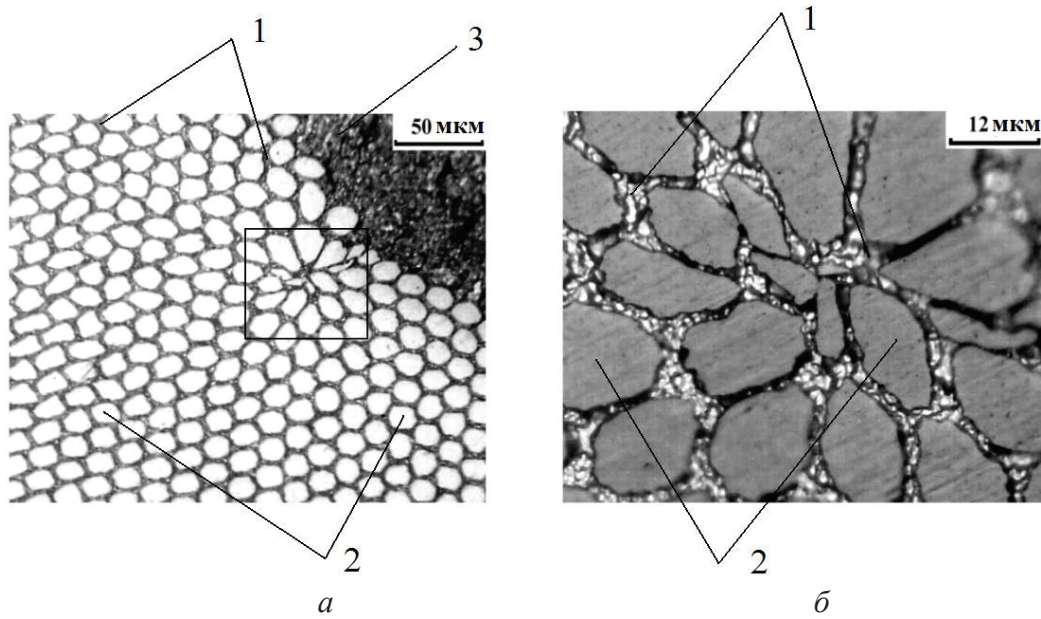
В области разрыва жилы Nb-Ti утрачивают правильную форму (рис. 3), но их химический состав сохраняется на уровне 63,33 ат.% Ti и 35,57 ат.% Nb. Карты распределения элементов показали, что Ti и Nb находятся в волокнах; между волокнами в матрице распределены Cu и Nb.

**Таблица.** Данные микроэлементного анализа к рис. 2, а (ат. %)

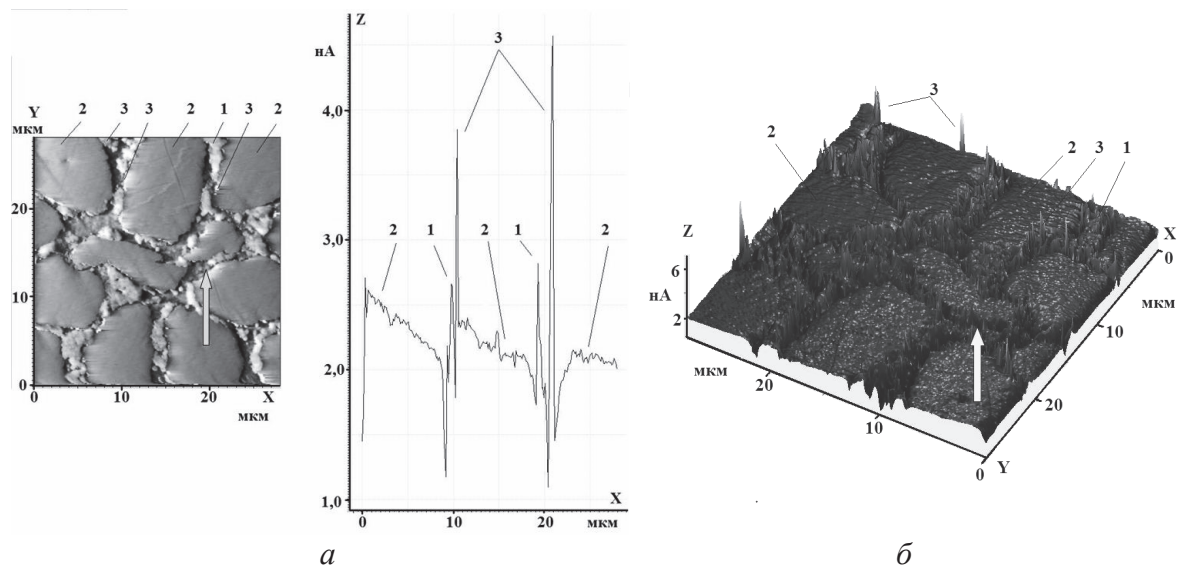
Элемент	Ti	Cu	Nb
Спектр 1	63,54	0,78	35,67
Спектр 2	64,36	1,24	34,41
Спектр 3	63,63	1,23	35,14
Спектр 4	60,76	1,81	37,43
Среднее	63,07	1,26	35,66
Стандартное отклонение	1,59	0,42	1,29

Однородность химического состава волокон Nb-Ti в проводнике контролировалась сканирующей электронной микроскопией в режимах вторичных электронов и в характеристическом рентгеновском излучении основных элементов композита на приборе Quanta 200 3D. Определение элементного состава вдоль линии методом энергодисперсионного рентгеновского микроанализа показало наличие элементов Nb, Ti и Cu на отрезке, проходящем через границу «волокно–матрица».

Степень однородности распределения основных химических элементов в волокне и матрице проводника была исследована по зависимостям числа характеристических рентгеновских фотонов определенной энергии, отвечающих Ti, Nb, Cu, от положения места измерения. Неравномерное пространственное распределение числа характеристических рентгеновских фотонов Ti, Nb, Cu в волокне и матрице указывает на наличие диффузионного слоя на отрезке, проходящем через границу «волокно–матрица». Установлено, что в Nb-Ti волокне количество характеристических рентгеновских фотонов Ti, Nb максимально, а количество характеристических рентгеновских фотонов Cu мини-



**Рис. 3.** Зона локализации пластической деформации в промежуточном слое со стороны внутренней поверхности в виде дефекта в местах обрыва волокон NbTi проводника при разном увеличении: а) оптическая металлография; б) атомно-силовая микроскопия; 1 – медная матрица, 2 – волокна NbTi; 3 – медный сердечник



**Рис. 4.** Ниобиевый барьер вокруг Nb-Ti волокон в месте обрыва после послойного шлифования на глубину 500 мкм: а) профилограмма участка 30×30 мкм; б) 3D изображение этого участка

мально. В медной матрице картина противоположна, т. е. максимальному количеству характеристических рентгеновских фотонов меди соответствует минимальное количество характеристических рентгеновских фотонов Ti, Nb. В промежуточном диффузионном слое сначала наблюдается постоянное число характеристических рентгеновских фотонов Nb, что подтверждает наличие Nb барьера, который обнаружен методом атомно-силовой микроскопии. Затем происходит уменьшение количества характеристических рентгеновских фотонов Ti, Nb на фоне увеличения количества характеристических рентгеновских фотонов Cu.

В основе подходов, традиционно используемых при анализе ресурса пластичности технических сверхпроводников на основе сплава Nb-Ti [11], лежит представление о равномерности и однородности пластической деформации, о макромасштабной локализации непосредственно перед разрушением, что не соответствует современным представлениям. Экспериментальные данные о природе пластической деформации показывают, что присущая ей с самого начала деформирования неоднородность может приводить к раннему формированию одного или нескольких устойчивых очагов локализации пластического течения [12, 13] и в



дальнейшем к обрыву жилы. Предпринятые в последнее время детальные исследования макролокализации деформации позволили установить однозначное соответствие между законом пластического течения на данном участке деформационной кривой и типом пространственно-временного распределения компонент тензора пластической дилатации [14]. Эти факты должны приниматься во внимание при разработке технологии холодной деформации волочением до получения сверхпроводниковых жил требуемых размеров.

#### Выводы

При анализе влияния деформации волочением на структуру многожильного сверхпроводника на основе сплава Nb-Ti обнаружены следующие особенности:

- в месте обрыва проводника выявлены зоны локализации деформации, в которых близлежащие волокна Nb-Ti имеют неправильную форму при послойном шлифовании на глубину до 1000 мкм;
- обнаружено изменение размеров и формы волокон Nb-Ti в промежуточном слое в бездефектной области; на границе с медным сердечником волокна имеют округлую форму со средним ди-

аметром ~10 мкм, на границе с медной оболочкой волокна имеют ромбическую форму с диагоналями ~13 и 11 мкм;

- в результате интенсивной пластической деформации медь в элементах кабеля приобретает субмикроструктурную структуру со средним размером: в сердечнике ~800 нм, в промежуточном слое между волокнами в матрице ~800 нм, в месте обрыва проводника в промежуточном слое между волокнами в матрице ~850 нм, в оболочке ~1050 нм;
- выявлен диффузионный Nb барьер вокруг волокон Nb-Ti, размещенных в медной матрице, шириной ~ 250 нм в бездефектной области и в зоне локализации пластической деформации при послойном шлифовании на глубину до 1000 мкм;
- наблюдалось изменение формы и химического состава волокон Nb-Ti в промежуточном слое: в бездефектной области все волокна Nb-Ti имеют округлую форму и состав 35,66 ат. % Nb и 63,07 ат. % Ti, в области обрыва проводника волокна имеют правильную форму и химический состав 35,57 ат. % Nb и 63,33 ат. % Ti.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 11-08-00237-а.*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзбург В.Л. Сверхпроводимость. – М.: Альфа-М, 2006. – 110 с.
2. Шиков А.К., Панцырный В.И., Воробьева А.Е. и др. Медно-ниобиевые высокопрочные высокоэлектропроводные обмоточные провода для импульсных магнитов // *Металловедение и термообработка*. – 2002. – № 11. – С. 68–72.
3. Шиков А.К., Никулин А.Д., Силаев А.Г. и др. Разработка сверхпроводников для магнитной системы ИТЭР в России // *Цветная металлургия*. – 2003. – № 1. – С. 36–43.
4. Kozlenkova N., Vedernikov G., Shikov A. et al. Study on Ic(T,B) for the Nb-Ti strand intended for ITER PF insert coil // *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*. – 2004. – V. 14. – № 2. – P. 1028–1030.
5. Lee P.J., Larbalestier D.C. Development of nanometer scale structures in composites of Nb-Ti and their effect on the superconducting critical current density // *Acta Metallurgica*. – 1987. – V. 35. – № 10. – P. 2523–2536.
6. Черный О.В., Тихинский Г.Ф., Сторожилов Г.Е. и др. Ниобий-титановые сверхпроводники с высокой токонесущей способностью // *Сверхпроводимость: Физика, химия, техника*. – 1991. – Т. 4. – № 8. – С. 1617–1623.
7. Миронов В.Л. Основы сканирующей зондовой микроскопии. – Н. Новгород: ИФМ РАН, 2004. – 110 с.
8. Зувев Л.Б., Баранникова С.А., Шляхова Г.В., Колосов С.В. Исследование структур на микро- и мезоуровнях в деформируемых волочением технических сверхпроводниках на основе NbTi сплава // *Фундаментальные проблемы современного материаловедения*. – 2012. – Т. 9. – № 4. – С. 417–421.
9. Зажигаев Л.С., Кишьян А.А., Романиков Ю.И. Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента. – М.: Атомиздат, 1978. – 232 с.
10. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 1961. – 480 с.
11. Ажажа В.М., Черный О.В., Сторожилов Г.Е. и др. Изучение деформированного состояния при разнонаправленной обработке Nb-Ti-сплава // *Вопр. атом. науки и техн. Сер. «Вакуум, чистые материалы, сверхпроводники»*. – 2004. – № 14. – С. 136–139.
12. Zavodchikov S.Y., Zuev L.B., Belov V.I. et al. Plastic deformation and fracture during the Zr-1 % Nb tube production // *Zirconium in the Nuclear Industry: Proc. XIII Int. Symposium*. – West Conshohocken, PA: ASTM, 2002. – P. 427–447.
13. Zuev L.B., Zavodchikov S.Y., Poletika T.M. et al. Phase composition, structure and plastic deformation localization in Zr-1 % Nb alloy // *Zirconium in the Nuclear Industry: Proc. XIV Int. Symposium*. – West Conshohocken, PA: ASTM, 2006. – P. 264–274.
14. Зувев Л.Б., Данилов В.И., Баранникова С.А. Физика макролокализации пластического течения. – Новосибирск: Наука, 2008. – 327 с.

*Поступила 03.05.2013 г.*

УДК 621.372.413

## УСИЛЕНИЕ МОЩНОСТИ РЕЗОНАНСНОГО СВЧ КОМПРЕССОРА С ВЫВОДОМ ЭНЕРГИИ ТРАНСФОРМАЦИЕЙ МОДЫ КОЛЕБАНИЙ

С.Н. Артёменко, В.С. Игумнов

Томский политехнический университет  
E-mail: snartemenko@mail.ru

Представлены результаты оценок основных характеристик резонансного СВЧ компрессора с выводом энергии трансформацией моды колебаний на окне связи резонатора с короткозамкнутым волноводным шлейфом. В частности, рассмотрена проблема обеспечения слабой связи резонатора с нагрузкой в режиме накопления энергии. Выполнена оценка мощности и усиления выходных импульсов СВЧ компрессора. Показано, что усиление мощности импульсов в исследуемом компрессоре может быть сопоставимым с усилением в компрессоре с выводом энергии через интерференционный переключатель на основе  $H$ -тройника. Показано также, что для достижения усиления, сравнимого с усилением волны в накопительном резонаторе, в СВЧ компрессоре с трансформацией моды колебаний требуется применение волноводных шлейфов с площадью окон связи, сравнимой с площадью сечения резонатора.

### Ключевые слова:

СВЧ компрессор, импульс, волноводный  $H$ -тройник, интерференционный переключатель, резонатор, коммутатор.

### Key words:

Microwave compressor, pulse, waveguide  $H$ -tee, interference switch, resonator, commutator.

### Введение

В настоящее время достигнуты определенные успехи в развитии способа формирования мощных СВЧ импульсов, основанного на накоплении СВЧ энергии в резонансном объеме и быстром ее выводе в нагрузку [1]. В частности, созданы системы компрессии с уровнем рабочей мощности до  $\sim 1$  ГВт в 10-сантиметровом диапазоне длин волн и способные обеспечить мощность импульсов до 100 МВт в 3-сантиметровом диапазоне [2, 3], что сопоставимо с мощностью импульсов ряда релятивистских СВЧ генераторов и усилителей. Однако эти успехи достигнуты исключительно использованием различных схемных решений проблемы формирования мощных СВЧ импульсов в системах с одномодовыми либо умеренно многомодовыми накопительными резонаторами. Из-за отсутствия устройств, способных реализовать быстрый вывод энергии из крупных (сверхразмерных) накопительных объемов, формирование импульсов такой же мощности при выводе из сверхразмерных резонаторов по-прежнему остается нерешенной проблемой. По этой же причине возможности резонансных СВЧ компрессоров по уровню рабочей мощности до настоящего времени полностью не реализованы, мощность рабочей волны в сверхразмерных резонаторах на порядок и более может превышать рабочую мощность известных устройств вывода энергии. Поэтому проблема разработки более эффективных устройств вывода по-прежнему актуальна.

В [4, 5] исследован вывод энергии из сверхразмерного резонатора трансформацией моды колебаний на окне связи резонатора с короткозамкнутым волноводным шлейфом как элементом межмодовой связи и устройством вывода. Такой СВЧ компрессор (рис. 1) представляет собой резонатор с двумя рабочими волнами – основной волной, на которой энергия накапливается, и волной вспомо-

гательной. Во вспомогательную волну идет передача энергии и на ней осуществляется вывод. Выходом резонатора служит плавный переход с корпуса резонатора на одномодовый волновод. Волноводный шлейф выполняется в виде  $H$ -тройника, расположенного снаружи резонатора и прямым (входным) плечом связанного с резонатором. Второе прямое плечо ограничивается короткозамыкателем. Боковое плечо также выполняется короткозамкнутым и имеет длину, при которой прямые плечи развязаны. В этом плече расположен СВЧ коммутатор, осуществляющий регулирование связи прямых плеч тройника. Длина входного плеча выбирается так, что при накоплении взаимодействие основной и вспомогательной волны отсутствует. После завершения накопления включается коммутатор, тройник открывается, и длина шлейфа меняется. В результате меняется структура поля на окне и начинается трансформация основной волны в волну вспомогательную с передачей энергии в нагрузку. Характер передачи определяется размером окна и длиной отрезка.

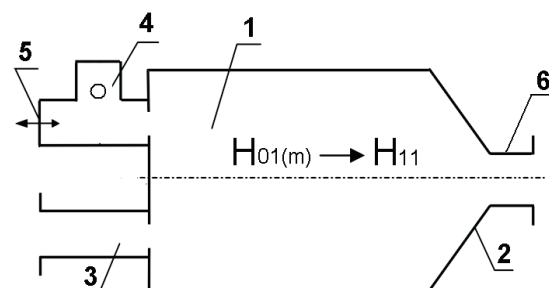


Рис. 1. Резонатор с трансформацией моды колебаний: 1 – цилиндрический резонатор; 2 – плавный переход; 3 – входной волновод; 4 –  $H$ -тройник; 5 – короткозамкнутое боковое плечо; 6 – выходной волновод

Результаты исследований [4, 5] показывают, что при использовании в компрессорах с трансфор-

мацией колебаний пакета элементов межмодовой связи на основе таких систем могут быть созданы источники СВЧ импульсов с регулируемыми параметрами, в том числе с усилением и мощностью, близкими к усилению и мощности волны в сверхразмерном накопительном резонаторе. В данной работе представлены результаты оценок характеристик таких источников, полученные в рамках приближенной теории взаимодействия колебаний в резонаторе [6] и метода матрицы рассеяния [7].

#### Оценка коэффициента межмодовой связи

Оценки выполним, полагая, что в основе работы исследуемого компрессора лежит интерференционный способ регулирования связи резонатора с нагрузкой, т. е. связь с выходом формируется в результате суммирования вспомогательной волны, генерированной основной волной на окне связи резонатора со шлейфом, и такой же волны, излучаемой из шлейфа. В режиме накопления длина шлейфа подобрана так, что эти волны имеют близкие амплитуды и противоположные фазы. Это обеспечивает устранение заметных потерь на излучение. После включения коммутатора, открывающего тройник и осуществляющего быстрое изменение длины шлейфа, излучаемая волна меняет амплитуду и фазу. В результате волны интерферируют, имея отличные от исходного состояния амплитудно-фазовые соотношения, вспомогательная волна, генерированная на окне, не компенсируется, включается связь с нагрузкой и начинается процесс вывода.

Оценим соотношение между мощностью генерируемой и излучаемой волны. Коэффициент межмодовой связи  $\gamma_{12}$  на окне, определяющий мощность генерируемой волны, можно оценить, используя выражение, известное из приближенной теории взаимодействия колебаний в резонаторе [4]:

$$\gamma_{1,2} = -\frac{1}{V} \int_{\delta V} (\vec{H}_1 \vec{H}_2 - \vec{E}_1 \vec{E}_2) dV, \quad (1)$$

где  $V$  и  $\delta V$  – соответственно, объем резонатора и объем «деформированной» его части, на которой происходит взаимодействие,  $H_1, H_2, E_1, E_2$  – векторы магнитных и электрических компонент поля взаимодействующих колебаний. Здесь же отметим, что коэффициент  $\gamma_{1,2}$  и коэффициент передачи  $h$  между связанными резонаторами как модели взаимодействующих мод в методе матрицы рассеяния [7] связаны соотношением [6]:

$$h = \gamma_{1,2} \omega \sqrt{T_1 T_2} \approx \gamma_{1,2} \omega T. \quad (2)$$

В (2)  $\omega$  – циклическая рабочая частота,  $T_1 \approx T_2 \approx T$  – время двойного пробега рабочих волн вдоль резонатора. Соотношение (2) позволяет установить связь между результатами электродинамического расчета  $\gamma_{12}$  и результатами анализа взаимодействующих мод методом матрицы рассеяния и будет использовано при определении мощности волн в резонаторе и шлейфе. Для окна радиусом

$r \ll \lambda$  ( $\lambda$  – длина волны в свободном пространстве), расположенного в магнитном поле связанных колебаний, коэффициент межмодовой связи (1) определяется выражением [4]:

$$\gamma_{12} = \frac{4r^3}{3V} \vec{H}_{1c} \vec{H}_{2c} \approx \frac{4r^3}{3V} H_{1c} H_{2c}, \quad (3)$$

где  $H_{1c}$  и  $H_{2c}$  – нормированные на объем  $V$  резонатора амплитуды магнитных составляющих поля в центре окна, следующие из формулы:

$$V = \int_V \vec{H}^2 dV. \quad (4)$$

Используя (4) и выражения для  $H$ -компонент поля, например, цилиндрического резонатора [8]:

$$\begin{aligned} H_z &= H_0 J_n(\chi r) \cos n\alpha \sin \chi_z z, \\ H_r &= H_0 \frac{\chi_z}{\chi} J'_n(\chi r) \cos n\alpha \cos \chi_z z, \\ H_\alpha &= -H_0 \frac{n\chi_z}{\chi^2} \frac{J_n(\chi r)}{r} \sin n\alpha \cos \chi_z z, \end{aligned} \quad (5)$$

нетрудно получить, что амплитудные множители магнитных составляющих поля, например, основной  $H_{01(p)}$  и вспомогательной  $H_{11(n)}$  моды колебаний такого резонатора определяются равенствами:

$$H_{01}^{01} = \frac{\lambda}{\lambda_c^{01} J_0(A_{01})}, \quad H_{01}^{11} = \frac{\lambda}{\lambda_c^{11} J_1(A_{11}) \sqrt{(A_{11}^2 - 1)}}, \quad (6)$$

где  $J_0, J_1$  – функции Бесселя первого рода,  $A_{01} = 3,832$ ,  $A_{11} = 1,841$ ,  $\lambda_c^{01}, \lambda_c^{01}, \lambda_c^{11}$  – критическая длина  $H_{01}$  и  $H_{11}$  волны. Поэтому из (5) и (6) для компонент поля в центре окна, расположенного на середине радиуса цилиндра, получаем:

$$H_{01}^{01} = \frac{\lambda J_1\left(\frac{A_{01}}{2}\right)}{\lambda_w^{01} J_0(A_{01})}, \quad H_{01}^{11} = \frac{\lambda J'_1\left(\frac{A_{11}}{2}\right) A_{11}}{\lambda_w^{11} J_1(A_{11}) \sqrt{(A_{11}^2 - 1)}} \quad (7)$$

и для коэффициента межмодовой связи, согласно (3), (7),

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2} &= \frac{4r^3}{3V} \vec{H}_{1w} \vec{H}_{2w} \approx \frac{4r^3}{3V} H_{1w} H_{2w} = \\ &= \frac{4\lambda^2 J'_0\left(\frac{A_{01}}{2}\right) J'_1\left(\frac{A_{11}}{2}\right) A_{11}}{3\lambda_w^{01} \lambda_w^{11} J_0(A_{01}) J_1(A_{11}) \sqrt{(A_{11}^2 - 1)}} \frac{r^3}{V}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\lambda_w^{11} \lambda_w^{01}$  – длина рабочих волн в резонаторе. Как следует из (2) и (8), коэффициент передачи энергии от волны к волне  $h^2 = \gamma_{12}^2 \omega^2 T^2$  пропорционален шестой степени радиуса окна и обратно пропорционален второй степени объема резонатора.

#### Оценка мощности излучаемой и генерированной волны

Мощность волны, излучаемой через окно радиусом  $r$  в стенке резонатора толщиной  $d$ , расположенное в магнитном поле моды колебаний, определяется формулой [8]:

$$P = \frac{128H_x^2\pi^3r^6z_0}{27\lambda^4\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{4\lambda_c^2}}}e^{-\frac{1,841d}{r}}, \quad (9)$$

где  $H_x$  –  $x$ -компонента магнитного поля  $H_{10}$  волны отрезка волновода,  $z_0$  – волновое сопротивление свободного пространства,  $\lambda_c$  – критическая длина волны, в которую идет излучение. Формула (9) отличается от приведенной в [8] двумя множителями (экспоненциальным и радикалом), отражающими ослабление поля на окне в стенке конечной толщины и тот факт, что излучение идет не в свободное пространство, а в направляющую линию с соответствующим волновым сопротивлением. В прямоугольном волноводе интересующие нас  $H$  компоненты  $H_{10}$  волны могут быть записаны так [8]:

$$\begin{aligned} H_x^{10} &= H_0 \cos \chi_x x \cos \chi_y y \sin \chi_z z, \\ H_x^{10} &= -H_0 \frac{\chi_x \chi_z}{\chi^2} \sin \chi_x x \cos \chi_y y \cos \chi_z z, \\ H_x^{10} &= -H_0 \frac{\chi_y \chi_z}{\chi^2} \cos \chi_x x \sin \chi_y y \cos \chi_z z, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\chi_x = m\pi/a$ ,  $\chi_y = n\pi/b$ ,  $\chi_z = p\pi/l_w$ ,  $m=1$ ,  $n=0$ ,  $p=2, \dots, l_w$  – длина отрезка. Поэтому, согласно (10), в центре окна  $H_x$  составляющая связана с амплитудным множителем  $H_{10}$  волны равенством:

$$H_0^{10} = \frac{\lambda_w H_x}{\lambda_c}. \quad (11)$$

Нормируя амплитудный множитель в соответствии с (4) и (11) получаем:

$$H_{0V}^{10} = \frac{2\lambda}{\lambda_c}, \quad H_{xV}^{10} = \frac{2\lambda}{\lambda_w}. \quad (12)$$

Далее, установив связь между амплитудными множителями, нормированными на мощность бегущей волны и объем шлейфа, из (9), с учетом (12), для излучаемой мощности с новой нормировкой находим:

$$P_{rad} = \frac{2048\pi^3r^6\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{4a^2}}}{27\lambda^4ab\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}}}e^{-\frac{1,841d}{r}}P_{wvw}. \quad (13)$$

Выражение (13) справедливо только для шлейфа полуволновой длины. По мере отклонения от этой длины появляется ошибка, т. к. магнитная составляющая поля на окне будет уменьшаться, а электрическая расти. При значительных изменениях длины следует вводить поправку, учитывающую влияние электрической составляющей.

Для мощности генерируемой (трансформированной) волны, согласно (2), (8), имеем:

$$\begin{aligned} P_{01 \rightarrow 11} &= 4\pi^2\gamma_{12}^2 f^2 T^2 P_{nvc} \approx \\ &\approx \frac{256}{9} \left( \frac{J_0\left(\frac{A_{01}}{2}\right) J_1\left(\frac{A_{11}}{2}\right) A_{11}}{J_0(A_{01}) J_1(A_{11}) \sqrt{A_{11}^2 - 1} \lambda R^2} r^3 \right)^2 P_{wvw}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (13) видно, что мощность излучаемой волны определяется мощностью волны в шлейфе, а также длиной волны и параметрами шлейфа и окна. Аналогично из (14) следует, что мощность волны генерированной определяется мощностью волны в резонаторе и коэффициентом межмодовой связи, который зависит от структуры поля взаимодействующих мод, длины рабочей волны и параметров окна связи и резонатора.

Излучение из шлейфа идет не только во вспомогательную, но и в основную рабочую волну. Поэтому оценим коэффициенты передачи  $k_{01}$  и  $k_{11}$  основной  $H_{01}$  и вспомогательной  $H_{11}$  волны из резонатора в шлейф. Эти коэффициенты определяются выражением:

$$k^2 = \frac{P_{rad}}{P_{tw}}, \quad (15)$$

где  $P_{rad}$ ,  $P_{tw}$  – соответственно мощность излучаемой и бегущей волны резонатора. Поэтому из (9), (10), (15) находим:

$$\frac{k_{01}^2}{k_{11}^2} = \frac{J_1^2\left(\frac{A_{01}}{2}\right) J_1^2(A_{01})(A_{11}^2 - 1)\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\lambda_{c11}^2}}}{2J_0^2(A_{01}) J_1^2\left(\frac{A_{11}}{2}\right) A_{11}^2\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\lambda_{c01}^2}}}. \quad (16)$$

Из (16) следует, что коэффициенты передачи сопоставимы ( $k_{01}/k_{11} \sim 0,81$ ). Это позволяет учесть излучение из шлейфа не в одну, а в две волны простым введением в (13) множителя  $\sim 0,6$ . Из-за нерезонансных условий и заурядности выходного волновода резонатора для других типов волн потерями на излучение в эти волны пренебрегаем.

#### Условие отсутствия излучения в нагрузку

В [9] на основе метода матрицы рассеяния показано, что амплитуды  $b_1$  и  $b_2$  бегущих волн в системе «накопительный резонатор–шлейф» определяются выражениями:

$$b_1 = jka_1 \frac{(a + jb)}{(c + jd)}, \quad b_2 = -\frac{kha_1 e^{-\alpha - j\varphi}}{(c + jd)}, \quad (17)$$

где  $a, b, c, d$  – переменные величины, зависящие от набега фазы  $\varphi, \psi$  волн в резонаторе и шлейфе, а также от постоянных затухания  $\alpha, \beta, \gamma$  волн в резонаторе, входном прямом и боковом плече тройника и коэффициентов передачи  $k, h$  входного окна резонатора и окна связи резонатора и тройника. Там же показано, что максимум накопленной энергии достигается при значениях  $\varphi$ , удовлетворяющих равенству:

$$\varphi = \arctg \left[ \frac{ag - bf}{af + bg} \right],$$

где

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{1 - h^2} - e^{-\beta} \frac{\cos \psi (1 + e^{-\gamma})}{2}, \\ g &= e^{-\beta} \frac{\sin \psi (1 + e^{-\gamma})}{2}. \end{aligned}$$

Поэтому, приравнявая (13) и (14) и учитывая (17), находим условие отсутствия излучения в нагрузку, т. е. условие компенсации вспомогательной волны, генерированной на окне:

$$\frac{|b_1|^2}{|b_2|^2} = \frac{P_{nwc}}{P_{nvw}} = \frac{a^2 + b^2}{h^2} = \frac{0,165\pi^3 R^4 \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} (J_0(A_{01})J_1(A_{11})\sqrt{A_{11}^2 - 1})^2}}{\lambda^2 ab \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_p^2} \left( J_0\left(\frac{A_{01}}{2}\right) J_1\left(\frac{A_{11}}{2}\right) A_{11} \right)^2}} \times e^{\frac{1,841d}{r}} \quad (18)$$

Выражение (18) устанавливает функциональную связь между электрической длиной шлейфа и радиусом окна связи, при которой достигается компенсация волн. На рис. 2 приведены зависимости отношения мощности излучаемой и генерированной волны от электрической длины шлейфа.

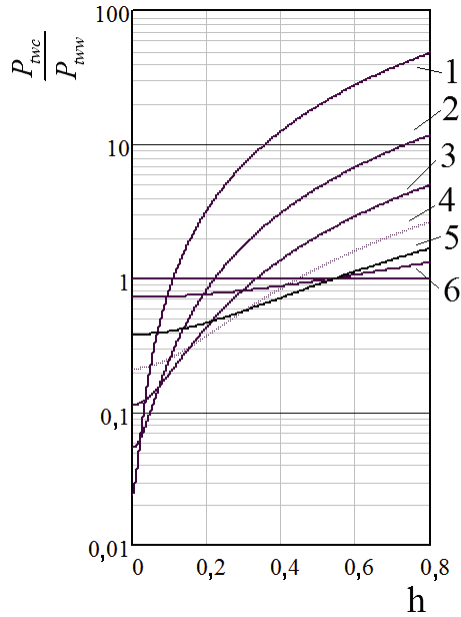


Рис. 2. Зависимости отношения мощности излучаемой и генерированной  $P_{nwc}/P_{nvw}$  волны от коэффициента передачи окна связи резонатора со шлейфом: 1)  $h=0,15$ ; 2) 0,3; 3) 0,45; 4) 0,6; 5) 0,75; 6) 0,9

Точки пересечения кривых с прямой линией со значением ординаты, равным 1, соответствуют точкам совпадения мощности интерферирующих волн. Как видно из зависимостей, чем больше окно, тем сильнее отклонение от полуволновой длины. При этом увеличивается ошибка оценки. Поэтому кривые рис. 2 отражают только тенденцию отклонения длины шлейфа от полуволновой длины по мере изменения размера окна связи. Вместе с тем качественно ход кривых рис. 2 верно отражает данные экспериментов [4, 5].

### Максимальная мощность и усиление

Как показывают экспериментальные данные, максимальная мощность импульсов достигается при четвертьволновой длине шлейфа. Это является следствием двух факторов. Первый связан с тем, что при этом волна, излученная из четвертьволнового шлейфа, имеет минимальную амплитуду. Второй фактор обусловлен инверсией фазы излученной волны – при указанной длине шлейфа волна излучается не магнитным, как при накоплении, а электрическим диполем, расположенным практически в пучности стоячей волны, а не в узле, как при излучении магнитным диполем. Поэтому мощность выходного импульса в приближении малого радиуса окна связи будет сравнима с мощностью сгенерированной вспомогательной волны, т. е. будет определяться выражением (14), а коэффициент усиления даваться формулой:

$$G \approx \frac{256}{9} \left( \frac{J_0\left(\frac{A_{01}}{2}\right) J_1\left(\frac{A_{11}}{2}\right) A_{11}}{J_0(A_{01})J_1(A_{11})\sqrt{A_{11}^2 - 1}} r^3 \right)^2 G_c, \quad (19)$$

где  $G_c$  – коэффициент усиления резонатора. Как следует из (19), усиление пропорционально шестой степени отношения радиуса окна связи  $r$  к длине рабочей волны (при  $R=\lambda$ ). Из (13) нетрудно получить, что близким к (19) выражением, как по форме, так и по численным значениям, будет определяться и коэффициент усиления компрессора с выводом энергии через интерференционный переключатель.

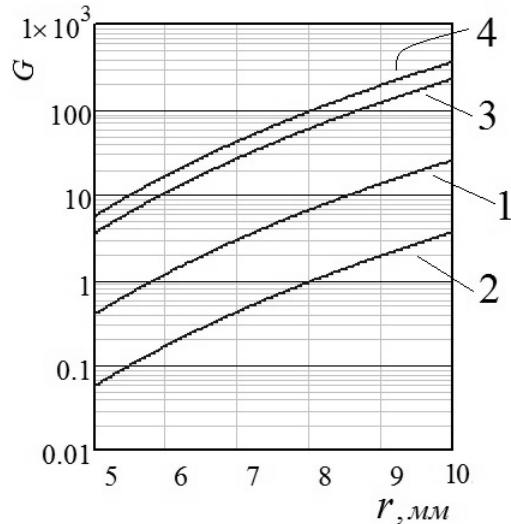


Рис. 3. Зависимости усиления компрессора от радиуса окна связи резонатора со шлейфом  $r$ . Трансформация на одном окне связи: 1)  $r=2,2$  см,  $G=200$ ; 2)  $r=4,5$  см,  $G=500$ . Трансформация на окнах связи: 3)  $r=2,2$  см,  $G=200$ ,  $n=3$ ; 4)  $r=4,5$  см,  $G=500$ ,  $n=10$

На рис. 3 приведены зависимости усиления компрессора от радиуса окна связи для двух значений

радиуса резонатора (2,2 и 4,5 см) при фиксированной длине рабочей волны. Значения усиления резонаторов взяты 200 и 500. Из зависимостей рис. 3 видно, что при трансформации на одиночном окне (нижние кривые) необходимо использовать резонатор относительно малого радиуса, не более  $\lambda$ . При относительно большом радиусе резонатора ( $R > \lambda$ ) эффективный вывод возможен только при значительном количестве шлейфов (верхние кривые). Понятно, что и в первом, и во втором случае это обусловлено пропорциональностью усиления отношению площади окон связи и сечения резонатора.

Линиями 3, 4 на рис. 3 отражен ход усиления как функции радиуса окна связи при квадратичной зависимости мощности сгенерированной волны от количества окон. Такая зависимость обусловлена выполнением резонатором роли суммирующего устройства, в котором мощность волны пропорциональна второй степени суммарной амплитуды волн, генерированных на окнах. Как видно из хода кривых, достижение мощности импульсов, сопоставимой с мощностью волны резонатора, возможно только при площади окон, сопоставимой с площадью сечения резонатора.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Диденко А.Н., Юшков Ю.Г. Мощные СВЧ импульсы наносекундной длительности. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 112 с.
2. Августинович В.А., Артеменко С.Н., Каминский В.Л., Новиков С.А., Юшков Ю.Г. Двухступенчатая система компрессии сверхвысокочастотных импульсов в последовательно связанных резонаторах // Приборы и техника эксперимента. – 2007. – № 2. – С. 96–99.
3. Августинович В.А., Артеменко С.Н., Каминский В.Л., Новиков С.А., Юшков Ю.Г. Двухканальный резонансный СВЧ компрессор гигаваттного уровня мощности // Изв. ВУЗов. Физика. – 2012. – Т. 55. – № 11/2. – С. 87–91.
4. Августинович В.А., Артеменко С.Н., Игумнов В.С., Новиков С.А., Юшков Ю.Г. Компрессия СВЧ импульсов двумя связанными модами сверхразмерного резонатора // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2011. – Т. 16. – № 7. – С. 43–45.

#### Заключение

Таким образом, выполненные в работе оценки условий, обеспечивающих развязку резонатора с нагрузкой в режиме накопления, а также оценки усиления и мощности выходных импульсов СВЧ компрессора с выводом энергии трансформацией моды колебаний на окне связи показывают, что исследованный способ вывода достаточно эффективен для формирования СВЧ импульсов. Вместе с тем использование такого компрессора для получения импульсов предельно высокого усиления и высокой мощности, сопоставимых с усилением и мощностью волны накопительного резонатора, возможно только при использовании окон связи с общей площадью, сопоставимой с площадью сечения резонатора. Это означает, что наиболее эффективными в таком способе вывода могут быть элементы межмодовой связи, равномерно распределенные по сечению резонатора.

*Авторы выражают признательность Ю.Г. Юшкову за полезные дискуссии при обсуждении результатов работ.*

*Работа выполнена в рамках государственного задания «Наука» Минобрнауки РФ № 2.3408.2011.*

5. Августинович В.А., Артеменко С.Н., Игумнов В.С., Новиков С.А., Юшков Ю.Г. Формирование нано- и субнаносекундных СВЧ импульсов при выводе энергии из резонатора трансформацией моды колебаний // Изв. ВУЗов. Физика. – 2011. – Т. 54. – № 11/2. – С. 229–234.
6. Штейншлейгер В.Б. Явления взаимодействия волн в электромагнитных резонаторах. – М.: Госиздат Оборонной промышленности, 1955. – 114 с.
7. Альтман Дж. Устройства СВЧ. – М.: Мир, 1968. – 487 с.
8. Артеменко С.Н., Августинович В.А., Каминский В.Л., Чумерин П.Ю., Юшков Ю.Г. Анализ процесса формирования радиоимпульсов в сверхразмерном резонаторе с интерференционным ключом // Радиотехника и Электроника. – 1997. – Т. 42. – № 8. – С. 1011–1018.
9. Никольский В.В. Теория электромагнитного поля. – М.: Высшая школа, 1961. – 371 с.

*Поступила 11.04.2013 г.*



## МОДИФИКАЦИЯ ЭЛЕМЕНТОВ РЕЛЯТИВИСТСКОГО МАГНЕТРОНА

И.И. Винтизенко

Томский политехнический университет

E-mail: vintizenko@tpu.ru

Представлены результаты экспериментальных исследований релятивистских магнетронных СВЧ-генераторов, направленные на увеличение эффективности и повышение стабильности генерируемых СВЧ-импульсов. Для этих целей существенной модификации подвергнуты основные элементы магнетрона: анодный блок, устройство вывода СВЧ-излучения, антенная система, катодный узел.

**Ключевые слова:**

Релятивистский магнетронный СВЧ-генератор, анодный блок, внешний канал связи.

**Key words:**

Relativistic microwave magnetron, anode block, external coupling channel.

**Введение**

Использование сильноточных электронных ускорителей для питания различных СВЧ-генераторов открыло новые перспективы перед этими приборами. Такие достоинства приборов со скрещенными полями, как частотная и фазовая стабильность генерируемого излучения, низкий уровень побочных колебаний и гармоник, высокий к.п.д., небольшие весогабаритные показатели и стоимость, стали основой для проведения интенсивных исследований релятивистских магнетронных генераторов (РМГ) [1]. Первые эксперименты позволили получить мощность от сотен мегаватт до нескольких гигаватт при к.п.д. 10...30 %. В отличие от генераторов О-типа в РМГ взаимодействие сильноточного релятивистского электронного пучка с высокочастотными полями происходит непосредственно в диоде, т. е. в области создания электронного пучка. В этом случае снимаются ограничения, связанные с обеспечением высокой энергии электронов при малом скоростном разбросе и с освоением больших токов. В настоящее время исследования развиваются по пути создания стабильных эффективных источников СВЧ, работающих в импульсно-периодическом режиме [2].

Колебательная система релятивистского магнетронного генератора, как и его классического аналога, является распределенной электродинамической структурой и отличается многомодовостью. В импульсном режиме вследствие нестационарности питающих полей и плазменных процессов в прикатодной области наблюдаются модовая и спектральная нестабильности СВЧ-излучения. Актуальным также является вывод из прибора мощности сверхвысокого уровня, транспортировка и пространственное формирование излучения. На решение указанных проблем были нацелены исследования, результаты которых представлены ниже.

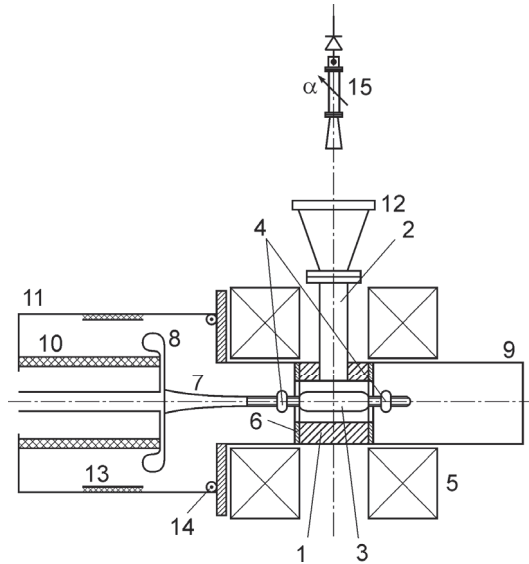
**Анодный блок релятивистских магнетронных генераторов**

Одним из путей увеличения эффективности релятивистских магнетронных СВЧ-генераторов яв-

ляется увеличение числа резонаторов. Возбуждение рабочего  $\pi$ -вида колебаний в приборах с увеличенным числом резонаторов происходит при больших синхронных магнитных полях; что и приводит к увеличению электронного к.п.д. прибора. Однако использование систем с увеличенным числом резонаторов резко усиливает конкуренцию видов колебаний. По результатам расчетов разделение видов колебаний  $\pi$  и ближайшего к нему  $2\pi/3$  по величине фазовой скорости для 6-резонаторного анодного блока составляет  $\beta_{\pi}/\beta_{2\pi/3} \approx 0,69$ , по отношению к его  $(-1)$  гармонике  $-\beta_{\pi}/\beta_{2\pi/3}^1 \approx 1,38$ . Разделение видов колебаний  $\pi$  и ближайшего к нему  $3\pi/4$  для 8-резонаторного анодного блока примерно на треть меньше  $\beta_{\pi}/\beta_{3\pi/4} \approx 0,76$  и  $\beta_{\pi}/\beta_{3\pi/4}^1 \approx 1,26$ . Из расчета также следует, что величина замедления рабочего вида колебаний у 8-резонаторного анодного блока в сравнении с 6-резонаторным примерно на 26 % больше, что позволяет прогнозировать более высокую эффективность его работы.

Анодный блок исследуемого РМГ имеет 8 резонаторов лопаточного типа; вывод мощности выполнен в виде одной или двух узких щелей в торцах двух противоположных резонаторов и плавных волноводных переходов к стандартному сечению  $72 \times 34$  мм. Размеры анодного блока составляли внутренний диаметр 43 мм, внешний диаметр 86 мм, длина анодного блока 72 мм. На катод магнетрона подается импульсное напряжение 300...400 кВ от линейного индукционного ускорителя (ЛИУ) 04/6 [3]; постоянное магнитное поле создается парой Гельмгольца и может изменяться в широких пределах 0,2...0,55 Т (рис. 1). Диаметр высоковольтного фланца ускорителя и расстояние до анодного блока изначально выбирались по результатам расчетов хода силовых линий магнитной системы так, чтобы линии, выходящие из пространства взаимодействия РМГ «замыкались» на поверхность высоковольтного фланца. Тем самым уменьшаются потери электронов из пространства взаимодействия. Для ограничения утечки тока с противоположной стороны анодного блока использована труба дрейфа 9 с внутренним диаметром

184 мм. Чем больше диаметр трубы дрейфа, тем меньше предельный ток транспортировки в ней. Однако внешний диаметр трубы ограничен внутренним диаметром магнитной системы. Чрезмерное увеличение диаметра приводит к неоправданному увеличению объема замагничивания и, соответственно, к росту энергозатрат на создание магнитного поля.



**Рис. 1.** Схема эксперимента: 1 – анодный блок РМГ; 2 – волноводный вывод СВЧ-мощности; 3 – катод; 4 – концевые экраны; 5 – магнитная система; 6 – торцевые крышки анодного блока; 7 – катододержатель; 8 – высоковольтный фланец; 9 – труба дрейфа; 10 – изолятор ЛИУ; 11 – вакуумная камера ЛИУ; 12 – рупорная антенна с вакуумным окном; 13 – емкостной делитель напряжения; 14 – пояс Роговского; 15 – детектор СВЧ-сигнала с приемной антенной и аттенуатором

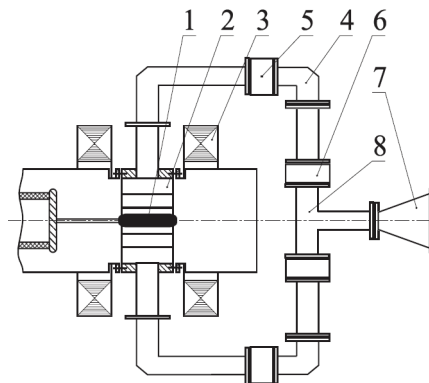
Результаты предварительных экспериментов показали, что 6-резонаторный РМГ с одним выводом мощности, имеющий равные с 8-резонаторным анодным блоком размеры, демонстрирует более высокую эффективность (~20 %) при максимальной выходной мощности 300 МВт (параметры импульса питания: катод-анодное напряжение 340 кВ, ток 4,3 кА). При том же питании РМГ с 8-резонаторным анодным блоком и одним выводом мощности имеет выходную мощность ~250 МВт. Измерения показали, что излучение 8-резонаторного РМГ характеризуется широким спектром (~150 МГц) и наличием двух максимумов, связанных с возбуждением двух видов колебаний, имеющих близкие частоты. Одновременное существование двух видов колебаний и конкуренция между ними приводят к снижению эффективности работы РМГ и расширению спектра колебаний.

Решение проблемы конкуренции видов колебаний и достижение более высокой эффективности оказывается возможным путем введения в резонансную систему внешних управляющих связей [4]. В релятивистском магнетроне внешняя связь может быть реализована путём объединения волноводных выводов мощности из различных резонаторов.

В этом случае взаимодействие колебательных компонент резонансной системы с физической точки зрения аналогично процессам когерентного взаимодействия в системах взаимносинхронизированных автогенераторов и при соответствующем характере взаимной связи может усилить «внутренний» – электронный – механизм устойчивости и тем самым обеспечить более высокую стабильность рабочего вида колебаний и подавление конкурирующих видов.

#### Внешний канал связи РМГ

Схема модифицированного РМГ показана на рис. 2. Внешний канал связи – 4 подключается к двум противоположным резонаторам анодного блока. Вывод СВЧ-мощности осуществляется через волноводный Н-тройник – 8, нагруженный пирамидальной антенной – 7. Длина канала связи с помощью набора волноводных вставок – 5 могла изменяться в широких пределах.



**Рис. 2.** Релятивистский магнетрон с волноводным каналом связи. 1 – катод; 2 – анодный блок; 3 – магнитная система; 4 – канал связи; 5, 6 – волноводные вставки; 7 – антенна

Для магнетрона с числом резонаторов  $N$ , удовлетворяющих условию:  $N/2$  – четное число (8-резонаторный анодный блок), колебания противоположных резонаторов для  $\pi$ -вида по отношению к выходным волноводам противофазны. Для  $3\pi/4$ -вида колебания указанных резонаторов, наоборот, возбуждают выходные волноводы в фазе. Следовательно, сигналы с выходов магнетрона для  $\pi$ -вида суммируются в антисимметричной схеме, когда общая нагрузка (тройник) смещена относительно оси электрической симметрии канала на четверть длины волны, и вычитаются в симметричной (на рис. 2 изображена симметричная схема). Для  $3\pi/4$ -вида, наоборот, сигналы вычитаются в общей нагрузке антисимметричной схемы и суммируются в симметричной. Эти соображения позволяют в процессе эксперимента однозначно идентифицировать режим генерации магнетрона на указанных видах колебаний. Симметричная конфигурация канала связи реализуется при включении одинаковых вставок – 6 по обеим сторонам тройника – 8. Когда одна из вставок – 6 имеет длину на  $\lambda_g/2$  большую, чем противоположная ей, получаем

антисимметричную схему ( $\lambda_g$  – длина волны в волноводе). Следует заметить, что внешним каналом можно связать не только противоположные резонаторы, но и любые другие пары или их комбинации.

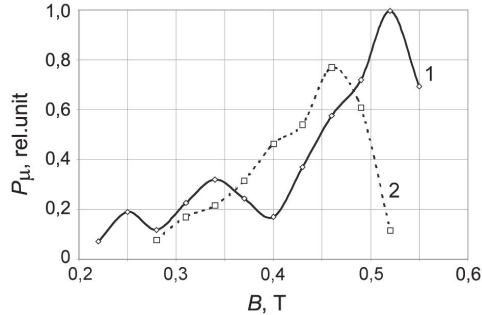


Рис. 3. Зависимость мощности 8-резонаторного РМГ от величины индукции магнитного поля с внешним каналом связи при антисимметричном включении (1) и симметричном включении (2) 3-дБ Н-тройника

Восьмирезонаторный РМГ исследовался как в симметричной, так и в антисимметричной схемах [5]. В процессе исследования с некоторым шагом изменялась длина канала связи резонаторов и на каждом шаге производились измерения уровня мощности и спектра излучения. Несмотря на трудоемкость, эти эксперименты являются необходимым этапом, так как позволяют определить длину каналов связи с оптимальным взаимодействием колебаний резонаторов, идентифицировать возбуждаемый вид, например, для настройки системы с распределенным выводом излучения.

Исследование антисимметричной схемы позволило найти такие значения длины канала, при которых генерация происходила только на  $\pi$ -виде с выходной мощностью до 500 МВт. При оптимальной длине канала связи достигаются наилучшие выходные характеристики РМГ. В этом случае полная длина канала связи (~1450 мм) пропорциональна  $(n\lambda_g + \lambda_g/2)$ , где  $\lambda_g = 13,6$  см – длина волны в волноводе,  $n \sim 10$ . Спектр колебаний в этой области одночастотный с полосой по уровню –3 дБ порядка 70 МГц. За пределами указанной области происходит расширение спектральной полосы излучения до 100 МГц и более, появляются дополнительные частотные максимумы, и снижается выходная мощность импульсов (до 340 МВт).

Сравнивая полученные результаты с результатами экспериментов с магнетроном с одним выводом мощности и с магнетроном с несвязанными между собой двумя выводами мощности, можно заключить, что введение дополнительного канала взаимодействия между резонаторами колебательной системы магнетрона оказывает существенное влияние на характеристики процесса генерации. Это влияние, очевидно, зависит от фазовых свойств канала связи. При оптимальной длине канала он оказывает стабилизирующее воздействие на процесс генерации.

Аналогичным образом исследовалась симметричная схема, и были определены длины канала

связи, при которых магнетрон работал только на  $3\pi/4$ -виде. На рис. 3 приведены зависимости выходной мощности от магнитного поля для симметричной и антисимметричной конфигураций канала связи резонаторов РМГ. В каждом из вариантов длина канала отдельно подбиралась с помощью вставок – 5 (рис. 2) по критерию максимального уровня выходной мощности и стабильности спектра излучения. Важно подчеркнуть, что внешний канал связи практически устраняет конкуренцию указанных видов, обеспечивая их раздельное существование в каждой из схем в широком интервале значений магнитного поля. Ширина спектров излучения для обоих видов на уровне –3 дБ не превышает 70 МГц в широком интервале значений магнитного поля. При оптимальной длине канала связи наблюдается также стабилизация уровня генерируемой в импульсах мощности.

Таким образом, введение связи между резонаторами магнетрона приводит к взаимодействию СВЧ-полей в резонаторах и взаимному выравниваю амплитуд и фаз высокочастотного поля в соответствующих резонаторах анодного блока. Это способствует стабилизации рабочего вида, для которого колебания, прошедшие канал связи, синфазны с колебаниями в резонаторах, и подавлению остальных видов.

#### Устройство вывода СВЧ-излучения

Распределенный вывод СВЧ-излучения РМГ позволяет формировать направленное излучение, снять ограничения на уровень выводимой мощности, обеспечить компактность излучающей системы. Такой вывод реализуется либо с помощью системы излучателей, либо с помощью щелевой решетки излучателей, введенной в волноводный канал связи резонаторов.

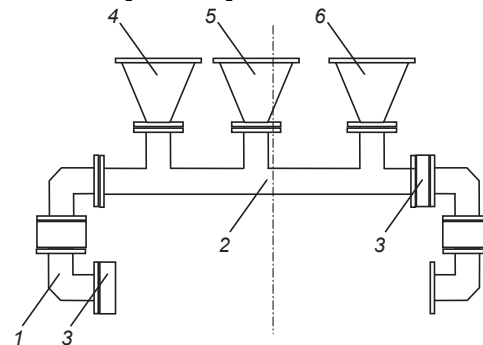


Рис. 4. Канал связи резонаторов магнетрона с тремя излучателями: 1 – волноводные Н-повороты; 2 – Н-тройник; 3 – волноводные вставки; 4, 5, 6 – антенны

Волноводный канал построен с использованием симметрично-несимметричных схем [6]. Конструкция канала связи 6-резонаторного РМГ для трех нагрузок приведена на рис. 4 [7]. Центральная нагрузка смещена относительно оси электрической симметрии канала связи на  $\lambda_g/4$ . Поскольку для рабочего  $\pi$ -вида колебания резонаторов на входах цепи синфазны, будет происходить их вычитание в нагрузке – 5. Если расположить бли-

жайшие нагрузки – 4, 6 на расстоянии  $\lambda_g/4$  от центральной, а остальные – на расстоянии кратном  $\lambda_g/2$  друг от друга, то реализуется «параллельное» соединение нагрузок левой и правой групп. Для равноамплитудного распределения колебаний по нагрузкам необходима одинаковость их проводимостей. Синфазное распределение реализуется, если расстояние между нагрузками в группах кратно  $\lambda_g$ , а одна из нагрузок дополнительно смещена относительно центральной на  $\lambda_g/2$ . Центральная нагрузка играет важную роль в селекции колебаний. Расчет резонансной системы модифицированного магнетрона показывает, что вносимые со стороны этой нагрузки в противофазных режимах потери значительно снижают нагруженную добротность, что обеспечивает быстрое затухание нерабочих видов колебаний.

В эксперименте длина канала связи выбрана исходя из результатов исследований с одним излучателем [4] и составляла  $\sim 17\lambda_g$  для рабочего  $\pi$ -вида колебаний. Из-за больших геометрических размеров антенн правая и левая нагрузки размещены друг от друга и расположены на расстоянии  $5\lambda_g/4$  и  $7\lambda_g/4$  относительно центральной.

При объединении выводов магнетрона каналом связи, уровень мощности и энергии с выхода центрального излучателя не превышает 25 МВт и 1,5 Дж, соответственно, что позволяет сделать заключение о существовании в системе  $\pi$ -вида, колебания которого в центральной нагрузке вычитаются. Результаты спектральных измерений с одного из боковых излучателей показывают, что ширина спектра импульса не превышает 70 МГц по уровню –3 дБ. Уровни мощности боковых излучателей отличаются не более чем на 10 % и составляют  $\sim 200$  МВт при энергии  $\sim 5$  Дж, что указывает на равноамплитудное распределение колебаний в нагрузках.

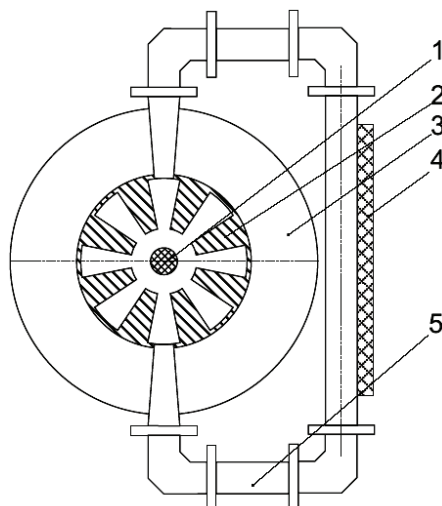


Рис. 5. Схема эксперимента с антенной решеткой. 1 – катод; 2 – анодный блок; 3 – магнитная система; 4 – антенная решетка; 5 – волноводные вставки

Стабильность фазового распределения колебаний на системе рупорных излучателей подтвер-

ждается специально проведенным экспериментом по измерению пространственного распределения СВЧ-излучения. Глубокие минимумы (–13 дБ) на диаграмме направленности указывают на присутствие в системе колебательного режима с устойчивым амплитудно-фазовым профилем. Таким образом, экспериментальные результаты показывают, что объединение резонаторов РМГ внешним каналом связи с общими нагрузками-излучателями позволяет реализовать распределенный вывод мощности с заданным амплитудно-фазовым профилем колебаний.

Канал связи резонаторов в виде волноводно-щелевой решетки был исследован для формирования направленного излучения. Для проведения экспериментов была изготовлена линейная волноводно-щелевая решетка с четырьмя переменными щелями [8]. Схема эксперимента показана на рис. 5. Продольные щели прорезаются в широкой стенке волновода на расстоянии  $\lambda_g/2$  попеременно по разные стороны относительно средней линии волновода. Синфазное возбуждение щелей, расположенных на расстоянии  $\lambda_g/2$ , обеспечивается противоположными по направлению поперечными токами, что эквивалентно дополнительному сдвигу по фазе на  $180^\circ$ . Такая система щелей при их синфазном возбуждении фокусирует излучение в плоскости, проходящей через продольную ось волновода, и в направлении, нормальном широкой стенке волновода. Щели закрыты диэлектрическим окном из органического стекла с вакуумным уплотнением.

В экспериментах на ускорителе волноводно-щелевая решетка устанавливалась между двумя выводами релятивистского магнетрона. Диаграмма направленности излучения решетки измерялась двумя детекторами, один из которых перемещался в вертикальной плоскости, а другой находился в направлении нормали к апертуре решетки и регистрировал опорный уровень сигнала. Сравнение измеренной диаграммы с расчетной однозначно доказывает существование  $\pi$ -вида колебаний. Стабильность рабочего вида подтверждается также результатами спектральных измерений, ширина спектра на уровне –3 дБ  $\sim 70$  МГц, что существенно уже спектра РМГ с несвязанными резонаторами.

Таким образом, введение внешней связи между резонаторами релятивистского магнетрона создает дополнительный и эффективный инструмент воздействия на колебательные процессы в релятивистском магнетроне. При соответствующей (оптимальной) настройке канала сильное внешнее взаимодействие выделенных колебательных подсистем – резонаторов обеспечивает более глубокую стабилизацию первичных процессов в генераторе, связанных с формированием электронного потока в поле электромагнитных колебаний. Благодаря внешней связи реализуется достаточно сильный селективный механизм удержания заданных фазовых соотношений в системе, следствием чего яв-



ляется повышение модовой и спектральной стабильности излучения. В результате удается обеспечить работу магнетрона на сложную нагрузку в виде интегрированной в канал связи системы излучателей и реализовать эффективный отбор мощности и пространственное формирование излучения. Определенное при «холодных» измерениях значение ослабления СВЧ-сигнала между решеткой и детектором позволило оценить уровень генерируемой РМГ СВЧ-мощности, составивший ~260 МВт.

### Катодный узел РМГ

Для классических магнетронов известен способ увеличения их эффективности, заключающийся в использовании экранов, устанавливаемых на краях катодов вне пространства взаимодействия. Концевые экраны имеют наружный диаметр, который превышает диаметр катода, а иногда превышает и диаметр анода, что препятствует утечке электронов из пространства взаимодействия под действием сил пространственного заряда.

Для релятивистских магнетронов концевые экраны не применялись из-за опасения образования взрывной электронной эмиссии на выступающих относительно поверхности катода поверхностях. Образование плазмы и ее дрейф в продольном магнитном поле с характерной для взрывной электронной эмиссии скоростью порядка  $10^7$  см/с могут привести к замыканию плазмой промежутка концевой экран-торец анодного блока и закорачиванию источника питания. Следует добавить, что катоды РМГ связаны с источником питания только с одной стороны (рис. 1) в отличие от классических магнетронов, имеющих, как правило, симметричное питание катода. Поэтому в РМГ кроме потерь за счет сил пространственного заряда имеется дополнительный фактор потерь тока из пространства взаимодействия под действием азимутального магнитного поля, возникающего из-за протекающего по катоду тока.

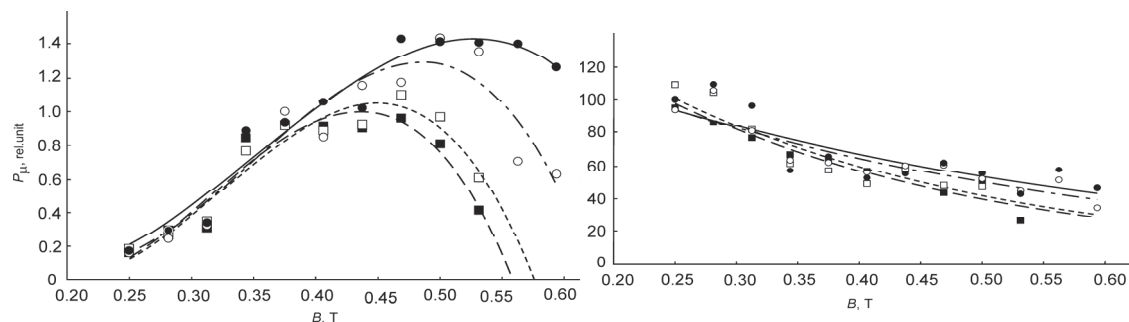
Концевые экраны [9] были изготовлены из дюралюминия в виде шайб с внешним диаметром 24 мм, толщиной 10 мм и радиусом скругления цилиндрической поверхности 5 мм. Экраны могли перемещаться относительно краев катода, для это-

го на поверхности катододержателя была выполнена резьба, а со стороны трубы дрейфа катододержатель выступал за пределы анодного блока на 70 мм.

В экспериментах сравнивались выходные импульсы РМГ при использовании катода без концевых экранов, с одним экраном со стороны высоковольтного фланца, с одним экраном со стороны трубы дрейфа и с двумя экранами. Расстояние между концевыми экранами диаметром 24 мм и катодом составляло по 12 мм с каждой стороны (до торцевых крышек анодного блока – по 7 мм).

На рис. 6 представлены зависимости мощности и длительности СВЧ-импульсов от величины индукции магнитного поля, снятые при равном зарядном напряжении первичного источника питания ЛИУ. Как видно из рис. 6, а, к заметному увеличению мощности СВЧ-импульса приводит экран, установленный со стороны трубы дрейфа. Это позволяет заключить, что основные утечки тока из пространства взаимодействия РМГ происходят в трубу дрейфа. Напомню, что выше уже сообщалось о принятых мерах по уменьшению потерь на поверхность высоковольтного фланца. Приведенные зависимости показывают, что в случае применения концевых экранов катода расширяется область синхронных магнитных полей, при которых регистрируется максимальный уровень СВЧ. Анализ осциллограмм показал, что при использовании экранов наблюдается увеличение выходного напряжения ЛИУ в сравнении с катодом без экранов за счет уменьшения потерь тока. В свою очередь это требует увеличения синхронного магнитного поля и сопровождается заметным увеличением мощности. На рис. 6, б также показаны зависимости длительности импульсов СВЧ от величины индукции магнитного поля. Обращает внимание примерное равенство длительности СВЧ-импульсов при наличии и отсутствии экранов на катоде, несмотря на существенное отличие в уровнях мощности выходных импульсов.

Таким образом, в результате исследований релятивистского магнетронного генератора с катодными концевыми экранами установлено, что применение экранов увеличивает мощность излучения на 40...50 % при сохранении длительности импуль-



**Рис. 6.** Зависимости мощности (слева) и длительности (справа) СВЧ-импульса РМГ от величины индукции магнитного поля (■ - - - - катод без экранов; □ - - - - катод с экраном со стороны высоковольтного фланца; ○ - - - - катод с экраном со стороны трубы дрейфа; ● - - - - катод с двумя экранами)

са СВЧ; большее влияние оказывает экран, расположенный со стороны трубы дрейфа; увеличение параметров импульса питания приводит к пропорциональному росту мощности СВЧ-импульсов.

#### Заключение

Основные результаты работы по модификации элементов РМГ сводятся к следующему. Применение внешнего канала связи допускает использование РМГ с увеличенным числом резонаторов анодного блока, обладающих более высокой эффективностью. В этом случае можно обеспечить стабилизацию, распределенный вывод мощности и формирование направленного СВЧ-излучения. Разработан и испытан вывод излучения релятивистского

магнетрона через систему излучателей и волноводно-щелевую решетку. Получено пространственное распределение излучения с устойчивой диаграммой направленности, подтверждающее высокую стабильность амплитудно-фазовых соотношений в магнетронном генераторе. Применение концевых экранов существенно увеличивает выходные характеристики РМГ.

В результате исследований создан эффективный и высокостабильный источник мощного СВЧ-излучения (500 МВт), работающий в импульсно-периодическом режиме с частотой следования до 200 Гц.

*Исследования выполнены в рамках контракта по гос. заданию «Наука».*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bekefi G., Orzechovski T. Giant microwave bursts emitted from a field emission relativistic electron beam magnetron // Phys. Rev. Lett. – 1976. – V. 37. – № 6. – P. 379–382.
2. Винтизенко И.И., Новиков С.С. Релятивистские магнетронные СВЧ-генераторы. – Томск: Изд-во НТЛ, 2009. – 432 с.
3. Винтизенко И.И. Линейные индукционные ускорители для релятивистских СВЧ-приборов. – М.: Изд-во Физматлит, 2012. – 407 с.
4. Винтизенко И.И., Гусельников В.И., Заревич А.И., Новиков С.С. Влияние внешней связи резонаторов релятивистского магнетрона на стабильность колебаний // Письма в ЖТФ. – 2003. – Т. 29. – Вып. 7. – С. 64–70.
5. Винтизенко И.И., Заревич А.И., Новиков С.С. Спектральные характеристики релятивистского магнетрона со связанными резонаторами // Письма в ЖТФ. – 2006. – Т. 32. – Вып. 23. – С. 40–47.
6. Новиков С.С., Усюкевич А.А. Синхронные режимы системы автогенераторов, связанных через канал большой длины // Изв. ВУЗов. Физика. – 2010. – Т. 53. – № 9/2. – С. 241–243.
7. Винтизенко И.И., Новиков С.С., Заревич А.И. Релятивистский магнетрон с распределенным выводом СВЧ излучения // Письма в ЖТФ. – 2005. – Т. 31. – Вып. 9. – С. 63–68.
8. Винтизенко И.И., Новиков С.С. Релятивистский магнетрон с каналом связи резонаторов в виде волноводно-щелевой решетки // Письма в ЖТФ. – 2009. – Т. 35. – Вып. 23. – С. 88–95.
9. Винтизенко И.И., Мащенко А.И., Митюшкина В.Ю. Катод с концевыми экранами для релятивистского магнетрона // Письма в ЖТФ. – 2012. – Т. 38. – Вып. 21. – С. 56–62.



## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ФЕРРОМАГНИТНОЙ ВСТАВКИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

Т.В. Коваль, Ле Ху Зунг

Томский политехнический университет

E-mail: lehuydungvn@gmail.com

*Рассмотрена транспортировка низкоэнергетического сильноточного электронного пучка, компенсированного по заряду, в аксиально-симметричном магнитном поле и в несимметричном магнитном поле обратного токопровода при наличии ферромагнитных вставок, расположенных за коллектором. Численно исследовано влияние геометрических размеров и свойств материала цилиндрических вставок (сплошной и полый) на распределение плотности пучка на коллекторе. Показано, что с помощью ферромагнитных вставок можно управлять сечением и распределением плотности электронного пучка на мишени.*

### Ключевые слова:

*Электронный пучок, плазма, канал транспортировки, трансформация, магнитное поле, ферромагнетик.*

### Key words:

*Electron beam, plasma, transport channel, transformation, magnetic field, ferromagnet.*

### Введение

Низкоэнергетические (10...30 кэВ) сильноточные (до 25 кА) электронные пучки применяют для поверхностной обработки материалов и изделий. В импульсном электронном источнике со взрывоэмиссионным катодом [1] получены сильноточные микросекундные (до 5 нс) электронные пучки с плотностью энергии до 20 Дж/см<sup>2</sup>. Одна из важных задач при использовании импульсных электронных источников – это управление формой и распределением плотности электронного пучка на мишени.

Транспортировка сильноточного электронного пучка к мишени в протяженных плазменных каналах с малыми потерями тока возможна только в ведущем магнитном поле (1,5...2 кГс), которое ограничивает самофокусировку пучка собственным магнитным полем (более 1 кГс) [2]. Транспортировка электронного пучка без изменения его формы осуществляется в аксиально-симметричном ведущем магнитном поле [3]. Преобразование формы пучка круглого сечения осуществляется в конце канала транспортировки во избежание потерь тока пучка в аксиально-неоднородном магнитном поле. Неоднородное магнитное поле специальной конфигурации формируется обратным токопроводом, сконструированным в виде прямоугольных пластин или ряда шпилек, прикрепленных к мишени [4–6].

В ряде случаев трудно исключить краевые эффекты соленоида на выходе из трубы дрейфа, которые приводят к увеличению сечения пучка на мишени. В несимметричном магнитном поле обратного токопровода краевые электроны образуют «завихрения» вокруг шпилек или пластин токопровода, что является нежелательным эффектом при формировании прямоугольного сечения пучка на мишени [7]. Для решения обозначенных проблем предлагается использовать ферромагнитную вставку, расположенную за мишенью, которая видоизменяет распределение силовых линий напря-

женности магнитного поля и оказывает влияние на размеры и распределение плотности электронного пучка на мишени.

В данной работе проводится моделирование транспортировки нерелятивистского сильноточного электронного пучка в аксиально-симметричном и несимметричном магнитных полях при наличии ферромагнитной вставки. Схема канала транспортировки, соответствующая эксперименту, представлена на рис. 1. Моделирование проводится методом огибающей [8] и методом крупных частиц (PIC код KARAT). Исследуется влияние материала и геометрии ферромагнитной вставки на конфигурацию и распределение плотности электронного пучка на мишени.

Считаем, что транспортировка электронного пучка в канале происходит в условиях зарядовой нейтрализации. В этом случае динамику, распределение скоростей и параметры пучка на выходе из трубы дрейфа определяют следующие магнитные поля: аксиальное поле соленоидов, поле токопровода (пластинок или шпилек), поле тока электронов, осаждающихся на проводящую мишень-коллектор, собственное поле пучка, связанное с током электронов, и поле ферромагнетика. Движение слабoreлятивистских электронов и формирование огибающей электронного пучка с учетом изменения его радиуса и плотности тока описывается системой уравнений [7]:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{p} = -\frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (*)$$

Здесь  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{v}$  – импульс и скорость электронов;  $\mathbf{B}$  – суммарное магнитное поле;  $e$  – заряд электрона;  $c$  – скорость света. Система (\*) в общем случае решается численно с применением пакетов MATLAB и COMSOL Multiphysics. Параметры системы и пучка, используемые в расчетах, соответствуют эксперименту [5, 6]: энергия электронов 27 кэВ; радиус пучка на входе в канал транспортировки  $r_{b0}=4,25$  см; ток пучка  $I_b=20$  кА; радиус трубы

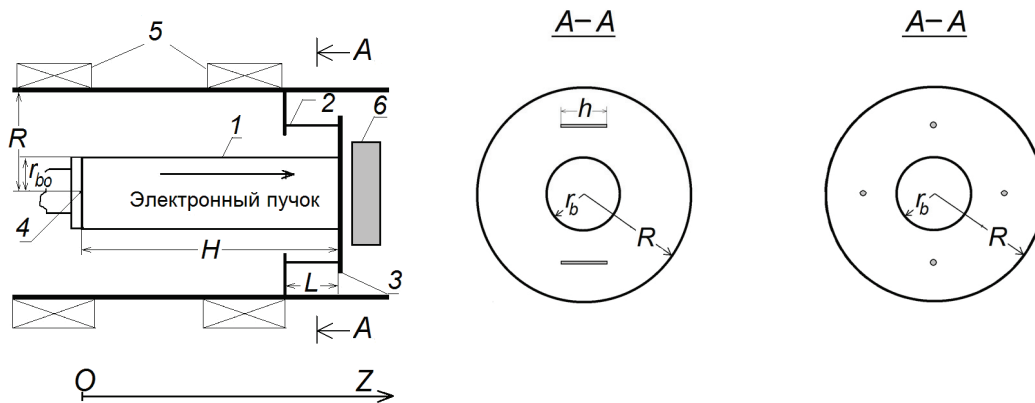


Рис. 1. Схема канала транспортировки и проекции с токопроводами: 1 – электронный пучок; 2 – обратный токопровод; 3 – мишень; 4 – инжектор; 5 – соленоиды; 6 – ферромагнетик

дрейфа  $R=10,3$  см; длина трубы дрейфа  $H=18,5$  см. Соленоидами создается ведущее магнитное поле, распределение которого вдоль оси  $OZ$  на разных радиусах показано на рис. 2, а. Ферромагнитная вставка расположена за мишенью, расстояние между коллектором и вставкой 1 см. Рассматриваются две геометрии вставки: сплошной цилиндр с радиусом  $R_f=5$  см и высотой  $l=6$  см; полый цилиндр с радиусами  $R_{f1}=4,8$  и  $R_{f2}=8$  см и высотой  $l=4$  см. Вставка «стягивает» на себя силовые линии магнитного поля, поэтому может существенно влиять на конфигурацию магнитного поля вблизи коллектора, следовательно, на траектории электронов и распределение плотности пучка на мишени.

**Ферромагнитная вставка в аксиально-симметричном магнитном поле**

Рассмотрим вначале симметричную систему, в которой отсутствует несимметричный токопровод – 2 (рис. 1). В этом случае распределение суммарного магнитного поля соленоидов и ферромагнитной вставки с намагниченностью  $7,5 \cdot 10^5$  А/м представлено на рис. 2, б, в.

Из рис. 2 видно, что в случае сплошной вставки (б) градиент магнитного поля меняет знак по сравнению со случаем без ферромагнетика (а), а в случае с полым ферромагнетиком (в) смены знака не происходит и градиент магнитного поля даже увеличивается на оси системы. Различие в поведении

кривых  $B_z(r,z)$  на рис. 2 связано с краевыми эффектами соленоиды и ферромагнитной вставки, на краях ферромагнетика происходит увеличение плотности силовых линий магнитного поля и увеличение индукции магнитного поля. Продольное магнитное поле  $B_z$  зависит от радиуса: в области соленоиды в системе без вставки (рис. 2, а) и в конце канала транспортировки для случаев сплошной и полый вставок (рис. 2, б, в). Это происходит за счет влияния краевых эффектов вставки, превышающих краевые эффекты соленоиды.

Рассмотрим влияние намагниченности материала и геометрических размеров вставки на распределение плотности электронного пучка на мишени.

**Влияние намагниченности вставки**

Численные расчеты показали, что при намагниченности материала вставки меньше, чем  $10^4$  А/м, практически не происходит изменения начальной плотности электронов пучка. На рис. 3 показано распределение плотности пучка на входе и выходе трубы дрейфа для двух значений намагниченности вставки.

Как видно из рис. 3, с увеличением намагниченности полый вставки, радиус пучка уменьшается и стремится к внутреннему радиусу вставки, на мишени происходит перераспределение плотности по радиусу пучка: плотность в центре пучка уменьшается и на краях увеличивается.

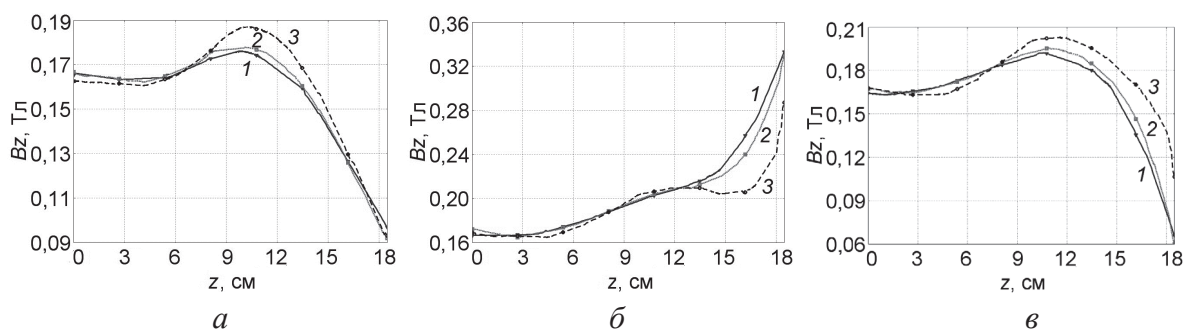
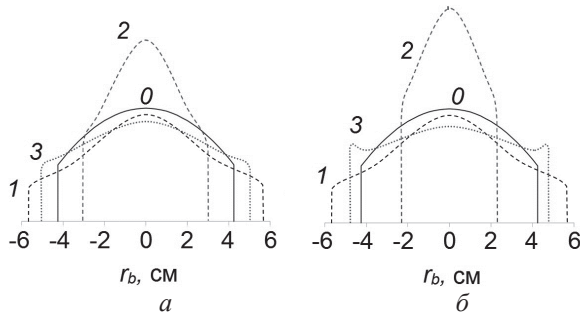
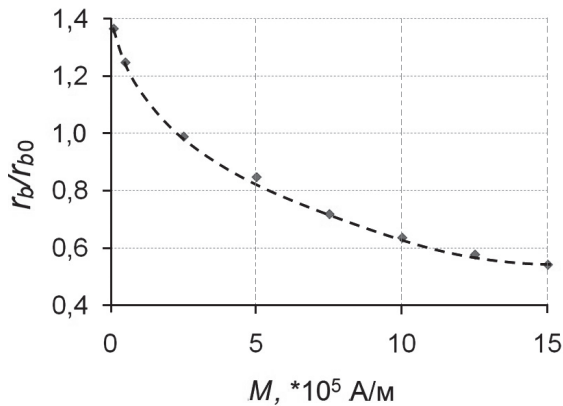


Рис. 2. Распределение вдоль канала транспортировки магнитного поля соленоидов (а), суммарного магнитного поля соленоидов и ферромагнетика сплошного (б) и полоого (в) на разных радиусах, r: 1) 0; 2) 2; 3) 4 см

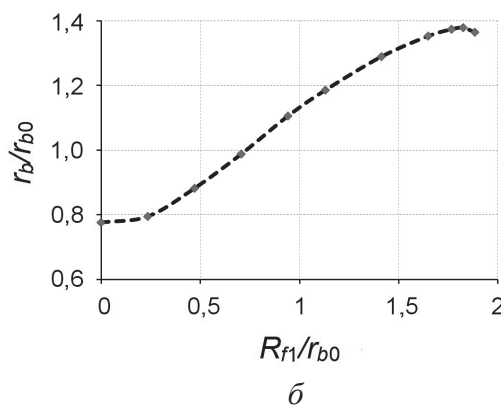
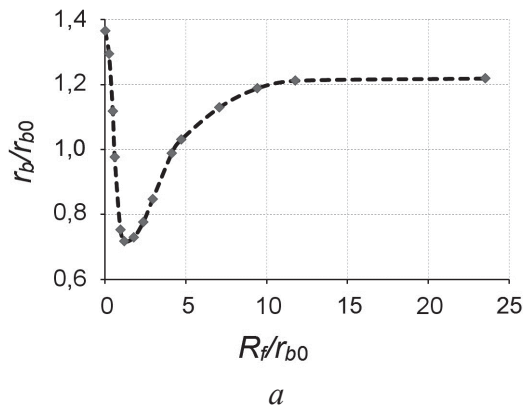


**Рис. 3.** Распределение плотности пучка на входе в трубу дрейфа (0), на мишени без ферромагнетика (1), со сплошным (2) и полым (3) ферромагнетиком при различных значениях намагниченности: а)  $7,5 \cdot 10^5$  А/м (CoPt); б)  $1,5 \cdot 10^6$  А/м (Fe<sub>3</sub>N)

С увеличением намагниченности сплошной вставки возрастает положительный градиент магнитного поля в области мишени, поэтому радиус пучка уменьшается на мишени, но перераспределение плотности электронов по радиусу почти не происходит. На рис. 4 показана зависимость относительного радиуса пучка на мишени от намагниченности сплошной вставки. Как следует из рис. 4, при намагниченности вставки  $M=1,5 \cdot 10^6$  А/м можно получить сжатие транспортируемого электронного пучка на мишени в два раза с сохранением распределения плотности по радиусу пучка.



**Рис. 4.** Зависимость радиуса автографа от намагниченности ферромагнетика



**Рис. 5.** Зависимость радиуса автографа пучка от радиуса сплошной (а) и внутреннего радиуса полый (б) ферромагнитной вставки

### Влияние геометрии вставки

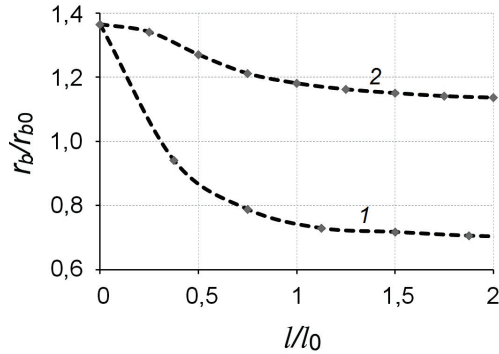
Исследуем влияние геометрических размеров ферромагнитной вставки с намагниченностью  $M=7,5 \cdot 10^5$  А/м на радиус автографа пучка на мишени. Вначале рассмотрим влияние радиальных размеров вставки на радиус автографа пучка на мишени. На рис. 5 представлены зависимости относительного радиуса автографа пучка от относительного радиуса сплошной ферромагнитной вставки ( $l=6$  см) и относительного внутреннего радиуса полый ферромагнитной вставки ( $l=4$  см,  $R_{f2}=8$  см).

Как видно из рис. 5, а, если относительный радиус сплошного ферромагнетика  $0,5 < R_f/r_{b0} < 5$ , то имеет место сжатие пучка на мишени, так как в этом случае градиент суммарного магнитного поля положительный на выходе из трубы дрейфа. При  $0,1 < R_f/r_{b0} < 0,5$  может происходить перераспределение плотности электронов в сечении пучка (особенно в центре сечения) за счет разных знаков градиента суммарного магнитного поля в центре и на краю пучка в области мишени. При радиусе вставки, значительно превышающем радиус пучка  $R_f/r_{b0} > 5$ , магнитное поле ферромагнетика практически однородное в области коллектора, краевые эффекты его не существенны, а отрицательный градиент поля магнитной катушки обуславливает увеличение радиуса пучка на мишени.

В случае полый вставки (рис. 5, б) внешний радиус вставки  $R_{f2}$  больше радиуса пучка на мишени без вставки ( $r_b/r_{b0}=1,38$ ) и сжатие пучка на мишени происходит, если  $R_{f1} < 0,7r_b$ . Расчеты показали, что в области  $0,55 < R_{f1}/r_b < 0,9$  распределение плотности электронов на мишени близко к однородному. Увеличение плотности на краях пучка связано с влиянием краевых эффектов внешней границы полый вставки.

Влияние продольных размеров вставки  $l$  на радиус автографа пучка отражено на рис. 6, для сплошной ( $R_f=5$  см) и полый вставок ( $R_{f2}=8$  см и  $R_{f1}=4,8$  см);  $l_0=4$  см. С увеличением  $l$  уменьшается радиус автографа пучка  $r_b$ , однако при  $l > l_0$  длина вставки не влияет на  $r_b$ . Для параметров численного эксперимента сжатие пучка происходит в слу-

чае сплошной вставки при  $l \geq 0,3l_0$ . С увеличением длины полой вставки происходит уменьшение суммарного магнитного поля на оси и увеличение на краях мишени, что приводит к перераспределению плотности электронов пучка на мишени.



**Рис. 6.** Зависимость относительного радиуса автографа пучка от относительной длины сплошной (1) и полой (2) вставки

Из анализа результатов численных экспериментов следует, что геометрические размеры вставок влияют на радиус и распределение плотности пучка на мишени. Если радиус сплошной вставки меньше радиуса пучка без вставки, то происходит фокусировка пучка на мишени, которая усиливается с увеличением длины вставки, без изменения радиального профиля пучка.

Если внешний радиус полой вставки больше радиуса пучка без вставки, то радиальное распределение плотности электронов пучка зависит от внутреннего радиуса и длины полой вставки, радиус автографа пучка стремится к внутреннему радиусу вставки.

Зависимость радиуса автографа пучка от длины вставки имеет насыщение, обусловленное определяющей ролью поперечных размеров вставок на изменение радиуса пучка на мишени.

Из результатов численного моделирования следует, что если сама мишень имеет свойства ферромагнетика, то может происходить фокусировка пучка на поверхности мишени, если ее радиус меньше радиуса пучка на входе в трубу дрейфа. При обработке электронным пучком поверхности мишени со свойствами ферромагнетика следует учитывать также ее неоднородность, которая может

привести к неоднородности плотности тока пучка на коллекторе.

**Ферромагнитная вставка в аксиально-несимметричном магнитном поле**

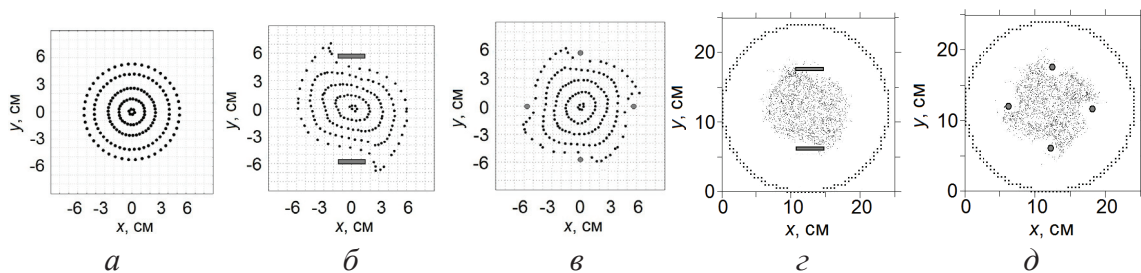
В работах [4–7] экспериментально и численно показано, что в сильноточных электронных источниках в конце канала транспортировки можно осуществлять трансформацию электронного пучка круглого сечения в квазипрямоугольный в аксиально-неоднородном магнитном поле, сформированном обратным токопроводом в виде плоских шин или шпилек, прикрепленных к коллектору-мишени.

На рис. 7 представлены автографы пучка на мишени (а, б, в), полученные из численного решения системы (\*) и методом крупных частиц (г, д) для геометрии системы без ферромагнитных вставок (рис. 1). В расчетах рассматривались токопроводы: симметричный токопровод (труба дрейфа); две плоские параллельные шины длиной  $L=4$  см и шириной  $h=3$  см (ток в каждой шине  $I=10$  кА); четыре параллельные шпильки длиной  $L=4$  см и диаметром  $0,5$  см (ток в каждой шпильке  $5$  кА) (рис. 1).

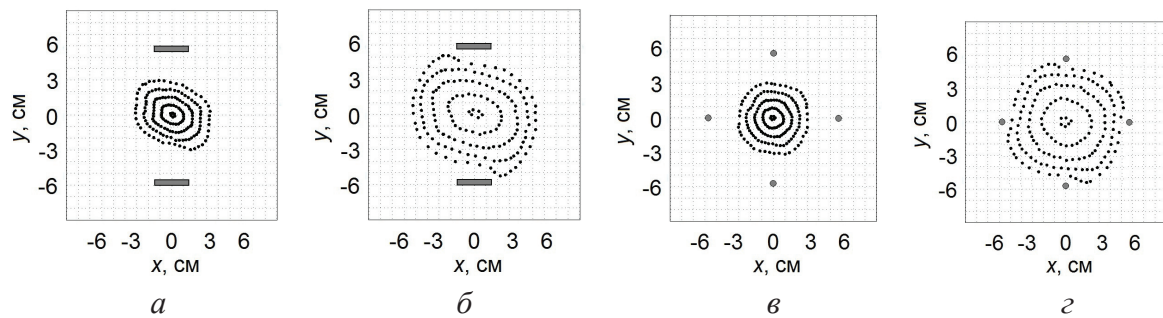
Без ферромагнитных вставок на краю соленоида увеличивается радиальная составляющая ведущего магнитного поля (рис. 2, а), в результате увеличивается радиус пучка и краевые электроны попадают под более сильное воздействие магнитного поля токопровода, по сравнению с центральными электронами. Расчет магнитного поля токопроводов (рис. 1, 7) показывает, что на расстоянии  $0,5$  см от шины магнитное поле  $\sim 600$  Гс, а от шпильки  $\sim 1100$  Гс, значения собственного магнитного поля на краю пучка и ведущее магнитное поле около мишени  $\sim 950$  Гс. Краевые электроны,двигающиеся вблизи поверхности токопровода, ответственны за «завихрение» на автографе пучка на мишени (рис. 7, б–д).

Ферромагнитные вставки меняют градиент магнитного поля в области мишени (рис. 2, б, в) и токопровода, поэтому можно устранить этот нежелательный эффект. На рис. 8 показаны автографы пучка при наличии ферромагнитных вставок ( $M=7,5 \cdot 10^5$  А/м):

- сплошная вставка – радиус 5 см, высота 6 см;
- полая вставка – внешний радиус 8 см, внутренний радиус 4,8 см, высота 4 см.



**Рис. 7.** Автографы пучка на мишени, полученные методом огибающей (а, б, в) и PIC-методом (г, д), для разной геометрии токопровода: а – симметричный; б, г – две шины; в, д – четыре шпильки



**Рис. 8.** Автографы пучка на мишени при наличии сплошной (а, в) и полой (б, г) ферромагнитной вставки для разной геометрии токопровода: а, б – две шины; в, д – четыре шпильки

Как видно из сравнения рис. 7 и 8, магнитное поле вставок не меняет форму поперечного сечения пучка по сравнению со случаем без вставок, меняется распределение плотности электронов вблизи токопровода на мишени. Как и для симметричного токопровода (рис. 3), полая вставка оказывает наибольшее влияние на перераспределение плотности электронов в сечении пучка на мишени. Таким образом, устранить «завихрения» электронов вблизи токопровода при трансформации сечения пучка можно с помощью ферромагнитной вставки, подбирая ее геометрию и свойства материала.

#### Заключение

Численное моделирование методом огибающей и методом крупных частиц показало, что с помо-

щью ферромагнитной вставки, расположенной за коллектором, можно управлять распределением плотности низкоэнергетического сильноточного электронного пучка на мишени.

Из результатов численного моделирования следует, что на мишени со свойствами ферромагнетика может происходить фокусировка пучка, если радиус мишени меньше радиуса пучка на входе в трубу дрейфа. Кроме того, следует учитывать неоднородность плотности тока пучка на мишени, которая будет иметь место при обрабатываемой неоднородной поверхности мишени со свойствами ферромагнетика.

*Авторы благодарят Г.Е. Озура за плодотворное обсуждение и полезные советы. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 12-08-00251-а и 12-08-00213-а.*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ozur G.E., Popov S.A., Lazutkin M.N. Losses of Low-Energy, High-Current Electron beam at its Transportation through Plasma Channel // Proc. of the 13<sup>th</sup> Symp. on High Current Electronics. – Tomsk, Russia, 2008, Sept 21–26. – Tomsk, 2008. – P. 47–50.
2. Григорьев В.П., Коваль Т.В. Влияние магнитного поля тоководящих систем на движение электронного пучка // Известия вузов. Физика. – 2006. – Т. 49. – № 5. – С. 44–47.
3. Григорьев В.П., Коваль Т.В., Озур Г.Е. // Формирование и транспортировка низкоэнергетических сильноточных электронных пучков в плазменнонаполненном диоде во внешнем магнитном поле // Журнал технической физики. – 2010. – Т. 80. – Вып. 1. – С. 103–109.
4. Коваль Т.В., Ле Ху Зунг. Трансформация в канале транспортировки поперечного сечения электронного пучка компенсированного по заряду // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317. – № 2. – С. 129–132.
5. Grigoriev V.P., Koval T.V., Ozur G.E., Nefyodtsev E.V. High-Current, Low-Energy Electron Beam Transportation through Plasma Channel in a Guide Magnetic Field // Proc. of 17<sup>th</sup> Intern. Conf. on High-Power Particle Beams. – Xi'an, P.R. China, July 6–11, 2008. – Xi'an, 2008. – P. 186–189.
6. Озур Г.Е., Григорьев В.П., Карлик К.В., Коваль Т.В., Ле Ху Зунг. Управление формой поперечного сечения нерелятивистского сильноточного электронного пучка с помощью обратных тоководов // Журнал технической физики. – 2011. – Т. 81. – Вып. 9. – С. 100–105.
7. Коваль Т.В., Ле Ху Зунг. Влияние токовой нейтрализации и геометрии обратного токопровода на трансформацию низкоэнергетического сильноточного пучка в плазменном канале // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 2. – С. 43–47.

*Поступила 21.01.2013 г.*



УДК 537.333

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТИПА «ЗМЕЙКИ» КОМПЕНСИРОВАННОГО ПО ЗАРЯДУ НЕОДНОРОДНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

В.П. Григорьев, И.Л. Звигинцев, П.Е. Кузнецов

Томский политехнический университет

E-mail: grig@am.tpu.ru

*Исследуется крупномасштабная поперечная неустойчивость частично компенсированного по заряду электронного пучка, обусловленная резонансом связанных поперечных колебаний потока электронов и ионного канала. Определены инкременты неустойчивости в зависимости от длины волны. Показано, что стабилизация этой неустойчивости происходит на нелинейной стадии в результате зависимости поперечной силы возмущения от смещения пучка от равновесной траектории.*

### Ключевые слова:

*Электронный пучок, зарядовая нейтрализация, поперечные колебания, неустойчивость типа «змейки».*

### Key words:

*Electron beam, charge neutralization, transverse oscillations, «snake» instability.*

### Введение

Для повышения эффективности использования низкоэнергетических электронных пучков в нанотехнологиях наряду с вопросами их формирования необходимо рассмотреть вопросы устойчивости таких пучков относительно крупномасштабных возмущений, приводящих к потерям электронов пучка при его транспортировке к мишени. Наиболее опасными в этом плане являются возмущения, приводящие к поперечному смещению пучка как целого, в результате чего пучок выпадает на элементы тракта транспортировки.

Основными представителями таких возмущений являются шланговая неустойчивость (мода колебаний с азимутальным числом единица) и неустойчивость типа «змейки».

Шланговая неустойчивость возникает при прохождении пучка по плазменному каналу для возмущений с длиной волны намного большей длины волны бетатронных колебаний электронов пучка в собственном магнитном поле [1, 2]. При таких возмущениях пучок под действием центробежной силы в поперечном направлении смещается вместе с каналом и скорость развития неустойчивости и инкремент зависят от массы плазмы, захваченной поперечным движением.

Неустойчивость типа «змейки» в отличие от шланговой связана с возмущениями, обусловленными относительным смещением электронного пучка и ионного канала без изменения формы поперечного сечения пучка, и развивается на частоте близкой к частоте бетатронных колебаний электронов пучка. Скорость развития и инкремент этой неустойчивости не зависят от массы ионного канала и превышают соответствующие параметры шланговой неустойчивости, что выделяет ее как наиболее опасную с точки зрения потерь электронного пучка. В настоящее время неустойчивость типа «змейки» достаточно полно исследована для компенсированных релятивистских кольцевых электронных пучков [3–5].

Однако следует ожидать, что неустойчивость такого типа может возникать в электронных пучках, используемых в технологических целях, для которых характерны низкие энергии и достаточно длинные импульсы. Кроме того, транспортировка таких пучков осуществляется в плазме с низкой плотностью (давление газа порядка  $10^{-4}$  Тор.), что приводит к слабой токовой нейтрализации электронного пучка, и основные возмущения можно связать с полем пространственного заряда.

Ниже мы рассмотрим поперечную неустойчивость компенсированного по заряду электронного пучка, когда из-за относительного смещения пучка и ионного канала пучок совершает колебания в электрическом поле ионного канала, а на канал действует поле пучка. При этом рост поперечных колебаний в системе происходит в результате наличия резонансов связанных поперечных колебаний потоков.

Исследование неустойчивости проводится на модели жестких пучков на линейной и нелинейной стадиях для неоднородного по радиусу электронного пучка.

### Основные уравнения

Рассмотрим поперечные колебания в системе, состоящей из ионного канала и распространяющегося по каналу вдоль оси  $z$  электронного пучка с током  $I_b$  и скоростью  $v_b$ . При этом полагаем, что плотности электронов пучка и ионов неоднородны и распределены по гауссовскому закону  $n_{b,i} = n_{b,i}^{(0)} \exp(-r^2/r_b^2)$ , где  $r$  – радиус в цилиндрической системе координат;  $r_b$  – постоянная, характеризующая радиус пучка и плазменного канала; индексы  $b$  и  $i$  относятся к пучку и каналу соответственно. Для описания возмущений, связанных с относительным поперечным смещением электронного пучка и ионного канала введем вектор смещения пучка и ионного канала  $\vec{\rho}_{b,i}(t, z)$ . Возникающие в результате таких возмущений поляризационные силы, действующие на электронный пучок со сто-



роны ионного канала и на ионный канал со стороны электронного пучка, запишутся в виде:

$$\vec{F}_b = -e \int n_b (|\vec{r}_\perp - \vec{\rho}_i|) \vec{E}_i (|\vec{r}_\perp - \vec{\rho}_i|) d\vec{r}, \quad (1)$$

$$\vec{F}_i = e \int n_i (|\vec{r}_\perp - \vec{\rho}_b|) \vec{E}_b (|\vec{r}_\perp - \vec{\rho}_b|) d\vec{r}. \quad (2)$$

Учитывая, что в отсутствии внешнего магнитного поля движение электронов в радиальном электрическом поле плоское, то, не теряя общности, можно считать возмущения одномерными  $\vec{\rho}_{b,i}(t,z) = \rho_{b,i}(t,z) \vec{e}_x$ . При этом принимая во внимание связь цилиндрических и декартовых координат

$$\vec{E}_x = E_r \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{e}_x \quad (3)$$

и проводя интегрирование в (1) и (2) с учетом (3) [6], получим уравнения, описывающие колебания пучка и ионного канала

$$\frac{d^2 \rho_b}{dt^2} = -2\pi e^2 n_{b0} \frac{r_b^4}{\rho^2} \rho \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\rho^2}{2r_b^2}\right) \right], \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial t^2} = 2\pi e^2 n_{i0} \frac{r_b^4}{\rho^2} \rho \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\rho^2}{2r_b^2}\right) \right], \quad (5)$$

где  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_b \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $\rho = \rho_b - \rho_i$ ,  $v_b$  – скорость распространения электронного пучка,  $c$  – скорость света,  $e$  – элементарный заряд.

При слабой нелинейности разложим экспоненту в ряд до членов второго порядка по  $\rho^2/2r_b^2$ . В результате уравнения движения для электронного пучка и ионного канала запишутся в виде:

$$\frac{d^2 \rho_b}{dt^2} = -\omega_b^2 \rho \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{\rho^2}{r_b^2} \right), \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial t^2} = \omega_i^2 \rho \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{\rho^2}{r_b^2} \right). \quad (7)$$

Здесь  $\omega_b = (c/r_b)(\beta_b/\gamma)(I_b/I_A^{(0)})^{1/2}$  – частота колебаний центра тяжести электронного пучка в поле ионного канала,  $I_A^{(0)} = mc^3/e = 17, kA$  – ток Альфвена,  $\delta = m\gamma n_b^{(0)}/Mn_i^{(0)} \ll 1$ ,  $\omega_i = \delta^{1/2} \omega_b$ .

#### Анализ уравнений движения на линейной стадии неустойчивости

Решение начальной задачи для уравнений (6), (7) представим в виде нелинейной плоско поляризованной волны с медленно меняющимися амплитудами [7]

$$\rho_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \rho_{\alpha s}(t,z) \exp[is(k_z z - \omega t)] + k.c. \quad (8)$$

Подставляя выражение (8) в уравнения (6), (7) и отбрасывая медленные производные от  $\rho_{bs}$  и  $\rho_{is}$  и нелинейные члены, получим уравнения, определяющие амплитуды первого приближения

$$[\omega_b^2 - s^2(\omega - k_z z)^2] \rho_{bs}^{(1)} - \omega_b^2 \rho_{is}^{(1)} = 0, \quad (9)$$

$$-\delta \omega_b^2 \rho_{is}^{(1)} + (\delta \omega_b^2 - s^2 \omega^2) \rho_{bs}^{(1)} = 0. \quad (10)$$

Из уравнений (9), (10) следует дисперсионное уравнение в линейном приближении для  $s=1$ :

$$[\omega_b^2 - (\omega - k_z z)^2][\delta \omega_b^2 - s^2 \omega^2] - \delta \omega_b^4 = 0, \quad (11)$$

а также соотношение амплитуд и относительный сдвиг по фазе  $\phi_1$  колебаний электронного пучка и ионного канала:

$$\begin{aligned} \rho_{i1}^{(1)} &= \frac{\delta \omega_b^2}{\delta \omega_b^2 - s^2 \omega^2} \rho_{b1}^{(1)} = \alpha \rho_{b1}^{(1)} = \\ &= |\alpha| e^{i\phi_1} \rho_{b1}^{(1)} = |\alpha| e^{i\phi_1} \Phi. \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что из-за отсутствия связи гармоник в первом приближении  $\rho_{bs}^{(1)} = \rho_{is}^{(1)} = 0$  при  $s \neq 1$ .

Уравнение (9) удобно переписать в виде

$$F(\omega) = \frac{\delta \omega_b^2}{\omega^2} + \frac{\omega_b^2}{(\omega - k_z v_b)^2} = 1, \quad (13)$$

которое совпадает с дисперсионным уравнением двухпучковой неустойчивости при замене плазменных частот пучка и ионов соответственно на  $\omega_b$  и  $\omega_i$ . Уравнение (13) имеет неустойчивое решение при  $0 < k_z < (\omega_b/v_b)(1 + \delta^{1/3})^{3/2}$ .

В области волновых чисел  $\omega \ll k_z v_b < \omega_b$  (длинноволновая область) неустойчивое решение дисперсионного уравнения имеет вид

$$\omega = i \frac{\delta^{1/2} \omega_b}{\left( \frac{\omega_b^2}{k_z^2 v_b^2} - 1 \right)^{1/2}}, \quad (14)$$

и в пределе  $k_z^2 v_b^2 \ll \omega_b^2$  неустойчивость развивается во времени с инкрементом  $\zeta = \text{Im} \omega(k_z) = \sqrt{\delta} k_z v_b$ . В этой области возмущений сдвиг по фазе колебаний электронного пучка и ионного канала отсутствует, амплитуды колебаний различаются незначительно  $\rho_{i1}^{(1)} \approx (1 - k_z^2 v_b^2 / \omega_b^2) \rho_{b1}^{(1)} \sim \rho_{b1}$ . Это указывает на слабость поляризационных сил в данном диапазоне длин волн. Максимальный инкремент неустойчивости достигается за счет резонансного усиления неустойчивости на длинах волн, близких к длине волны бетатронных колебаний пучка в поле ионного канала ( $k_z^2 v_b^2 = k_m^2 v_b^2 \approx \omega_b^2$ ) и равен

$$\zeta_m = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\delta}{2} \right)^{1/3} \omega_b = \sqrt{3} \text{Re} \omega_m, \quad (15)$$

где  $\zeta_m$  и  $\omega_m = \omega(k_m)$  – инкремент и частота в области резонанса. Что касается амплитуд колебаний, то в области резонанса амплитуда поперечных смещений пучка, как следует из выражений (12), (15), значительно превышает смещение ионного канала:

$$\rho_{i1}^{(1)} / \rho_{b1}^{(1)} = \alpha \sim \delta^{1/3} \ll 1.$$

#### Анализ уравнений движения на нелинейной стадии неустойчивости

Во втором приближении, учитывая (11)–(15), из (6) и (7) вследствие кубической нелинейности,

обеспечивающей связь гармоник, получим  $\rho_{bs}^{(2)}\rho_{is}^{(2)}=0$  для  $s \neq 1, 3$ , а для  $s=3$  следующую оценку

$$\begin{pmatrix} \rho_{b3}^2 \\ \rho_{i3}^2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 \\ (4\delta)^{1/3} \end{pmatrix} \frac{\Phi^3}{1,15r_b^2} 10^{-3}. \quad (16)$$

В условиях резонансной неустойчивости, пренебрегая высшими гармониками (16), во втором приближении для амплитуд с  $s=1$  получим следующие уравнения

$$\begin{aligned} & [\omega_b^2 - (\omega_m - k_m z)^2] \rho_{bs}^{(2)} - \omega_b^2 \rho_{is}^{(2)} - \\ & - 2i(\omega_m - k_m v_b) \frac{d\Phi}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

$$-\delta\omega_b^2 \rho_{bs}^{(2)} + (\delta\omega_b^2 - \omega_m^2) \rho_{is}^{(1)} - 2i\alpha\omega_m \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0. \quad (18)$$

Умножая уравнение (17) на  $(\delta\omega_b^2 - \omega_m^2)$ , а (18) на  $\omega_b^2$ , в результате их сложения с учетом (11) получим уравнение для  $\Phi$  в виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + v_g \frac{\partial\Phi}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = z - v_g t, \quad (19)$$

где  $v_g = (d\omega/dk_z)_{k_z=k_m} \approx v_b/3$  – групповая скорость возмущений. Решение уравнения (19) при известном начальном условии  $\Phi(z, t=0) = \Phi(z)$  имеет вид  $\Phi(z, t) = \Phi_0(z - v_g t)$  нелинейной стационарной волны, т. е. возмущения в данном приближении сносят вдоль системы с групповой скоростью  $v_g$ . При этом из уравнения (18) следует связь амплитуд колебаний электронного пучка и канала во втором приближении

$$\rho_{i1}^{(2)} = \alpha \rho_{b1}^{(2)} - \frac{2i\omega_m \alpha}{\delta\omega_b^2 - \omega_m^2} v_g \frac{\partial\Phi}{\partial \xi}. \quad (20)$$

В третьем приближении, учитывая (20), вторые производные по  $\xi$ , а также появление слабой явной зависимости от времени в амплитудах колебаний и соотношения (10)–(13), (17), получим следующее уравнение для  $\Phi(t, \xi)$ :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - i \frac{v_g^2}{9\omega_m} \frac{\partial^2\Phi}{\partial \xi^2} = - \frac{i\omega_b}{32r_b^2} \left(1 - \frac{\omega_m}{\omega_b}\right) |\Phi|^2 \Phi e^{2\zeta_m t}. \quad (21)$$

Член, пропорциональный  $\partial^2\Phi/\partial \xi^2$ , в уравнении (21) описывает диффузионное распывание волнового пакета и несуществен для начальных возмущений со слабо неоднородной амплитудой,  $\partial\Phi/\partial \xi \approx 0$ . Представляя  $\Phi$  в виде  $\Phi = |\Phi|e^{i\varphi}$  и отделяя в уравнении (19) действительную и мнимую части, получим уравнения для модуля огибающей  $|\Phi|$  и ее фазы  $\varphi$  в пренебрежении распывания пакета

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\omega_b}{32r_b^2} |\Phi|^2 e^{2\zeta_m t}. \quad (22)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\omega_b}{32r_b^2} |\Phi|^2 e^{2\zeta_m t}. \quad (23)$$

Учитывая зависимость от времени полной амплитуды колебаний  $A(t, \xi) = |\Phi(t, \xi)| \exp(\zeta_m t)$ , уравнение (22) перепишем в виде:

$$\frac{\partial|A|}{\partial t} - \zeta_m |A| = - \frac{\zeta_m}{16r_b^2} |A|^3 e^{2\zeta_m t}. \quad (24)$$

Решение уравнения (24) при  $A(t=0) = \Phi(t=0) = A_0(z)$  имеет вид

$$|A| = A_0(z) e^{\zeta_m t} [1 + A_0^2(z)(e^{2\zeta_m t} - 1)/16r_b^2]^{-1/2}. \quad (25)$$

Зависимость полной амплитуды колебаний от времени при различных начальных условиях приведена на рисунке.

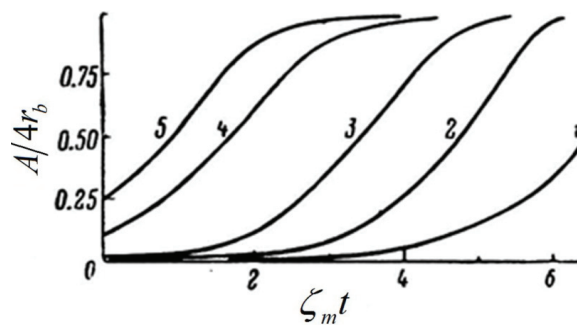


Рисунок. Зависимость амплитуды поперечных колебаний электронного пучка от времени ( $A_0/4r_b$ ): 1) 0,001; 2) 0,005; 3) 0,02; 4) 0,1; 5) 0,25

Из рисунка следует, что для малых начальных возмущений ( $A_0/4r_b \leq 0,03$ ) амплитуда поперечных колебаний пучка медленно растет во времени. Насыщение роста амплитуды колебаний достигается за время, равное нескольким постоянным роста  $\zeta_m^{-1}$ , и амплитуда при насыщении равна  $A_s = 4r_b$ . Режиму насыщения, как следует из (23), соответствует изменение частоты колебаний  $\Delta\omega_s = \omega_b/2$ . Полученное значение амплитуды насыщения выходит за рамки применимости уравнений (6), (7). Поэтому для оценки характера движения системы при больших амплитудах вернемся к уравнениям (4), (5). При учете в разложении правой части (4), (5) членов более высокого порядка амплитуда насыщения сходится к величине  $A_s \approx 3,5r_b$ . Это доказывает, что нелинейность колебаний стабилизирует неустойчивость типа «змейки» на достаточно больших амплитудах.

В заключение приведем некоторые оценки развития этой неустойчивости в реальных системах [8, 9]. При транспортировке электронных пучков с энергией 30 кэВ,  $r_b = 3$  см и током  $I_b = 170$  А неустойчивость на линейной стадии развивается с инкрементом  $\zeta_m = 2,2 \cdot 10^6$  с<sup>-1</sup> и при начальном возмущении  $A_0 = 0,02r_b$  стабилизируется за время  $\tau_s = 2,7 \cdot 10^{-6}$  с. При токе пучка 15...17 кА стабилизация неустойчивости происходит за время  $\tau_s = (3...2,7) \cdot 10^{-8}$  с.

### Выводы

1. Резонансное усиление неустойчивости на длинах волн, близких к длине волны бетатронных колебаний нейтрализованного по заряду пучка, приводит при малом параметре  $\delta$  к значительному превышению инкремента неустойчивости

- типа «змейки» над максимальным инкрементом планговой неустойчивости  $\zeta_m \gg \sqrt{\delta}(\sqrt{v_{T\perp}}/r_b)$  [1–5].
2. Нелинейная стабилизация неустойчивости типа «змейки» имеет место на достаточно больших амплитудах поперечных колебаний электронного пучка.
  3. Эта неустойчивость может развиваться и при инжекции пучка в плазму, если

$(r_b v_{ef}/4c)(I_A^{(0)}/I_b)^2 \ll 1$ ,  $v_{ef}$  – частота столкновений электронов плазмы. В этом случае локальные зарядовые возмущения не будут компенсироваться плазменными электронами, т. к. они будут удерживаться собственным магнитным полем пучка и продвигаться вдоль его оси со скоростью дрейфа.

*Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ: № 12-08-00213-а, № 12-08-00251-а.*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов А.А., Рудаков Л.И. Мощный релятивистский пучок электронов в плазме // Журнал теоретической и экспериментальной физики. – 1970. – Т. 58. – № 4. – С. 1332–1341.
2. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1. – М.: Атомиздат, 1975. – 272 с.
3. Диденко А.Н., Григорьев В.П., Усов Ю.П. Мощные электронные пучки и их применение. – М.: Атомиздат, 1977. – 280 с.
4. Hofman I. Coherent oscillations of ring relativistic particles // Particle Accelerators. – 1979. – V. 8. – № 3. – P. 151–160.
5. Григорьев В.П., Диденко А.Н. Влияние нелинейных некогерентных колебаний частиц на поперечные размеры электронно-ионного кольца при развитии неустойчивости типа «змейки» // Известия вузов. Физика. – 1981. – Т. 60. – № 10. – С. 51–56.
6. Григорьев В.П., Захаров А.В. Неустойчивость типа «змейки» частично компенсированного по току электронного пучка // Журнал технической физики. – 1990. – Т. 60. – № 4. – С. 67–71.
7. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
8. Koval N.N., Grigoryev S.V., Devyatkov V.N., Teresov A.D., Schanin P.M. Effect of Intensified Beam in a Plasma-Cathode Diode // IEEE Trans. PlasmaSci. – 2009. – V. 37. – № 10. – P. 1890–1896.
9. Назаров Д.С., Озур Г.Е., Проскуровский Д.И. Генерация низкоэнергетических сильноточных электронных пучков в пушке с плазменным анодом // Известия вузов. Физика. – 1994. – Т. 37. – № 3. – С. 100–114.

*Поступила 16.05.2013 г.*

УДК 621.039.51

## К РАСЧЕТУ ВОЗРАСТА НЕЙТРОНОВ В ГРАФИТЕ

А.В. Кузьмин

Томский политехнический университет  
E-mail: kuzminav@tpu.ru

*Проведено сравнение результатов расчета возраста нейтронов деления по экспериментальным данным нейтронно-физических характеристик углерода из разных справочников. Приводятся алгоритмы расчета возраста замедляющихся нейтронов. Сравнение результатов расчета при замедлении нейтронов деления до энергии индиевого резонанса по методу групп показало хорошую сходимость с теоретическими и экспериментальными данными.*

#### Ключевые слова:

*Возраст нейтронов, сравнение справочных данных, алгоритмы расчета возраста, метод групп.*

#### Key words:

*Neutron age, comparison of the reference experimental data, solution algorithms, multigroup method.*

В начале 40-х гг. прошлого века Энрико Ферми в поисках решения уравнения замедления, выраженного через поток замедления, учел функциональную связь между летаргией замедляющихся нейтронов  $u$  с возрастом  $\tau$ , т. е. «временем», прошедшим с момента испускания быстрого нейтрона до момента его детектирования. Он ввел новую переменную

$$d\tau = \frac{D(u)}{\zeta \Sigma_s(u)} du,$$

которая в интегральной форме в зависимости от летаргии

$$\tau(u) = \int \frac{D(u)}{\zeta \Sigma_s(u)} du \quad (1)$$

позволяла оценить возраст в заданном интервале энергии по имеющимся экспериментальным данным физических свойств среды.

В выражение (1) в замедляющую способность  $\zeta \Sigma_s(u)$  входят:  $\zeta(u)$  – среднелогарифмическая потеря энергии за одно соударение;  $\Sigma_s(u)$  – эффективное макроскопическое поперечное сечение рассеяния среды, см<sup>-1</sup>. Коэффициент диффузии среды  $D(u)$  (см) может быть определен через макроскопическое транспортное сечение рассеяния  $\Sigma_{tr}(u)$ , см<sup>-1</sup>:

$$D(u) = \frac{1}{3 \sum_{tr}(u)} = \frac{1}{3N(\sigma_c + \sigma_s(1 - \bar{\mu}))}, \quad (2)$$

где  $N$  – ядерная плотность среды,  $\text{см}^{-3}$ ;  $\sigma_c$ ,  $\sigma_s$  – эффективные микроскопические сечения радиационного захвата и упругого рассеяния,  $\text{см}^2$ ;  $\bar{\mu}$  – средний косинус угла рассеяния.

Заметим, что в отечественной практике под логарифмом понимают  $u = \ln(E_0/E)$ , где за  $E_0$  принята средняя энергия спектра мгновенных нейтронов деления равная 2 МэВ.

Примеры первых расчетных оценок возраста по имеющимся экспериментальным данным ядерно-физических свойств, входящих в уравнения (1), (2) приводятся в [1] и более подробно в пособии [2].

Отрывочные и недостаточно полные сведения энергетической зависимости ядерно-физических свойств элементов нацеливали исследователей на проведение прямых экспериментальных методов определения возраста, а также на расширение и уточнение базы данных по физическим свойствам реакторных материалов. Естественно, в первую очередь основное внимание было уделено углероду как первому замедлителю в ядерных реакторах на тепловых нейтронах. Примерно до 1962 г. экспериментальные и аналитические результаты не давали должного согласия [3], что в первую очередь могло говорить о все ещё недостаточно корректных данных по ядерно-физическим свойствам углерода. В табл. 1 приведены экспериментальные и теоретические результаты возраста при замедлении нейтронов деления с энергией  $E_0 = 2$  МэВ до энергии индиевого резонанса  $E_{in} = 1,46$  эВ.

**Таблица 1.** Возраст  $\tau_{1,46}$  в графите плотностью 1,60 г/см<sup>3</sup>

Ссылка	Возраст, $\tau_{1,46}$ , см <sup>2</sup>
Эксперимент	
1. Fermi (1943)	317,0
2. Hill (1949)	310,6±3,0
3. Davey (1958)	337,9
4. Hendrie (1959)	312,6±0,5
5. Paschall [4] (1964)	307,8±1,9
Теория	
1. Goldstein (1961)	304,0±3,0
2. Joanou (1962)	305,0
3. Alter [4] (1964)	307,4±1,0

Первые экспериментальные результаты по определению возраста нейтронов деления до индиевого резонанса, которые можно назвать эталонными, были получены в работе [4], методика и результаты которой подробно изложены в [5]. Появилась реальная возможность по сравнению экспериментального и теоретического (расчетного) значений возраста судить о достоверности ядерно-физических констант.

Ядерно-физические константы в основном предназначены для инженеров-физиков при проектировании и эксплуатации ядерных реакторов и защиты. Эти характеристики постоянно обновляются с получением новых экспериментальных и

теоретических результатов и обобщаются в соответствующих справочниках и библиотеках баз данных. В отечественной технической литературе по данной теме наиболее известны справочники [6, 7]. В первом из них приведены экспериментальные данные, полученные до 1962 г., во втором приводятся таблицы 28-групповых нейтронных констант, основанные на данных до 1977 г.

Целью настоящей работы является оценка эффективности ядерно-физических констант, представленных в справочниках [6, 7], по результатам расчета возраста нейтронов деления до индиевого резонанса.

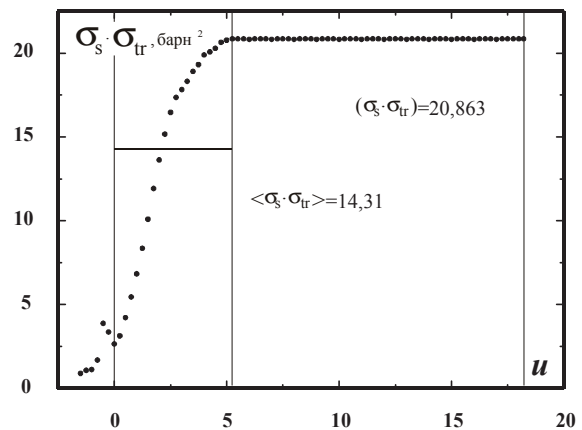
Сравнительную оценку проведем для графита плотностью  $\gamma_c = 1,6$  г/см<sup>3</sup>, для которого ядерная концентрация равна  $N = 0,0802 \cdot 10^{24}$  ядер/см<sup>3</sup>.

В основу справочника [6] был положен обширный материал, полученный в результате обмена информацией по ядерно-физическим свойствам, инициированного первой Международной конференцией по мирному использованию атомной энергии. В нашем случае для проведения расчетного определения возраста в нем представлены зависимости эффективных микроскопических сечений  $\sigma_s(u)$  и  $\sigma_{tr}(u)$  с шагом  $\Delta u = 0,25$ , полученные в работе [7]. Значение среднелогарифмического декремента предполагается постоянным и равным  $\zeta = 0,158$ .

В соответствие с этими исходными данными приведем формулу (1) с учетом (2) к виду удобному для проведения расчетов

$$\tau(u) = \int \frac{du}{3\zeta \sum_s(u) \sum_{tr}(u)} = \frac{1}{3\zeta N^2} \int \frac{du}{\sigma_s(u) \sigma_{tr}(u)}. \quad (3)$$

Найдем произведение микроскопических сечений, результаты сведем в табл. 2 и представим на графике рис. 1.



**Рис. 1.** Среднее  $\langle \rangle$  и постоянное ( ) значения произведения сечений в границах замедления нейтронов от  $E_0$  до  $E_{cm}$

В диапазоне логарифмов  $u = 0 \dots 18,185$ , соответствующем пути замедления от  $E_0 = 2$  МэВ до стандартной энергии  $E_{cr} = 0,0253$  эВ, нет резонансного поглощения (рис. 1), и это, несомненно, создаёт возможности более точного расчёта возраста до детектируемого значения нейтронов. При этом выделяются 2 зоны графического интегрирования ура-

внения (3), которое с учетом данных табл. 2 можно записать для возраста тепловых нейтронов  $\tau_T$  в виде

$$\tau_T = \frac{1}{3 \cdot 0,158 \cdot 0,006432 \cdot 10^{48}} \times \left( \frac{1}{\langle \sigma_s \sigma_{tr} \rangle} \int_0^{5,25} du + \frac{1}{(\sigma_s \sigma_{tr})} \int_{5,25}^{18,185} du \right), \quad (4)$$

где  $\langle \sigma_s \sigma_{tr} \rangle = 14,3074$  барн<sup>2</sup> – среднее значение произведения сечений, определенное с помощью машинного кода,  $(\sigma_s \sigma_{tr}) = 20,8633$  барн<sup>2</sup> – постоянное табличное значение.

**Таблица 2.** Сечения взаимодействия нейтронов с графитом в зависимости от лётаргии

$u$	$\sigma_s$ , барн	$\sigma_{tr}$ , барн	$\sigma_s \sigma_{tr}$ , (барн) <sup>2</sup>
0,00	1,732	1,533	2,655
0,25	1,880	1,664	3,128
0,50	2,195	1,925	4,225
0,75	2,505	2,179	5,458
1,00	2,805	2,438	6,838
1,25	3,095	2,702	8,323
1,50	3,385	2,982	10,094
1,75	3,665	3,254	11,926
2,00	3,900	3,494	13,627
2,25	4,100	3,702	15,178
2,50	4,250	3,872	16,456
2,75	4,350	3,989	17,352
3,00	4,400	4,052	17,829
3,25	4,450	4,116	18,316
3,50	4,515	4,190	18,918
3,75	4,555	4,241	19,318
4,00	4,590	4,335	19,897
4,25	4,610	4,354	20,072
4,50	4,635	4,377	20,287
4,75	4,675	4,415	20,640
5,00	4,690	4,429	20,772
5,25	4,700	4,439	20,863
...	...	...	...
18,185	4,700	4,439	20,863

Результат расчета возраста нейтронов деления при замедлении до энергии индиевого резонанса  $\tau_{1,46}$  в графите по справочным данным, представленным в [6. С. 327], равен:

$$\tau_{1,46} = 260 \text{ см}^2.$$

Очевидно заметное отличие от теоретической оценки Олтера [4]:

$$\delta = \frac{260 - 307,4}{307,4} = -15,4 \text{ \%}.$$

Наиболее вероятными причинами подобного расхождения могут быть:

- устаревшие экспериментальные данные;
- некорректность в определении среднего значения декремента  $\zeta$ .

Проверка этих предположений была проведена с использованием групповых констант справочника [7], в котором эффективное микроскопическое транспортное сечение определялось по формуле

$$\sigma_{tr}(u) = \sigma_c(u) + \sigma_{in}(u) + \sigma_s(u)(1 - \mu(u)), \quad (5)$$

где  $\sigma_c$ ,  $\sigma_{in}$  – микроскопические эффективные сечения радиационного захвата и неупругого рассеяния;  $\mu(u)$  – средний косинус угла рассеяния.

Отметим наиболее существенные особенности экспериментальных ядерно-физических констант по углероду, представленных в разное время в справочниках [6, 7].

Если в справочнике [6] предполагается, что среднелогарифмическая потеря энергии за одно соударение нейтрона с ядром атома углерода  $\zeta$  постоянна на всем интервале замедления, то в 28-групповой системе констант [7] учитывается зависимость её от энергии, особенно заметная в области высоких энергий.

**Таблица 3.** Разбиение энергии нейтронов на группы

Группа	$E_n$	$\bar{u}$
-1	14,5...14,0 МэВ	-1,96361
0	14,0...10,5 МэВ	-1,81238
1	10,5...6,5 МэВ	-1,44692
2	6,5...4,0 МэВ	-0,96508
3	4,0...2,5 МэВ	-0,48551
4	2,5...1,4 МэВ	0,02532
5	1,4...0,8 МэВ	0,59784
6	0,8...0,4 МэВ	1,20397
7	0,4...0,2 МэВ	1,89712
8	0,2...0,1 МэВ	2,59027
9	100,0...46,5 кэВ	3,30702
10	46,5...21,5 кэВ	4,07454
11	21,5...10,0 кэВ	4,84406
12	10,0...4,65 кэВ	5,60961
13	4,65...2,15 кэВ	6,37713
14	2,15...1,0 кэВ	7,14665
15	1,0...0,465 кэВ	7,91219
16	465...215 эВ	8,67971
17	215...100 эВ	9,44923
18	100...46,5 эВ	10,21478
19	46,5...21,5 эВ	10,98230
20	21,5...10,0 эВ	11,75182
21	10,0...4,65 эВ	12,51736
22	4,65...2,15 эВ	13,28488
23	2,15...1,0 эВ	14,05440
24	1,0...0,465 эВ	14,81995
25	0,465...0,215 эВ	15,58747
T	0,0253 эВ	18,18561

Отличие имеет место и с применением среднего косинуса угла рассеяния  $\mu$ . При пользовании данными [6] эта характеристика считается постоянной и равной  $\mu=2/(3A)$ , где  $A$  – массовое число элемента. В табл. 4 можно видеть, что в области высоких энергий она заметно изменяется.

Сечения  $\sigma_s(u)$  и  $\sigma_{tr}(u)$ , представленные в [7], имеют несколько завышенные значения в сравнении с данными [6] (рис. 2). Очевидно, согласно (4), это приведет к меньшему значению возраста и, следовательно, к большей погрешности результата. На этом основании можно говорить о большой методической погрешности данного способа расчета возраста нейтронов, и поэтому воспользуемся

методом групп.

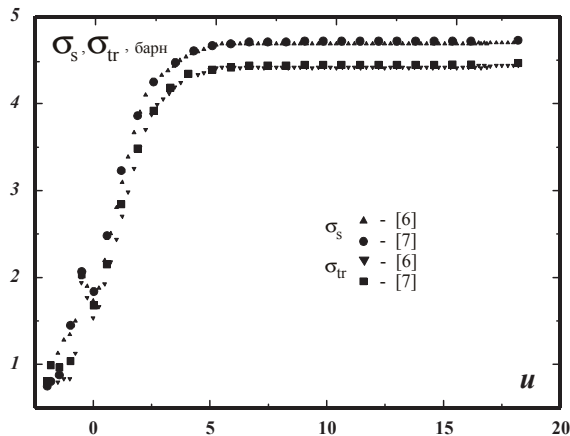


Рис. 2. Сравнение сечений по разным источникам

Основные энергетические характеристики групп представлены в табл. 3, где  $u$  означает среднее значение летаргии в группе.

Таблица 4. Основные групповые константы углерода [7]

Группа	$\sigma_s$ , барн	$\mu$	$\zeta$	$\sigma_c$ , барн	$\sigma_{in}$ , барн	$\sigma_{tr}$ , барн	$\sigma_s$ , барн
-1	0,751	0,617	0,022	0,081	0,438	0,80626	0,473
0	0,806	0,4436	0,068	0,09	0,454	0,99246	0,343
1	0,878	0,2682	0,104	0,06	0,262	0,96452	0,366
2	1,451	0,3247	0,081	0	0,059	1,03886	0,43
3	2,07	0,0164	0,153	0	0	2,03605	0,767
4	1,84	0,0869	0,16	0	0	1,6801	0,509
5	2,48	0,1323	0,158	0	0	2,1519	0,703
6	3,23	0,1191	0,161	0	0	2,84531	0,749
7	3,86	0,0972	0,158	0	0	3,48481	0,882
8	4,25	0,0787	0,159	0	0	3,91553	0,972
9	4,49	0,0683	0,156	0	0	4,18333	0,912
10	4,62	0,06	0,158	0	0	4,3428	0,947
11	4,68	0,0573	0,157	0	0	4,41184	0,962
12	4,7	0,056	0,159	0	0	4,4368	0,968
13	4,72	0,056	0,159	0	0	4,45568	0,972
14	4,72	0,056	0,159	$1 \cdot 10^{-5}$	0	4,45569	0,972
15	4,72	0,056	0,159	$2 \cdot 10^{-5}$	0	4,4557	0,972
16	4,73	0,056	0,159	$3 \cdot 10^{-5}$	0	4,46515	0,974
17	4,73	0,056	0,159	$4 \cdot 10^{-5}$	0	4,46516	0,974
18	4,73	0,056	0,159	$7 \cdot 10^{-5}$	0	4,46519	0,974
19	4,73	0,056	0,159	$1 \cdot 10^{-4}$	0	4,46522	0,974
20	4,73	0,056	0,159	$1,4 \cdot 10^{-4}$	0	4,46526	0,974
21	4,73	0,056	0,159	$2,1 \cdot 10^{-4}$	0	4,46533	0,974
22	4,73	0,056	0,159	$3,1 \cdot 10^{-4}$	0	4,46543	0,974
23	4,73	0,056	0,159	$4,5 \cdot 10^{-4}$	0	4,46557	0,974
24	4,73	0,056	0,159	$6,6 \cdot 10^{-4}$	0	4,46578	0,974
25	4,73	0,056	0,159	$9,7 \cdot 10^{-4}$	0	4,46609	0,974
T	4,729	0,056	-	0,0034	0	4,46758	

В табл. 4 представлена часть среднегрупповых сечений из работы [7], необходимых для проведения расчета возраста нейтронов до любого детектируемого значения:  $\sigma_{in}$  – сечение неупругого рассеяния с учетом сечений реакций ( $n,2n$ ) и ( $n,3n$ );  $\sigma_s \equiv \sigma_e$  – сечение упругого рассеяния;  $\mu$  – средний косинус угла рассеяния, вычисленный без учета

того, в какую группу попадет нейтрон после рассеяния;  $\zeta$  – среднее приращение летаргии при упругом рассеянии (среднелогарифмический декремент);  $\sigma_s$  – сечение упругого замедления. Помимо этого по приведенным данным [7] табл. 4 дополнена расчетом эффективного микроскопического транспортного сечения.

Согласно теории метода групп [8] возраст нейтронов в  $i$ -й группе определяется из следующей формулы

$$\tau_i = \frac{D^{(i)}}{N(\sigma_a^{(i)} + \sigma_R^{(i)})}, \quad (6)$$

где сечение поглощения определяется выражением  $\sigma_a^{(i)} = \sigma_e^{(i)} + \sigma_{in}^{(i)}$ , а сечение увода нейтрона из группы за счет упругого соударения нейтрона с ядром углерода есть сечение упругого замедления  $\sigma_R^{(i)} \equiv \sigma_s^{(i)}$ . Сумму сечений в (6)  $\sigma_a^{(i)} + \sigma_R^{(i)}$  по терминологии [8] называют действующим сечением замедлителя.

Таблица 5. Результаты расчета возраста в группах

Группа	$E_n$	$D^{(i)} \times N$ , барн <sup>-1</sup>	$\sigma_s^{(i)} + \sigma_R^{(i)}$ , барн	$\tau_i$ , см <sup>2</sup>
4	2,5...1,4 МэВ	0,1984	0,509	60,60086
5	1,4...0,8 МэВ	0,1549	0,703	34,25753
6	0,8...0,4 МэВ	0,11715	0,749	24,31766
7	0,4...0,2 МэВ	0,09565	0,882	16,86108
8	0,2...0,1 МэВ	0,08513	0,972	13,616840
9	100,0...46,5 кэВ	0,07968	0,912	13,58362
10	46,5...21,5 кэВ	0,07676	0,947	12,60123
11	46,5...21,5 кэВ	0,07555	0,962	12,21064
12	10,0...4,65 кэВ	0,07513	0,968	12,06667
13	4,65...2,15 кэВ	0,07481	0,972	11,9661
14	2,15...1,0 кэВ	0,07481	0,97201	11,96595
15	1,0...0,465 кэВ	0,07481	0,97202	11,9658
16	465...215 эВ	0,07465	0,97403	11,91583
17	215...100 эВ	0,07465	0,97404	11,91568
18	100...46,5 эВ	0,07465	0,97407	11,91523
19	46,5...21,5 эВ	0,07465	0,9741	11,91479
20	21,5...10,0 эВ	0,07465	0,97414	11,91419
21	10,0...4,65 эВ	0,07465	0,97421	11,91315
22	4,65...2,15 эВ	0,07465	0,97431	11,91166
23	2,15...1,0 эВ	0,07465	0,97445	11,90957

Коэффициент диффузии нейтронов в группе определяется выражением:

$$D^{(i)} = \frac{1}{3 \sum_{tr}^{(i)}} = \frac{1}{3N \sigma_{tr}^{(i)}}. \quad (7)$$

Таким образом, формулы (5)–(7) позволяют провести расчет возраста в каждой энергетической группе. Поскольку нас интересует область замедления, которая моделировалась в экспериментах по определению возраста в графите [4]: диапазон летаргий  $u=0...14,125$ , соответствующий пути замедления от  $E_0=2$  МэВ до энергии индиевого резонанса  $E_{in}=1,46$  эВ, то результаты расчета возраста в группах, представленные в табл. 5, охватывают только этот диапазон энергий.



Так как требуемые границы являются только частью 4 и 23 групп, то необходимо сделать правку значений возраста, используя простую интерполяцию. Так как в диапазоне 4 группы с энергией 2,5...1,4 МэВ возраст нейтронов при замедлении в этом интервале энергий равен  $\tau_i=60,6 \text{ см}^2$ , то очевидно, что в интервале 2,0...1,4 МэВ возраст будет иметь значение, равное  $32,7272 \text{ см}^2$ , а в последней группе –  $7,1457 \text{ см}^2$ .

После сложения всех составляющих в группах с учетом правки в 4 и в 23 группах получим следующее значение возраста

$$\sum \tau_i^{2 \text{ МэВ} \dots 1,46 \text{ эВ}} = 298,6866 \text{ см}^2,$$

которое с погрешностью менее 3 % отличается от теоретической оценки Олтера [4].

#### Выводы

Идея оценки качества систем ядерно-физических констант по результатам расчета возраста бы-

ла реализована в [9]. Возраст определялся в гомогенной бесконечной среде в многогрупповом приближении методом пространственно-угловых моментов функции распределения нейтронов, используя 18- и 26-групповые системы констант. 26-групповая система констант более детально учитывала неупругое рассеяние, поправки на резонансную самоэкранировку в среднегрупповые сечения радиационного поглощения, полного и упругого рассеяния, а также пороговые реакции при энергиях свыше 100 кэВ. По имеющимся на то время данным ядерно-физических свойств углерода ошибка расчета возраста в сравнении с экспериментом [4] не превышала 5 %.

Таким образом, применение метода групп, базирующего на более полных и достаточно корректных экспериментальных данных [2], позволяет получить более точные значения возраста замедляющихся нейтронов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меррей Р. Физика ядерных реакторов. – М.: АИ, 1961. – 292 с.
2. Кузьмин А.В. Основы теории переноса нейтронов. 2-е изд. – Томск: Изд-во ТПУ, 2010. – 192 с.
3. Бекурц К., Виртц К. Нейтронная физика. – М.: Атомиздат, 1968. – 456 с.
4. Campbell R.W., Paschall R.K., Swanson V.A. The age of fission neutrons to indium-resonance energy in graphite // Nucl. Sci. Engng. – 1964. – V. 20. – P. 445–454.
5. Кузьмин А.В. Экспериментальное и расчетное определение возраста нейтронов деления в различных средах. 1-изд. – Томск: Изд-во ТПУ, 2011. – 232 с.
6. Гордеев И.В., Кардашев Д.А., Малышев А.В. Ядерно-физические константы: Справочник. – М.: Госатомиздат, 1963. – 507 с.
7. Групповые константы для расчета реакторов и защиты: Справочник / Л.П. Абагян, Н.О. Базаянц, М.Н. Николаев, А.М. Цибуля / под ред. М.Н. Николаева. – М.: Энергоатомиздат, 1981. – 232 с.
8. Основы теории и методы расчёта ядерных энергетических реакторов / Г.Г. Бартоломей, Г.А. Бать, В.Д. Байбаков, М.С. Алхутов. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 512 с., ил.
9. Марченко Л.В., Сергеев Ю.А. Расчет квадрата длины замедления для различных сред в 18- и 26-групповых приближениях и их сравнение с экспериментальными данными // Бюллетень центра по ядерным данным. – М.: Атомиздат, 1969. – Вып. 6. – С. 319–390.

*Поступила 16.02.2013 г.*

УДК 534.2:539

## КОЭФФИЦИЕНТЫ ПУАССОНА ЩЕЛОЧНО-ГАЛОИДНЫХ КРИСТАЛЛОВ. Ч. II. ГАЛОГЕНИДЫ НАТРИЯ

В.Н. Беломестных, Э.Г. Соболева

Юргинский технологический институт (филиал) ТПУ

E-mail: sobolevaeno@mail.ru

*Исследованы коэффициенты Пуассона кристаллов галогенидов натрия при стандартных условиях и с изменением температуры. Установлено, что с повышением температуры в кристаллах NaX (X=F, Cl, Br, I) происходит смена вида неравенств между анизотропными коэффициентами Пуассона  $\sigma_{(hkl)}$  в соответствующих точках их упругой изотропии.*

**Ключевые слова:**

Коэффициент Пуассона, кристалл, упругие свойства.

**Key words:**

Poisson's ratio, crystal, elastic properties.

Ранее нами были опубликованы результаты по коэффициентам Пуассона кристаллов галогенидов лития [1]. Одной из интересных особенностей полученных данных было то, что в кристалле LiF при определенных условиях наблюдались отрицательные анизотропные коэффициенты Пуассона. Представляет интерес рассмотреть аналогичные зависимости для кристаллов галогенидов натрия.

В настоящей работе приводятся сведения о коэффициентах Пуассона кристаллов галогенидов натрия с общей формулой NaX (где X=F, Cl, Br, I). Некоторые физические свойства этих кристаллов указаны в табл. 1. Из таблицы следует, что при стандартных условиях фактор упругой анизотропии  $A < 1$  для всех галогенидов натрия, а соотношение Коши  $\Delta$  так же, как и в галогенидах лития, увеличивается по ряду NaF → NaCl → NaBr → NaI.

**Таблица 1.** Некоторые физические свойства галогенидов натрия (300 К) [2, 3]

Свойство	NaF	NaCl	NaBr	NaI
1. Компоненты тензора упругой жесткости $c_{ij}$ , ГПа				
$c_{11}$	97,10	49,60	39,65	30,07
$c_{12}$	24,30	13,10	10,29	9,12
$c_{44}$	28,00	12,68	9,95	7,33
2. Температура плавления, К	1265	1074	1028	935
3. Соотношение Коши $\Delta = c_{12}/c_{44}$	0,87	1,03	1,03	1,24
4. Фактор упругой анизотропии $A = 2c_{44}/(c_{11} - c_{12})$	0,77	0,70	0,68	0,70
5. Точка упругой изотропии ( $A=1$ ), К	923	637	710	673

В табл. 2 для исследуемого ряда кристаллов представлены анизотропные  $\sigma_{(hkl)}$ , средние  $\sigma$ , усредненные  $\bar{\sigma}$  коэффициенты Пуассона и параметр Грюнайзена  $\gamma$  при стандартных условиях. Расчетные соотношения для указанных величин были приведены нами ранее [1]. Из данных таблицы вытекает, что при комнатной температуре анизотропные коэффициенты Пуассона в галогенидах натрия подчиняются закономерности:  $\sigma_{\langle 110,1\bar{1}0 \rangle} > \sigma_{\langle 111 \rangle} > \sigma_{\langle 100 \rangle} > \sigma_{\langle 110,001 \rangle}$ . Параметр Грюнайзена, средний и усредненный коэффициенты Пуассона возрастают по ряду NaF → NaCl → NaBr → NaI.

**Таблица 2.** Коэффициенты Пуассона и параметр Грюнайзена кристаллов галогенидов натрия (300 К)

Кристалл	$\sigma_{\langle 100 \rangle}$	$\sigma_{\langle 110,001 \rangle}$	$\sigma_{\langle 110,1\bar{1}0 \rangle}$	$\sigma_{\langle 111 \rangle}$	$\sigma$	$\bar{\sigma}$	$\gamma$
NaF	0,20	0,17	0,32	0,26	0,24	0,24	1,44
NaCl	0,21	0,17	0,37	0,29	0,26	0,26	1,53
NaBr	0,22	0,18	0,38	0,29	0,27	0,27	1,59
NaI	0,23	0,18	0,39	0,30	0,28	0,28	1,64

Температурные изменения коэффициентов Пуассона кристаллов NaX представлены на рисунке. Виды этих зависимостей для отдельных кристаллов натриевого ряда в целом схожи между собой: как и следовало ожидать, в точках упругой изотропии все коэффициенты Пуассона данного кристалла равны между собой ( $\sigma_{\langle 100 \rangle} = \sigma_{\langle 110,001 \rangle} = \sigma_{\langle 110,1\bar{1}0 \rangle} = \sigma_{\langle 111 \rangle} = \sigma$ ). Подобного не наблюдалось для аналогичных зависимостей  $\sigma_{(hkl)}(T)$  и  $\sigma(T)$  в кристаллах галогенидов лития [1]. При температурах выше соответствующих точек упругой изотропии кристаллов NaX анизотропия их коэффициентов Пуассона описывается следующим неравенством:  $\sigma_{\langle 110,001 \rangle} > \sigma_{\langle 100 \rangle} > \sigma_{\langle 111 \rangle} > \sigma_{\langle 110,1\bar{1}0 \rangle}$ . В области предплавления NaCl вид зависимостей  $\sigma(T)$  напоминает аналогичные кривые в NaClO<sub>3</sub>, только без перехода в отрицательную область значений коэффициентов Пуассона (ауксетичное состояние) [4].

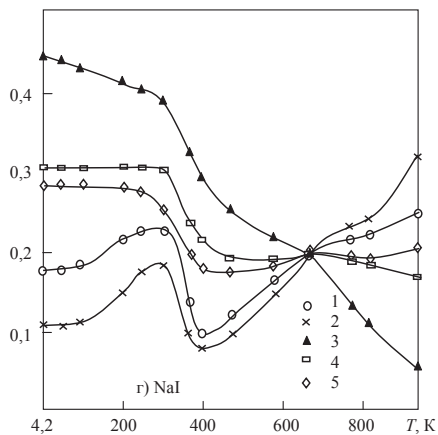
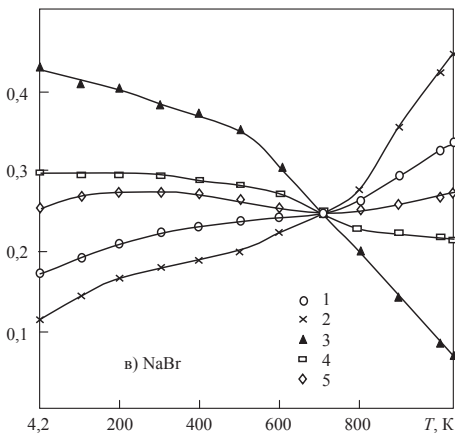
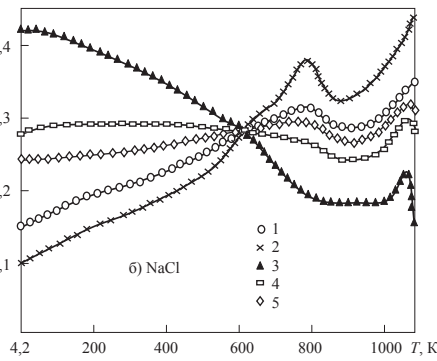
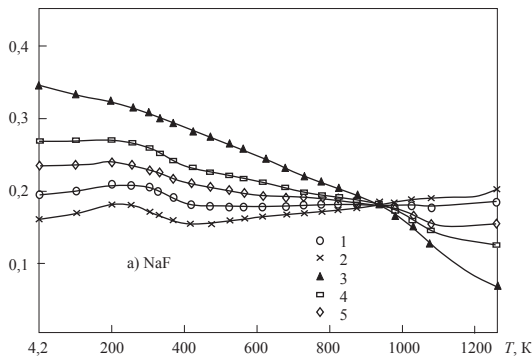
Представляло интерес рассмотреть температурные изменения анизотропных модулей сдвига  $G_{(hkl)}$  и Юнга  $E_{(hkl)}$  кристаллов галогенидов натрия (табл. 3–6). Анизотропные упругие модули, приведенные в этих таблицах, были определены по расчетным соотношениям [4], где  $s_{ij}$  – постоянные податливости:

$$E_{(100)} = \frac{1}{s_{11}}, \quad E_{(110)} = \frac{2}{s_{11} + s_{12} + 0,5s_{44}},$$

$$E_{(111)} = \frac{1}{s_{11} - \frac{2}{3}(s_{11} - s_{12} + 0,5s_{44})},$$

$$G_{(100)} = \frac{1}{s_{44}}, \quad G_{(110)} = \frac{2}{s_{11} - s_{12} + 0,5s_{44}},$$

$$G_{(111)} = \frac{1}{s_{44} - \frac{4}{3}(s_{11} - s_{12} + 0,5s_{44})}.$$



**Рисунок.** Температурные изменения коэффициентов Пуассона кристаллов NaX: 1)  $\sigma_{\langle 100 \rangle}$ ; 2)  $\sigma_{\langle 110,001 \rangle}$ ; 3)  $\sigma_{\langle 110,110 \rangle}$ ; 4)  $\sigma_{\langle 111 \rangle}$ ; 5)  $\sigma$  (поликристалл)

В работе использовались справочные сведения по упругим постоянным монокристаллов галогенидов натрия [5].

Из табл. 3–6 следует, что у кристаллов галогенидов натрия с повышением температуры до точек упругой изотропии наблюдаются следующие неравенства между анизотропными упругими модулями:  $G_{\langle 100 \rangle} < G_{\langle 110 \rangle} < G_{\langle 111 \rangle}$ ,  $E_{\langle 100 \rangle} > E_{\langle 110 \rangle} > E_{\langle 111 \rangle}$ , а выше этих точек –  $G_{\langle 111 \rangle} < G_{\langle 110 \rangle} < G_{\langle 100 \rangle}$ ,  $E_{\langle 111 \rangle} > E_{\langle 110 \rangle} > E_{\langle 100 \rangle}$ .

**Таблица 3.** Анизотропные упругие модули кристалла NaF

T	$G_{\langle 100 \rangle}$	$G_{\langle 110 \rangle}$	$G_{\langle 111 \rangle}$	$E_{\langle 100 \rangle}$	$E_{\langle 110 \rangle}$	$E_{\langle 111 \rangle}$
K	ГПа					
4,2	30,40	35,60	37,70	98,0	82,50	76,00
100	29,50	34,25	36,10	94,00	78,71	74,36
200	29,00	33,00	34,75	88,00	77,01	71,49
300	28,00	31,65	33,09	85,00	74,03	68,50
400	27,52	30,50	31,80	80,00	70,05	66,00
500	26,85	29,15	30,25	76,50	67,50	64,00
600	26,17	27,80	28,60	71,50	65,00	62,50
700	25,50	26,50	27,10	66,50	62,00	60,00
800	24,80	25,25	25,60	62,50	58,00	57,50
900	24,00	24,25	24,60	57,50	56,00	55,00
1000	23,45	22,60	22,50	52,45	53,00	53,50
1100	22,75	21,40	21,00	48,00	50,00	51,00
1200	22,00	20,00	19,50	44,50	47,50	48,00
1265	21,52	19,34	18,71	41,56	46,62	48,60

**Таблица 4.** Анизотропные упругие модули кристалла NaCl

T	$G_{\langle 100 \rangle}$	$G_{\langle 110 \rangle}$	$G_{\langle 111 \rangle}$	$E_{\langle 100 \rangle}$	$E_{\langle 110 \rangle}$	$E_{\langle 111 \rangle}$
K	ГПа					
4,2	13,25	17,10	19,10	57,50	41,00	36,50
100	13,10	16,60	18,10	52,50	37,50	35,00
200	13,01	15,87	17,13	48,47	36,28	33,47
300	12,68	14,97	15,92	44,13	34,87	32,58
400	12,34	13,97	14,61	39,57	33,33	31,67
500	12,00	13,00	13,25	31,00	30,45	30,00
600	11,50	11,80	12,00	30,00	29,50	29,45
700	11,20	10,75	10,50	25,00	27,50	28,00
800	10,90	9,50	9,25	22,50	24,00	26,00
900	10,10	8,25	8,00	20,00	22,00	25,00
1000	7,50	6,50	5,90	15,00	17,50	19,00
1073	5,35	4,62	4,42	10,97	13,09	13,99

**Таблица 5.** Анизотропные упругие модули кристалла NaBr

T	$G_{\langle 100 \rangle}$	$G_{\langle 110 \rangle}$	$G_{\langle 111 \rangle}$	$E_{\langle 100 \rangle}$	$E_{\langle 110 \rangle}$	$E_{\langle 111 \rangle}$
K	ГПа					
4,2	10,50	13,00	14,15	41,00	30,00	27,00
100	10,30	12,83	13,97	40,68	29,28	26,78
200	10,00	12,00	12,86	36,82	28,17	26,12
300	9,95	11,70	12,42	34,65	27,51	25,74
400	9,00	10,47	11,06	30,55	24,69	23,20
500	8,80	9,80	10,18	27,32	23,59	22,57
600	8,50	9,08	9,29	24,18	22,16	21,56
700	8,00	8,12	8,17	20,69	20,29	20,16
800	7,50	7,31	7,25	17,96	18,54	18,75
900	7,00	5,92	5,63	13,29	16,09	17,30
1000	6,50	4,92	4,55	10,43	14,07	15,92
1028	6,00	4,42	4,07	9,27	12,81	14,68

**Таблица 6.** Анизотропные упругие модули кристалла NaI

T	$G_{\langle 100 \rangle}$	$G_{\langle 110 \rangle}$	$G_{\langle 111 \rangle}$	$E_{\langle 100 \rangle}$	$E_{\langle 110 \rangle}$	$E_{\langle 111 \rangle}$
K	ГПа					
4,2	7,81	10,23	11,40	34,81	22,80	20,44
100	7,40	9,75	10,80	32,50	22,00	20,40
200	7,35	9,25	9,50	27,00	21,50	19,50
300	7,33	8,63	9,16	25,83	20,43	19,09
400	7,30	8,40	9,00	23,45	19,00	18,00
500	7,20	8,10	8,25	20,00	18,10	17,50
600	7,00	7,20	7,25	18,10	17,00	16,50
700	6,70	6,50	6,40	15,00	15,50	16,00
800	6,45	5,80	5,60	12,50	13,50	15,00
900	6,20	5,10	4,80	11,25	13,25	14,00
924	6,10	4,90	4,60	10,30	12,98	14,21

Таким образом, качественно анизотропии коэффициентов Пуассона и упругих модулей (виды

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беломестных В.Н., Соболева Э.Г. Коэффициенты Пуассона щелочно-галогидных кристаллов. Ч. I. Галогениды натрия // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 2. – С. 137–139.
2. Беломестных В.Н., Похолков Ю.П., Ульянов В.Л., Хасанов О.Л. Упругие и акустические свойства ионных, керамических диэлектриков и высокотемпературных сверхпроводников. – Томск: СТТ, 2001. – 226 с.
3. Беломестных В.Н., Теслева Е.П. Ангармонические эффекты в твердых телах (акустические аспекты). – Томск: Изд-во ТПУ, 2009. – 151 с.

неравенств) кристаллов NaX (X=F,Cl,Br,I) не совпадают между собой во всем исследованном интервале температур.

#### Выводы

1. Определены коэффициенты Пуассона моно- и поликристаллов галогенидов натрия в температурной области их существования.
2. Установлены два вида неравенств между анизотропными коэффициентами Пуассона монокристаллов галогенидов натрия в зависимости от значения фактора упругой анизотропии по отношению к единице ( $A < 1$  или  $A > 1$ ). Такие виды неравенств для  $\sigma_{(hkl)}$  должны быть присущи всем кубическим кристаллам с решеткой типа B1 (NaCl).

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-08-98014 р\_сибирь\_a на проведение фундаментальных научных исследований.*

4. Беломестных В.Н., Соболева Э.Г. Акустические, упругие и неупругие свойства кристаллов галогенатов натрия. – Томск: Изд-во ТПУ, 2009. – 276 с.
5. Францевич И.Н., Воронов Ф.Ф., Бакута С.А. Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов: справочник. – Киев: Наукова думка, 1982. – 286 с.

*Поступила 18.03.2013 г.*

## ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИЙ МОМЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ РЕГУЛИРУЮЩЕЙ ЗАСЛОНКИ МАГИСТРАЛЬНОГО НЕФТЕПРОВОДА

Е.П. Богданов, С.В. Рикконен\*

Томский политехнический университет

\*ООО «Система», г. Томск

E-mail: epbogdanov@mail.ru

*Предложен формализованный геометрический метод приближенных гидромеханических расчетов регулирующей поворотной заслонки магистральных нефтепроводов, позволяющий рассчитать перепады давления, моменты сопротивления на валу привода и определить потери мощности в заслонке.*

### Ключевые слова:

*Заслонка, нефтепровод, поток, расход, скорость.*

### Key words:

*Shutter, oil pipeline, flow, pipe flow, spouting velocity.*

Магистральные нефтепроводы относятся к технологическим объектам с потоковой технологией. Цель управления объектом с потоковой технологией – организация структуры потока и поддержание требуемых параметров потока. Регулирование параметров потока в заданном режиме обеспечивается системами локальной автоматики на основе регуляторов.

Основными параметрами, характеризующими режим работы магистрального нефтепровода, являются мгновенный расход и избыточное давление трубопроводов. С позиции обеспечения максимальной производительности трубопроводной сети задача управления режимами заключается в создании максимально возможного давления в расчетных точках трубопровода. Это осуществляется посредством последовательного включения нескольких насосных агрегатов на головной и промежуточных перекачивающих станциях. Потребность в регулировании возникает только в аварийных режимах и производится методом дросселирования. Настройка параметров регулятора давления (рис. 1) производится вручную для одной точки механической характеристики привода заслонки, а так как нагрузка на валу двигателя является

нелинейной, то в любой другой точке механической характеристики привод является практически не настроенным. Параметры магистрального трубопровода как объекта регулирования при изменении режима перекачки существенно меняются. В некоторых случаях коэффициент передачи при смене режима изменяется более чем в 10 раз. Естественно, что в таких условиях однажды выполненная настройка регуляторов не может обеспечить его робастность во всех режимах [1].

Поэтому создание математической модели расчета нелинейной механической характеристики нагрузки, а также автоматическая перенастройка параметров регулятора давления по расчетным данным является актуальной задачей.

Специфика регулирования давления в магистральных трубопроводах методом дросселирования потока заключается в существенной нелинейности объекта регулирования, обусловленной следующими причинами:

- в нормальном режиме дросселирование не допускается, а заслонка находится за пределами зоны дросселирования, далеко от рабочей зоны;
- в зоне дросселирования перепад давления существенно зависит от мгновенного расхода

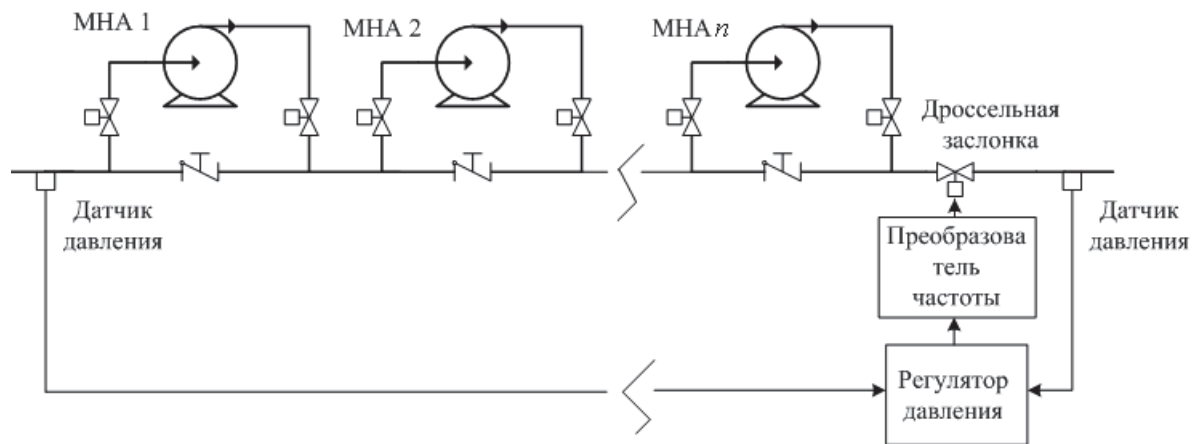
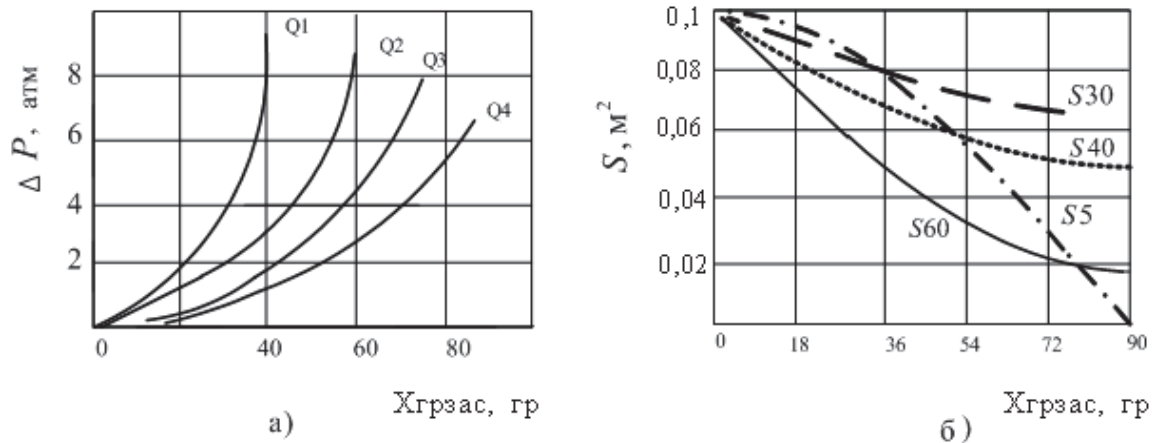


Рис. 1. Структурная схема системы регулирования давления методом дросселирования потока на перекачивающей станции



**Рис. 2.** Зависимость перепада давления на регулирующей заслонке от степени её открытия (закрытия): а) мгновенный расход жидкости через поперечное сечение трубопровода ( $Q1 > Q2 > Q3 > Q4 > Q5$ ); б) изменение проходного сечения канала по длине заслонки

жидкости, т. е. в различных режимах перекачки заслонка имеет различные коэффициенты передачи (рис. 2, а);

- при изменении угла закрытия проходное сечение канала самой заслонки имеет существенную нелинейность (рис. 2, б).

Чтобы правильно выбрать мощность двигателя привода регулирующей заслонки и оперативно регулировать перепад давления в трубопроводе, необходимо знать зависимость гидромеханического момента сопротивления на валу двигателя привода заслонки от расхода и от степени закрытия заслонки. В литературе приводятся только качественные (в основном экспериментальные) характеристики, которые сложно использовать в обобщенном алгоритме управления.

Целью настоящей работы является дальнейшее развитие формализованного математического метода определения нелинейной нагрузки на валу двигателя привода регулирующей заслонки в зависимости от расхода, скорости течения жидкости и угла открытия заслонки [2].

Поворотные заслонки являются регулирующими органами с изменяющимся по значению проходным сечением. С изменением проходного сечения существенно меняются гидравлические сопротивления, вызывающие изменения потери давления и изменение расхода жидкости. При течении среды через сужающее устройство часть энергии потока преобразуется в потенциальную энергию давления, часть превращается в теплоту, часть затрачивается на работу по преобразованию агрегатного состояния (активации) среды. Для трубопроводного транспорта две последних части энергии являются безвозвратными потерями.

«Если при прохождении среды через заслонку давление в наиболее узком сечении ниже некоторого минимального значения, в потоке происходят качественные изменения, искажающие требуемую расходную характеристику регулирующего органа» [3].

В наиболее узком сечении регулирующего органа за счет высоких сдвиговых скоростей, трения между слоями жидкости и образования зоны кавитации происходит наибольшее влияние на агрегатное состояние и структуру среды.

Процесс дросселирования жидкости в поворотной заслонке состоит в основном из увеличения скорости течения среды и последующего его замедления. Ускорение обычно связано с небольшими, а замедление с основными потерями давления в проточной части.

Потери напора и внутренние расходы регулирующих устройств в большей мере зависят от геометрии и конфигурации каналов.

На рис. 3 представлена схема и гидродинамическая картина поворотной заслонки.

Условно обозначены несколько характерных зон, в которых течение среды отличны друг от друга: I – зона входа и выхода; II – зона плавного сужения канала (зона конфузора); III – зона гидравлического сопла; IV – зона резкого расширения канала; V – зона прямого канала. Площади проходного сечения данных зон существенно зависят от угла открытия заслонки.

В работе [2] описан формализованный геометрический метод расчета гидромеханических характеристик на примере нефтяного трубопровода (рис. 3). Рамки данной статьи не позволяют приводить все подробности анализа расчета местных гидравлических сопротивлений регулирующей заслонки. Поэтому приводится основная концепция получения алгоритма регулирования заслонки.

Имеется поворотная регулирующая заслонка, работающая на нефтяной трубопровод, со следующими параметрами: вязкость среды  $\eta = 8,5 \cdot 10^{-3}$  Па·с; плотность среды  $\rho = 850$  кг/м<sup>3</sup>; длина заслонки по потоку  $L_{зас} = 0,5$  м; диаметр заслонки  $d = 0,5$  м; гео-

$$L_{сop} = d; S = \pi \frac{d^2}{4}$$

метрическая длина заслонки  $L_{сop}$  – площадь сечения заслонки.



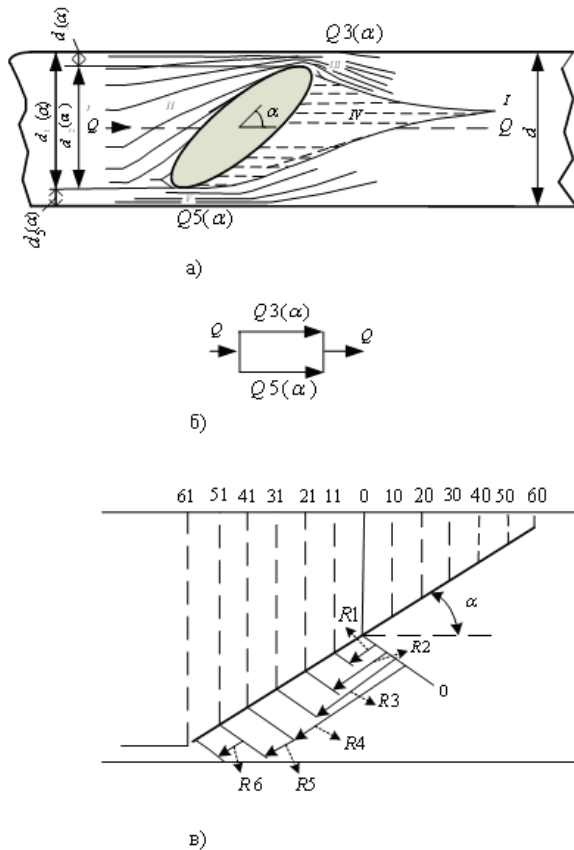


Рис. 3. Гидродинамическая картина обтекания заслонки: а) выделение особых зон течения; б) схема замещения потока; в) разбивка заслонки на участки площадей

Для решения задачи регулирующая заслонка в схеме расчета формально заменяется на конфузор с переменным углом открытия. Далее проводится обычный расчет гидравлических сопротивлений с учетом изменения геометрии каналов течения (сужения, сопло, резкое расширение и т. д.) [2].

Для определения моментов сопротивления и мощности потерь применены известные алгорит-

мы для расчета местных гидравлических потерь конфузора [4].

Расход жидкости на входе конфузора:

$$Q_{CON}(\alpha) = VS61(\alpha),$$

где  $V$  – скорость жидкости на входе заслонки.

Скорость жидкости в проходных сечениях конфузора (рис. 4):

$$V_i(\alpha) = V \frac{Q_{CON}(\alpha)}{S_i}.$$

Перепад давления в проходных сечениях конфузора:

$$\Delta P_i(\alpha) = \frac{\rho}{2} (V(\alpha))^2.$$

Сила сопротивления течению жидкости в проходных сечениях конфузора:

$$F_i(\alpha) = S_i(\alpha) \Delta P_i(\alpha).$$

Момент на валу двигателя привода заслонки:

$$M_r(\alpha) = [F60(\alpha) - F61(\alpha)]R6 + [F50(\alpha) - F51(\alpha)]R5 + [F40(\alpha) - F41(\alpha)]R4 + [F30(\alpha) - F31(\alpha)]R3 + [F20(\alpha) - F21(\alpha)]R2 + [F10(\alpha) - F11(\alpha)]R1.$$

Момент на валу двигателя привода регулирующей заслонки складывается из гидромеханического момента  $M_r(\alpha)$  и момента трения в опорах цапф  $M_{тр}(\alpha)$ .

Гидромеханический момент  $M_r(\alpha)$  определяется по предлагаемой методике [2]. Здесь  $\alpha$  – угол закрытия заслонки.

$$M_{тр}(\alpha) = 0,785d^2 1,2\Delta P \sin \alpha \mu \frac{d_{цапф}}{2}.$$

Коэффициент трения в опорах  $\mu=0,4$ . Диаметр цапфы  $d_{цапф}=0,1$  м

Суммарный момент сопротивления на валу заслонки (рис. 5):

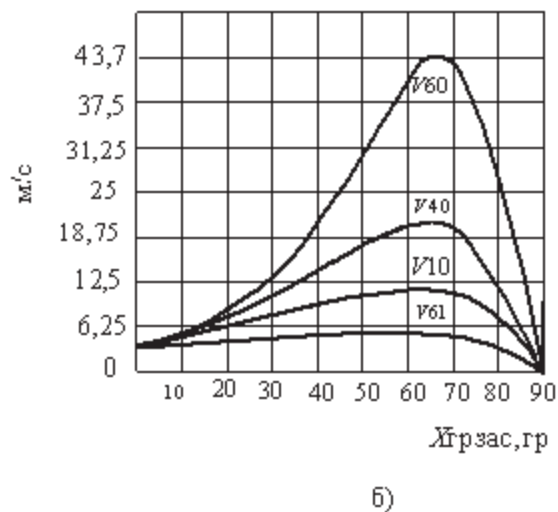
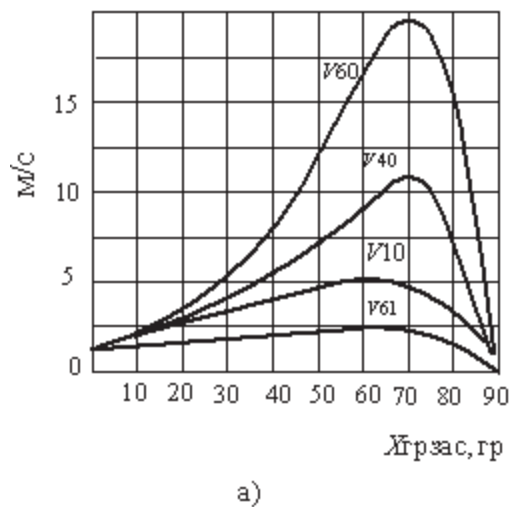


Рис. 4. Скорость жидкости (м/с) в разных проходных сечениях заслонки: а) скорость жидкости в трубопроводе  $V=1,5$  м/с; б) скорость жидкости в трубопроводе  $V=3,2$  м/с

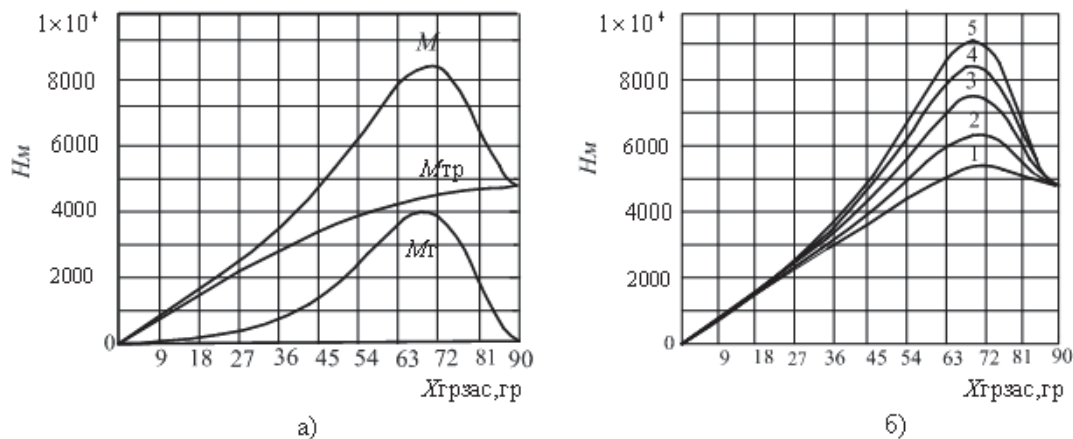


Рис. 5. Моменты сопротивления на валу двигателя заслонки в зависимости от угла закрытия при  $V=3,2$  м/с.  $M_{Г}$  – момент гидравлический,  $M_{тр}$  – механический момент трения: а) суммарный момент сопротивления; б) моменты сопротивления на валу двигателя заслонки в зависимости от угла закрытия и при разных скоростях жидкости в трубопроводе: 1 – 1,5; 2 – 2,2; 3 – 2,8; 4 – 3,2; 5 – 3,5 м/с

$$M(\alpha) = M_{Г}(\alpha) + M_{тр}(\alpha).$$

Для сравнения приведены результаты расчетов моментов сопротивления заслонки по традиционной методике [4] при  $V=3,2$  м/с (рис. 6):

$$M_{Г}(\alpha) = K \frac{d^2}{12} \rho \cdot 10^{-3} \frac{V^2}{20 \cdot 9,8} \cdot 10.$$

Коэффициент  $K$  является функцией угла закрытия [2].

$$M_{тр}(\alpha) = 0,785d^2 1,2\Delta P \mu \frac{d_{цАПФ}}{2};$$

$$M(\alpha) = M_{Г}(\alpha) + M_{тр}(\alpha).$$

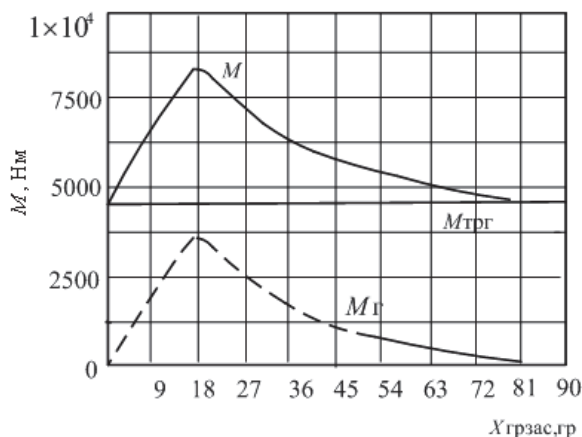


Рис. 6. Моменты сопротивления на валу заслонки в зависимости от угла закрытия (методика Гуревича) [4]

### Выводы

1. Предложенный формализованный геометрический метод позволяет осуществить приближенные гидромеханические расчеты поворотной заслонки нефтепровода, рассчитать расходы среды, перепады давления, моменты сопротивления на валу привода и определить потери мощности в заслонке.
2. Полученные характеристики (внутренний расход, моменты сопротивлений заслонки) имеют сложную зависимость от угла закрытия и несколько отличаются от характеристик, полученных по методике [1].
3. По расходной характеристике можно определить, при каких углах поворота заслонки начнутся качественные изменения потока жидкости и какие уровни энергии будут затрачены системой на изменение агрегатного состояния среды.
4. Предложенный формализованный геометрический метод позволяет создать алгоритм управления для системы автоматического регулирования давления с учетом нелинейности характеристики нагрузки и не перенастраивать систему регулирования в зависимости от конкретной производительности трубопровода.
5. В системах автоматического регулирования угла поворота заслонки (на больших углах) необходимо применять специальные меры по обеспечению устойчивой работы привода (применять червячный редуктор в приводе заслонки или устанавливать тормоз).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Замятин С.В., Плотников Д.А., Гончаров В.И. Идентификация нелинейных объектов на основе вещественного интерполяционного метода // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 5. – С. 66–69.
2. Гуревич Д.Ф. Расчет и проектирование трубопроводной арматуры. – Л.: Машиностроение, 1969. – 886 с.

3. Благоев Э.Е., Ивницкий Б.Я. Дроссельно-регулирующая арматура ТЭС и АЭС. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 288 с.
4. Антропов А.Т., Рикконен С.В. Гидромеханические характеристики регулирующей заслонки САР давления // itech – журнал интеллектуальных технологий. – 2009. – № 12. – С. 35–39.

Поступила 16.01.2013 г.

## РАСЧЕТ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗАДВИЖКИ МАГИСТРАЛЬНОГО ТРУБОПРОВОДА

Е.П. Богданов, С.В. Рикконен\*

Томский политехнический университет

\*ООО «Система», г. Томск

E-mail: epbogdanov@mail.ru

*Разработана методика расчета потерь давления и потерь мощности в элементе трубопровода (в клиновой задвижке) с учетом течения жидкости под клином и над клином задвижки. Методика позволяет определить потери энергии на перекачку жидкости разной плотности и вязкости при разном соотношении длины трубопровода и количества элементов арматуры, а также создать математический алгоритм управления задвижкой с учетом потерь мощности и тем самым в какой-то степени минимизировать потери мощности.*

**Ключевые слова:**

*Задвижка, потери, мощность, трубопровод, алгоритм.*

**Key words:**

*Pipe valve, loses, power, pipeline, algorithm.*

Нормальная эксплуатация трубопровода невозможна без арматуры – неотъемлемой части любого трубопровода. Трубопроводная арматура представляет собой устройство, предназначенное для управления потоками жидкостей, транспортируемых по трубопроводу.

В трубопроводных системах технологических и энергетических установок на долю местных гидравлических сопротивлений (потери на арматуре) может приходиться до 50 % от общего гидравлического сопротивления системы. В таких трубопроводах линейные части невелики и потери на трение линейной части и местные потери соизмеримы.

В магистральных нефтепроводах местные гидравлические сопротивления считают «грубо» – 2 % от потерь напора на трение. Такая оценка потерь является приближенной и не может быть информативной базой для процесса минимизации потерь перекачки.

Целью данной статьи является разработка приближенной методики расчета потерь мощности и потерь давления в клиновой задвижке, которая позволила бы конкретизировать эти потери и тем самым дала бы возможность более точно проектировать систему трубопровода.

Местные гидравлические сопротивления в трубопроводе присутствуют во всех элементах конструкции – это разного рода изменения живого сечения или конфигурации потока (когда происходит резкое изменение величин и направлений его скоростей), т. е. расширение или сужение потока, повороты, препятствия в виде диафрагм, конфузоров, кранов, задвижек и т. д. Такие сопротивления характеризуются образованием водоворотных зон при обтекании данного рода препятствий. Это и является основным источником местных потерь энергии. В турбулентном режиме движения потери энергии пропорциональны квадрату скорости:

$$h_{\text{мест}} = \varepsilon \frac{V^2}{2\xi},$$

где  $\xi$  – безразмерный коэффициент, называемый коэффициентом местного сопротивления и определяемый опытным путем для каждого вида сопротивлений [1].

Для задвижки коэффициент местного сопротивления определяется также опытным путем и является функцией переменного диаметра трубопровода. С закрытием задвижки коэффициент местных гидравлических потерь резко возрастает, это ведет к увеличению гидравлических потерь непосредственно в задвижке (выделению энергии) в виде вихревых течений и кавитационного поля.

В публикации [2] представлены результаты экспериментальных исследований режима движения воды в трубопроводе, в ходе которых было установлено влияние сужения проходного сечения трубопровода на амплитудно-частотные характеристики гидроакустических шумов, возникающих при движении жидкости в трубе.

Воспользуемся данным экспериментом, чтобы рассчитать потери давления и мощности на клиновой задвижке по методике [3, 4]. Схема эксперимента представлена на рис. 1, расходная зависимость  $Q=f(D)$  показана на рис. 6.

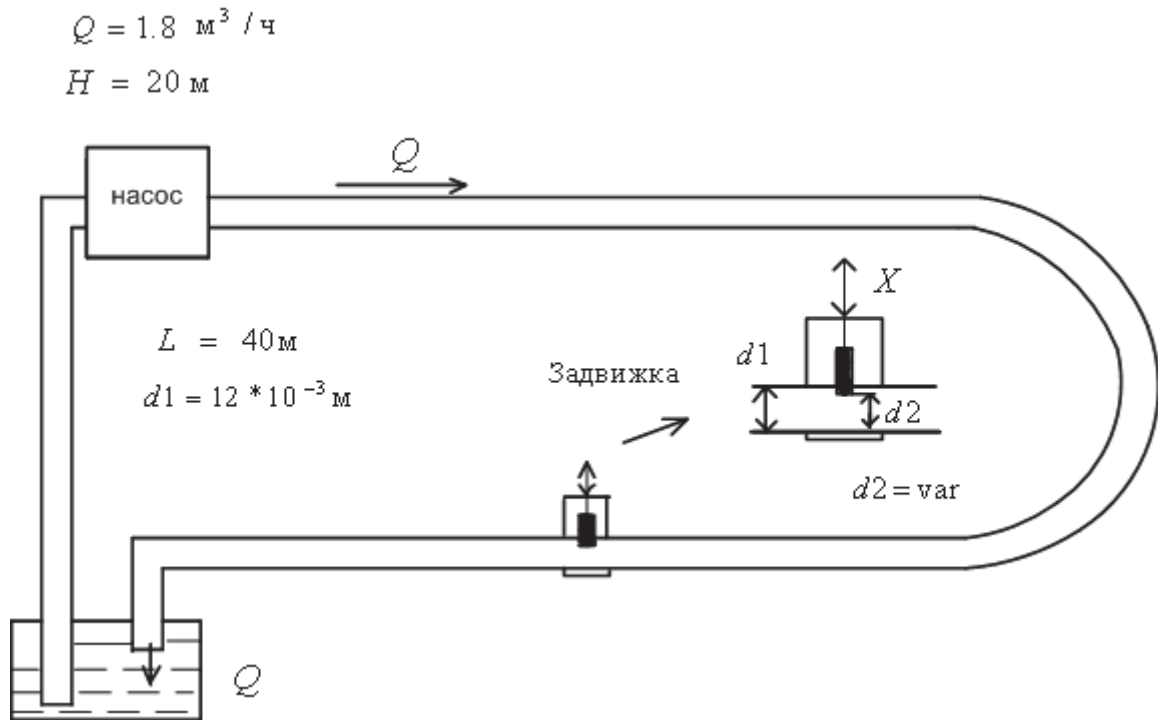
Практически во всех трубопроводах для регулирования режимов широко используются клиновые задвижки, рис. 2.

Пути движения жидкости в клиновой задвижке представлены на рис. 3.

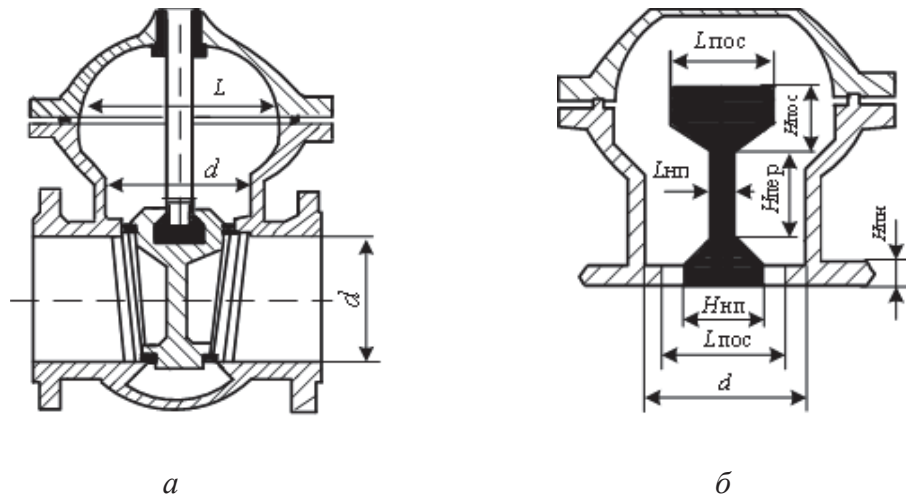
Анализ картины движения среды и разделения потока базируются на законе «неразрывности потока сплошной среды».

Для задвижки коэффициент местного сопротивления определяется обычно опытным путем и является функцией переменного диаметра трубопровода (рис. 4).

С закрытием задвижки коэффициент местных гидравлических потерь резко возрастает, это ведет к увеличению гидравлических потерь непосредственно в задвижке (выделению энергии) в виде вихревых течений и кавитационного поля.



**Рис. 1.** Физическая модель трубопровода для изучения гидромеханических сопротивлений задвижки. Плотность жидкости  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ , динамическая вязкость жидкости  $\mu = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$ . Насос БЦ-0,5-20.  $D = \frac{d2}{d1} \cdot 100 \%$  – переменный диаметр трубопровода в задвижке,  $d1$  – диаметр проходного сечения трубопровода,  $d2$  – диаметр открытия диафрагмы



**Рис. 2.** Клиновая задвижка: а) конструкция задвижки; б) характерные размеры задвижки

Ориентировочные геометрические параметры задвижки в зависимости от диаметра проходного сечения:  $d = 0,012 \text{ м}$ ;  $L = 1,25d$ ;  $L_{\text{пос}} = (2/3)d$ ;  $H_{\text{пос}} = (1/3)d$ ;  $H_{\text{нп}} = (1/2)d$ ;  $L_{\text{нп}} = (1/5)d$ ;  $H_{\text{нп}} = (1/6)d$ ;  $H_{\text{пер}} = d - H_{\text{пос}} - H_{\text{нп}}$ .

Все местные потери энергии зависят от геометрических размеров проходных сечений каналов. Изменения площадей проходных сечений, в зависимости от степени открытия, представлены на рис. 5.

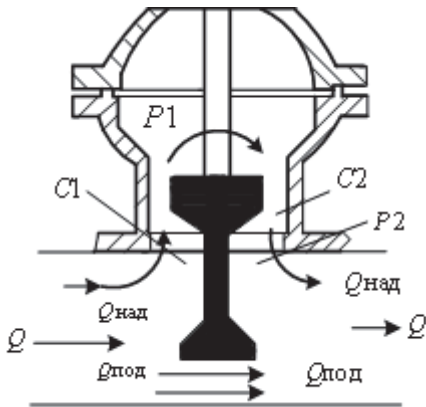
В зависимости от изменения площадей проходных сечений изменяются и расходы жидкости в каналах (рис. 6).

Проходное сечение задвижки:

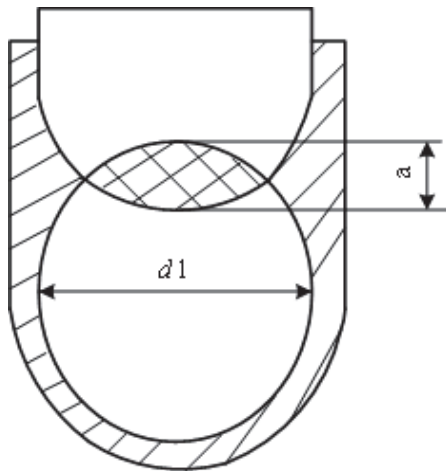
$$S_{\text{под}} = S1 \left( 1,25 \frac{a}{d1} - 0,25 \left( \frac{a}{d1} \right)^4 \right).$$

Расход жидкости в проходном сечении задвижки под клином задвижки  $Q_{\text{под}}$  и над клином задвижки  $Q_{\text{над}}$ :

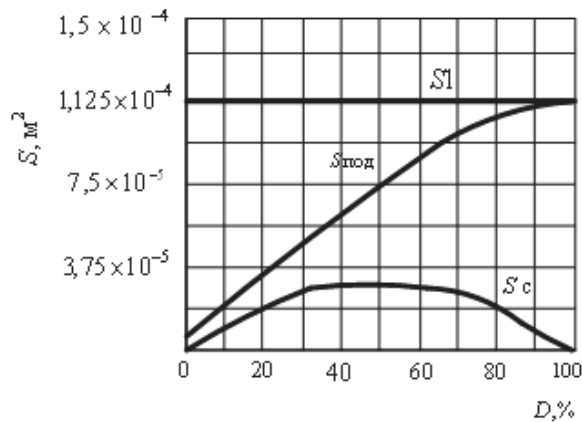
$$Q_{\text{под}} = Q \frac{S_{\text{под}}}{S1}, Q_{\text{над}} = Q - Q_{\text{под}}.$$



**Рис. 3.** Картина движения жидкости по каналам в зоне клина задвижки.  $Q_{\text{над}}$  – расход среды над клином задвижки;  $Q_{\text{под}}$  – расход среды под клином задвижки;  $Q$  – общий расход среды;  $P1$  – давление в канале над клином задвижки;  $C1, C2$  – зоны сужения



**Рис. 4.** Проходное сечение задвижки



**Рис. 5.** Изменение площади каналов в зависимости от степени открытия задвижки.  $S_{\text{под}}$  – площадь канала под клином (проходное сечение задвижки);  $S_{\text{с}}$  – площадь сечения канала над клином в зоне сужения  $C1$ ;  $S1$  – площадь проходного сечения трубопровода

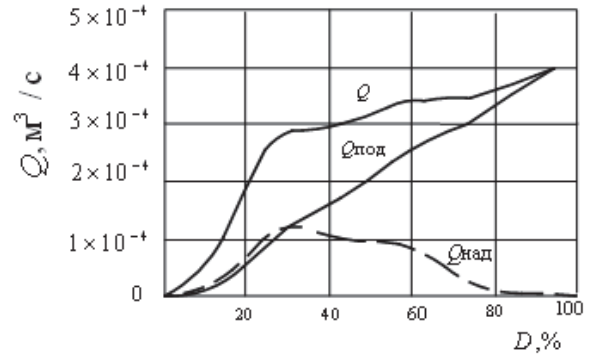
Скорость жидкости под клином задвижки:

$$V_{\text{под}} = \frac{Q_{\text{под}}}{S_{\text{под}}}.$$

Скорость жидкости в трубопроводе:

$$V_{\text{труб}} = \frac{Q}{S1}.$$

Как видно из рис. 3, в заслонке жидкость протекает по двум каналам – под клином задвижки и над клином задвижки.



**Рис. 6.** Расход жидкости в системе в зависимости от степени открытия задвижки.  $Q_{\text{под}}$  – расход под клином задвижки,  $Q_{\text{над}}$  – расход над клином задвижки,  $Q=f(D)$  – расход жидкости в системе по источнику [2]

#### Расчет потерь давления под клином задвижки

Коэффициенты местных гидравлических потерь под клином задвижки при резком сужении и резком расширении канала вычисляется по формуле:

$$\epsilon_{\text{с под}} = 0,5 \left( 1 - \frac{S_{\text{под}}}{S1} \right), \epsilon_{\text{р под}} = \left( \frac{S1}{S_{\text{под}}} - 1 \right)^2.$$

Суммарный коэффициент местных гидравлических под клином задвижки:

$$\epsilon_{\Sigma} = \epsilon_{\text{с под}} \left( \frac{S1}{S_{\text{под}}} \right)^2 + \epsilon_{\text{р под}}.$$

Зависимость коэффициента местных гидравлических потерь от открытия задвижки имеет максимальные значения при полном закрытии задвижки.

Силы сопротивления течению жидкости под клином задвижки:

$$F_{\text{с под}} = \epsilon_{\text{с под}} \frac{\rho}{2} S_{\text{под}} V_{\text{под}}^2; F_{\text{р под}} = \epsilon_{\text{р под}} \frac{\rho}{2} S1 V_{\text{труб}}^2.$$

Потери давления жидкости под клином задвижки в зоне сужения и зоне резкого расширения:

$$P_{\text{с под}} = \frac{F_{\text{с под}}}{S_{\text{с под}}}; P_{\text{р под}} = \frac{F_{\text{р под}}}{S1}.$$

Потери давления под клином задвижки:

$$P_{\text{под}} = P_{\text{р под}} + P_{\text{с под}}.$$

Из правила неразрывности потока жидкости считается, что потери давления под клином и над клином задвижки равны. Следовательно, расход жидкости над клином задвижки будет:

$$Q_{\text{НАД}} = S_C \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho} P_{\text{ПОД}}}.$$

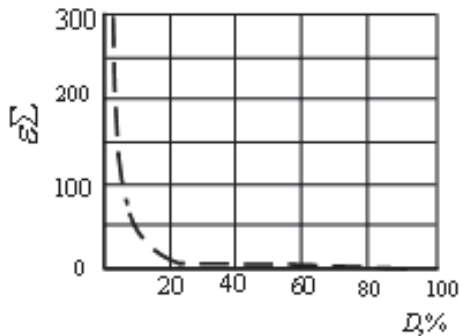


Рис. 7. Коэффициент местных гидравлических потерь задвижки в зависимости от открытия

Зависимость коэффициента местных гидравлических потерь от открытия задвижки имеет максимальные значения при полном закрытии задвижки, рис. 7.

#### Расчет потерь давления над клином задвижки

Коэффициенты местных гидравлических потерь:

$$\varepsilon_{C1} = 0,5 \left( 1 - \frac{S_{C1}}{S_{P1}} \right) \varepsilon_{P1} = \left( \frac{S_{P1}}{S_C} - 1 \right)^2;$$

$$\varepsilon_{C2} = 0,5 \left( 1 - \frac{S_{C1}}{S_{P1}} \right) \varepsilon_{P2} = \left( \frac{S_{\text{НАД}}}{S_C} - 1 \right)^2;$$

$$V_{C1} = \sqrt{2 \frac{P_{\text{ПОД}}}{\rho \left( \varepsilon_{C1} + \varepsilon_{P1} \left( \frac{S_{C1}}{S_{P1}} \right)^2 + \varepsilon_{C2} + \varepsilon_{P2} \left( \frac{S_{C1}}{S_{\text{НАД}}} \right)^2 \right)}}.$$

Сила сопротивления течению жидкости в зоне С1 (резкое сужение):

$$F_{C1} = \varepsilon_{C1} \left( \frac{\rho S_{C1} V_{C1}^2}{2} \right).$$

Потери давления в зоне резкого сужения С1:

$$P_{C1} = \frac{F_{C1}}{S_{C1}}.$$

Потери мощности в зоне С1:

$$N_{C1} = F_{C1} V_{C1}.$$

Аналогичным образом рассчитываются скорости, потери давления и мощности в зонах Р1, С2, Р2.

Скорости жидкости в задвижке в зависимости от степени открытия имеют явно нелинейный характер, рис. 8.

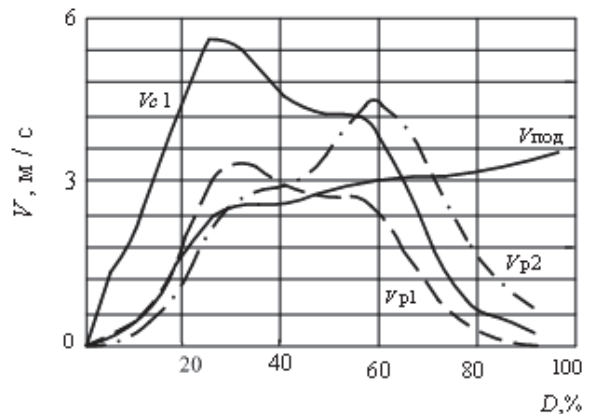


Рис. 8. Скорости движения жидкости в задвижке:  $V_{\text{ПОД}}$  – скорость под клином задвижки;  $V_{C1}$  – скорость в зоне сужения С1;  $V_{P1}$  – скорость жидкости в зоне резкого расширения Р1;  $V_{P2}$  – скорость жидкости в зоне резкого расширения Р2

Потери давления над клином задвижки рассчитываются как сумма потерь давления в зонах С1, Р1, С2, Р2. Эти потери равны потерям давления под клином задвижки  $P_{\text{ПОД}}$ :

$$P_{\text{НАД}} = P_{\text{ПОД}} = P_{C1} + P_{C2} + P_{P2} + P_{P1}.$$

Потери давления и мощности в остальной части состоят из потерь на трение, на повороты, на вход и выход жидкости из трубопровода.

Коэффициент сопротивления системы на трение:

$$\lambda = \frac{0,3164}{2 \sqrt[4]{\text{Re}}},$$

где  $\text{Re} = \frac{Qd\rho}{60S1\mu}$  – коэффициент Рейнольдса.

$$F_{\text{ТР}} = \lambda L \frac{S1\rho V_{\text{Т}}^2}{2d1}, P_{\text{ТР}} = \frac{F_{\text{ТР}}}{S1};$$

$$F_{\text{ПОВ}} = 2\varepsilon_{\text{ПОВ}} \frac{S1\rho V_{\text{Т}}^2}{2}; P_{\text{ТР}} = \frac{F_{\text{ТР}}}{S1}; \varepsilon_{\text{ПОВ}} = 0,2;$$

$$F_{\text{ВХ}} = \frac{S1\rho V_{\text{Т}}^2}{2}; P_{\text{ВХ}} = \frac{F_{\text{ТР}}}{S1};$$

$$F_{\text{ВЫХ}} = \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \frac{S13\rho V_{\text{Т}}^2}{2}; P_{\text{ВЫХ}} = \frac{F_{\text{ВЫХ}}}{S1}.$$

Потери давления в трубопроводе без потерь в задвижке будут складываться из потерь давления на трение, на повороты трубопровода, на потери входа-выхода:

$$P_{\text{ТРУБ}} = P_{\text{ТР}} + P_{\text{ВЫХ}} + P_{\text{ПОВ}} + P_{\text{ВХ}}.$$

Суммарные потери давления всего трубопровода (рис. 9):

$$P_{\text{ПОТ}} = P_{\text{ТРУБ}} + P_{\text{ПОД}}.$$

В зависимости от степени открытия задвижки потери давления в ней существенно уменьшаются и они практически не влияют на суммарные потери давления системы.



Общие потери мощности системы в ваттах:

$$N_{\text{ПОД}} = Q_{\text{ПОД}} \cdot P_{\text{ПОД}};$$

$$N_{\text{НАД}} = N_{C1} + N_{P1} + N_{C2} + N_{P2};$$

$$N_{\text{ТР}} = P_{\text{ТР}} \frac{Q}{60}; N_{\text{ПОВ}} = P_{\text{ПОВ}} \frac{Q}{60};$$

$$N_{\text{ВХ}} = P_{\text{ВХ}} \frac{Q}{60}; N_{\text{ВЫХ}} = P_{\text{ВЫХ}} \frac{Q}{60};$$

$$N_{\text{ЗАД}} = N_{\text{ПОД}} + N_{\text{НАД}}.$$

За счет высоких скоростей жидкости над клином задвижки потери мощности в этой зоне выше, чем в зоне под клином. Потери давления над и под клином одинаковые, но потери мощности существенно отличаются, и это надо учитывать (рис. 10, 11):

$$N = N_{\text{ПОД}} + N_{\text{НАД}} + N_{\text{ТР}} + N_{\text{ПОВ}} + N_{\text{ВХ}} + N_{\text{ВЫХ}}.$$

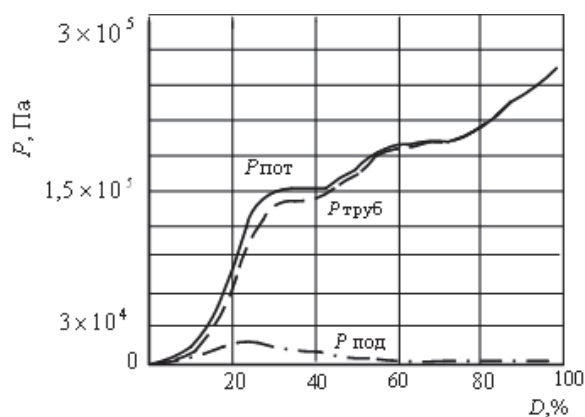


Рис. 9. Потери давления в системе:  $P_{\text{под}}$  – под задвижкой;  $P_{\text{тр}}$  – потери в системе на трение, повороты, потери на входе и выходе;  $P_{\text{пот}}$  – общие потери давления в системе

### Выводы

1. Разработана методика расчета потерь давления и потерь мощности в элементе трубопровода (в задвижке) с учетом течения жидкости под клином и над клином задвижки.
2. Максимальные потери давления и мощности на задвижке соответствуют 23 % открытия клина задвижки и определяются как 7...8 % (при данном соотношении длины трубы и количества задвижек) от потерь мощности и давления при 100 % открытия задвижки.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Угинчус А.А. Гидравлика и гидравлические машины. – Харьков: ХГУ, 1970. – 396 с.
2. Пожитков А.П., Шлык Ю.К. Анализ влияния параметров системы «трубопровод–перекачивающая станция» на режим гидродинамического движения среды в трубопроводе (экспериментальные исследования) // Вестник Кибернетики. – 2006. – № 5. – С. 47–53.
3. Антропов А.Т., Рикконен С.В. Гидромеханические характеристики регулирующей заслонки САР давления // itech – журнал

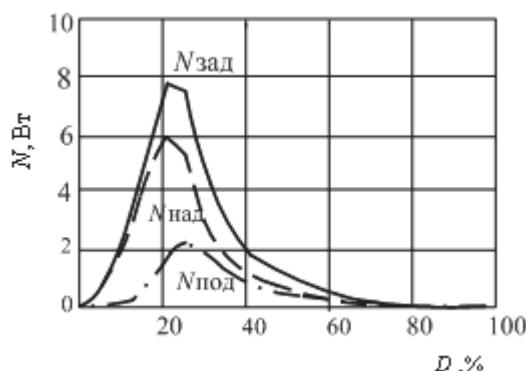


Рис. 10. Потери мощности в задвижке:  $N_{\text{под}}$  – под клином задвижки;  $N_{\text{над}}$  – над клином задвижки;  $N_{\text{зад}}$  – общие потери задвижки

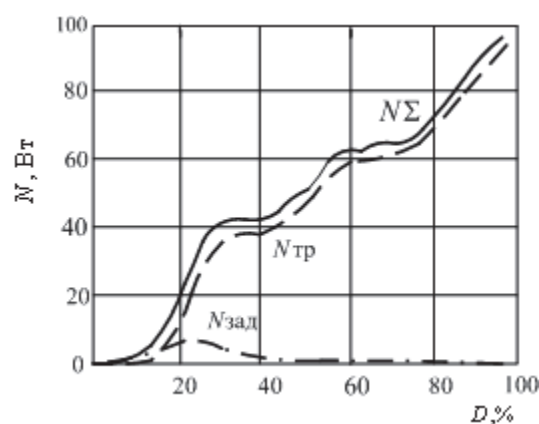


Рис. 11. Потери мощности в трубопроводе в зависимости от открытия задвижки:  $N_{\text{зад}}$  – потери на задвижке;  $N_{\text{тр}}$  – потери на трение в трубе;  $N_{\Sigma}$  – потери суммарные в трубопроводе

3. При определении потерь мощности необходимо учитывать потери в зоне над клином задвижки, так как за счет высоких скоростей жидкости потери мощности в этой зоне выше, чем в зоне под клином.
4. Методика позволяет определить потери энергии на перекачку жидкости разной плотности и вязкости при разном соотношении длины трубопровода и количества элементов арматуры.
5. Данная методика позволяет создать математический алгоритм управления задвижкой с учетом потерь мощности и этим минимизировать потери мощности.

- интеллектуальных технологий. – 2009. – № 12. – С. 38–42.
4. Антропов А.Т., Рикконен С.В. Гидромеханические переходные процессы в системе «электропривод–регулирующая заслонка нефтепровода» // itech – журнал интеллектуальных технологий. – 2009. – № 13. – С. 50–55.

Поступила 16.01.2013 г.

УДК 535:621.373.826

## РАЗРАБОТКА АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ УСТАНОВКИ ДЛЯ СИНТЕЗА НАНОЧАСТИЦ БЛАГОРОДНЫХ МЕТАЛЛОВ МЕТОДОМ ЛАЗЕРНОЙ АБЛЯЦИИ ОБЪЕМНЫХ МИШЕНЕЙ В ЖИДКОСТИ

А.А. Смагулов, И.Н. Лапин, В.А. Светличный

Томский государственный университет  
E-mail: amanjol1989@mail.ru

*Разработана автоматизированная установка для получения наночастиц благородных металлов методом лазерной абляции объемных мишеней в жидкости. В установке используется система перемещения мишени для ее равномерного облучения, а также оригинальная запатентованная проточная система с контролем концентрации наночастиц в растворе по оптическому пропусканию и с обратной связью. Установка с накачкой излучением основной гармоники импульсного Nd: YAG лазера позволяет вести непрерывный синтез коллоидных растворов наночастиц Ag, Au и Pt в диапазоне концентраций 0,01...0,1 г/л с высокой повторяемостью.*

### Ключевые слова:

*Лазерная абляция в жидкости, наночастицы благородных металлов, коллоидные растворы, спектры плазмонного поглощения, автоматизированная установка.*

### Key words:

*Laser ablation in liquid, nanoparticles of noble metals, colloids, plasmon absorption spectra, automated installation.*

### Введение

Одним из актуальных направлений современной науки является изучение свойств наноразмерных объектов и развитие методов их получения. Такие исследования необходимы для разработки новых технологий в материаловедении, приборостроении, электронике, катализе, медицине и имеют выраженный прикладной характер. Приоритетными задачами являются исследования процессов формирования кластеров и наночастиц для отработки методик получения объектов с заданными характеристиками, и размерные эффекты играют первостепенную роль, влияя на свойства получаемого материала. Другой важной задачей является выбор метода синтеза, с точки зрения свойств конечного продукта и оптимизации процесса получения наноматериала в целом.

Среди перспективных физических методов получения коллоидных растворов наночастиц различных материалов, включая металлы и полупроводники, выделяется метод лазерной абляции объемных мишеней в жидкости [1]. Данный метод позволяет получать частицы с достаточно узким распределением по размерам, ожидаемой формы и заранее заданной концентрацией. По сравнению с другими физическими и химическими методами [2], метод лазерной абляции в жидкости имеет ряд преимуществ, связанных с отсутствием механических контактов с реакционной средой и отсутствием химических прекурсоров. Это позволяет получать наночастицы высокой чистоты с активной поверхностью в чистых органических и неорганических растворителях. К недостаткам метода относится относительно малая скорость наработки, что, соответственно, ограничивает области применения наночастиц, полученных методом лазерной абляции. Такие материалы могут быть использованы в медицине и биологии [3], катализе, электронике [4] и ряде других областей.

Несмотря на универсальность метода (возможность получения наночастиц различных материалов на одной установке), уникальные свойства получаемых материалов и их востребованность, лазерная абляция пока не получила широкого распространения, как метод синтеза для технологических применений. Это связано с отсутствием установок приемлемой производительности, позволяющих получать коллоидные растворы наночастиц заданной концентрации с повторяющимися свойствами.

Для эффективного потокового синтеза наночастиц методом лазерной абляции необходимо решить ряд задач, связанных с изменением плотности мощности излучения на мишени из-за поглощения и рассеяния нарабатываемых в растворе частиц, оптимизацией ввода излучения и фокусировки, оперативным контролем концентрации в процессе работы, изменением профиля мишени и образованием кратеров при продолжительной абляции, стойкостью оптических элементов.

Данная работа посвящена созданию автоматизированной установки для потокового синтеза наночастиц благородных металлов методом лазерной абляции объемных мишеней в жидкости с контролем концентрации.

### Экспериментальная часть

Взаимодействие мощного импульсного лазерного излучения с поглощающими средами приводит к абляции мишени и распылению ее материала в окружающую среду. При больших коэффициентах поглощения толщина удаляемого слоя мишени составляет всего несколько десятков нанометров. При абляции мишени, погруженной в жидкость, образуется параплазменное облако, испаренный материал мишени испытывает столкновение с парами окружающей мишень жидкости. В

первом приближении давление паров жидкости близко к давлению ее насыщенных паров при температуре мишени, т. е. составляет сотни атмосфер. Это оказывает влияние на распределение частиц по размерам. Пароплазменное облако быстро остывает, и удаляемый материал остается в жидкости в виде частиц нанометрового размера, образуя коллоидный раствор [5].

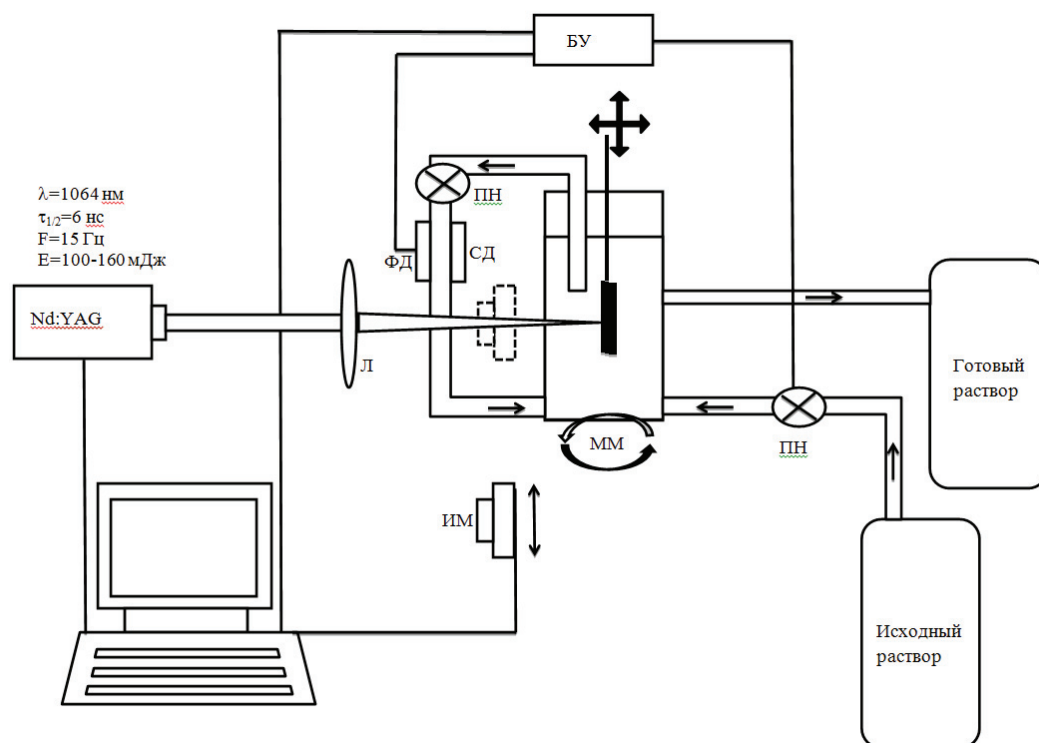
Простейшая установка для синтеза наночастиц методом лазерной абляции в жидкости состоит из источника излучения, фокусирующей линзы и емкости с жидкостью, в которую помещена мишень [6]. Ввод излучения осуществляется или сверху (через границу раздела воздух/жидкость) или сбоку (через границу раздела материал емкости/жидкость).

За основу для дальнейшей автоматизации для потокового синтеза с контролем параметров коллоидного раствора в работе была выбрана установка, представленная в [7, 8]. Схема разработанной установки представлена на рис. 1. Излучение Nd:YAG лазера заводится в реактор через боковую цилиндрическую поверхность с помощью оптической системы, состоящей из зеркал и призм (не показана на рис. 1) и фокусируется короткофокусной линзой  $f=30$  мм на поверхность мишени. Фокусировка осуществляется путем перемещения мишени вдоль оси Z с помощью линейного механического транслятора. Использование короткофокусной линзы позволяет уменьшить слой жидкости перед мишенью, а ввод излучения сбоку через границу раздела стекло/жидкость – постоянную фокуси-

ровку, независимую от мениска и исключить разбрызгивание. Контроль мощности излучения осуществлялся термоэлектрическими измерителями ОРН12А.

После предварительных экспериментов с основной (1064 нм) и второй (532 нм) гармониками Nd:YAG лазера было решено использовать основную гармонику. Это связано с меньшим влиянием на процесс абляции рассеяния и поглощения образующихся наночастиц Ag и Au и большей энергией в импульсе на основной частоте лазера по сравнению со второй гармоникой. В результате такого влияния происходит ослабление мощности лазерного излучения в области мишени, снижение эффективности абляции и изменение функции распределения частиц по размерам по мере облучения.

Для равномерного облучения мишени была реализована автоматическая система перемещения образца в плоскости XY при помощи шаговых двигателей. Для этого были использованы шаговые двигатели и программное обеспечение конструктора «Кулибин». Программа осуществляет непрерывное циклическое перемещение мишени в вертикальной плоскости со скоростью 0,1...0,5 мм/с в интервале 6...20 мм, после двух проходов образец перемещается в горизонтальной плоскости на 0,2...0,3 мм. Таким образом происходит сканирование заданной площади поверхности образца. Использование системы сканирования позволило равномерно проводить испарение материала с поверхности мишени без образования кратеров и пробивки отверстий, тем самым повысить эффек-



**Рис. 1.** Схема автоматизированной экспериментальной установки синтеза наночастиц методом лазерной абляции объемных мишеней в жидкости: ПН – перистальтический насос; БУ – блок управления; ММ – магнитная мешалка; Л – короткофокусная линза; СД – светодиод; ФД – фотодиод; ИМ – измеритель мощности

тивность абляции при продолжительном облучении и сузить разброс по размерам получаемых наночастиц.

В лабораторных экспериментах наработка частиц, как правило, происходит в замкнутом объеме, иногда устанавливается система перемешивания раствора. Для потокового получения больших объемов коллоидных растворов наночастиц в непрерывном режиме нами была разработана проточная система. Доставка свежего растворителя в реактор в ней осуществляется при помощи перистальтического насоса, а удаление готового коллоидного происходит самотеком, для перемешивания раствора используется магнитная мешалка.

Важным элементом разработанной установки является система контроля концентрации с обратной связью. Синтез наночастиц сопровождается появлением в растворе поглощения (так называемого плазмонного поглощения) и рассеяния. Для наночастиц серебра и золота максимум плазмонного поглощения лежит в видимой области спектра. С увеличением концентрации частиц в растворе его пропускание уменьшается. В результате можно построить зависимость пропускания раствора от концентрацией наночастиц. Нами было предложено использовать эту зависимость для контроля концентрации; запатентовано устройство, обеспечивающее контроль концентрации и обратную связь [9].

Технически предложенное устройство представляет собой оптопару, состоящую из широкополосного кремневого фотодиода и узкополосного селективного светодиода. В промежутке оптопары через специальную кювету при помощи перистальтического насоса прокачивается коллоидный раствор из реактора. При увеличении концентрации наночастиц в коллоидном растворе его поглощение растет, соответственно сигнал излучения светодиода, проходящий через раствор и фиксируемый фотодиодом, уменьшается. При уменьшении тока на фотодиоде до требуемого уровня, определенного при помощи предварительной калибровки и соответствующего необходимой концентрации наночастиц в реакторе, автоматически включается перистальтический насос подачи свежего растворителя в реактор, а избыток раствора из реактора самотеком поступает в емкость для готового коллоидного раствора.

Подбор селективного светодиода можно делать для каждого материала мишени, исходя из спектра плазмонного поглощения соответствующих наночастиц. В то же время можно с достаточной эффективностью использовать один светодиод для контроля концентрации различных наночастиц. На рис. 2 представлены спектры поглощения коллоидных растворов серебра и золота в воде, а также спектр излучения синего светодиода L-7104UVC. Из рис. 2 видно, что излучение данного светодиода эффективно поглощают оба коллоидных раствора.

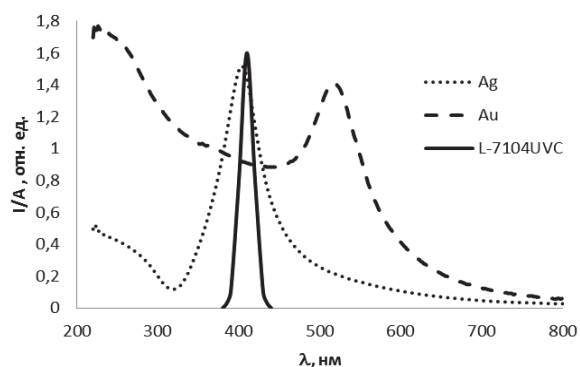


Рис. 2. Спектры поглощения (A) водных растворов наночастиц серебра и золота и спектр излучения (I) светодиода

Кроме того, этот же светодиод может быть использован для контроля концентрации наночастиц платины. Как показали наши эксперименты, несмотря на то, что пик их плазмонного поглощения находится в УФ области на длине волны 230 нм, пропускание коллоидного раствора при наработке наночастиц в области 400 нм уменьшается за счет рассеяния.

#### Заключение

Авторами разработана автоматизированная установка синтеза наночастиц благородных металлов методом лазерной абляции в жидкости. Установка позволяет получать воспроизводимые от партии к партии коллоидные растворы наночастиц платины, серебра и золота с контролируемой концентрацией в пределах 0,01...0,1 г/л со средним диаметром ~ 7, 10, 25 нм, соответственно. Дисперсии частиц могут быть дополнительно стабилизированы высокомолекулярными поверхностно активными веществами (поливинилпирролидон E1201, полиэтиленгликоль E1521). Скорость наработки дисперсии наночастиц с концентрацией 0,05 г/л составляет до 0,2 л/ч для двухканальной установки и лазера с энергией в импульсе до 160 мДж и частоте следования импульсов 15 Гц.

Реализованная в установке оригинальная проточная система с системой обратной связи – необходимое решение для получения большого количества коллоидного раствора наночастиц для их дальнейшего практического применения в косметологии, химии, медицине и легкой промышленности.

Дальнейшая модернизация созданной установки будет связана с оптимизацией проточной системы, а также разработкой автоматизированной системы контроля и поддержания оптимальной фокусировки и плотности мощности на поверхности мишени.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, Грант № 12-02-31162\_мол\_а «Исследование оптических свойств наночастиц, полученных методом лазерной абляции объемных металлических мишеней Zn и Cd в жидкости».*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Miller J.C. Laser Ablation: Principles and Applications // Springer Series in Mater. Sci. – 1994. – V. 28. – P. 56–70.
2. Bauerle D. Laser Processing and Chemistry // Springer Series in Mater. Sci. – 2000. – V. 30. – P. 89–94.
3. Омельченко А.И. Биофункциональные наночастицы в лазерной медицине // Вестник Югорского Государственного Университета. – 2011. – Вып. 2 (21). – С. 40–50.
4. Васильев О.С., Витовская М.В. Исследование каталитических свойств нанокластеров металлов на поверхностях твердых тел // Труды научных сессий МИФИ. – 2010. – Т. 2. Физика плазмы и плазменные технологии. Нетрадиционная энергетика. Ускорительная техника и электрофизика. Конструкционные материалы для ядерной энергетике. – С. 179–182.
5. Симакин А.В., Воронов В.В., Шафеев Г.А. Образование наночастиц при лазерной абляции твердых тел в жидкостях // Труды института общей физики им. А.М. Прохорова. – 2004. – Т. 60. – С. 83–107.
6. Ельяшевич М.А. Разрушение металлов под действием излучения оптического квантового генератора // Отчет Института физики АН БССР. – № КЭ-14. – 1963. – С. 248–260.
7. Светличный В.А., Изаак Т.И., Бабкина О.В., Шабалина А.В. Синтез наночастиц металлов при лазерной абляции твердых тел в жидкостях наносекундным излучением 2-й гармоники Nd-YAG лазера // Известия ВУЗов. Физика. – 2009. – Т. 52. – № 12/2. – С. 110–115.
8. Лапин И.Н., Светличный В.А. Синтез наночастиц благородных металлов в воде методом лазерной абляции для медико-биологических приложений и косметологии // Актуальные проблемы электронного приборостроения АПЭП-2012: Матер. XI Междунар. конф. – Новосибирск, 2–4 октября 2012. – Новосибирск: НГТУ, 2012. – Т. 5. – С. 66–73.
9. Заявка на полезную модель 2012144669 РФ. Устройство для получения коллоидного раствора наночастиц в жидкости методом лазерной абляции / И.Н. Лапин, В.А. Светличный; Заяв. 19.10.2012; Приоритет 19.10.2012; Решение о выдаче 27.11.2012. – 6 с. ил.

Поступила 03.04.2013 г.

УДК 53.088.228+004.942

## ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ДАТЧИКОВ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ КОЛЬЦЕВОГО НАГРЕВАТЕЛЬНОГО МОДУЛЯ

М.М. Филиппов, Ю.В. Бабушкин, А.И. Грибенюков\*

Томский политехнический университет

\*Институт мониторинга климатических и экологических систем СО РАН, г. Томск

\*ООО «Лаборатория оптических кристаллов», г. Томск

E-mail: nauka@tpu.ru

*Проведены вычислительные эксперименты по исследованию влияния датчиков температуры на температурное поле кольцевого нагревательного модуля многозонной термической установки. Результаты расчетов показывают, что температурные датчики существенно влияют на распределение температуры в нагревательном модуле и на его энергопотребление.*

### Ключевые слова:

*Кольцевой нагревательный модуль, математическое моделирование, температурное поле, энергопотребление, COMSOL Multiphysics.*

### Key words:

*Ring heating module, mathematical modelling, thermal field, energy consumption, COMSOL Multiphysics.*

Для контроля температурного поля промышленных установок, построенных на основе нагревательных модулей кольцевого типа, в том числе и многозонных термических установок (МТУ) для выращивания кристаллов [1, 2], используются термоэлектрические датчики температуры, представляющие собой термопары, изготовленные из проводов, защищенных от электрических помех кожухом с высокими электроизоляционными свойствами. В качестве защитного кожуха, как правило, используются керамические трубки разных диаметров с каналами, диаметр которых подбирается в зависимости от диаметра термопарных проводов. Фиксация чувствительного элемента (горячего спая) термопары в нужной точке нагревательного модуля осуществляется путем изгото-

вления в нем специального канала диаметром, достаточным для установки термопары.

Установка датчика температуры приводит к возникновению паразитных утечек тепловой энергии и изменению температуры в зоне измерения, а также к нарушению симметрии температурного поля кольцевого нагревательного модуля.

Исследования по влиянию термопар на температурное поле проводились ранее для различных объектов как экспериментально, так и с помощью математических моделей [3–5]. Например, в [3] показано, что падение температуры, вызванное введением термопары для измерения точки плавления меди, составило около 220 К. В [4] проведены исследования искажений температурного поля, вызванных установкой термопар в материалах



с низкой теплопроводностью. Приведен пример, в котором искажение достигает 390 К. Поэтому оценка влияния датчиков температуры на температурное поле кольцевого нагревательного модуля МТУ представляет не только теоретический, но и практический интерес.

Разрез конструкции нагревательного модуля, симметричной относительно радиуса и половины высоты, приведен на рис. 1.

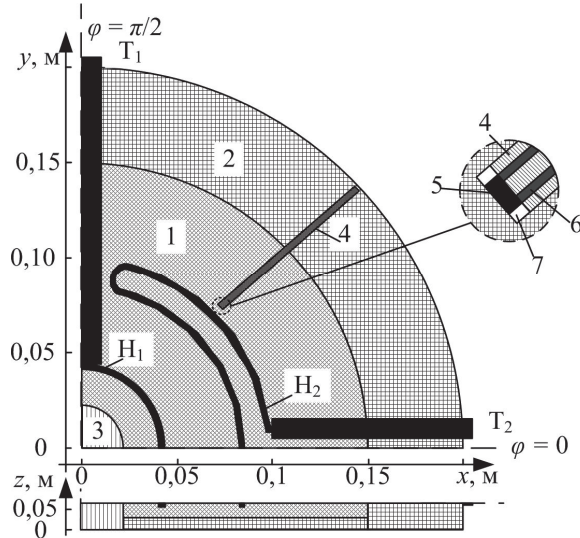


Рис. 1. Разрез части нагревательного модуля: 1 – электроизолятор 1; 2 – электроизолятор 2; 3 – рабочий объем; 4 – термопарная трубка; 5 – спай термопары; 6 – термопарные провода; 7 – воздушный зазор; H1, H2 – нагревательные элементы; T1, T2 – токовыводы

Нагревательные элементы H1, H2, изготовленные из высокотемпературного сплава, встроены в кольцевую структуру из электроизоляционных материалов с различными теплофизическими свойствами (табл. 1). Электроизолятор 1 изготавливается из материала с высокой теплопроводностью и предназначен для оперативной передачи тепловой энергии от нагревательных элементов к рабочему объему установок. Электроизолятор 2 изготавливается из материала с низкой теплопроводностью с целью сохранения тепловой энергии в рабочем объеме путем уменьшения ее утечки в окружающую среду.

Таблица 1. Теплофизические свойства материалов [6, 7]

Элемент конструкции	$\lambda$ , Вт/(м·К)	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c$ , Дж/(кг·К)
Электроизолятор 1	11,5...8,0	2100,0	1095,0...1147,0
Электроизолятор 2	0,3330...0,3925	650,0	1087,0...1170,0
Сплав	27,7...36,8	7210,0	780,0...815,0
Термопарная трубка	6,0	2600,0	1000,0
Термопарные провода	82,25...90,00	20830,0...20565,0	156,0...167,0
Рабочий объем/воздух	0,07	0,31...0,24	1180,0...1225,0

Значения температуры кольцевого нагревательного модуля в рабочем режиме лежат в пределах 1150...1500 К. Для измерения температуры в этом диапазоне используются термопары платиновой группы с градуировкой ПП (S) [8] с термопарной трубкой из алюмосиликатной керамики (тип

С610 [7]). Теплопроводность термопарной трубки выше теплопроводности электроизолятора 2. Следовательно, она способствует усиленному отводу тепла от места расположения контрольной точки (спая термопары).

Математическое описание тепловых процессов в модуле при его нагреве представлено в [9]. Сложность геометрии и разнородность материалов нагревательного модуля не позволяют получить аналитическое решение, поэтому модель реализована в пакете программ COMSOL Multiphysics 3.5 [10], в котором для решения задачи используется метод конечных элементов.

Для оценки влияния датчика на искажение температурного поля нагревательного модуля проведена серия расчетов следующих вариантов конструкции модулей:

- а – без датчика измерения температуры;
- б – с датчиком, имеющим теплофизические свойства, приведенные в табл. 1;
- с – с датчиком, у которого теплопроводность термопарной трубки уменьшена в 10 раз ( $\lambda=0,6$  Вт/(м·К));
- д – с датчиком, у которого теплопроводность термопарной трубки увеличена в 10 раз ( $\lambda=60$  Вт/(м·К)).

Вследствие того, что точность измерения температуры зависит от условий теплообмена датчика с его окружением [3, 5], предполагается, что спай термопары с одной стороны плотно касается электроизолятора 1, а с других сторон он окружен воздухом (рис. 1). Рассчитывалось стационарное состояние при выделении тепловой энергии в нагревателе H1 –  $5,82 \cdot 10^7$  Вт/м<sup>3</sup> и в H2 –  $6,96 \cdot 10^7$  Вт/м<sup>3</sup>.

С целью исключения влияния на ожидаемые результаты погрешностей, вызванных неопределенностью задания исходных данных, использованием приближенных численных методов и ошибок округления чисел на ЭВМ применены рекомендации, приведенные в [11]. А именно, согласно правилу Рунге по определению точности результатов, получаемых численными методами, проведены расчеты температурного поля нагревательного модуля для одинаковых исходных данных с числом расчетных элементов  $N_{\text{э}}=23883$ , 44831 и 78372. Установлено, что отличие в значениях температур в контрольной точке не превышает 0,05 % (~0,4 К). Это приемлемо для решения рассматриваемой задачи, так как ожидаемые отклонения температурного поля от исходного состояния (вариант а) могут составить несколько десятков градусов. На основании полученных результатов было принято, что расчетная область может быть удовлетворительно аппроксимирована 44831 конечным элементом, что с одной стороны обеспечивает желаемую точность, а с другой – приемлемое время расчетов.

Расчетные распределения температуры вдоль границы между электроизоляторами 1 и 2 для вариантов а и б представлены на рис. 2. Локальные падения температуры вблизи токовыводов связа-



ны с их высокой теплопроводностью. Снижение температуры (~20 К) в центре области (рис. 2, линия b) вызвано установленным датчиком.

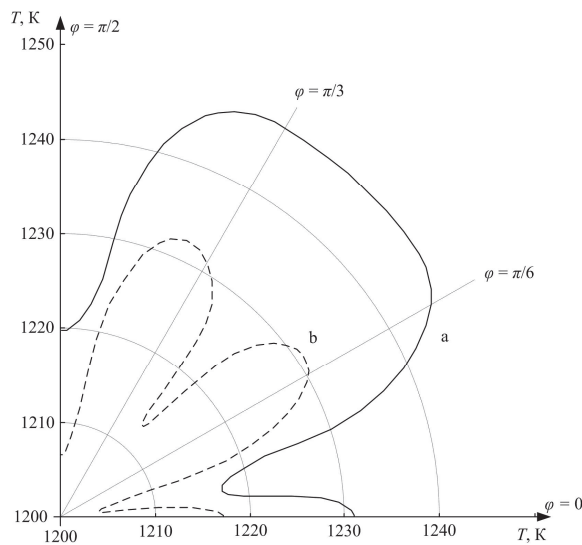


Рис. 2. Расчетные распределения температуры на граничной дуге между электроизоляторами 1 и 2 для вариантов а и б

Расчетные распределения температуры на границе рабочего объема (рис. 3) показывают, что температура на внутренней поверхности модуля падает на ~17 К, при этом характер распределения температуры не меняется.

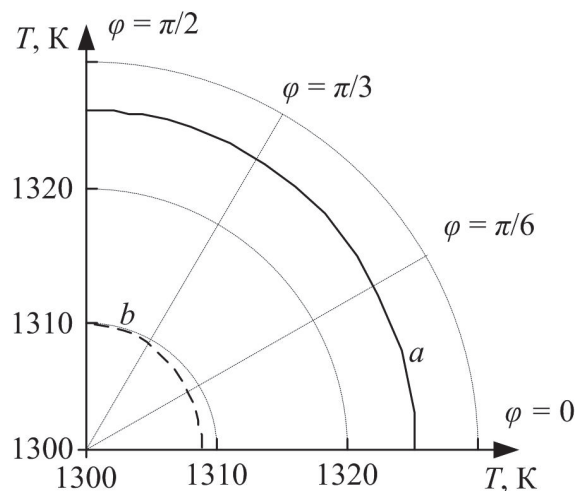


Рис. 3. Расчетные распределения температуры на границе рабочего объема (рис. 1, область 3) для вариантов а и б

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Parsey Jr.J.M., Thiel F.A. A new apparatus for the controlled growth of single crystals by horizontal Bridgman techniques // Journal of Crystal Growth. – 1985. – V. 73. – № 2. – P. 211–220.
2. Филиппов М.М., Грибенюков А.И., Бабушкин Ю.В. Система управления технологическим процессом выращивания кристаллов методом Бриджмена // Датчики и системы. – 2012. – № 6. – С. 2–5.
3. Гордов А.Н., Эргардт Н.Н. О некоторых источниках ошибок измерения температур с помощью термопар // Заводская лаборатория. – 1958. – Т. 24. – № 12. – С. 1467–1470.

В табл. 2 представлены сводные данные по результатам расчета температурных полей для различных вариантов модулей.

Таблица 2. Результаты расчета температурных полей нагревательного модуля для различных вариантов

Вариант	$T_1$ , К	$T_2$ , К	$\Delta Q_2$ , %	$\Delta T_1$ , К	$\Delta T_2$ , К
a	1290,28	1326,21	–	42,50	682,81
b	1273,74	1309,80	2,39	54,56	519,65
c	1282,11	1317,43	1,17	47,50	596,22
d	1232,78	1271,28	8,71	64,80	278,03

Примечание:  $T_1$ ,  $T_2$  – температуры в контрольной точке и на границе рабочего объема ( $\varphi = \pi/2$ );  $\Delta Q_2$  – приращение мощности  $H_2$ , необходимое для достижения в контрольной точке 1290,28 К;  $\Delta T_1$ ,  $\Delta T_2$  – перепад температуры по термопарной трубке от контрольной точки до граничной дуги между электроизоляторами 1 и 2 и от граничной дуги между электроизоляторами 1 и 2 до внешней поверхности.

Анализ результатов расчета температурных полей показал, что использование датчиков с высокой теплопроводностью термопарной трубки приводит к более сильному понижению температуры в контрольной точке. Для компенсации этого эффекта требуется повышенное энергопотребление ( $\Delta Q_2$ ). Из расчетов перепадов температуры видно, что с ростом теплопроводности термопарной трубки увеличивается перепад температуры в области электроизолятора 1 и уменьшается перепад температуры в области электроизолятора 2.

#### Выводы

1. Установка датчиков температуры в нагревательные модули термических установок приводит к утечкам тепловой энергии, снижающим общий уровень температуры, как в зоне измерения, так и в области рабочего объема приблизительно на 17 К.
2. Полученные результаты следует учитывать как в режиме калибровки термических установок и выборе тепловых мощностей нагревательных элементов, так и при решении задач управления температурным полем.
3. Несмотря на искажение температурного поля в зоне установки датчика, распределение температуры на границе рабочего объема практически сохраняет осевую симметрию.

4. Бек Дж.В. Искажающее влияние термопары на температурное поле в материалах с низкой теплопроводностью // Теплопередача. – 1962. – № 2. – С. 33–42.
5. Кузнецов Г.В., Мухаммадеев К.М. Численная оценка погрешности измерений температур в условиях локального неидеального контакта спая термопары и материала // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 314. – № 4. – С. 12–16.
6. Свенчанский А.Д. Электрические промышленные печи: в 2-х ч. Ч. 1. Электрические печи сопротивления. – М.: Энергия, 1975. – 382 с.

7. Официальный сайт компании ООО «Технокерам». 2013. URL: <http://www.rauschert.com.ua/products/high-temperature-ceramics.html> (дата обращения: 21.02.2013).
8. Сплавы для термопар: справочник / под ред. И.Л. Рогельберг, В.М. Бейлин. – М.: Металлургия, 1983. – 360 с.
9. Филиппов М.М., Бабушкин Ю.В., Грибенюков А.И. Проблемы управления процессом выращивания кристаллов методом Бриджмена. – Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2012. – 174 с.
10. Официальный сайт COMSOL Multiphysics. 2013. URL: <http://www.comsol.com/> (дата обращения: 21.02.2013).
11. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 2004. – 480 с.

Поступила 01.04.2013 г.

УДК 519.63

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ПЛАЗМЕННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ У КОЛЛЕКТОРА ТЕРМОЭМИССИОННОГО ДИОДА

В.П. Зимин

Томский политехнический университет  
E-mail: zimmin@tpu.ru

Анализируется модель монотонных плазменных граничных условий у коллектора термоэмиссионного диода на плоскостях плотность плазмы–ионный ток, плотность плазмы–плотность энергии электронов и других. Классифицировано характерное поведение кривых граничных условий, исследованы их особенности изменения, в том числе в области поджига дугового режима.

**Ключевые слова:**

Граничные условия, краевая задача, метод фазовой плоскости, низкотемпературная плазма, термоэмиссионный диод.

**Key words:**

Boundary conditions, boundary value problem, method of phase plane, low-temperature plasma, thermionic diode.

**Введение**

В работе [1] обоснована необходимость и представлены результаты исследования граничных условий у эмиттера термоэмиссионного диода. Исследование модели граничных условий у коллектора также представляет интерес, который обусловлен в первую очередь процессами у коллектора, связанными с переходом диффузионного режима работы диода в дуговой [2–5]. Как и в [1], в данной работе анализируются области возможных решений граничных уравнений, используя методику анализа решений краевых задач на фазовых плоскостях, предложенную в [6–8].

В настоящей работе проведены аналитические и численные исследования модели монотонных граничных условий у коллектора. Выявлены её асимптотическое поведение, характерные изменения при вариации параметров термоэмиссионного диода и плазмы и поведение параметров плазмы при поджиге дугового разряда.

**Модель монотонных плазменных граничных условий у коллектора и её анализ**

Модель монотонных граничных условий (виртуальный электрод отсутствует) в слое у коллектора для плотности ионного  $J_{id}$ , электронного  $J_{ed}$  тока и плотности энергии электронов  $q_{ed}$  для тормозящего ( $V_c \geq 0$ ) приэлектродного потенциального барьера записывается [6, 9]:

$$J_{ed} = [J_{red} + A_{ce} J_{ed}] \exp\left(-\frac{eV_c}{kT_{ed}}\right) - J_{ce}^{(E)}, \quad (1)$$

$$J_{id} = [J_{rid} + A_{ci} J_{id}] - J_{ci}^{(E)} \exp\left(-\frac{eV_c}{kT_d}\right), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - A_{ce} \exp\left(-\frac{eV_c}{kT_{ed}}\right)\right) q_{ed} = \\ & = J_{red} \exp\left(-\frac{eV_c}{kT_{ed}}\right) \left[\frac{2kT_{ed}}{e} + V_c\right] - \\ & - J_{ce}^{(E)} \left[\frac{2kT_c}{e} + V_c\right], \end{aligned} \quad (3)$$

и для ускоряющего ( $V_c \leq 0$ ) приэлектродного потенциального барьера:

$$J_{ed} = [J_{red} + A_{ce} J_{ed}] - J_{ce}^{(0)} \exp\left(\frac{eV_c}{kT_{ec}}\right), \quad (4)$$

$$J_{id} = [J_{rid} + A_{ci} J_{id}] \exp\left(\frac{eV_c}{kT_d}\right) - J_{ci}^{(0)}, \quad (5)$$

$$(1 - A_{ce}) q_{ed} = J_{red} \frac{2kT_{ed}}{e} - J_{ce}^{(0)} \exp\left(\frac{eV_c}{kT_{ec}}\right) \frac{2kT_c}{e}, \quad (6)$$

$$J = J_{ed} + J_{id}, \quad (7)$$

где  $J_{red} = \gamma_{ce} n_d \bar{v}_e(T_{ed})$ ,  $J_{rid} = \gamma_{ci} n_d \bar{v}_i(T_d)$  – плотности хаотического тока электронов и ионов из плазмы на коллектор;  $e$  – заряд электрона;  $\gamma_{ce}$ ,  $A_{ce}$ ,  $\gamma_{ci}$ ,  $A_{ci}$  – коэффициенты пропорциональности для хаотического

го тока и анизотропии потоков заряженных частиц и энергии;  $n_d$  – плотность плазмы у коллектора;  $\bar{v}_e(T_{ed}) = \sqrt{(8kT_{ed})/(\pi m_e)}$ ,  $\bar{v}_i(T_d) = \sqrt{(8kT_d)/(\pi m_i)}$  – тепловые скорости заряженных частиц;  $k$  – постоянная Больцмана;  $m_e, m_i$  – массы заряженных частиц;  $J$  – плотность тока диода;  $J_{Ce}^{(E)}, J_{Ci}^{(E)}$  – эмиссионные электронный и ионный токи с учетом нормального эффекта Шоттки [4];  $T_{ed}, T_d$  – температуры электронов плазмы и ионов (атомов) цезия;  $T_{ec}$  – температура электронов коллектора;  $T_c$  – температура коллектора. Хорошим приближением считается  $T_d = T_{ec} = T_c$  [1, 2]. Нижний индекс «d» означает, что значения параметров плазмы берутся у коллектора для пространственной переменной  $x=d$ ,  $d$  – межэлектродное расстояние. Эмиссионные электронный и ионный токи коллектора для напряженности электрического поля у коллектора  $E=0$  определяются как

$$J_{Ce}^{(0)} = AT_c^2 \exp(-F_c / kT_c),$$

$$J_{Ci}^{(0)} = \frac{eg_i n_{ad} \bar{v}_i(T_d)}{4g_a} [\exp(-(V_i - F_c) / kT_c)],$$

$$\beta_c = \frac{J_{Ci}^{(0)}}{J_{Ce}^{(0)}} \sqrt{\frac{\bar{v}_e(T_c)}{\bar{v}_i(T_c)}},$$

где  $g_a, g_i$  – статистические веса атома и иона цезия;  $F_c$  – работа выхода электрода в парах цезия;  $V_i = 3,89$  эВ – энергия ионизации цезия;  $A = 120,2$  А/(К<sup>2</sup>см<sup>2</sup>) – теоретическая эмиссионная постоянная;  $\beta_c$  – параметр компенсации заряда у коллектора.

Плотность атомов  $n_{ad}$  цезия для слабоионизованной плазмы определяется из уравнения состояния у коллектора

$$kT_d n_{ad} = p_{Cs},$$

где  $p_{Cs}$  – давление насыщенных паров в резервуаре с цезием.

Из равенства плотности энергии электронов в плазме у коллектора

$$q_{ed} = -\lambda_{ed} \left. \frac{dT_e}{dx} \right|_{x=d} + \beta_{ed} J_{ed} \frac{kT_{ed}}{e}$$

и плотности энергии электронов через слой у коллектора (3) или (6) получим выражение для пространственной производной температуры электронов плазмы у коллектора

$$\left. \frac{dT_{ed}}{dx} \right|_{x=d} \equiv \left. \frac{dT_e}{dx} \right|_{x=d} = \frac{-q_{ed} + \beta_{ed} J_{ed} kT_{ed} / e}{\lambda_{ed}}, \quad (8)$$

где  $\lambda_{ed}$  – коэффициент теплопроводности электронного газа и множитель  $\beta_{ed}$ , определенные в [2].

Для аналитических исследований модели (1)–(8) выполним ряд преобразований и получим несколько соотношений для параметров диода и параметров плазмы у коллектора. Каждая пара граничных условий (1)–(2) и (4)–(5), с учетом (7), преобразуется следующим образом. Выражается из уравнения баланса для электронного тока, например из (1), экспонента и подставляется в уравнение

(2) баланса для ионного тока и учитывается выражение для  $J$ . Окончательно получаем уравнения

$$g_1(n_d, J_{id}) \equiv (1 - A_{Ci}) J_{id} - J_{rid} + J_{Ci}^{(E)} \left[ \frac{J_{Ce}^{(E)} + (J + J_{id})}{A_{Ce}(J + J_{id}) + J_{red}} \right]^{T_{ed}/T_d} = 0, \quad (9)$$

$$g_2(n_d, J_{id}) \equiv J_{id} + J_{Ci}^{(0)} - [J_{rid} + A_{Ci} J_{id}] \times \left[ \frac{J_{red} + (1 - A_{Ce})(J + J_{id})}{J_{Ce}^{(0)}} \right]^{T_{ec}/T_d} = 0. \quad (10)$$

При фиксированных параметрах диода  $T_c, F_c, p_{Cs}$ ,  $J$  и фиксированных параметрах плазмы  $T_{ed}, T_{ec}, T_d$  получили функции (9) и (10), которые в неявном виде задают связь между плотностью плазмы и ионным током и позволяют изучить поведения этих функций и их представление на плоскости  $(n, J)$ .

Уравнения (9) и (10) имеют точку сшивки ( $V_c=0$ ) с координатами

$$n_d^0 = \frac{\left[ (1 - A_{Ci}) J_{Ce}^{(0)} - (1 - A_{Ce}) J_{Ci}^{(0)} + (1 - A_{Ci})(1 - A_{Ce}) J \right]}{(1 - A_{Ci}) \gamma_{Ce} e \bar{v}_e(T_{ed}) - (1 - A_{Ce}) \gamma_{Ci} e \bar{v}_i(T_d)}, \quad (11)$$

$$J_{id}^0 = \frac{\gamma_{Ci} e n_d^0 \bar{v}_i(T_d) - J_{Ci}^{(0)}}{1 - A_{Ci}}. \quad (12)$$

Подставляя (11), (12) в (6) и (8), используя (4) при  $V_c=0$ , получим выражения для ординат точек сшивки для плоскостей  $(T_e, q_e)$  и  $(T_e, dT_e/dx)$

$$q_{ed}^0 = \frac{J_{red}^0 \left( \frac{kT_{ed}}{e} - \frac{kT_c}{e} \right) + (1 - A_{Ce})(J + J_{id}^0) \frac{kT_c}{e}}{1 - A_{Ce}}, \quad (13)$$

$$\left. \frac{dT_{ed}}{dx} \right|_{x=d} = \frac{-q_{ed}^0 + \beta_{ed}^0 (J + J_{id}^0) kT_{ed} / e}{\lambda_{ed}^0}. \quad (14)$$

Каждая из функций  $g = \{g_1=0, g_2=0\}$  имеет ограниченную область определения:  $g_1(n_d, J_{id})=0 - \{n \geq n_d^0, J_{id} \geq J_{id}^0\}$ ;  $g_2(n_d, J_{id})=0 - \{n \leq n_d^0, J_{id} \leq J_{id}^0\}$ . Кроме этого, на область определения функций накладывается физическое ограничение  $n_d > 0$ .

Анализ уравнений (9) и (10) позволяет выявить особенности асимптотического поведения кривых граничных уравнений для различной полярности  $V_c$ . При больших значениях  $V_c > 0$  ионный ток  $J_{id}$ , согласно (9), стремится к асимптоте

$$J_{idass1} = \frac{J_{rid}}{(1 - A_{Ci})}, \quad (15)$$

вследствие этого имеется ограничение на величину  $V_c$ .

Подставляя выражение (15) в выражение для ускоряющего потенциального барьера, полученного из (1)

$$V_c = \frac{kT_{ed}}{e} \ln \left( \frac{J_{red} + A_{Ce}(J + J_{id})}{J_{Ce}^{(E)} + (J + J_{id})} \right)$$

и выполняя предельный переход  $n_d \rightarrow \infty$ , получим предельное значение

$$V_{C\text{lim}} = \frac{kT_{ed}}{e} \ln \left( \frac{(1 - A_{Ci}) \gamma_{Ce} \bar{v}_e(T_{ed})}{\gamma_{Ci} \bar{v}_i(T_d)} + A_{Ce} \right). \quad (16)$$

При больших значениях  $V_c < 0$  плотность ионного тока  $J_{i0}$ , согласно (10)

$$J_{idass2} = -J_{Ci}^{(0)}. \quad (17)$$

Так как  $J_i - dn/dx$ , то асимптотическая зависимость (15) представляет собой граничное условие III рода, (17) – граничное условие II рода, а в промежуточных точках кривой  $g = \{g_1=0, g_2=0\}$  – суперпозицию всех трех родов.

Покажем, что в модели (1)–(8) имеется дополнительное ограничение области определения кривой  $g_2=0$  и особенность для  $V_c$ . Преобразуя (4) с учетом (7), получим формулу для тормозящего приэлектродного барьера ( $V_c \leq 0$ )

$$V_c = \frac{kT_{ec}}{e} \ln \left[ \frac{\gamma_{Ce} en_d \bar{v}_e(T_{ed}) - (1 - A_{Ce})(J + J_{id})}{J_{Ce}^{(0)}} \right]. \quad (18)$$

Так как знаменатель логарифма в (18) должен быть положительной величиной, то выражение для области ограничения параметров плазмы у коллектора на плоскости  $(n, J_i)$  запишется как

$$\gamma_{Ce} e \bar{v}_e(T_{ed}) n_d - (1 - A_{Ce}) J_{id} - (1 - A_{Ce}) J > 0. \quad (19)$$

Приравнивая правую часть неравенства (19) к нулю, получим выражение для границы области ограничения

$$\gamma_{Ce} e \bar{v}_e(T_{ed}) n_d^b - (1 - A_{Ce}) J_{id}^b - (1 - A_{Ce}) J = 0, \quad (20)$$

где  $n_d^b, J_{id}^b$  – абсцисса и ордината линии границы области ограничения. Совместный анализ уравнений (4), (5), (10) и (20), учитывая (18), показал, что при приближении точки, находящейся на  $g_2(n_d, J_{id})=0$ , к точке на прямой (20) с координатами

$$n_{db} = \frac{(1 - A_{Ce})(J + J_{idb})}{\gamma_{Ce} e v_e(T_{ed})}, \quad (21)$$

$$J_{idb} = -J_{Ci}^{(0)}, \quad (22)$$

потенциальный барьер у коллектора  $V_c \rightarrow -\infty$ .

Для получения точек кривой  $g = \{g_1=0, g_2=0\}$  и затем вычисления выражений (3), (6), (8), необходимо выполнять численные расчеты. Задаются  $T_{ed}, T_d$  и  $V_c$ , с учетом (16), при фиксированных параметрах диода  $T_c, F_c, p_{cs}, J$ , тогда любая точка кривой  $g = \{g_1=0, g_2=0\}$  из области её определения вычисляется путем решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно  $n_d$  и  $J_{id}$

$$\begin{cases} a_{11}^{Cj} n_d + a_{12}^{Cj} J_{id} = b_1^{Cj} \\ a_{21}^{Cj} n_d + a_{22}^{Cj} J_{id} = b_2^{Cj} \end{cases}, \quad j = 1, 2, \quad (23)$$

где

для  $j=1, V_c \geq 0$ ,

$$a_{11}^{C1} = \gamma_{Ce} e \bar{v}_e(T_{ed}) \exp \left( -\frac{eV_c}{kT_{ed}} \right),$$

$$a_{12}^{C1} = A_{Ce} \exp \left( -\frac{eV_c}{kT_{ed}} \right) - 1,$$

$$b_1^{E1} = J + J_{Ce}^{(E)} - A_{Ce} J \exp \left( -\frac{eV_c}{kT_{ed}} \right),$$

$$a_{21}^{C1} = \gamma_{Ci} e \bar{v}_i(T_d), \quad a_{22}^{C1} = A_{Ci} - 1,$$

$$b_2^{C1} = J_{Ci}^{(E)} \exp \left( -\frac{eV_c}{kT_d} \right),$$

для  $j=2, V_c \leq 0$ ,

$$a_{11}^{C2} = \gamma_{Ce} e \bar{v}_e(T_{d0}), \quad a_{12}^{C2} = A_{Ce} - 1,$$

$$b_1^{C2} = J - J_{Ce}^{(0)} \exp \left( \frac{eV_{EC}}{kT_{ec}} \right) - A_{Ce} J,$$

$$a_{21}^{C2} = \gamma_{Ci} e \bar{v}_i(T_d) \exp \left( \frac{eV_c}{kT_d} \right),$$

$$a_{22}^{C2} = A_{Ci} \exp \left( \frac{eV_c}{kT_d} \right) - 1, \quad b_2^{C2} = J_{Ci}^{(0)}.$$

Контроль решения СЛАУ (23) осуществлялся по невязке функций  $g = \{g_1=0, g_2=0\}$ . Для учёта эффекта Шоттки организовывался итерационный цикл, окончание которого происходило при достижении заданной относительной погрешности  $|\Delta J_{Ce}^{(E)}|/J_{Ce}^{(E)}$ .

### Результаты численных исследований и их обсуждение

На рис. 1 представлены характерные кривые граничных условий  $g = \{g_1=0, g_2=0\}$  у коллектора для различных работ выхода. Сплошными кружками на кривых обозначены точки шивки с координатами (11), (12), находящиеся в первом квадранте. Пунктирной линией обозначена граница области ограничения параметров плазмы у коллектора (20). С увеличением  $F_c$  плотность эмиссионного электронного тока  $J_{Ce}^{(0)}$  уменьшается ( $A/\text{см}^2$ ): 1,04, 0,33, 0,032, а параметр компенсации  $\beta_c$  увеличивается:  $1,05 \cdot 10^{-8}$ ,  $1,07 \cdot 10^{-7}$ ,  $1,11 \cdot 10^{-5}$ . Для всех кривых реализуется режим недокомпенсации  $\beta_c \ll 1$ . Кривые  $g_1=0$  практически полностью совпадают с асимптотой (15).

Каждая из кривых  $g_2=0$  представляет собой, согласно (10), линию, подобную ветви параболы, большая часть которой находится в первом квадранте. Основные изменения кривой происходят при изменении  $V_c$  в диапазоне  $[-kT_{ed}/e, 0]$ . В области  $V_c < -2$  В она приближается сверху к асимптоте (17). При малых  $\beta_c$  и уменьшении  $J_{Ce}^{(0)}$  парабола вырождается в прямую.

В некоторых работах, например [2, 4], для анализа параметров плазмы используется модель неэ-

миттирующего коллектора  $J_{C_e}^{(0)}=J_{C_i}^{(0)}=0$ . В этом случае, как и для малых значений  $\beta_C$  и  $J_{C_e}^{(0)}$ , в точке сшивки производная  $dJ_i/dn$  терпит существенный разрыв, который отражается на вольтамперной характеристике диода. Кривая  $g_2=0$  совпадает с прямой (20) (рис. 1, пунктир) и находится полностью в первом квадранте. Координаты точки, в которой  $V_C=\infty$ , вычисляются по (21), (22) при  $J_{C_i}^{(0)}=0$ . При анализе данного приближения математических трудностей, связанных с областью ограничения параметров, плазмы у коллектора, не возникает, т. к.  $V_C$  вычисляется не из (18), а из уравнения (5)

$$V_C = \frac{kT_d}{e} \ln \left[ \frac{\gamma_{C_i} en_d \bar{v}_i(T_d) + A_{C_i} J_{id}}{J_{id}} \right].$$

В случае значительных перекомпенсаций  $\beta_C \gg 1$  (рис. 2) поведение кривых  $g=\{g_1=0, g_2=0\}$  существенно изменяется. Точки сшивки лежат в четвертом квадранте и кривые  $g_1=0$  значительно отклоняются от асимптоты (15). Поведение каждой из кривых  $g_2=0$  рис. 2 во многом похоже на поведение кривых рис. 1 за исключением того, что приближение к асимптоте снизу и область выхода к ней менее выражена. При увеличении  $T_{ed}$  отчетливо видно движение границы области ограничения параметров плазмы у коллектора вправо по оси *ол*. Поведение кривых  $g=\{g_1=0, g_2=0\}$  рис. 2 практически совпадает с поведением соответствующих кривых для эмиттера при больших значениях перекомпенсации  $\beta_E$  [1], за исключением наличия области ограничения параметров плазмы. Переход от характерного вида кривых  $g=\{g_1=0, g_2=0\}$  рис. 1 к виду кривых рис. 2 происходит при сочетании параметров диода и плазмы, для которых  $J_{id}^{(0)} \approx -J_C^{(0)}$ .

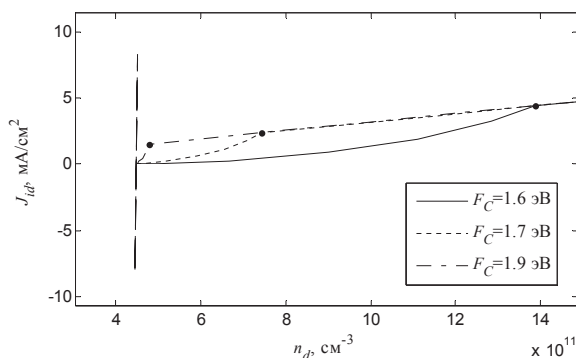


Рис. 1. Зависимости плотности ионного тока от плотности плазмы в оболочке у коллектора для параметров диода:  $T_c=1000$  К,  $p_{cs}=1$  мм рт. ст.,  $J=1$  А/см<sup>2</sup> и плазмы:  $T_{ed}=2000$  К,  $V_c \in [-5, 0; +0, 25]$

Малые изменения  $n_d$  и  $J_{id}$  в окрестности точки  $(n_{db}, J_{idb})$  функции  $g_2=0$  приводят к существенным изменениям  $V_C$ . Например, вариация  $V_C$  в диапазоне  $[-5, 0; -2, 0]$  на 1 В приводит к вариации в 8–9 знаках после запятой нормализованных величин  $n_d, J_{id}$ , а для кривых рис. 1 – в 14–16 знаках. Такая подстройка параметров лабораторной плазмы и такие прецизионные измерения параметров плазмы у электрода невозможны. Распределения

плотности плазмы в межэлектродном зазоре для областей квазинасыщения вольтамперной характеристики диода и поджига разряда, полученные с помощью зондовых измерений [3], практически совпадают.

Точку  $(n_{db}, J_{idb})$ , в связи с большой восприимчивостью [10], наличием ограничения (20), можно рассматривать как точку бифуркации, которая значительно влияет на нестационарные и критические плазменные процессы термоэмиссионного диода [2].

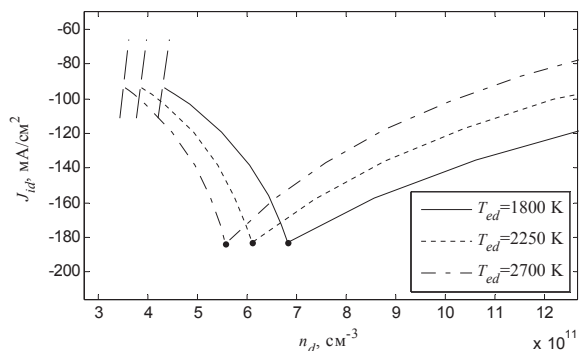


Рис. 2. Зависимости плотности ионного тока от плотности плазмы в оболочке у коллектора для параметров диода:  $T_c=1800$  К,  $F_c=3,25$  эВ,  $p_{cs}=1$  мм рт. ст.,  $J_{C_e}^{(0)}=0,31$  А/см<sup>2</sup>,  $J=1$  А/см<sup>2</sup> и плазмы:  $V_c \in [-5, 0; +0, 17]$ ,  $\beta_C=147,42$

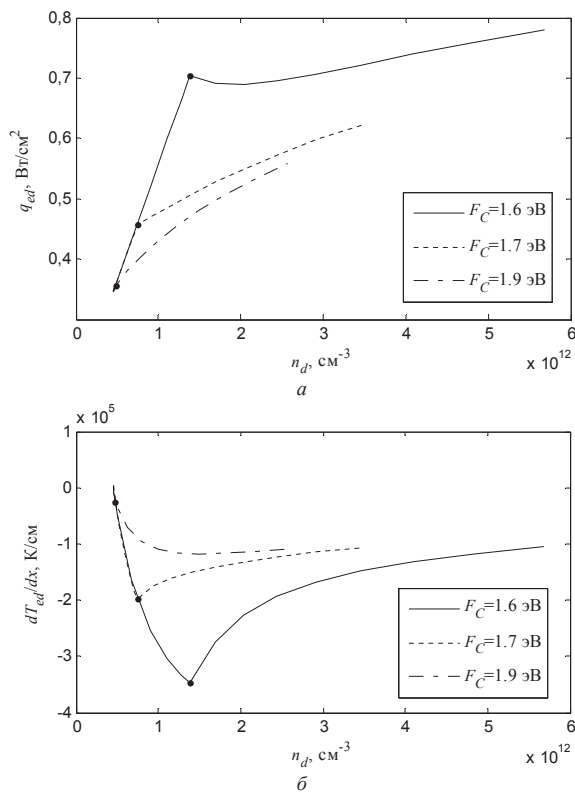
На рис. 3 показаны зависимости  $q_{ed}=q_{ed}(n_d)$  и  $dT_{ed}/dx=dT_{ed}/dx(n_d)$ , построенные с помощью (3), (6)–(8) для данных рис. 1. Видно, что в области определения  $g_2=0$  изменение  $q_{ed}=q_{ed}(n_d)$  линейно, а для  $g_1=0$  – почти линейно. Но при больших эмиссионных токах  $J_{C_e}^{(0)}$  зависимость  $q_{ed}=q_{ed}(n_d)$  имеет локальный минимум, т. е. в некотором диапазоне изменения  $n_d$  разным состояниям плазмы соответствует одинаковая плотность потока энергии электронов. Это обстоятельство отмечалось в [3]. На зависимостях  $q_{ed}=q_{ed}(n_d)$ , соответствующих кривым рис. 2, локальный минимум появляется при больших значениях  $T_{ed}$ . Сечение кривых, подобных кривым рис. 3, при фиксированных значениях  $n_d$  позволяют построить зависимости  $q_{ed}=q_{ed}(T_{ed})$  и  $dT_{ed}/dx=dT_{ed}/dx(T_{ed})$ .

В связи с ограничением  $V_C < V_{Clim}$  имеется ограничение области определения кривой  $g_1=0: n_d < n_{dmax}$ , так же как и для эмиттерной оболочки [1].

В модели (1)–(8) плотность тока диода  $J > 0$  не ограничивается эмиссионным током с коллектора  $J_{C_e}^{(0)}$ . При вариации  $J$  в большом диапазоне форма кривых  $g=\{g_1=0, g_2=0\}$  сохраняет характерные особенности, описанные выше, для  $J=1$  А/см<sup>2</sup> (рис. 1, 2).

Относительные изменения эмиссионных токов коллектора за счет нормального эффекта Шоттки практически аналогичны относительным изменениям эмиссионных токов эмиттера [1].

Анализ координат точек сшивки (11)–(12), а также (13)–(14), и их изменений при вариации параметров диода и плазмы является удобным способом оценки вида и изменения положения кривых



**Рис. 3.** Зависимости плотности потока энергии (а) и производной температуры электронов от плотности плазмы (б) в оболочке у коллектора для параметров диода:  $T_c=1000$  К,  $r_c=1$  мм рт. ст.,  $J=1$  А/см<sup>2</sup> и плазмы:  $T_{ed}=2000$  К,  $V_c \in [-5, 0; +0, 25]$

граничных условий у коллектора на фазовых плоскостях, подобных  $(n, J)$ . Такой анализ можно проводить подобно тому, как это сделано для модели эмиттерной оболочки [1]. Кроме указанных выше точек важную роль при анализе модели коллекторной оболочки играет граница области ограничения параметров плазмы у коллектора (20) и точка с координатами  $(n_{db}, J_{idb})$ , при приближении к которой значение  $V_c$  существенно возрастает. Небольшие погрешности вычисления функции  $g_2(n_d, J_{id})=0$  в окрестности точки  $(n_{db}, J_{idb})$  приводят к неустойчивости вычислительного процесса и, как следствие, к скачкам на вольтамперной характеристике диода [6]. С физической точки зрения анализ поведения кривой  $g_2=0$  вблизи прямой (20) важен для понимания процесса перехода из диффузионного в дуговой режим работы диода [5].

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Зимин В.П. Исследование особенностей плазменных граничных уравнений у эмиттера термоэмиссионного диода // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322. – № 2. – С. 11–15.
2. Стаханов И.П., Степанов А.С., Пащенко В.П. и др. Физические основы термоэмиссионного преобразования энергии. – М.: Атомиздат, 1973. – 374 с.
3. Бакшт Ф.Г., Дюжев Г.А., Марцинковский А.М. и др. Термоэмиссионные преобразователи и низкотемпературная плазма / под ред. Б.Я. Мойжеса, Г.Е. Пнкуса. – М.: Наука, 1973. – 480 с.

Модели граничных условий у эмиттера и коллектора обладают симметрией при смене направления протекания плотности тока диода [2]. При замене  $J$  на  $-J$  все особенности кривых граничных уравнений  $f=\{f_1=0, f_2=0\}$ , исследованные в [1], проявляются для кривых  $g=\{g_1=0, g_2=0\}$ , и наоборот.

**Выводы**

1. Аналитические и численные исследования модели монотонных плазменных граничных условий на плоскости плотность плазмы–ионный ток позволили выявить и исследовать область ограничения параметров плазмы у коллектора. При приближении кривой граничного условия к данной области значительно растет модельное значение скачка потенциала у коллектора. Пересечение границы этой области с кривой граничного условия является точкой бифуркации плазменных процессов термоэмиссионного диода. При приближении к этой точке требуется обеспечение прецизионных вычислений параметров плазмы. Анализ поведения кривой граничного условия в окрестности этой точки играет важную роль в понимании процесса поджига дуги.
2. Координаты точек сшивки граничных условий удобно использовать как для анализа типа кривой граничного уравнения у коллектора, так и для оценки влияния параметров диода и плазмы на их изменение. В области точки сшивки обнаружен резкий излом кривых коллекторных условий. Он характерен как для малых, так и для больших параметров компенсации, но особенно отчетливо проявляется при малых значениях электронного тока эмиссии коллектора.
3. Все выявленные характерные особенности зависимостей плотности ионного тока от плотности плазмы (асимптоты, переходные участки до асимптот) отображаются в поведении плотности энергии электронов и пространственной производной электронной температуры у коллектора от этой переменной. Зависимость плотности энергии электронов у коллектора от плотности плазмы для тормозящего приэлектродного потенциального барьера при больших значениях плотности эмиссионного тока электронов имеет экстремальный характер.

4. Стаханов И.П., Черковец В.Е. Физика термоэмиссионного преобразователя. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 208 с.
5. Зимин В.П. Моделирование поджига дугового разряда в термоэмиссионном преобразователе энергии // Физика низкотемпературной плазмы 2001: Матер. Всерос. науч. конф. – Петрозаводск, 7–10 июля, 2001. – Т. 2. – Петрозаводск: Изд-во ПИЗГУ, 2001. – С. 79–82.
6. Зимин В.П. Алгоритм расчета вольтамперных характеристик термоэмиссионного преобразователя с постоянной температурой электронов / Ред. журн. «Известия вузов. Физика». – Томск, 1984. – № 7. – 36 с. – Деп. в ВИНТИ 21.03.1984, № 1571–84.



7. Зимин В.П. Изображение и анализ граничных условий для уравнения теплопроводности на фазовых плоскостях // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318. – № 4. – С. 29–33.
8. Зимин В.П. Развитие метода фазовой плоскости для анализа решений краевых задач // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 2. – С. 17–21.
9. McCandless R.J., Wilkins D.R., Derby S.L. Theory of thermionic converter volume phenomena // IEEE Conf. Record of 1969 Thermion. Convers. Spes. Conf. – Carmel, California (USA), Oct., 1969. – P. 163–169.
10. Руманов Э.Н. Критические явления вдали от равновесия // Успехи физических наук. – 2013. – Т. 183. – № 1. – С. 103–112.

*Поступила 19.02.2013 г.*

УДК 621.384.64:539.12.04

## ЧАСТОТНЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ ИНДУКЦИОННЫЙ УСКОРИТЕЛЬ С ДВУМЯ РАЗНОПОЛЯРНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ

А.И. Мащенко

Томский политехнический университет  
E-mail: mashchenko@tpu.ru

*Представлена электрическая схема частотного линейного индукционного ускорителя с магнитной коммутацией, формирующего на нагрузке последовательность двух разнополярных импульсов, отделенных друг от друга временным интервалом. Даны методика расчета элементов схемы и результаты расчета параметров выходных импульсов ускорителя при моделировании его работы на активную нагрузку. Полученные расчетные параметры выходных импульсов показывают принципиальную возможность прикладного использования таких ускорителей, например, в технологических процессах в области материаловедения.*

### **Ключевые слова:**

*Линейный индукционный ускоритель, магнитный импульсный генератор, разнополярные импульсы напряжения, омическая нагрузка.*

### **Key words:**

*Linear induction accelerator, magnetic pulsed generator, bipolar voltage pulse, ohmic load.*

### **Введение**

Линейные индукционные ускорители (ЛИУ) с магнитной коммутацией, разработанные в Физико-техническом институте ТПУ, используются в основном в качестве источников питания релятивистских СВЧ приборов [1]. Отсутствие в ЛИУ на магнитных элементах газоразрядных коммутаторов снимает принципиальные ограничения на частоту повторения импульсов. В продолжительном режиме работы эта частота ограничена тепловыми нагрузками на элементы ЛИУ, в первую очередь на сердечники магнитных коммутаторов (дросселей насыщения), а при кратковременном включении ускорителя в режиме пакета импульсов с еще меньшим периодом следования – частотными возможностями тиристорного зарядного устройства, т. е. временем восстановления тиристоры и временем заряда накопителя первичного источника питания [2]. Эффективность применения ЛИУ с магнитной коммутацией энергии в проводимых экспериментальных исследованиях обусловлена высокой стабильностью их выходных параметров, высокой частотой следования импульсов, достигающей нескольких килогерц, и практически неограниченным ресурсом работы. Такой ускоритель может работать в любом однополярном режиме: отрицательном, когда нагрузкой является, например, релятивистский магнетрон, или положительном – при работе на отражательный триод. Полярность рабочих импульсов ЛИУ может изменяться перестановкой клемм на выходе первичного источника питания.

С целью расширения функциональных возможностей ЛИУ на магнитных элементах, например, для их практического применения в технологических процессах в области материаловедения, необходимо создать устройство, способное сформировать на нагрузке два высоковольтных разнополярных импульса напряжения с временной задержкой между ними [3]. Решение данной задачи позволило бы в случае прикладного использования такой установки повысить ее производительность, эффективность и надежность, а также значительно упростить эксплуатацию.

В настоящей работе представлены схема, методика расчета параметров элементов и результаты моделирования работы ЛИУ с магнитной коммутацией энергии, способного формировать на нагрузке два разнополярных импульса, разделенных временным интервалом, при одном срабатывании первичного источника питания и с высокой частотой посылок двоек импульсов.

При разработке ускорителя с разнополярными импульсами за основу была принята схема построения действующего ЛИУ 0,4/6 [4].

**Электрическая схема**

На рис. 1 представлена принципиальная электрическая схема ЛИУ. Основными узлами ЛИУ являются ферромагнитная индукционная система (ИС), формирующая рабочие импульсы в нагрузке; первичный накопитель  $C_0$  с тиристорным коммутатором Т; импульсный трансформатор (ИТ); магнитный импульсный генератор (МИГ), состоящий из звеньев сжатия с конденсаторами  $C_1, C_2, C_3, C_4$  и дросселями насыщения  $L_1, L_2, L_3$  и служащий для согласования параметров выходного импульса первичного накопителя  $C_0$  с параметрами импульса заряда емкостей  $C_5$  и  $C_6$ ; дроссель насыщения  $L_4$ , служащий для перезаряда емкости  $C_5$ ; магнитный коммутатор  $L_5$ , переключающий заряженные емкости  $C_5$  и  $C_6$  на витки намагничивания ИС; емкость  $C_7$ , обеспечивающая инвертирование импульсов в нагрузке в процессе своего заряда и разряда; дроссель насыщения  $L_6$ , предназначенный для создания требуемой временной паузы  $\Delta t_n$  между сдвоенными импульсами разной полярности и переключения заряженной емкости  $C_7$  на витки намагничивания ИС; омический эквивалент нагрузки  $R_H$ .

Емкость  $C_0$  выполнена из конденсаторов типа К75–81 (20 мкФ, 1600 В), соединенных параллельно. Звенья сжатия МИГ содержат емкости  $C_1, C_2, C_3$  и  $C_4$  в виде сборок параллельно-последовательно включенных конденсаторов типа К75–74 (0,1 мкФ, 40 кВ и 0,047 мкФ, 40 кВ). Для формирования на выходе ускорителя импульсов, близких по виду к трапецеидальным, емкости  $C_5, C_6$  и  $C_7$ , условно показанные в виде конденсаторов с сосредоточенными параметрами, выполнены по технологии полосковых формирующих линий.

Индукционная система, импульсный трансформатор, дроссели насыщения  $L_1, L_2, L_3, L_4, L_6$  и магнитный коммутатор  $L_5$  построены на тороидальных сердечниках различных диаметров, изготовленных из ферромагнитной ленты шириной 25 мм и толщиной 0,01 и 0,02 мм пермаллового сплава марки 50 НП с коэффициентом заполнения сердечников сталью ~ 0,8.

**Принцип работы**

Заряд емкости  $C_0$  первичного источника питания осуществляется при протекании тока по первичной обмотке импульсного трансформатора, сердечник которого при этом перемагничивается до области отрицательного насыщения. При включении тиристорного коммутатора Т емкость  $C_0$  разряжается через импульсный трансформатор на емкости  $C_1$  и  $C_2$  входного звена МИГ по двум контурам. Емкость  $C_1$  заряжается непосредственно от вторичной обмотки ИТ, а емкость  $C_2$  заряжается током, протекающим через обмотки дросселей  $L_1, L_2, L_3$  и переводящим их в состояние насыщения. При заряде емкости  $C_1$  и  $C_2$  включены в контуре параллельно. По окончании передачи энергии из  $C_0$  в  $C_1$  и  $C_2$  под действием напряжения на  $C_1$ , приложенного к вторичной обмотке ИТ, его сердечник начинает перемагничиваться в обратном направлении. ИТ насыщается, что приводит к перезаряду емкости  $C_1$  через его вторичную обмотку и удвоению (без учета потерь) напряжения на противоположных выводах емкостей  $C_1$  и  $C_2$  при их последовательном включении по сравнению с напряжением заряда. Под действием напряжения  $U_c(t) = U_{c1}(t) + U_{c2}(t)$  дроссель  $L_1$  выходит из состояния отрицательного насыщения и начинает перемагничиваться. Он насыщается, но уже в положительной области, и начинается разряд последовательно соединенных емкостей  $C_1, C_2$  (суммарная емкость  $C_{1-2} = 0,5C_1 = 0,5C_2$ ) на емкость  $C_3$ . Дальнейшая передача энергии от звена к звену с последовательным временным сжатием импульсов в звеньях  $C_3, L_2$  и  $C_4, L_3$  в 3–4 раза осуществляется при равной величине напряжения.

Выражение, определяющее зависимость конструктивных параметров дросселей насыщения от требуемого времени передачи энергии в звеньях МИГ, записывается в виде:

$$\Delta t_n = \pi \sqrt{L'_n \frac{C_n C_{n+1}}{C_n + C_{n+1}}} = \frac{\Psi_{n+1}}{U_{cp, n+1}} = \frac{W_{n+1} S_{n+1} \Delta B}{U_{cp, n+1}} = \frac{W_{n+1} (D - d) h k N \Delta B}{U_{n+1}} = \Delta t'_{n+1}, \quad (1)$$

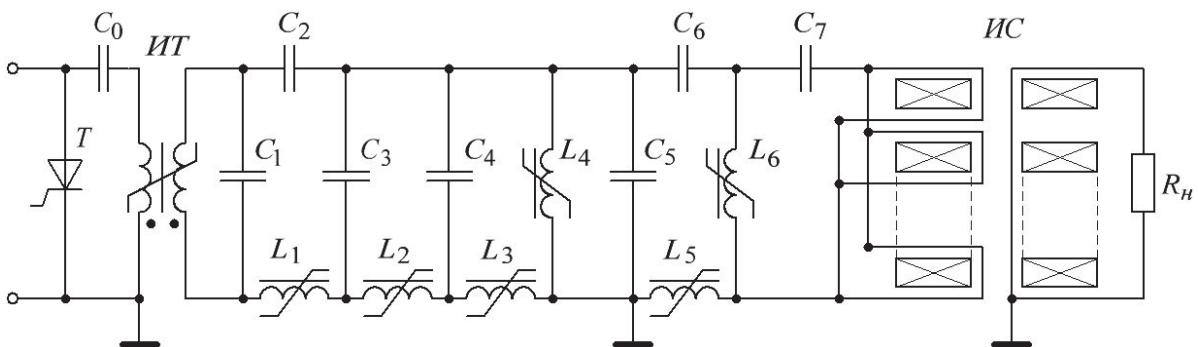


Рис. 1. Электрическая схема частотного линейного индукционного ускорителя с двумя разнополярными импульсами

где  $\Delta t_n$  – интервал времени передачи энергии из емкости  $C_n$  в емкость  $C_{n+1}$ ;  $\Delta t_{n+1}^t$  – интервал времени перемагничивания дросселя  $L_{n+1}$ ;  $L_n$  – суммарная индуктивность контура, состоящая из индуктивности обмотки дросселя  $L_n$  в насыщенном состоянии его сердечника, индуктивности токовводов  $L_T$  и индуктивности конденсаторов  $L_C$ ;  $C_n$  – емкость разряда;  $C_{n+1}$  – емкость заряда;  $\Psi_{n+1}$  – потокосцепление дросселя  $L_{n+1}$ ;  $U_{cp,n+1} = U_{n+1}/2$  – среднее значение напряжения, приложенного к обмотке дросселя  $L_{n+1}$ ;  $U_{n+1}$  – амплитудное значение напряжения на конденсаторе  $C_{n+1}$ ;  $W_{n+1}$  – число витков обмотки

дросселя  $L_{n+1}$ ;  $S_{n+1} = \frac{D-d}{2} hkN$  – общая площадь

поперечного сечения сердечников дросселя  $L_{n+1}$ ;  $D$ ,  $d$ ,  $h$  – внешний, внутренний диаметры и ширина ленты сердечника;  $k$  – коэффициент заполнения сталью объема сердечника;  $N$  – число сердечников;  $\Delta B$  – приращение индукции (для пермаллоя 50 НП  $\Delta B = 2,5$  Тл).

Индуктивность обмотки дросселя  $L_n$  в насыщенном состоянии сердечника равна:

$$L_n = \frac{\mu_0}{2\pi} W_n^2 a_n \ln \frac{D_n}{d_n}, \quad (2)$$

где  $W_n$  – число витков обмотки дросселя  $L_n$ ;  $D_n$  и  $d_n$  – внешний и внутренний диаметры обмотки;  $a_n$  – аксиальный размер обмотки.

Разряд конденсатора  $C_4$  и заряд формирующих линий  $C_5$  и  $C_6$ , включенных в этот момент времени в цепи параллельно, происходит после насыщения дросселя  $L_3$  (дроссель  $L_4$  в это время ненасыщен) по двум контурам. Линия  $C_5$  заряжается током, протекающим через обмотку насыщенного дросселя  $L_3$ . Зарядный ток линии  $C_6$  протекает по обмоткам дросселя  $L_3$ , магнитного коммутатора  $L_5$  и переключающего дросселя  $L_6$ . Этот ток одновременно является размагничивающим током для сердечников коммутатора  $L_5$  и дросселя  $L_6$ . К магнитному коммутатору  $L_5$  напряжение в это время не прикладывается, так как по отношению к нему емкости  $C_5$  и  $C_6$  заряжаются встречно. Временной интервал передачи энергии при этом будет равен:

$$\Delta t_4 = \pi \sqrt{L_3 \frac{C_4(C_5 + C_6)}{C_4 + C_5 + C_6}} = \frac{\Psi_4}{U_{cp,4}} = \frac{W_4 S_4 \Delta B}{U_{cp,4}}, \quad (3)$$

где  $\Psi_4 = W_4 S_4 \Delta B$  – потокосцепление дросселя насыщения  $L_4$ ;  $W_4$  и  $S_4$  – число витков и площадь поперечного сечения сердечника дросселя  $L_4$ ;

$U_{cp,4} \approx U_{C5-6} \frac{C_4}{C_4 + C_5 + C_6}$  – среднее значение напряжения, приложенного к обмотке дросселя  $L_4$ ;  $U_{C5-6}$  – амплитудное значение зарядного напряжения параллельно включенных емкостей  $C_5$  и  $C_6$ .  $L_6$  – суммарная индуктивность контура, состоящая из индуктивности обмотки насыщенного дросселя  $L_3$ , которая определяется по уравнению (2), индуктивности токовводов  $L_{T3}$  и индуктивности конденсаторов  $L_{C4,5,6}$ .

Для полной передачи энергии из конденсаторов звеньев сжатия МИГ в формирующие линии  $C_5$  и  $C_6$  следует выбирать их емкости в соотношении  $0,5C_1 = 0,5C_2 = C_3 = C_4 = 2C_5 = 2C_6 = C$ . В этом случае (без учета потерь) величины зарядного напряжения на  $C_1$ ,  $C_2$  и зарядного напряжения на  $C_3$ ,  $C_4$  и  $C_5$ ,  $C_6$  (включенных параллельно) будут равны.

В процессе заряда под действием напряжения формирующей линии  $C_5$  сердечник дросселя  $L_4$  начнет перемагничиваться. Срабатывание дросселя  $L_4$  при его насыщении происходит в тот момент времени, когда ток  $I_{C4} = I_{C5} + I_{C6}$  в цепи разряда емкости  $C_4$  и заряда емкостей  $C_5$  и  $C_6$  упадет до нуля. В это время начинается процесс перезаряда линии  $C_5$  через обмотку дросселя  $L_4$ , который приводит к изменению полярности линии  $C_5$  на противоположную и включению емкостей  $C_5$  и  $C_6$  последовательно. Суммарная емкость формирующих линий  $C_5$  и  $C_6$  при этом уменьшится в 4 раза по отношению к их параллельному включению ( $C_4 = 0,5C_5 = 0,5C_6$ ), а напряжение на противоположных электродах линий к концу процесса перезаряда удвоится (без учета потерь) по сравнению с зарядным напряжением. Интервал времени перезаряда  $\Delta t_5$  линии  $C_5$  будет равен:

$$\Delta t_5 = \pi \sqrt{L_4 C_5}, \quad (4)$$

где  $L_4$  – индуктивность контура, состоящая из индуктивности обмотки насыщенного дросселя  $L_4$ , индуктивности токовводов  $L_{T4}$  и индуктивности конденсаторов  $L_{C5}$ .

Нарастающее напряжение на последовательно включенных линиях  $C_5$  и  $C_6$  прикладывается к обмотке магнитного коммутатора  $L_5$ . Через обмотку магнитного коммутатора начинает протекать перемагничивающий ток. Величину потокосцепления  $\Psi_5$  магнитного коммутатора  $L_5$  следует выбирать из следующего условия: сердечник магнитного коммутатора должен насытиться в момент окончания перезаряда линии  $C_5$ , т. е. должно выполняться условие:

$$\Psi_5 = W_5 S_5 \Delta B \approx \pi \sqrt{L_4 C_5} U_{cp,5-6}, \quad (5)$$

где  $W_5$  и  $S_5$  – число витков обмотки и площадь поперечного сечения сердечника магнитного коммутатора  $L_5$ ;  $U_{cp,5-6} = 0,5(U_{C5} + U_{C6})$  – среднее напряжение, действующее на витки обмотки магнитного коммутатора  $L_5$  при перезаряде линии  $C_5$  и включении последовательно линий  $C_5$  и  $C_6$ ;  $U_{C5}$  и  $U_{C6}$  – амплитудное значение зарядного напряжения линий  $C_5$  и  $C_6$ .

После насыщения сердечника магнитного коммутатора  $L_5$  включенные последовательно линии  $C_5$  и  $C_6$  начнут разряжаться через обмотку магнитного коммутатора  $L_5$  на витки намагничивания ИС и формирующую линию  $C_7$ . Переключающий дроссель  $L_6$  находится в это время в ненасыщенном для рабочего тока состоянии. Эквивалентной для данного процесса является схема разряда заряженного конденсатора с емкостью  $C = 0,5C_5 = 0,5C_6$  и на-

чальным напряжением  $U=U_{C5}+U_{C6}$  на цепь из второго конденсатора с емкостью  $C_7$ , индуктивности контура  $L_{p1}$  и сопротивления  $R$ . В случае аperiodического процесса величина максимального тока  $I_{R1}$  в контуре и напряжение заряда  $U_{C7}$  линии  $C_7$  определяются выражениями [5]:

$$\begin{aligned} I_{R1} &= -\frac{U_{C5}+U_{C6}}{2aL_{p1}}(e^{p_1t}-e^{p_2t}); \\ U_{C7} &= -\frac{0,5C_5}{0,5C_5+C_7}(U_{C5}+U_{C6})+ \\ &+ \frac{0,5C_5}{2a(0,5C_5+C_7)}(U_{C5}+U_{C6})(-p_2e^{p_1t}+p_1e^{p_2t}); \\ p_1 &= -b+a; p_2 = -b-a; b = \frac{R}{2L_{p1}}; \\ a &= \sqrt{b^2 - \frac{1}{L_{p1}C_3}}; C_3 = \frac{0,5C_5C_7}{0,5C_5+C_7}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $0,5C_5$  – эквивалентная емкость последовательно включенных формирующих линий  $C_5$  и  $C_6$  при условии  $C_5=C_6$ ;  $U_{C5}+U_{C6}$  – напряжение разряда последовательно включенных линий  $C_5$  и  $C_6$ , равное сумме их зарядных напряжений;  $R=R_H/n^2$  – приведенное к первичной цепи ускорителя сопротивление нагрузки;  $R_H$  – сопротивление нагрузки;  $n$  – число сердечников ИС;  $L_{p1}=L_5+L_R+L_S+L_\Phi+L_{M1}$  – индуктивность разрядной цепи;  $L_5$  – индуктивность обмотки магнитного коммутатора в насыщенном состоянии сердечника;  $L_R$  – индуктивность нагрузки  $R_H$ , приведенная к первичной цепи;  $L_S$  – индуктивность рассеяния ИС;  $L_\Phi$  – индуктивность формирующих линий  $C_5$ ,  $C_6$  и  $C_7$ ;  $L_{M1}$  – индуктивность монтажа контура разряда.

Ток заряда линии  $C_7$  одновременно является перемещающим током индукционной системы, способствующим формированию в нагрузке  $R_H$  первого высоковольтного импульса тока  $I_H$  с напряжением  $U_H$  отрицательной полярности, длительность  $\tau_1$  которого определяется:

$$\tau_1 = \pi \sqrt{L_{p1} \frac{0,5C_5C_7}{0,5C_5+C_7}}. \quad (7)$$

Для эффективной передачи энергии следует выбирать емкости формирующих линий в соотношении  $0,5C_5=0,5C_6=C_7=C$ . В этом случае величина напряжения заряда формирующей линии  $C_7$  будет близка к величине зарядного напряжения последовательно включенных линий  $C_5$  и  $C_6$ .

После передачи энергии из емкостей  $C_5$  и  $C_6$  в нагрузку  $R_H$  и в емкость линии  $C_7$  последняя остается заряженной до тех пор, пока переключающий дроссель  $L_6$  не перейдет в насыщенное состояние. Величина потокосцепления  $\Psi_6$  дросселя  $L_6$  определяет временную задержку между первым (отрицательным) и вторым (положительным) импульсами в нагрузке  $R_H$  и вычисляется по выражению:

$$\Psi_6 = U_{cp,7}(\tau_1 + \Delta t_H) = W_6 S_6 \Delta B, \quad (8)$$

где  $U_{cp,7}=U_{C7}/2$  – среднее значение напряжения, приложенного к виткам обмотки переключающего дросселя  $L_6$ ;  $U_{C7}$  – амплитудное значение напряжения на линии  $C_7$ ;  $\Delta t_H$  – интервал времени задержки между разнополярными импульсами в нагрузке  $R_H$ , который задается в техническом задании на проектирование устройства;  $W_6$  и  $S_6$  – число витков и площадь поперечного сечения сердечника дросселя  $L_6$ .

Нарастающим напряжением на формирующей линии  $C_7$  переключающий дроссель  $L_6$  перемещается. После временной паузы  $\Delta t_H$  дроссель  $L_7$  срабатывает и в витки намагничивания ИС вводится обратный ток (ток разряда линии  $C_7$ ) и энергия линии  $C_7$  переводится в нагрузку. Максимальная величина разрядного тока  $I_{R2}$  формирующей линии  $C_7$  через обмотку дросселя насыщения  $L_6$  и витки намагничивания ИС на омическую нагрузку  $R$  в момент времени  $t_1$  определяется следующими соотношениями [5]:

$$\begin{aligned} I_{R2} &= \frac{U_{C7}}{2aL_{p2}}(-e^{p_1t}+e^{p_2t}); \\ p_{1,2} &= -\frac{R}{2L_{p2}} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L_{p2}^2} - \frac{1}{L_{p2}C_7}}; \\ 2a &= p_1 - p_2; t_1 = \frac{1}{2a} \ln \frac{p_2}{p_1}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $L_{p2}=L_6+L_R+L_S+L_{\Phi7}+L_{M2}$  – индуктивность разрядного контура;  $L_6$  – индуктивность обмотки насыщенного дросселя  $L_6$ ;  $L_R$  – индуктивность нагрузки, приведенная к первичной цепи;  $L_S$  – индуктивность рассеяния ИС;  $L_{\Phi7}$  – индуктивность одинарной формирующей линии  $C_7$ ;  $L_{M2}$  – индуктивность монтажа контура разряда.

При этом в нагрузке  $R_H$  формируется второй высоковольтный импульс тока  $I_H$  с напряжением  $U_H$  положительной полярности, длительность которого  $\tau_2$  определяется:

$$\tau_2 = \pi \sqrt{L_{p2}C_7}. \quad (10)$$

После проведенного расчета необходимо уточнить основные параметры ускорителя: емкости конденсаторов и напряжения на них, объемы сердечников, числа витков обмоток и др. Полученные данные позволяют выполнить конструктивный расчет дросселей, индукционной системы, трансформатора, сборок конденсаторов МИГ и формирующих линий и вновь уточнить исходные величины электрических параметров элементов ЛИУ.

Конструктивное исполнение элементов ЛИУ следующее. Индукционная система состоит из 14 тороидальных ферромагнитных сердечников прямоугольного сечения размером  $K380 \times 140 \times 25$  (внешний диаметр – внутренний диаметр – ширина в мм) и толщиной ленты 0,01 мм. На каждом сердечнике (индукторе) размещен 1 виток намагничивания. Емкость первичного источника  $C_0=1080$  мкФ. Конденсаторы звеньев сжатия МИГ имеют емкости  $C_1=C_2=0,6$  мкФ,  $C_3=0,25$  мкФ,

$C_4=0,24$  мкФ. Емкость каждого следующего звена сжатия выбирается несколько меньше емкости предыдущего. В результате компенсируется уменьшение напряжения в звеньях из-за активных потерь при передаче энергии. Этот метод используется и при выборе величины емкостей параллельно включенных формирующих линий  $C_5$  и  $C_6$  относительно емкости конденсатора  $C_4$  последнего звена сжатия МИГ. Формирующие линии состоят из наборов полосковых медных электродов с межслойной изоляцией из синтофлекса и имеют емкости  $C_5=C_6=0,1$  мкФ и  $C_7=0,05$  мкФ. Конструктивно формирующие линии для компактности устройства намотаны снаружи сердечников индукционной системы. Дроссель  $L_1$  выполнен из 6 сердечников размером  $K250 \times 110 \times 25$  (толщина ленты 0,02 мм) и имеет 13 витков обмотки. Дроссель  $L_2$  содержит также 6 сердечников  $K250 \times 110 \times 25$ , но число витков обмотки равно 4. Дроссель  $L_3$  изготовлен из 5 сердечников размером  $K420 \times 220 \times 25$  (толщина ленты 0,01 мм) и имеет 1 виток. Дроссель насыщения  $L_4$ , включенный параллельно выходу МИГ и выводам формирующей линии  $C_5$ , содержит 1 сердечник  $K380 \times 150 \times 25$ , обмотка имеет 1 виток. Магнитный коммутатор  $L_5$  выполнен из одного сердечника  $K420 \times 150 \times 25$  (пермаллоевая лента толщиной 0,01 мм) с одновитковой обмоткой. Дроссель  $L_6$  изготовлен из 3 сердечников размером  $K380 \times 180 \times 25$  пермаллового сплава марки 50 НП с толщиной ленты 0,01 мм, обмотка имеет 1 виток. Все эти элементы высоковольтного модуля ЛИУ размещены в цилиндрическом корпусе из нержавеющей стали с внутренним диаметром 670 мм, заполненном трансформаторным маслом.

### Результаты моделирования

Для исследования работы ЛИУ данного типа с указанными выше параметрами элементов была принята за основу схема моделирования, разработанная ранее для ЛИУ 04/6 [4, 6]. Отметим, что расчет ЛИУ, проведенный по уравнениям (1)–(10), является предварительным. В модели расчет выполнялся по эквивалентной схеме, в которой дополнительно вводились активные сопротивления и индуктивности соединительных проводников и элементов в сборках, «паразитные» емкости и индуктивности импульсного трансформатора и индукционной системы. Потери энергии в ферромагнитных сердечниках, в меди проводников обмоток и соединений, в диэлектрике конденсаторов и формирующих линий учитывались введением в схему эквивалентных сопротивлений потерь.

При напряжении первичного источника питания  $U_{c0}=1$  кВ в расчетах были получены следующие значения напряжений на элементах, конденсаторах звеньев сжатия МИГ и формирующих линиях: вторичная обмотка импульсного трансформатора  $U_{ИТ2}=29,2$  кВ,  $U_{C1}+U_{C2}=57,9$  кВ,  $U_{C3}=58$  кВ,  $U_{C4}=54$  кВ,  $U_{C5}+U_{C6}=106$  кВ,  $U_{C7}=85,3$  кВ. Параметры выходных разнополярных импульсов на омической нагрузке  $R_H=100$  Ом (рис. 2): отрицательный – амплитуда тока составляет 3,2 кА при на-

пряжении 320 кВ, длительность импульса по основанию равна 115 нс; положительный – амплитуда тока 4,7 кА при напряжении 470 кВ, длительность по основанию 135 нс; время задержки между импульсами равно 240 нс. Варьируя величинами емкостей формирующих линий  $C_5$ ,  $C_6$  и  $C_7$ , можно изменять амплитуды и длительности обоих импульсов в нагрузке  $R_H$ , а меняя величину потокосцепления  $\Psi_6$  переключающего дросселя  $L_6$ , можно изменять временную задержку между отрицательным и положительным импульсами. Например, если в данной схеме с указанными выше расчетными параметрами элементов ускорителя переключающий дроссель  $L_6$  изготовить из 2 сердечников  $K380 \times 150 \times 25$  из сплава марки 50 НП с толщиной ленты 0,01 мм и одновитковой обмоткой, то уменьшенное потокосцепление дросселя  $L_6$  обеспечит временной интервал между импульсами 160 нс.

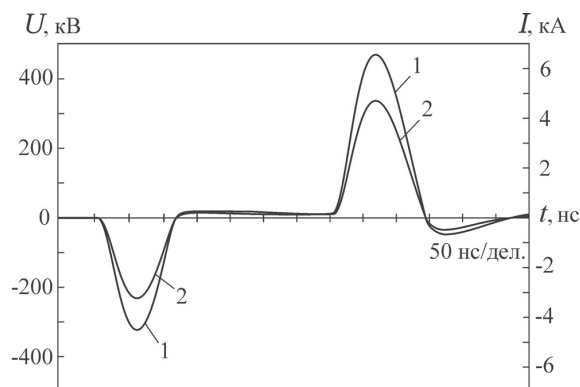


Рис. 2. Импульсы напряжения (1) и тока (2) ЛИУ на омической нагрузке при одном срабатывании его первичного источника питания

### Заключение

Таким образом, схемная реализация двухконтурной передачи энергии в линейном индукционном ускорителе от формирующих линий  $C_5$  и  $C_6$  к индукционной системе с использованием формирующей линии  $C_7$  и переключающего дросселя  $L_6$  позволяет получать в нагрузке  $R_H$  два разнополярных импульса напряжения с временным интервалом подачи  $\Delta t_H$  и высокой частотой следования рабочих циклов, достигающих нескольких килогерц. Причем полярность импульсов в паре может меняться на противоположную простым переключением выходных клемм первичного источника питания  $C_0$ . Первый импульс в нагрузке  $R_H$  формируется при передаче энергии из линий  $C_5$  и  $C_6$  к индукционной системе и линии  $C_7$  (ее заряду), а второй (инвертированный) – при передаче энергии из линии  $C_7$  (ее разряду) к индукционной системе. В процессе работы зарядные и разрядные токи формирующих линий  $C_5$ ,  $C_6$  и  $C_7$ , благодаря разным направлениям протекания, автоматически производят перемагничивание сердечников магнитного коммутатора  $L_5$ , дросселя  $L_6$  и индукционной системы, что исключает необходимость применения посторонних источников размагничивания в частотном цикле работы.

Проведенное моделирование функционирования разработанного линейного индукционного ускорителя на активную нагрузку и полученные при этом параметры выходных двоярных разнополярных импульсов высокого напряжения показывают принципиальную возможность использования такого ускорителя, например, в качестве мощного импульсного источника питания диодных систем, работающих в двухимпульсном режиме и создающих

ионные пучки для технологических применений в области материаловедения. Высокая стабильность амплитудных и временных параметров выходных разнополярных импульсов, большая частота повторения двоярных импульсов и большой ресурс работы без профилактических мероприятий позволяет поднять качество технологического процесса, увеличить производительность и надежность установки при снижении эксплуатационных расходов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Винтизенко И.И., Жерлицын А.Г., Рябчиков А.И., Юшков Ю.Г. Разработка релятивистских СВЧ генераторов в НИИ ядерной физики при ТПУ // Известия Томского политехнического университета. – 2003. – Т. 306. – № 1. – С. 101–105.
2. Меерович А.А., Ватин И.М., Зайцев Э.Ф., Кандыкин В.М. Магнитные генераторы импульсов. – М.: Сов. радио, 1968. – 476 с.
3. Ремнев Г.Е., Исаков И.Ф., Опекунов М.С., Матвиенко В.М. Источники мощных ионных пучков для практического применения // Известия вузов. Физика. – 1998. – № 4. – Приложение. – С. 92–111.
4. Мащенко А.И. Оптимизация параметров линейного индукционного ускорителя с магнитной коммутацией энергии // Известия вузов. Физика. – 2010. – Т. 53. – № 10/2. – С. 82–85.
5. Гинзбург С.Г. Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. – М.: Высш. школа, 1967. – 387 с.
6. Мащенко А.И. Линейный индукционный ускоритель с удвоением напряжения в выходном звене магнитного генератора // Известия вузов. Физика. – 2011. – Т. 54. – № 11/2. – С. 75–80.

Поступила 25.12.2012 г.

УДК 621.039.58: 532.529.5

## ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЬНЫХ ТЕПЛО ВЫДЕЛЯЮЩИХ СБОРОК В ИМПУЛЬСНЫХ ИСПЫТАНИЯХ НА ИМПУЛЬСНОМ ГРАФИТОВОМ РЕАКТОРЕ

В.А. Витюк, А.Д. Вурим, И.В. Шаманин\*, С.Б. Козловский\*

Институт атомной энергии НЯЦ РК, Курчатов, Казахстан

\*Томский политехнический университет

E-mail: shiva@tpu.ru

Представлена расчетно-экспериментальная методика контроля энерговыделения в тепловыделяющих сборках при их испытаниях в центральном экспериментальном канале импульсного исследовательского ядерного реактора. Приведены результаты апробации методики в ходе выполнения серии испытаний с экспериментальным устройством, предназначенным для изучения поведения модельных тепловыделяющихборок реакторной установки типа ВВЭР-1000 в условиях, моделирующих заключительную фазу аварии с потерей теплоносителя.

#### Ключевые слова:

Импульсный исследовательский ядерный реактор, ядерное топливо, испытания, тепловыделение, контроль.

#### Key words:

Pulsed research nuclear reactor, nuclear fuel, test, heat emission, monitoring.

Имитационные испытания тепловыделяющихборок (ТВС) энергетических реакторов в исследовательских реакторах остаются одним из общепризнанных и надежных методов получения экспериментальной информации, используемой как для верификации существующих и разрабатываемых компьютерных кодов, описывающих поведение топлива энергетических реакторов в различных режимах, включая аварийные, так и для прямой экспериментальной оценки работоспособности ТВС.

Важной задачей при проведении таких исследований является определение энергетических параметров экспериментов (мощность и энерговыделение в топливе экспериментального устройства), которые необходимы как для правильной интерпре-

тации их результатов, так и для повышения точности реализации заданного энерговыделения. На исследовательских реакторах, обеспечивающих возможность реализации продолжительных стационарных режимов, определение энергетических параметров ТВС часто выполняется балансовыми методами, среди которых метод стационарного определения энерговыделения теоретически позволяет обеспечить точность до 1 %. При его применении в практике внутриреакторных исследований по данным [1, 2] точность определения энергетических параметров ТВС достигает значения 3...4 %.

Эксплуатационные возможности импульсного графитового реактора (ИГР) [3] позволяют реализовать исследования, направленные на получение



ние экспериментальной информации о быстропротекающих физических и тепловых процессах в ядерных реакторах, поведении топлива и конструкционных материалов активных зон ядерных энергетических установок в переходных и аварийных режимах [4]. Такие исследования, как правило, реализуются в импульсном режиме работы реактора, при котором в экспериментальном устройстве стационарный режим теплообмена не достигается. Это обстоятельство ограничивает возможность применения балансовых методов для тепловой калибровки экспериментальных устройств при подготовке и проведении испытаний на ИГР.

В настоящее время для решения задачи выбора параметров работы ИГР, необходимых для выполнения требований по реализации заданной мощности и интегрального энерговыделения в ТВС в имитационных испытаниях, применяется методика экспериментального измерения интегрального энерговыделения с использованием спектрометрических исследований мониторов энерговыделения и топливной композиции [5]. Для обеспечения возможности проведения таких исследований необходимо создание физического макета экспериментального устройства, в котором предусмотрена возможность извлечения топливной композиции. По результатам облучения макета ТВС устанавливается связь между измеренным значением и параметрами реактора в конкретном пуске. Основным недостатком такого подхода является то, что для его оперативного применения облучение топлива выполняется на относительно низком уровне энерговыделения в реакторе. Это означает, что может быть получена фактически одна экспериментальная точка (в самом начале диапазона ожидаемого энерговыделения) для проверки расчетных оценок величины мощности и энерговыделения реактора, которые необходимо реализовать при проведении имитационных испытаний.

Модельные ТВС поступают на испытания с достаточно развитой системой измерения теплофизических параметров, что позволяет рассмотреть возможность оценки энергетических характеристик ТВС в импульсных экспериментах по ее термическому состоянию. В работе представлен теплофизический метод определения энергетических параметров ТВС в импульсных исследованиях на ИГР, основанный на решении уравнений теплового баланса для квазирегулярного режима теплообмена, и результаты его применения в серии методических экспериментов. Основным преимуществом представленного метода является то, что оценка термического состояния ТВС может быть выполнена практически при любом режиме облучения, не приводящем к разрушению конструкции сборки и средств измерения термических параметров.

#### Обоснование метода

При проведении испытаний ТВС в импульсном режиме искомой характеристикой импульса явля-

ется пиковое значение мощности. Рассмотрим баланс тепла для элементарного объема  $v$  высотой  $\Delta z$  тепловыделяющего элемента (ТВЭЛ), расположенного в окрестности некоторой произвольной точки между двумя перпендикулярными оси ТВС плоскостями. В общем виде

$$Q_{\Sigma} = \sum_{i=1}^m Q_i, \quad (1)$$

где  $m$  – количество конструкционных элементов;  $Q_{\Sigma}$  – суммарное количество теплоты, выделившегося в объеме топлива  $v_i$  за интервал времени  $\tau$ , Дж:

$$Q_{\Sigma} = \int_0^{\tau} \int_v q_v(\tau) dv d\tau,$$

$Q_i$  – количество теплоты, затраченное на разогрев  $i$ -го конструктивного элемента ТВС, Дж:

$$Q_i = \int_0^{\tau} \int_{v_i} \rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial \tau} dv_i d\tau,$$

где  $q_v$  – объемная плотность энерговыделения в топливе, Вт/м<sup>3</sup>;  $v_i$  – элементарный объем  $i$ -го элемента, м<sup>3</sup>;  $\rho_i$  – плотность материала  $i$ -го элемента, кг/м<sup>3</sup>;  $c_i$  – удельная теплоемкость материала  $i$ -го элемента, Дж/(кг·К),  $T_i$  – температура  $i$ -го элемента, К.

Объемная плотность энерговыделения в топливе может быть определена соотношением:

$$q_v(\tau) = K_r K_z \frac{N(\tau)}{V} = K_r K_z \frac{N_m}{V} n(\tau),$$

где  $K_r, K_z$  – значение радиального и высотного коэффициента неравномерности энерговыделения в рассматриваемом объеме;  $V$  – объем топлива в ТВС, м<sup>3</sup>;  $n(\tau)$  – безразмерная функция мощности,

$n(\tau) = \frac{N(\tau)}{N_m}$ ;  $N_m$  – «пиковое» значение мощности в

импульсе, Вт. Вид функции  $n(\tau)$  известен по результатам эксперимента, при этом ее максимальное значение равно единице по условию нормировки.

Двойной интеграл, определяющий количество теплоты, затраченное на разогрев  $i$ -го элемента, можно преобразовать к выражению:

$$\int_0^{\tau} \int_{v_i} \rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial \tau} dv_i d\tau = \rho_i \bar{c}_i v_i (\bar{T}_i(\tau) - \bar{T}_i(0)) = \rho_i \bar{c}_i v_i \Delta \bar{T}_i,$$

где  $\bar{c}_i$  – средняя теплоемкость материала  $i$ -го элемента в интервале температур  $\bar{T}_i(0) \dots \bar{T}_i(\tau)$ , Дж/(кг·К);  $\bar{T}_i(0), \bar{T}_i(\tau)$  – среднemasсовая температура  $i$ -го элемента в момент времени  $\tau$ , К.

Формулу (1) преобразуем к виду:

$$K_r K_z \frac{N_m}{V} v_i \int_0^{\tau} n(\tau) d\tau = \rho_i \bar{c}_i v_i \Delta \bar{T}_i \left( \sum_{i=1}^m \frac{\rho_i \bar{c}_i v_i}{\rho_i \bar{c}_i v_i} \frac{\Delta \bar{T}_i}{\Delta \bar{T}_i} \right).$$

Выполнив замену  $v_i/v_1 = F_i/F_1$ , где  $F_i$  – площадь поперечного сечения  $i$ -го элемента ТВС, для пикового значения мощности ТВС получим соотношение

$$N_m = \frac{m_1 \bar{c}_1 \Delta \bar{T}_1}{K_r K_z \int_0^\tau n(\tau) d\tau} \left( \sum_{i=1}^m \varphi_i \theta_i \right), \quad (2)$$

где  $m_1 = \rho_1 V_1$  – масса топлива в ТВС, кг;  $\varphi_i = \frac{\rho_i \bar{c}_i F_i}{\rho_1 \bar{c}_1 F_1}$  – относительная теплоемкость  $i$ -го элемента;  $\theta_i = \frac{\Delta \bar{T}_i}{\Delta \bar{T}_1}$  – относительная температура  $i$ -го элемента.

Если в некоторый момент времени  $\tau \theta \ll 1$  для  $i \geq 3$ , то расчет пикового значения мощности  $N_m$  можно проводить по первым двум слагаемым соотношения (2). При этом  $\Delta \bar{T}_1$  и  $\Delta \bar{T}_2$  следует определять по показаниям датчиков температуры (термопар), установленных в ТВЭЛ на одной высоте, т. е.

$$N_m = \frac{m_1 \bar{c}_1}{K_r K_z Y} (\Delta \bar{T}_1 + \varphi_2 \Delta \bar{T}_2). \quad (3)$$

В этом выражении  $Y$  – интеграл безразмерной мощности вспышки, равный

$$Y = \int_0^\tau n(\tau) d\tau = \int_0^\tau \frac{N(\tau)}{N_m} d\tau = \int_0^\tau \frac{I(\tau)}{I_m} d\tau,$$

где  $N(\tau)$  и  $N_m$  – текущее и максимальное значение мощности реактора, Вт;  $I(\tau)$  и  $I_m$  – текущее и максимальное значение показаний токовой камеры реактора, А.

Усреднив значения по каждой паре термопар, можно получить оценку пикового значения мощности:

$$\bar{N}_m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n N_{mj},$$

где  $N_{mj}$  – рассчитанное по формуле (2) по показаниям  $j$ -й пары термопар значение, Вт;  $n$  – количество пар термопар.

Оценку суммарного энерговыделения в импульсе можно выполнить, используя формулу:

$$Q_\Sigma = N_m \int_0^\tau n(\tau) d\tau = \frac{m_1 \bar{c}_1 \Delta \bar{T}_1}{K_r^m K_z^m} (1 + \varphi_2 \theta_2). \quad (4)$$

При определении энергетических характеристик ТВС в импульсе по выражениям (3) и (4) не будут учтены составляющие, связанные с передачей теплоты от ТВЭЛ к окружающим конструкционным материалам и теплоносителю. Поэтому для оценки ошибки расчета необходимо оценить утечки теплоты от ТВС за время  $\tau$ .

#### Определение утечек тепла

В общем случае утечки тепла от ТВС будут определяться совокупностью всех видов теплообмена (теплопроводностью, конвекцией и излучением) ТВС с окружающей средой, зависеть от конструктивных особенностей экспериментального устройства и от режимов его испытаний. Рассмотрим некоторые типичные для методических исследований на ИГР случаи определения утечек теплоты от ТВС.

При наличии принудительного охлаждения утечки определяются количеством теплоты, затраченным на подогрев теплоносителя  $Q_{\text{тн}}$ , и количеством теплоты, затраченным на разогрев окружающих конструкционных элементов  $Q_{\text{ок}}$ :

$$Q_{\text{ут}} = Q_{\text{тн}} + Q_{\text{ок}},$$

где

$$Q_{\text{тн}} = \int_{t_0}^{t_{\text{max}}} N_{\text{тн}} dt,$$

здесь  $t_{\text{max}}$  – время, соответствующее моменту достижения максимального значения температуры топлива, с;  $t_0$  – время, соответствующее моменту начала реализации диаграммы энерговыделения в топливе, с;  $N$  – тепловая мощность, отводимая теплоносителем от ТВС, Вт:

$$N_{\text{тн}} = G C_p (T_{\text{вых}}(t) - T_{\text{вх}}),$$

где  $G$  – массовый расход теплоносителя через ТВС, кг/с;  $C_p$  – удельная массовая теплоемкость теплоносителя, Дж/(кг·К);  $T_{\text{вых}}(t)$  – температура теплоносителя на выходе из ТВС, в момент времени  $t$ , К;  $T_{\text{вх}}$  – температура теплоносителя на входе в ТВС, К.

Количество теплоты, затраченное на разогрев конструкционных элементов

$$Q_{\text{ок}} = \sum_{n=1}^k m_n c_{pn} \Delta T_n,$$

где  $m_n$  – масса  $n$ -го конструкционного элемента, кг;  $c_{pn}$  – удельная массовая теплоемкость  $n$ -го конструкционного элемента, Дж/(кг·К);  $\Delta T_n$  – изменение температуры  $n$ -го конструкционного элемента за время  $\tau$ , К;  $k$  – количество конструкционных элементов, контактирующих с теплоносителем.

В случае отсутствия принудительного охлаждения перенос теплоты от ТВС характеризуются, в основном, процессом конвективной теплоотдачи и тепловым излучением.

Конвективный теплообмен в условиях ограниченного замкнутого пространства и наличия восходящих и нисходящих потоков в устройстве может рассматриваться как элементарное явление теплопроводности, при этом вводится понятие эквивалентного коэффициента теплопроводности  $\lambda_{\text{эк}}$  газового зазора между ТВС и стенкой [6], формирующей полость для установки ТВС в устройство. Тогда величина утечек теплоты от ТВС будет определяться выражением:

$$Q_{\text{ут}} = \int_{t_0}^{t_{\text{max}}} \frac{\lambda_{\text{эк}}}{\delta} (T_{c1}(t) - T_{c2}(t)) S dt,$$

где  $S$  – площадь поверхности теплообмена между ТВС и стенкой, формирующей полость для установки ТВС, м<sup>2</sup>;  $T_{c1}(t)$  – температура поверхности ТВЭЛ в момент времени  $t$ , К;  $T_{c2}(t)$  – температура стенки, формирующей полость ТВС, в момент времени  $t$ , К.

Утечки тепла излучением от ТВС рассчитываются по формуле [7]:

$$Q_n = C_{1-2} \varphi F \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right],$$

где  $Q_n$  – количество теплоты, передаваемой в единицу времени, Вт;  $F$  – площадь поверхности излучения, м<sup>2</sup>;  $C_{1-2}$  – коэффициент излучения, Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>);  $T_1$  – температура поверхности более нагретого тела, К;  $T_2$  – температура поверхности менее нагретого тела, К;  $\varphi$  – угловой коэффициент.

**Погрешность определения пиковой мощности**

Погрешность расчета по формуле (3) определяется как погрешность функции нескольких переменных:

$$\sigma_N^2 = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial N}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2, \quad (5)$$

где  $\partial N / \partial x_i$  – частная производная мощности по переменной  $x_i$ ;  $\sigma_{x_i}$  – погрешность измерения переменной  $x_i$ ;  $m$  – количество независимых переменных.

В соответствии с (5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \Delta T_1} &= \frac{m_1 c_1}{K_r K_z Y} = \frac{N}{\Delta T_1 (1 + \varphi_2 \theta_2)}; \\ \frac{\partial N}{\partial K_r} &= -\frac{1}{K_r^2} \frac{m_1 c_1 \Delta \bar{T}_1}{K_z Y} (1 + \varphi_2 \theta_2) = -\frac{N}{K_r}; \\ \frac{\partial N}{\partial K_z} &= -\frac{1}{K_z^2} \frac{m_1 c_1 \Delta \bar{T}_1}{K_r Y} (1 + \varphi_2 \theta_2) = -\frac{N}{K_z}; \\ \frac{\partial N}{\partial Y} &= -\frac{1}{Y^2} \frac{m_1 c_1 \Delta \bar{T}_1}{K_r K_z} (1 + \varphi_2 \theta_2) = -\frac{N}{Y}; \\ \frac{\partial N}{\partial \Delta T_2} &= \frac{m_1 c_1 \varphi_2}{K_r K_z Y} = \frac{N \varphi_2}{\Delta T_1 (1 + \varphi_2 \theta_2)}. \end{aligned}$$

Относительная погрешность определяется выражением:

$$\varepsilon_N = \sqrt{\frac{\sigma_N^2}{N^2}} = \sqrt{\left( \frac{\sigma_{\bar{T}_1(0)}^2 + \sigma_{\bar{T}_1(\tau)}^2}{\Delta \bar{T}_1^2 (1 + \varphi_2 \theta_2)^2} + \varepsilon_{K_r}^2 + \varepsilon_{K_z}^2 + \varepsilon_Y^2 + \frac{(\sigma_{\bar{T}_2(0)}^2 + \sigma_{\bar{T}_1(\tau)}^2) \varphi_2^2}{\Delta \bar{T}_1^2 (1 + \varphi_2 \theta_2)^2} \right)},$$

где  $\varepsilon_{K_r}$ ,  $\varepsilon_{K_z}$  и  $\varepsilon_Y$  – относительные погрешности определения величин  $K_r$ ,  $K_z$  и  $Y$ .

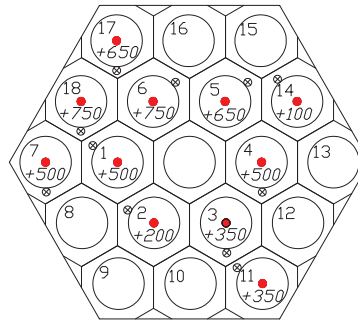
**Реализация метода**

Реализация теплофизического метода определения энергетических параметров модельных ТВС выполнялась в рамках серии методических испытаний с экспериментальным устройством, предназначенным для изучения поведения модельных ТВС типа ВВЭР-1000 в условиях, моделирующих заключительную фазу аварии с потерей теплоносителя.

Основным элементом устройства являлась сборка из 18 ТВЭЛ типа ВВЭР-1000 с длиной ак-

тивной части 800 мм. ТВЭЛ располагались по равносторонней треугольной решетке с шагом 12,75 мм. Сборка ТВЭЛ имела одну опорную и четыре дистанционирующие решетки и заключалась в шестигранный чехол, окруженный теплоизоляцией для уменьшения утечек тепла и выравнивания поля температуры по сечению ТВС. Охлаждение ТВС осуществлялось гелием и водяным паром.

Для измерения температуры ТВС были использованы одиннадцать пар термопар типа ВР, установленных в центре топливных таблеток и на оболочках ТВЭЛ (рис. 1). Кроме того, регистрировалась температура на входе и выходе тракта охлаждения ТВС и температура поверхности чехла ТВС.



- 1...18 – номер ТВЭЛ
- +100...+750 – уровень установки ТЭП в ТВЭЛ
- – ТЭП в топливе
- ⊗ – ТЭП на оболочке

**Рис. 1.** Схема расстановки термопар (ТЭП) в ТВС

Радиально азимутальный и высотный коэффициенты неравномерности энерговыделения ( $K_r$  и  $K_z$ ) по объему ТВС в точках установки ТЭП были определены в процессе предварительных физических исследований с макетом устройства (рис. 2).

В рамках методической серии на ИГР были проведены три импульсных эксперимента (табл. 1).

**Таблица 1.** Основные параметры ИГР при проведении экспериментов

Номер эксперимента	Режим работы реактора	Энерговыделение в активной зоне реактора, МДж
1	импульс	43
2		81
3		105

Результаты измерения температуры ТВЭЛ (в первом и втором экспериментах начальная температура ТВЭЛ составляла  $T_{0,1}=T_{0,2}=19$  °С) и определения энергетических характеристик ТВС в экспериментах теплофизическим методом приведены в табл. 2 с указанием стандартного отклонения среднего для соответствующего количества измерений. Для удобства значения температур в табл. 2 приведены в градусах Цельсия.

В табл. 3 приведены основные составляющие и общая погрешность расчета пиковой мощности в экспериментах по выражению (3).

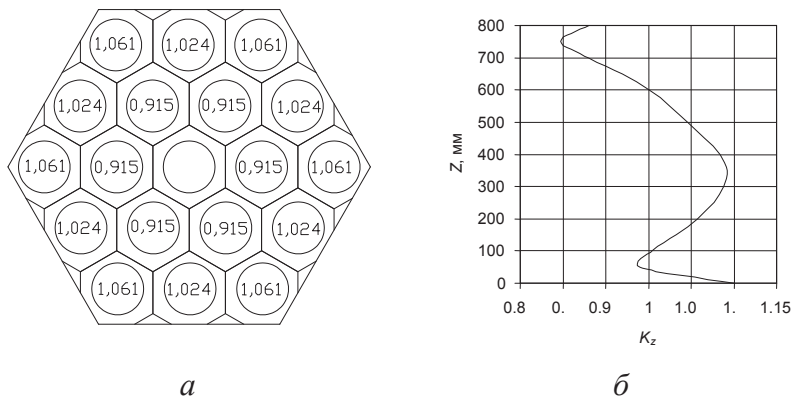


Рис. 2. Распределение энерговыделения в ТВС (в относительных единицах): а) радиально-азимутальное ( $K_r$ ); б) высотное ( $K_z$ )

Таблица 2. Результаты расчета суммарного энерговыделения и мощности ТВС

Номер эксперимента					1			2			3				
$i$	№ ТВЭЛ	$k_r$	$z$ , мм	$k_z$	$T_1$ , °C	$T_2$ , °C	$Q_{ТВС}$ , кДж	$T_1$ , °C	$T_2$ , °C	$Q_{ТВС}$ , кДж	$T_{0,1}$ , °C	$T_1$ , °C	$T_{0,2}$ , °C	$T_2$ , °C	$Q_{ТВС}$ , кДж
1	2	0,915	200	1,057	265	169	496	470	344	945	122	637	125	604	1134
2	14	1,024	200	1,057	273	147	445	507	310	877	115	707	106	492	1081
3	3	0,915	350	1,092	277	248	537	486	453	993	124	689	118	653	1161
4	11	1,061	350	1,092	291	254	485	520	473	914	116	695	112	670	1031
5	1	0,915	500	1,046	255	251	523	451	446	971	126	695	122	643	1262
6	4	0,915	500	1,046	235	210	468	424	404	893	119	671	110	522	991
7	7	1,061	500	1,046	291	250	505	513	453	935	118	672	113	644	1070
8	5	0,915	650	0,969	249	241	548	445	442	1035	118	634	121	632	1256
9	17	1,061	650	0,969	275	236	513	484	426	949	119	677	123	613	1152
10	6	0,915	750	0,897	220	220	521	396	406	996	122	588	120	584	1227
11	18	1,024	750	0,897	235	227	497	420	410	937	119	597	119	568	1110
Количество тепла, затраченное на разогрев ТВЭЛ, кДж					504±9			950±15			1134±30				
Количество тепла, кДж, затраченное на разогрев (утечки тепла от ТВС):															
теплоносителя					гелий 18			гелий 36			водяной пар 9				
шестигранного чехла ТВС					10			19			15				
головок ТВЭЛ					6			13			5				
дистанционирующих решеток					6,7			13,5			5,4				
Энерговыделение в ТВС, кДж					545±11			1030±18			1168±30				
Максимальная (пиковая) мощность ТВС, кВт					530±11			1065±18			44±1				

Таблица 3. Составляющие и суммарная погрешность расчета пиковой мощности

Параметр	Значение, %
Погрешность измерения температуры топлива и оболочек ТВЭЛ ( $\varepsilon_T$ )	0,8
Погрешность определения коэффициентов радиального и высотного коэффициента неравномерности энерговыделения по объему ТВС ( $\varepsilon_{k_r}, \varepsilon_{k_z}$ )	3
Погрешность показаний ионизационных камер реактора ( $\varepsilon_V$ )	2,5
Суммарная погрешность расчета пиковой мощности ( $\varepsilon_N$ )	4,4

### Выводы

Представленные основы теплофизического метода позволяют установить зависимости, необходимые для расчета энергетических характеристик модельных ТВС при проведении импульсных испытаний на реакторе ИГР.

Теплофизический метод реализован в серии из трех импульсных реакторных экспериментов. Продемонстрировано, что энергетические характеристики ТВС в импульсных испытаниях могут быть определены с использованием результатов измерений теплофизических параметров, при этом погрешность расчета искомой характеристики импульса – пиковой мощности ТВС, не превышает 4,5 % (без учета тепловых потерь).

На момент окончания импульса мощности ТВС величина общих утечек тепла от ТВС составляет менее 8 % от суммарного энерговыделения, следовательно, ошибка определения пикового значения мощности для реализованных импульсов не превышает 8 % и может быть уменьшена путем улучшения теплоизоляции или вакуумирования полости ТВС на время эксперимента.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vermeeren L. et al. Qualification of the on-line power determination of fuel elements in irradiation devices in the BR2 reactor: Scientific Report / Belgian Nuclear Research Centre. – Mol, Belgium, 2005. – NT.57 /D089023/01/LV.
2. Методика расчета тепловой мощности твэлов в экспериментальных каналах водяных петель реактора МИР.М1 / НИИАР; разработ. А.Л. Ижутов, Н.П. Матвеев, В.А. Овчинников. – Дмитровград, 1995. – Рег. № 41-95. – 0229804912.
3. Курчатов И.В., Фейнберг С.М., Доллежал Н.А. Импульсный графитовый реактор ИГР // Атомная энергия. – 1964. – Т. 17. – № 6. – С. 463–474.
4. Васильев Ю.С., Вурим А.Д., Колодешников А.А., Алейников Ю.В., Бакланов В.В., Витюк В.А., Гайдайчук В.А., Гановичев Д.А., Жданов В.С., Зуев В.А., Игнашев В.И., Козловский Е.В., Микиша А.В., Пахниц А.В., Пешехонов С.Н., Прозорова И.В., Тарасенко Е.В. Исследования процессов, сопро-

Результаты проведенных расчетно-экспериментальных исследований позволяют утверждать, что применение теплофизического метода позволит усовершенствовать существующую процедуру выбора параметров работы ИГР, необходимых для выполнения требований по реализации заданной мощности и интегрального энерговыделения в ТВС.

5. вожающих тяжелые аварии энергетических реакторов с плавлением активной зоны // В кн.: Экспериментальные исследования в области безопасности атомной энергии. – Курчатов: Национальный ядерный центр РК, 2010. – С. 225–263.
5. Определение энерговыделения в топливных детекторах гамма-спектрометрическим методом при проведении испытаний на реакторе ИГР / ДПП ИАЭ РГП НЯЦ РК; разработ. М.О. Токтаганов, Ю.А. Попов и др. – АК.65000.00.728 МУ. – инв. № К-38051. – Курчатов, 2001. – 16 с.
6. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. Изд. 2-е стереотип. – М.: Энергия, 1977. – 344 с.
7. Уонг Х. Основные формулы и данные по теплообмену для инженеров. Справочник / пер. с англ. – М.: Атомиздат, 1979. – 216 с.

Поступила 21.01.2013 г.

УДК 536.2:536.33

## ЛАЗЕРНОЕ РАЗРУШЕНИЕ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ

Е.Ю. Морозова, В.М. Лисицын, В.П. Ципилев, А.Н. Яковлев

Томский политехнический университет  
E-mail: morozova@tpu.ru

*Рассмотрена задача импульсного лазерного нагрева двухслойной системы, в которой первый слой является прозрачным по отношению к воздействию потока, а второй – сильнопоглощающим. Методом численного моделирования получены температурные профили нагрева двухслойной системы при различных длительностях воздействующего импульса. Показано, что положение максимума нагрева не соответствует границе раздела сред. Полученные результаты использованы при анализе технологического процесса лазерного отслоения кристалла нитрида галлия от сапфировой подложки*

#### Ключевые слова:

*Лазерный нагрев, двухслойная система, численное моделирование.*

#### Key words:

*Laser heating, double-layer system, numerical simulation.*

#### Введение

Разработка высокоэффективных светодиодов является основным направлением совершенствования источников света. Одним из этапов технологической цепочки изготовления светодиодов является удаление полупроводниковой пленки с диэлектрической подложки, например, отделение кристалла нитрида галлия от сапфировой подложки.

В настоящее время перспективным методом отделения пленки нитрида галлия (GaN) от сапфировой подложки ( $Al_2O_3$ ) является метод, основанный

на быстром нагреве поверхностного слоя GaN лазерным излучением в области собственного поглощения, приводящий к термическому разложению GaN на металлический Ga и  $N_2$ , что и обеспечивает отделение гетероструктуры от подложки [1]. Длина волны лазерного излучения (ЛИ) подбирается так, чтобы сапфировая подложка была прозрачной к воздействию излучению, а поглощение матрицы GaN было высоким. Как правило, толщина слоя GaN не превышает 10...12 мкм, поэтому для качественного отделения сапфировой подложки

показатель поглощения  $\mu$  материала GaN должен превышать  $10^4 \text{ см}^{-1}$ . Такое поглощение реализуется при использовании эксимерных лазеров с длинами волн 193, 248 и 308 нм, а также твердотельных YAG-лазеров, работающих на третьей (354,7 нм), четвертой (266 нм) и пятой (213 нм) гармониках излучения.

Экспериментальные результаты исследований лазерного отделения гетероструктур [1, 2] излучением эксимерного KrF-лазера (248 нм) показывают, что квантовая эффективность GaN после удаления подложки уменьшается примерно в два раза по сравнению с исходной. Причиной этого является присутствие на поверхности структуры металлического галлия и поверхностных дефектов, что, по-видимому, связано с тем, что отделение идет не только по границе раздела сред, но и в некоторой приповерхностной области, где температура нагрева может оказаться значительно выше температуры на границе раздела. В любом случае, после отделения гетероструктуры требуется дополнительная обработка, связанная с удалением Ga с ее поверхности, а также формированием поверхностного слоя различными способами [1, 2], повышающими эффективность, но не дающими полного восстановления излучательных характеристик.

Таким образом, вопрос качественного отслоения структуры GaN от подложки остается открытым. Для его решения необходим детальный анализ процесса нагрева, основанный на расчете пространственно-временных температурных профилей на границе раздела сред. Важным представляется определение степени влияния параметров ЛИ и оптических характеристик GaN на тепловой режим двухслойной системы и возможностей оптимизации процесса лазерного отделения. В данной работе эта задача решалась путем численного моделирования.

#### Математическая постановка задачи

На рис. 1 представлена модель нагрева двухслойной системы импульсом лазерного излучения [3].

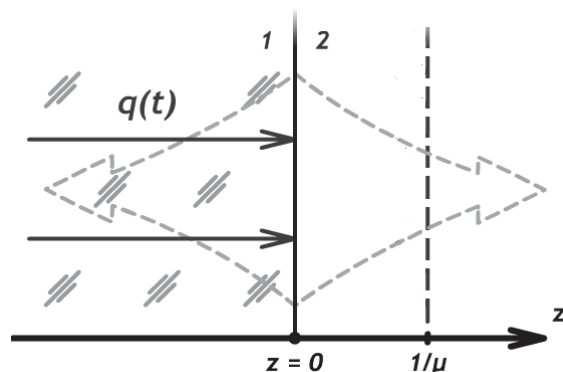


Рис. 1. Модель нагрева двухслойной системы: 1) прозрачная среда; 2) поглощающая среда, где  $q(t)$  – плотность потока ЛИ, пересекающего границу раздела;  $z=0$  – граница раздела сред;  $1/\mu$  – глубина проникновения излучения. Пунктирные стрелки – тепловые потоки

Первый слой  $-\infty < z < 0$  является прозрачным для излучения. Второй слой  $0 < z < \infty$  ослабляет воздействующий поток по закону Бугера–Ламберта–Бера. В начальный момент времени система имеет однородную начальную температуру  $T_0$ . На границе раздела двух сред имеет место тепловой и оптический контакт, теплообмен с внешней средой не учитывается. Прогрев такой системы определяется поглощением световой энергии во втором слое и кондуктивным переносом тепла.

Математическая постановка задачи записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}, \quad -\infty < z < 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \frac{q(t)}{c_2 \rho_2} e^{-\mu z}, \quad 0 < z < \infty, \quad t > 0 \quad (2)$$

с начальными и граничными условиями:

$$T_1(z, 0) = T_2(z, 0) = T_0; \quad (3)$$

$$T_1(0, t) = T_2(0, t); \quad (4)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(0, t)}{\partial z} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(0, t)}{\partial z}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial T_1(-\infty, t)}{\partial z} = \frac{\partial T_2(\infty, t)}{\partial z} = 0; \quad (6)$$

$$q(t) = \begin{cases} q, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau, \end{cases} \quad (7)$$

где  $T, T_0$  – текущая и начальная температура;  $t$  – время;  $z$  – пространственная координата с началом на границе контакта слоев,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $c$  – удельная теплоемкость,  $\rho$  – плотность вещества,  $a = \lambda / (c\rho)$  – коэффициент температуропроводности;  $\tau$  – длительность импульса; индексы 1 и 2 отмечают соответственно параметры первого и второго слоев.

Для определения влияния теплоотвода от границы раздела сред на температуру приповерхностного слоя и на форму очага разогрева в зависимости от длительности импульса излучения и теплофизических параметров проведено численное интегрирование (1)–(7) по явной разностной схеме с использованием четырехточечного шаблона. Точность численного решения – 4 %. Расчеты проводились в приближении независимости теплофизических констант от температуры и без учета фазовых переходов. Проверка численного решения подобной задачи на сходимость и сравнение с аналитическим расчетом в асимптотиках описана в работе [3].

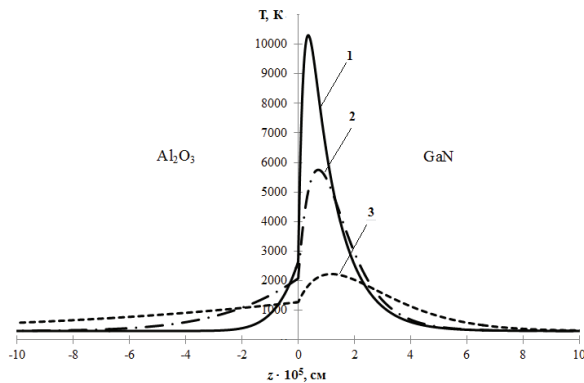
Длительность лазерного импульса варьировалась в пределах от 1 до 100 нс. Верхняя граница лимитируется толщиной слоев  $h_1$  и  $h_2$ , характерными длинами теплового пробега  $\sqrt{a_1 \tau}$  и  $\sqrt{a_2 \tau}$  и выполнением условия (6). Кроме того, данный диапазон длительностей успешно освоен лазерной техникой и доступен для практического использования.



**Результаты и их обсуждение**

На рис. 2 в качестве примера приведены пространственно-временные температурные профили нагрева двухслойной системы  $Al_2O_3$ -GaN для трех длительностей воздействующего импульса (1, 10 и 100 нс) при показателе поглощения GaN  $\mu=10^9 \text{ см}^{-1}$  и плотности энергии ЛИ  $H=1 \text{ Дж/см}^2$ .

Следует отметить, что при взятых значениях  $H$  и без учета фазовых переходов полученные значения температуры нереальны. Поэтому приведенные кривые отображают в большей степени качественную картину распределения температуры, что удобно для анализа процесса нагрева. Реальные значения температур при пороговых уровнях лазерного воздействия приведены на рис. 3 и в таблице.



**Рис. 2.** Температурные профили нагрева двухслойной системы к концу длительности воздействующего импульса: прозрачный слой  $Al_2O_3$  ( $\lambda_1=25 \text{ Вт/(м·К)}$ ); поглощающий слой GaN ( $\lambda_2=1,3 \text{ Вт/(м·К)}$ );  $\tau$ : 1) 1; 2) 10; 3) 100 нс,  $\mu=10^9 \text{ см}^{-1}$

Анализ температурных профилей показывает, что распределение тепла по глубине поглощающего слоя отличается от распределения Бугера–Ламберта–Бера, т. е. не соответствует распределению поглощенной дозы ЛИ. Видно, что наличие прозрачной теплопроводящей подложки резко уменьшает температуру на поверхности раздела  $T_s$  и сдвигает максимум нагрева  $z_m$  вглубь поглощающего слоя. Эта ситуация, когда положение максимума нагрева не совпадает с границей раздела сред, характерна для всех случаев, когда  $\lambda_1 > \lambda_2$ . Более того, в соответствии с [3], положение максимума нагрева совпадает с границей раздела сред только при выполнении условия  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ , т. е. в случае теплоизолирующей подложки.

Выявлено, что с уменьшением показателя поглощения  $\mu$  и увеличением длительности импульса  $\tau$  сдвиг максимума  $z_m$  возрастает. Температурный профиль имеет  $\Lambda$ -образный вид и определяется соотношением характерных величин теплового пробега  $\sqrt{a_2 \tau}$  и глубины проникновения излучения  $1/\mu$ . При  $\sqrt{a_2 \tau} \ll 1/\mu$  профиль в основном соответствует распределению поглощенной дозы, при  $\sqrt{a_2 \tau} \gg 1/\mu$  определяется теплопроводностью, т. е. реализуется режим поверхностного нагрева. Наиболее сложный профиль возникает в случае, когда

$\sqrt{a_2 \tau} \approx 1/\mu$ , поскольку формируется как за счет поглощения излучения, так и за счет теплопроводности слоев.

Следующей важной особенностью процесса нагрева является сильная зависимость температуры от  $\mu$  и  $\tau$ , как в максимуме нагрева  $T_m$ , так и на границе раздела сред  $T_s$ . Этот факт позволяет достаточно эффективно управлять формирующимся температурным профилем для решения конкретных задач, меняя энергетику воздействия, длительность ЛИ и длину волны излучения.

Проведем анализ результатов применительно к задаче отслоения GaN от сапфировой подложки. При анализе необходимо учитывать ранее сделанный важный вывод о том, что температура нагрева на границе раздела сред  $T_s$  всегда в несколько раз меньше, чем в максимуме  $T_m$ , который сдвинут вглубь слоя GaN.

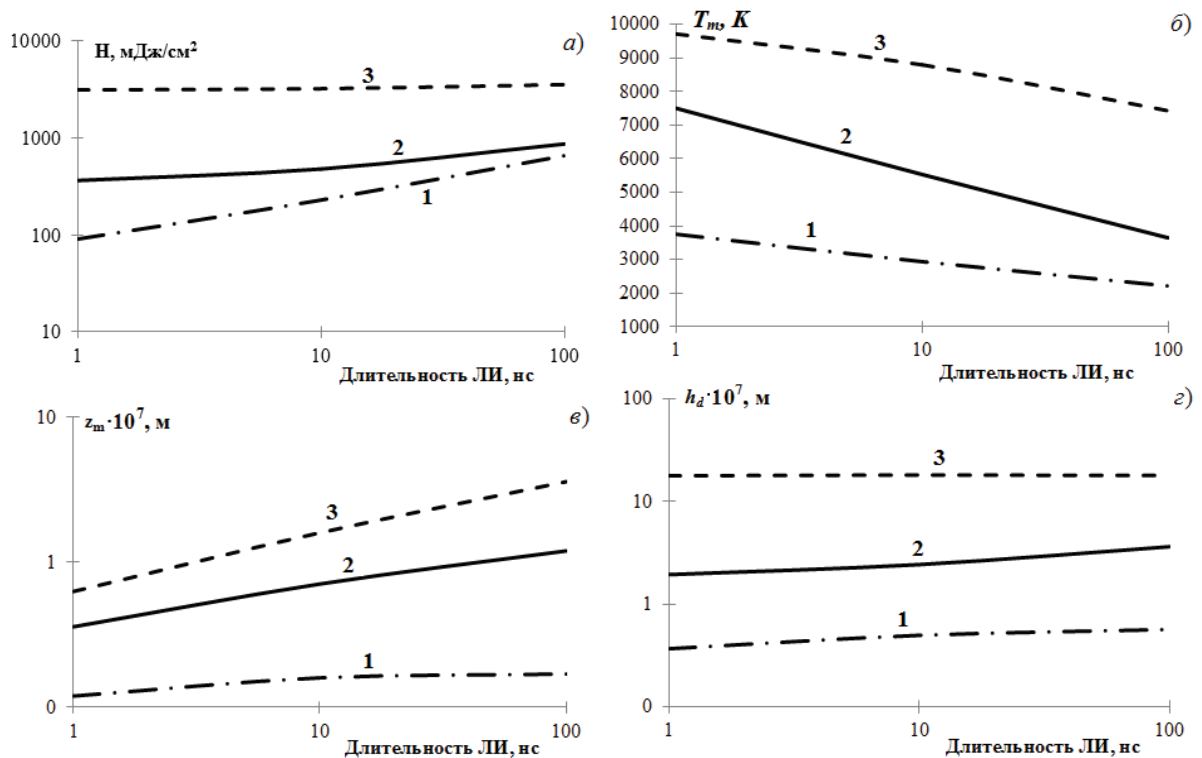
Поскольку экспериментально измеренные пороги отслоения, полученные с применением различных лазеров, сильно различаются (от 0,3 до 1 Дж/см<sup>2</sup> при длительностях ЛИ 20–30 нс [1, 2]), при определении оптимального режима лазерного воздействия необходимо выявить основной критический параметр процесса отслоения. В качестве такого параметра можно принять температуру деградации  $T_d$  материала GaN. При этом необходимо допустить, что  $T_d$  должна быть достигнута на границе раздела сред. В этом случае может быть достигнута высокая вероятность качественного отслоения, но при условии, что разница температур в максимуме нагрева и на границе раздела сред незначительна.

Необходимо учесть, что при достижении  $T_d$  на границе раздела деградация произойдет в прогретом слое, где температура  $T \geq T_d$ . Ширина этого слоя  $h_d$  полностью определяется параметрами  $\mu$ ,  $\tau$  и  $H$ .

На рис. 3 и в таблице приведены результаты расчета основных параметров лазерного нагрева поглощающего слоя GaN в зависимости от  $\mu$  и  $\tau$ . Для примера в качестве  $T_d$  взята температура плавления нитрида галлия  $T_s \approx 2000 \text{ К}$  [4].

**Таблица.** Значения основных параметров лазерного нагрева пленки GaN при различных, характерных для лазеров наносекундного диапазона, длительностях воздействия

$\tau$ , нс	$H$ , мДж/см <sup>2</sup>	$T$ , К	$z_m \cdot 10^7$ , м	$h_d \cdot 10^7$ , м
$\mu=10^6 \text{ см}^{-1}$				
1	91	3757	0,12	0,37
10	230	2943	0,16	0,50
100	660	2218	0,17	0,57
$\mu=10^5 \text{ см}^{-1}$				
1	365	7503	0,36	1,95
10	480	5534	0,71	2,44
100	870	3651	1,20	3,65
$\mu=10^4 \text{ см}^{-1}$				
1	3140	9713	0,63	17,90
10	3230	8796	1,60	18,20
100	3560	7427	3,60	18,00



**Рис. 3.** Зависимость плотности энергии ЛП (а), температуры в максимуме нагрева (б), положения максимума нагрева (в) и ширины зоны прогрева (г) от длительности ЛП при достижении температуры на границе раздела сред 2000 К;  $\mu$ : 1)  $10^6$ ; 2)  $10^5$ ; 3)  $10^4 \text{ см}^{-1}$

Из рис. 3 видно, что уменьшение длительности ЛП и увеличение  $\mu$  приводит к уменьшению критической плотности потока ЛП, необходимой для деструкции GaN. При этом положение максимума нагрева  $z_m$  и толщина слоя деструкции  $h_d$  уменьшаются и при  $\mu \geq 10^6 \text{ см}^{-1}$  и  $\tau \leq 1 \text{ нс}$  не превышают 0,1 мкм. Перегрев слоя GaN в данном случае незначителен, т. е. температура в максимуме не превышает 4000 К. Последнее обстоятельство может играть полезную роль, поскольку в данном режиме снижается возможность «взрывного» испарения слоя, формирование ударно-волнового сжатия с последующим разрушением кристалла за пределами нагретого слоя.

Согласно [1, 2] пороговая плотность энергии отслоения сапфировой подложки при облучении ЛП длительностью 30 нс на длине волны излучения 248 нм составляет 450 мДж/см<sup>2</sup>. В литературе отсутствуют данные о показателе поглощения GaN на этой длине волны, однако в первом приближении можно принять  $\mu \leq 1/\lambda_0 \approx 10^5 \text{ см}^{-1}$  ( $\lambda_0$  – длина волны излучения). Расчетная оценка порога деструкции при  $\mu = 10^5 \text{ см}^{-1}$  и длительности ЛП 30 нс дает значение  $H = 530 \text{ мДж/см}^2$ , что удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными (различие не превышает 15 %).

Таким образом, из результатов расчета следует, что для качественного отделения GaN целесообразно

уменьшать длительность ЛП с возможным переходом в пикосекундную область. Кроме того, желательно выращивать кристалл GaN на относительно нетеплопроводящей подложке.

### Выводы

1. Проведено численное моделирование лазерного импульсного нагрева кристалла GaN через прозрачную сапфировую подложку, находящуюся в тепловом контакте с кристаллом.
2. Показано, что при лазерном нагреве системы  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-GaN}$ , в результате тепловода с поверхности кристалла в его объем и теплопроводящую подложку, формируется характерный для всех режимов нагрева температурный профиль с максимумом температуры, смещенным от границы раздела сред вглубь GaN.
3. Показано, что увеличивая показатель поглощения GaN (например, путем подбора длины волны лазерного излучения) и уменьшая длительность воздействия, можно добиться благоприятного режима нагрева с целью улучшения качества лазерного отрыва кристалла от подложки.

*Работа выполнена при поддержке гранта № 14.В37.21.1170 Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнова И.П., Марков Л.К., Закгейм Д.А., Аракчеева Е.М., Рымалис М.Р. Синие флип-чип светодиоды на основе AlGaInN с удаленной сапфировой подложкой // Физика и техника полупроводников. – 2006. – Т. 40. – № 11. – С. 1397–1401.
2. Edwards P.R., Martin R.W., Kim H.-S., Kim K.-S., Cho Y., Watson I.M., Sands T., Cheung N.W., Dawson M.D. InGaN/GaN quantum well microcavities formed by laser lift-off and plasma etching // Phys. Stat. Sol. (b), – 2001. – V. 228. – № 1. – P. 91–94.
3. Морозова Е.Ю., Буркина Р.С., Ципилев В.П. Анализ разогрева двухслойной системы импульсом излучения // Известия вузов. Физика. – 2009. – Т. 52. – № 8/2. – С. 303–306.
4. Акчури Р.Х., Мармалюк А.А. Нитрид галлия – перспективный материал электронной техники. Ч. I. Фундаментальные свойства нитрида галлия // Материаловедение. – 1999. – № 9. – С. 950–962.

Поступила 17.06.2013 г.

УДК 535.211

## РЕГИСТРАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ВИХРЕВОГО ПУЧКА В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ. Ч. 1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАДИЕНТОВ ВОЛНОВОГО ФРОНТА

В.П. Аксенов, Ф.Ю. Канев\*, Д.С. Куксенюк\*\*, Н.А. Макенова\*, А.В. Хапаева\*

Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН, г. Томск

E-mail: avp@iao.ru

\*Томский политехнический университет

E-mail: mna.05@mail.ru

\*\*Томский государственный университет

E-mail: motty@sibmail.com

На основе методов численного эксперимента исследуется возможность определения характеристик вихревого излучения, распространяющегося в турбулентной среде. Для получения оценочных результатов, приводимых в первой части статьи, определение параметров осуществляется с использованием градиентов фазового распределения светового поля, т. е. рассматривается идеальная оптическая система.

### Ключевые слова:

Датчик Шека–Гартмана, локальные наклоны волнового фронта, сингулярная оптика, орбитальный угловой момент, турбулентная атмосфера.

### Key words:

Shack–Hartmann sensor, local tilts, singular optics, orbital angular momentum, turbulent atmosphere.

### Введение

Оптический вихри, дислокации волнового фронта, фазовые сингулярности, точки ветвления фазовой функции – вот перечень названий, которыми обозначаются одни и те же объекты исследования. Оптический вихрь проявляет себя как изолированный минимум в поперечном распределении интенсивности некоторых типов лазеров, в спекл-картине рассеянного шероховатой поверхностью или преломленного турбулентной атмосферой лазерного излучения. Каждому такому минимуму может быть сопоставлен топологический заряд, который представляет собой число (положительное или отрицательное), кратное  $2\pi$  радианам. Эта величина возникает как результат суммирования градиента фазы вдоль замкнутого контура, окружающего область с минимальной интенсивностью. Изучение оптических вихрей стало предметом сформировавшегося в последние десятилетия нового направления в оптике, названного сингулярной оптикой [1].

Лазерный пучок, несущий оптический вихрь, называют вихревым. В качестве такого пучка

очень часто выступает циркулярная Лагерр–Гауссова мода  $LG_0^l$  [2], которая является наиболее характерным примером пучков, несущих оптический вихрь. Если когерентный лаггерр-гауссов (ЛГ) пучок распространяется в однородной среде, нули интенсивности составляют нуль линию, совпадающую с осью пучка, а оптический вихрь сохраняет свою структуру на всем протяжении пучка. При распространении первоначально когерентного света в турбулентной [3] или рассеивающей [4] среде в пучке появляется некогерентная составляющая, нуль превращается в минимум среднего распределения интенсивности. Примерно таким же образом ведет себя средняя интенсивность вихревого пучка, первичное поле которого является случайным (частично-когерентным) [5]. Замечательным качеством вихревых ЛГ пучков является обладание ими орбитальным угловым моментом (ОУМ) [6]. Для ОУМ справедлив закон сохранения, который при распространении света в случайно-неоднородной среде выполняется «в среднем» [7].

Возможность регистрации ОУМ в турбулентной атмосфере рассматривалась в работе [8]. Авторами

было показано, что топологический заряд, который может быть зарегистрирован с высокой точностью на значительных расстояниях от апертуры источника, является достаточно устойчивым параметром излучения. В тоже время блуждания пучка, обусловленные турбулентностью, приводят к выходу дислокации из апертуры детектора и потере точности метода. Согласно [8], точность регистрации может быть повышена за счет увеличения апертуры приемника или за счет повышения топологического заряда вихря.

Исследование регистрации дислокаций в турбулентной среде продолжено в настоящей работе, где рассматривается возможность определения таких характеристик вихревого излучения, как циркуляция и ротор поля наклонов волнового фронта. На основе обработки полученных данных определяется наличие или отсутствие особых точек в пучке, вычисляется их количество, топологические заряды и координаты. Основное внимание уделяется влиянию размеров апертуры приемника (в [8] апертуру предлагается увеличивать) на точность работы системы, кроме этого, учитываются дополнительные дислокации, появление которых обусловлено турбулентными искажениями.

Также в статье проводится анализ влияния параметров датчика Гартмана на точность работы системы регистрации и выполняется оптимизация параметров прибора. В заключительном параграфе точность регистрации дислокаций с использованием датчика сравнивается с точностью работы идеальной оптической системы (в идеальной системе полагается возможным определение градиентов волнового фронта).

#### Численная модель оптической системы

Приводимые в статье данные были получены на основе методов численного эксперимента. При построении модели оптической системы полагалось, что основным искажающим фактором является атмосферная турбулентность, тепловое самовоздействие и другие эффекты, оказывающие влияние на пучок, не учитывались.

Распределение амплитуды  $E_0(x, y)$  одномодового пучка гауссовского профиля в плоскости апертуры источника задавалось формулой:

$$E_0(x, y) = A_0 \exp(-(x^2 + y^2) / 2a_0^2),$$

в которой  $x, y$  – координаты в плоскости, перпендикулярной направлению распространения;  $A_0$  – значение амплитуды при  $x=0, y=0$ ;  $a_0$  – начальный радиус пучка. В приближении квазиоптики распространение излучения с комплексной амплитудой  $E(x, y, z, t)$  в случайно неоднородной слабопоглощающей среде характеризовалось дифференциальным уравнением вида [9]:

$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} = \Delta_{\perp} E + \frac{2k^2}{n_0} \tilde{n} E, \quad (1)$$

где  $z$  – координата в направлении распространения;  $\Delta_{\perp} = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  – оператор Лапласа;  $\tilde{n}$  – слу-

чайное поле флуктуаций показателя преломления, обусловленных турбулентностью.

Пространственным масштабом задачи в направлении распространения, на который во всех приводимых далее (по всей работе) вычислениях нормировалась координата  $z$ , является дифракционная длина  $z_d = ka_0^2$ ,  $k$  – волновое число. Нормировка координат  $x$  и  $y$  выполнялась на начальный радиус пучка  $a_0$ .

Условия распространения пучка в турбулентной атмосфере определялись радиусом Фрида, связанным со структурной постоянной  $C_n$  среды, известной формулой [10]

$$r_0 = 1,68(C_n^2 k^2 L)^{-3/5},$$

где  $L$  – длина трассы.

Численное решение уравнения (1) выполнялось методом расщепления по физическим факторам [11], согласно которому распределенный слой искажающей среды представляется набором фазовых экранов и участков свободной дифракции между ними.

Удовлетворительное соответствие модели условиям натурального эксперимента было продемонстрировано в монографии [12].

#### Регистрация параметров вихревого пучка с использованием двумерного распределения градиентов фазы

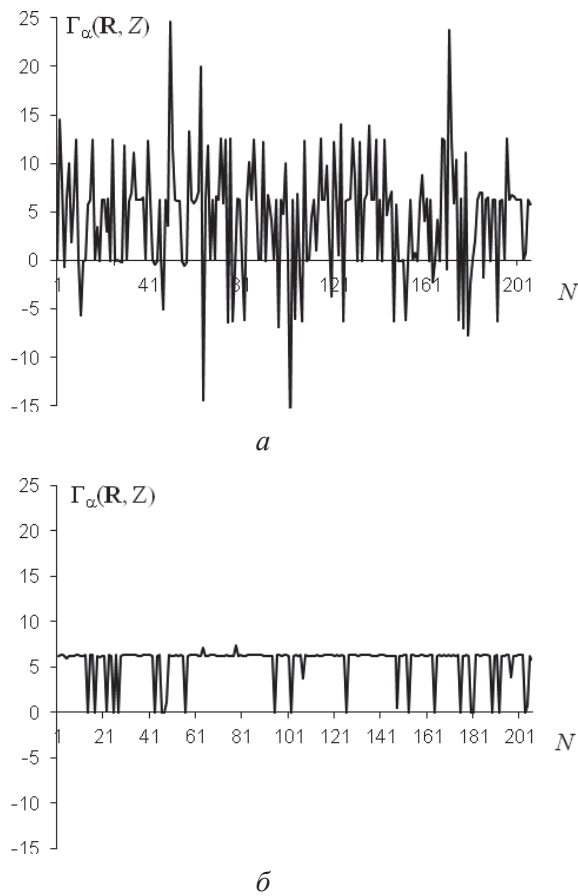
Для проведения анализа дифракции лазерного излучения, несущего оптический вихрь первого и более высоких порядков, в плоскости апертуры генератора имитировалось прохождение пучка через фазовый транспарант, обеспечивающий формирование геликоидального волнового фронта. В интересующей нас плоскости анализа вычислялись градиенты поперечного распределения фазы (идеальная система), затем находилась их циркуляция  $\Gamma_{\alpha}(R, Z)$  посредством интегрирования по периметрам контуров различных размеров, ротор градиента фазы и другие характеристики излучения.

В описанных условиях кроме искусственной дислокации, введенной в волновой фронт в плоскости  $Z=0$ , возможно появление дополнительных вихрей, обусловленных турбулентностью, число которых изменяется при распространении излучения. Также можно ожидать, что под влиянием возмущений особые точки высоких порядков будут распадаться на несколько дислокаций первого порядка.

Полученные в численных экспериментах значения циркуляции в контуре, находящемся в центре пучка, приводятся на рис. 1 (турбулентность моделировалась одним экраном, расположенным в начале трассы). Интенсивность искажений уменьшается от верхнего графика к нижнему. Приводимые данные показывают, что при высокой интенсивности искажений (рис. 1, а) значения интеграла на отдельных реализациях значительно превосходят  $2\pi$ , на других являются меньшими нуля, т. е. в выбранный контур, размеры которого состав-

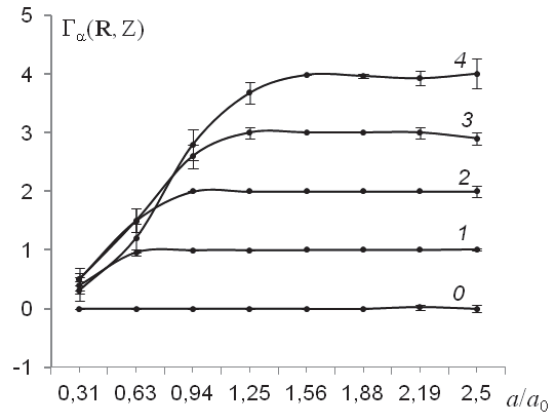
включают 1,6 диаметра пучка, попадает большое количество дополнительных дислокаций, суммарный заряд которых отличается от заряда, введенного в пучок искусственного вихря.

Вероятность попадания дополнительных дислокаций в область интегрирования падает с уменьшением интенсивности турбулентности. Это положение иллюстрируется на рис. 1, б, где видно, что в большинстве случаев при интегрировании поля градиентов мы получаем значение циркуляции равное  $2\pi$ , и только в 20 случаях из 200 регистрируемые значения интеграла спадают до 0. Если полагать, что равновероятным является появление в контуре вихрей с положительными и отрицательными зарядами, можно заключить, что отмеченные 20 событий соответствуют выходу дислокации из области интегрирования.



**Рис. 1.** Значения циркуляции градиентов волнового фронта, полученные при различной интенсивности турбулентных искажений: радиус Фрида  $r_0=0,08$  (а) и  $0,20$  (б) начальных радиусов пучка.  $Z=0,3$ , диаметр контура интегрирования составляет 1,6 начальных диаметра пучка

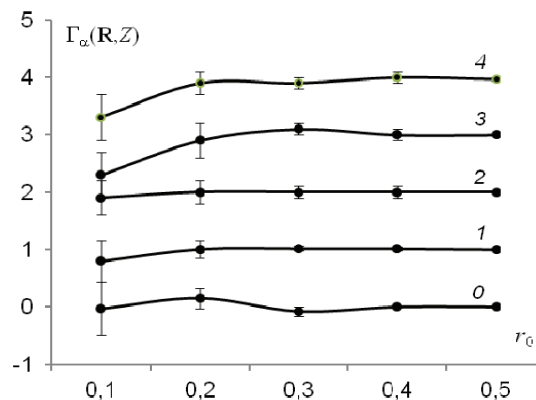
Усредненные по 100 реализациям значения функции  $\Gamma_\alpha(R, Z)$ , полученные при различной интенсивности турбулентности при введении в исходный волновой фронт дислокаций различных (от 0 до 4) порядков представлены на рис. 2. Варьируемый параметр численных экспериментов – размеры контура интегрирования.



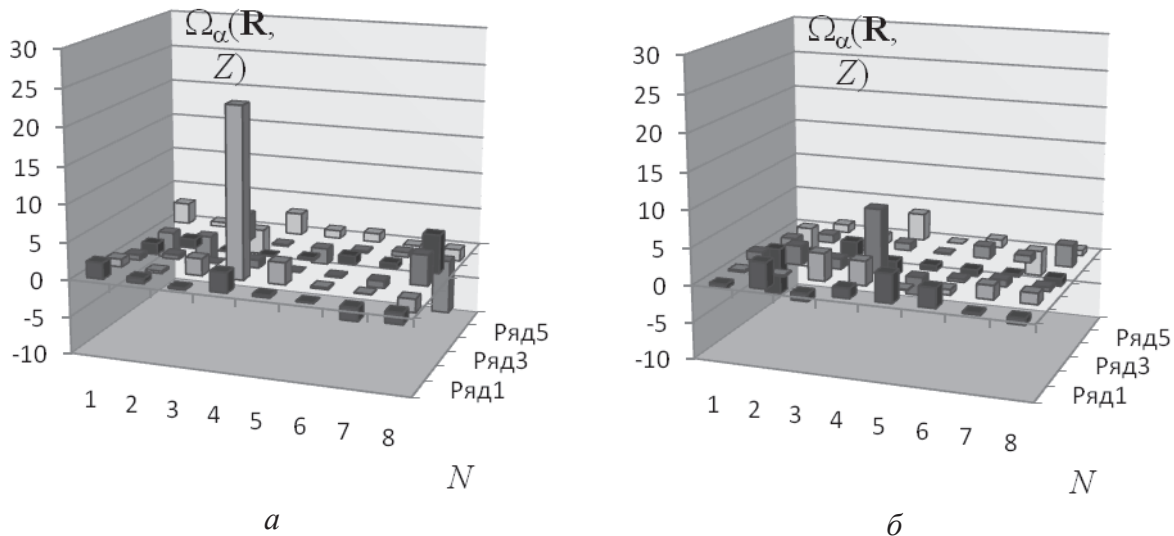
**Рис. 2.** Зависимость усредненных значений циркуляции градиентов  $\Gamma_\alpha(R, Z)$  от размеров контура интегрирования;  $a$  – диаметр контура;  $a_0$  – начальный диаметр пучка. Номера кривых соответствуют порядку особой точки, внесенной в начальный волновой фронт. Радиус Фрида  $r_0=0,5$ , длина трассы  $Z=0,5$

Может видеть, что на кривых имеется участок, параллельный горизонтальной оси, означающий, что для заданных значений  $r_0$  могут быть определены размеры контура, при которых осуществляется уверенная регистрация начальной дислокации. С уменьшением диаметра контура значения циркуляции стремятся к нулю, причем этот спад наблюдается для любого топологического заряда, т. е. с использованием контура малого диаметра наличие дислокации в пучке определить невозможно.

Влияние турбулентности было исследовано также для фиксированного диаметра контура, равного приблизительно двум начальным диаметрам пучка (рис. 3). Как и можно было ожидать из описанных выше численных экспериментов, зависимость циркуляции от радиуса Фрида имеет прямолинейный участок, параллельный оси абсцисс, и уменьшается при высокой ( $r_0 < 0,2$ ) интенсивности турбулентности, т. е. в условиях сильных искажений вероятность регистрации вихрей уменьшается.



**Рис. 3.** Зависимость усредненных значений циркуляции локальных наклонов  $\Gamma_\alpha(R, Z)$  от интенсивности турбулентных искажений, задаваемых радиусом Фрида  $r_0$ . Диаметр контура интегрирования был выбран равным 1,9 начальных диаметров пучка,  $Z=0,5$ . Номера кривых соответствуют порядку особой точки, внесенной в волновой фронт



**Рис. 4.** Изменение двумерного распределения функции ротора  $\Omega_\alpha(R, Z)$  при изменении интенсивности турбулентных искажений,  $Z=0,5$ ,  $r_0=0,45$  (а) и  $r_0=0,07$  (б)

Информация о двумерном распределении особых точек в вихревом лазерном пучке может быть получена с использованием функции ротора локальных наклонов, значения которого в данном исследовании рассчитывались путем нормирования циркуляции, вычисленной для соответствующего контура, на ограниченную контуром площадь. При этом небольшие контуры покрывали всю область регистрации параметров пучка.

Усредненное по 50 реализациям распределение ротора для пучка, прошедшего один фазовый экран, моделирующий тонкий слой турбулентной атмосферы, и несущего вихрь второго порядка, по-

казано на рис. 4. Варьируемым параметром здесь являлся радиус Фрида.

При малой интенсивности турбулентности ( $r_0=0,45$ , рис. 3, 4, а) в распределении хорошо виден центральный максимум, соответствующий введенной в пучок дислокации, и дополнительные экстремумы, обусловленные, очевидно, особыми точками, появившимися в результате искажений пучка на экране. С ростом интенсивности искажений высота центрального максимума уменьшается, и при  $r_0=0,07$  (рис. 4, б) он становится практически неотличим от дополнительных экстремумов. Подобное поведение функции ротора наблюдается и при внесении пучок дислокаций более высоких порядков.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Soskin M.S., Vasnetsov M.V. Singular optics // Prog. Opt. – 2001. – V. 42. – P. 219–276.
- Siegman A.E. Lasers. – Mill Valley, Calif.: University Science, 1986. – 1304 p.
- Young C.Y., Gilchrest Y.V., Macon B.R. Turbulence induced beam spreading of higher order mode optical waves // Optical Engineering. – 2002. – V. 41. – № 5. – P. 1097–1103.
- Palacios D.M., Rozas D., Swartzlander G.A., Jr. Observed scattering into a dark optical vortex core // Phys. Rev. Lett. – 2002. – V. 88. – P. 103902.
- Ponomarenko S.A. A class of partially coherent beams carrying optical vortices // J. Opt. Soc. Am. A. – 2001. – V. 18. – P. 150–156.
- Allen L., Beijersbergen M.W., Spreeuw R.J.C., Woerdman J.P. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre–Gaussian laser modes // Phys. Rev. A. – 1992. – V. 45. – P. 8185–8189.
- Аксенов В.П., Погуца Ч.Е. Флуктуации орбитального углового момента лазерного пучка, несущего оптический вихрь, в турбулентной атмосфере // Квантовая электроника. – 2008. – Т. 38. – № 4. – С. 343–348.
- Gbur G., Tyson R.K. Vortex beam propagation through atmospheric turbulence and topological charge conservation // J. Opt. Soc. Am. A. – 2008. – V. 25. – № 1. – P. 225–230.
- Выслоух В.А., Егоров К.Д., Кандидов В.П. Численный эксперимент по фазовой компенсации теплового самовоздействия световых пучков // Изв. вузов. Радиофизика. – 1979. – Т. XXII. – № 4. – С. 435–440.
- Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики. – М.: Наука, 1985. – 335 с.
- Марчук Г.И. Методы расщепления. – М.: Наука, 1988. – 264 с.
- Канев Ф.Ю., Макенова Н.А., Цыро Е.И. Адаптивные методы коррекции искажений оптического излучения. – Томск: Академическое изд-во Lambert Academic Publishing, 2012. – 198 с.

Поступила 27.11.2012 г.



## РЕГИСТРАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ВИХРЕВОГО ПУЧКА В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ. Ч. 2. УЧЕТ ОГРАНИЧЕНИЙ, ВНОСИМЫХ ДАТЧИКОМ ВОЛНОВОГО ФРОНТА

В.П. Аксенов, Ф.Ю. Канев\*, Д.С. Куксенок\*\*, Н.А. Макенова\*, А.В. Хапаева\*

Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН, г. Томск

E-mail: avp@iao.ru

\*Томский политехнический университет

E-mail: mna.05@mail.ru

\*\*Томский государственный университет

E-mail: motty@sibmail.com

Во второй части статьи в используемую расчетную схему вводится модель датчика Гартмана, что позволяет определить его влияние на точность работы оптической системы и провести оптимизацию параметров прибора. В заключительном параграфе точность детектирования оптического вихря в турбулентной среде с использованием датчика сравнивается с точностью результатов работы идеальной оптической системы.

### Ключевые слова:

Датчик Шека–Гартмана, локальные наклоны, сингулярная оптика, орбитаальный угловой момент, турбулентная атмосфера.

### Key words:

Shack–Hartmann sensor, local tilts, singular optics, orbital angular momentum, turbulent atmosphere.

### Точность определения количества дислокаций в идеальной оптической системе.

#### Статистика особых точек в турбулентной атмосфере

Для определения числа, координат и топологического заряда особых точек было использовано известное условие, согласно которому циркуляция градиентов фазы пучка, вычисленная вдоль контура, охватывающего дислокацию первого порядка, равна  $\pm 2\pi$ . Поэтому распределение фазы и случайных наклонов было разбито на одинаковые квадратные ячейки, по периметру каждой из которых вычислялся интеграл от градиентов. При равенстве интеграла  $\pm 2\pi$  полагалось, что в пределах контура находится дислокация [1].

Тестирование точности алгоритма регистрации было выполнено в модельной задаче, где в волновой фронт вводилось определенное количество дислокаций. После введения особых точек пучок проходил нулевое расстояние.

Изменение точности при варьировании числа оптических вихрей и размеров контура интегрирования иллюстрируется данными таблицы, где приводится усредненное число дислокаций, определенное с использованием алгоритма. Основная особенность предлагаемого подхода – это уменьшение точности, наблюдаемое как при увеличении размеров контура интегрирования, так и при увеличении числа особых точек. Так, для элементарного контура, сторона которого равна  $0,12 (d_0 - \text{начальный диаметр пучка})$  с точностью 100 % регистрируется 10 введенных в начальный волновой фронт дислокаций, но при 50 особых точках точность составляет только 84 %. Аналогичное уменьшение точности наблюдается и для других размеров, причем чем больше контур, тем меньше точность алгоритма регистрации.

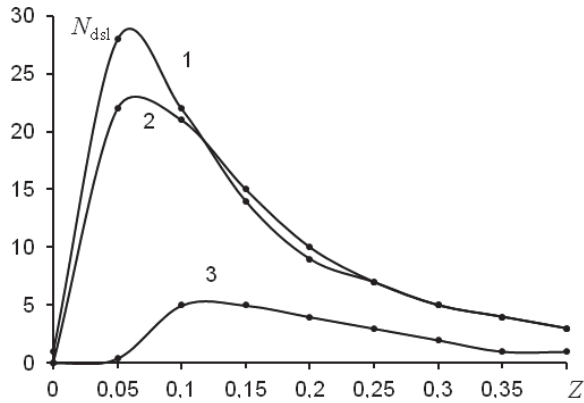
**Таблица.** Тестирование точности алгоритма регистрации особых точек

Число заданных дислокаций		10	20	30	40	50
Размер контура $0,12d_0$ (4×4 узла)	Число зарегистрированных дислокаций	10	18	26	34	42
	Точность регистрации, %	100	90	87	85	84
Размер контура $0,24d_0$ (8×8 узлов)	Число зарегистрированных дислокаций	9	16	22	27	32
	Точность регистрации, %	90	80	73	68	64

Рассмотрим теперь появление дислокаций при задании aberrаций случайным фазовым экраном. Как и в предыдущих численных экспериментах в используемой модели лазерный пучок (гауссовский или имеющий особенности) проходит через экран, расположенный непосредственно за апертурой источника, затем распространяется в условиях свободной дифракции. На некотором расстоянии, которое является варьируемым параметром задачи, осуществляется регистрация особых точек. В численных экспериментах также изменяется интенсивность искажений, характеризующая радиусом Фрида.

Усредненное по 200 реализациям случайного фазового экрана число зарегистрированных в различных сечениях трассы особых точек показано на рис. 1. Здесь видны следующие характерные особенности распространения гауссовского излучения (кривые 2 и 3). Несмотря на то, что пучок испытывает искажения, на малых ( $Z=0,01$ ) расстояниях, оптические вихри в волновом фронте отсутствуют. При дальнейшем распространении ( $Z=0,05-0,1$ ) число дислокаций резко увеличивается, причем экстремум функции тем выше, чем больше интенсивность турбулентных искажений. С увеличением пройденного расстояния число вихрей уменьшается и при  $Z=0,4$  в пучке присутствуют не более 5 особых точек.

Похожим является поведение пучка, в волновой фронт которого в плоскости апертуры источника был введен оптический вихрь (рис. 1, кривая 1). Здесь на малых расстояниях ( $Z=0,01$ ) регистрируется только одна дислокация. Исходный вихрь сохраняется, его смещения совпадают с изменениями координат центра тяжести пучка, обусловленными турбулентными возмущениями.



**Рис. 1.** Число дислокаций  $N_{dsl}$ , зарегистрированное в различных сечениях  $Z$  трассы распространения. Кривые 1 и 2 получены при  $g_0=0,15$ , 3 — при  $g_0=0,45$ . При получении 1 в пучок была введена искусственная дислокация, в остальных случаях дислокации в начальном распределении поля отсутствовали. Усреднение выполнялось по 200 реализациям фазового экрана

**Ограничения, вносимые датчиком Гартмана в работу оптической системы.**

**Оптимизация параметров прибора**

В предыдущем разделе для анализа свойств сингулярного излучения использовались градиенты волнового фронта. Приближение условий задачи к условиям лабораторного эксперимента потребовало изменения численной модели оптической системы, в частности введение в нее модели датчика Гартмана [2].

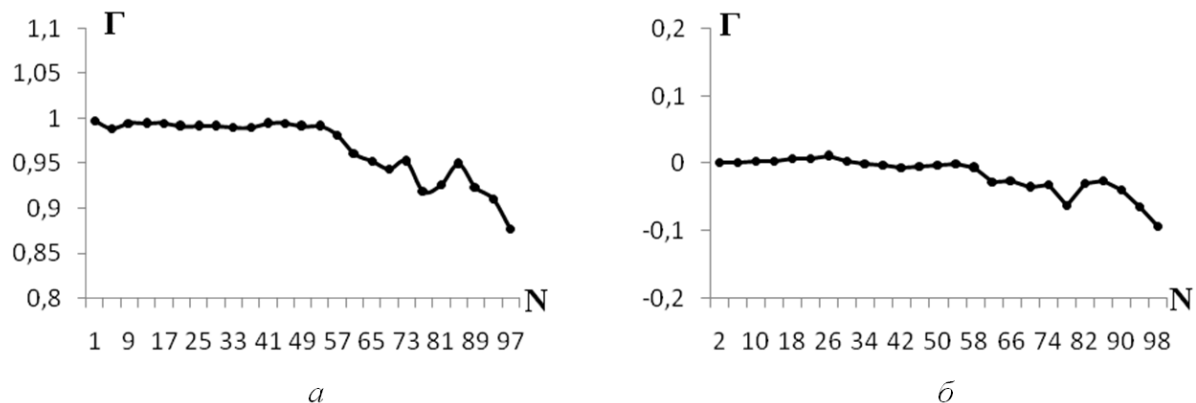
Для оценки точности регистрации датчиком параметров (циркуляции и ротора локальных наклонов) волнового фронта сингулярного излуче-

ния был выполнен ряд тестовых расчетов по определению топологического заряда оптических вихрей. В первом из них пучок проходил нулевое расстояние, и в его фазовый профиль было помещено нечетное число дислокаций (результаты численного эксперимента показаны на рис. 2, а). Поле наклонов регистрировалось датчиком с размерностью раstra микролинз  $32 \times 32$ , при вычислении циркуляции наклонов контур интегрирования охватывал все особые точки. Так как в пучке находится нечетное число вихрей, циркуляция в этом случае должна быть равна единице. Это положение выполнялось при введении в пучок от 1 до 61 особых точек. Как видно из представленных результатов, при дальнейшем увеличении количества оптических вихрей значение циркуляции отличаются от единицы, т. е. появляются ошибки в работе алгоритма регистрации.

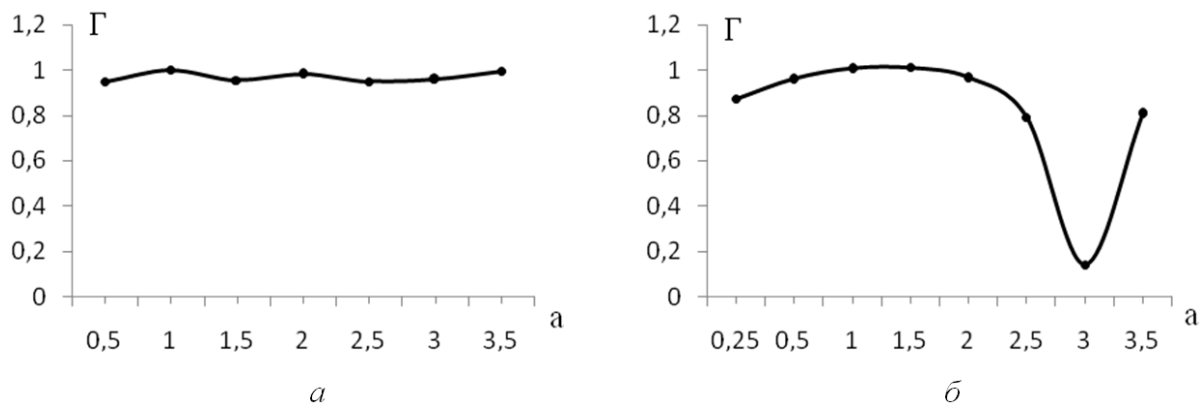
Подобные расчеты были выполнены и при введении в волновой фронт четного числа особых точек (рис. 2, б). Здесь ожидалось нулевые значения циркуляции. Но величина  $\Gamma$  равнялась нулю только в интервале 1–60 особых точек, при дальнейшем увеличении количества вихрей наблюдалось отклонение от этого значения.

Представленные результаты показывают, что предложенный алгоритм даже в самых благоприятных условиях (нулевая длина трассы, отсутствие турбулентных или любых других возмущений) с датчиком размерности  $32 \times 32$  обеспечивает удовлетворительную точность регистрации суммарного топологического заряда группы особых точек, только если их количество не слишком велико ( $\leq 60$ ).

В отличие от плоской волны поперечные размеры лазерного пучка всегда конечны, поэтому естественно ожидать зависимости циркуляции поля наклонов сингулярного волнового фронта от размеров контура интегрирования. Для выяснения характера этой зависимости в численных экспериментах в волновой фронт вводилась только одна особая точка ( $\Gamma=1$ ), при этом, как и в предыдущем случае, пучок проходил трассу нулевой длины.



**Рис. 2.** Зависимость значения суммарного топологического заряда группы особых точек от числа введенных в волновой фронт дислокаций: а) нечетное; б) четное число. Для определения наклонов использовалась модель датчик Гартмана размерности  $32 \times 32$



**Рис. 3.** Зависимость циркуляции сингулярного волнового фронта от размеров контура интегрирования  $a$  (размеры контура нормированы на начальный диаметр пучка), полученная для датчиков с размерностью растра микролинз: а)  $16 \times 16$ ; б)  $32 \times 32$

Для датчиков размерности  $16 \times 16$  и  $32 \times 32$  результаты моделирования приводятся на рис. 3.

В обоих случаях удовлетворительная точность была зафиксирована для контуров с размерами от 0,25 до 2 начальных диаметров пучка. При дальнейшем увеличении размеров наблюдались отклонения значений циркуляции от 1. Указанные погрешности можно объяснить тем, что в удаленных от центра пучка областях его амплитуда близка к нулю, а при нулевой амплитуде и соответствующей неопределенности фазы наклоны волнового фронта невозможно определить точно.

Кроме размерности датчика и размеров контура интегрирования на точность определения параметров пучка влияет фокусное расстояние микролинз. Для оптимизации этого параметра интегрирование поля наклонов сингулярного излучения проводилось на трассах различной длины при варьировании фокусного расстояния и варьировании размерности растра (в волновом фронте только одна особая точка, размер контура равнялся 1 диаметру пучка, циркуляция должна быть равна единице). Полученные результаты представлены на рис. 4.

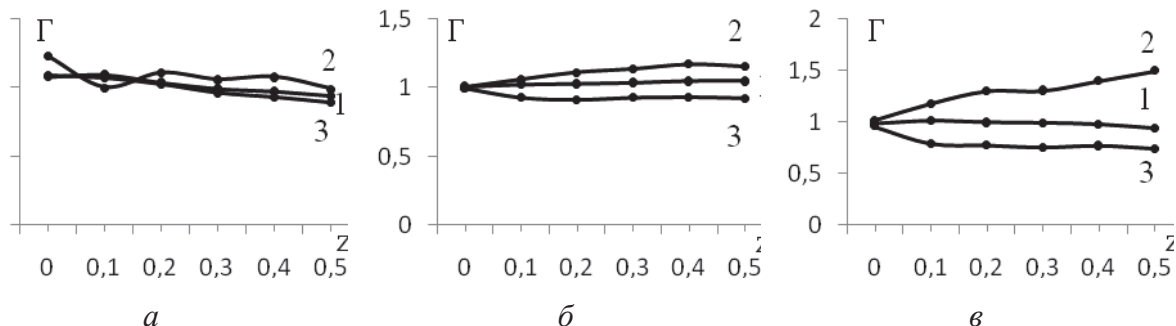
Оптимальное фокусное расстояние, выбираемое с точки зрения близости циркуляции к единице, получается различным для датчиков разной размерности. Так, для растра  $16 \times 16$  оно составля-

ет 0,8 см, для растра  $32 \times 32$  – 1,1 см, а для растра  $64 \times 64$  – 1,05 см. Подбор оптимального расстояния обеспечивает высокую точность вычисления топологического заряда, как видно из рисунка, значения циркуляции, соответствующие кривой 1, не более чем на 10 % отличаются от 1.

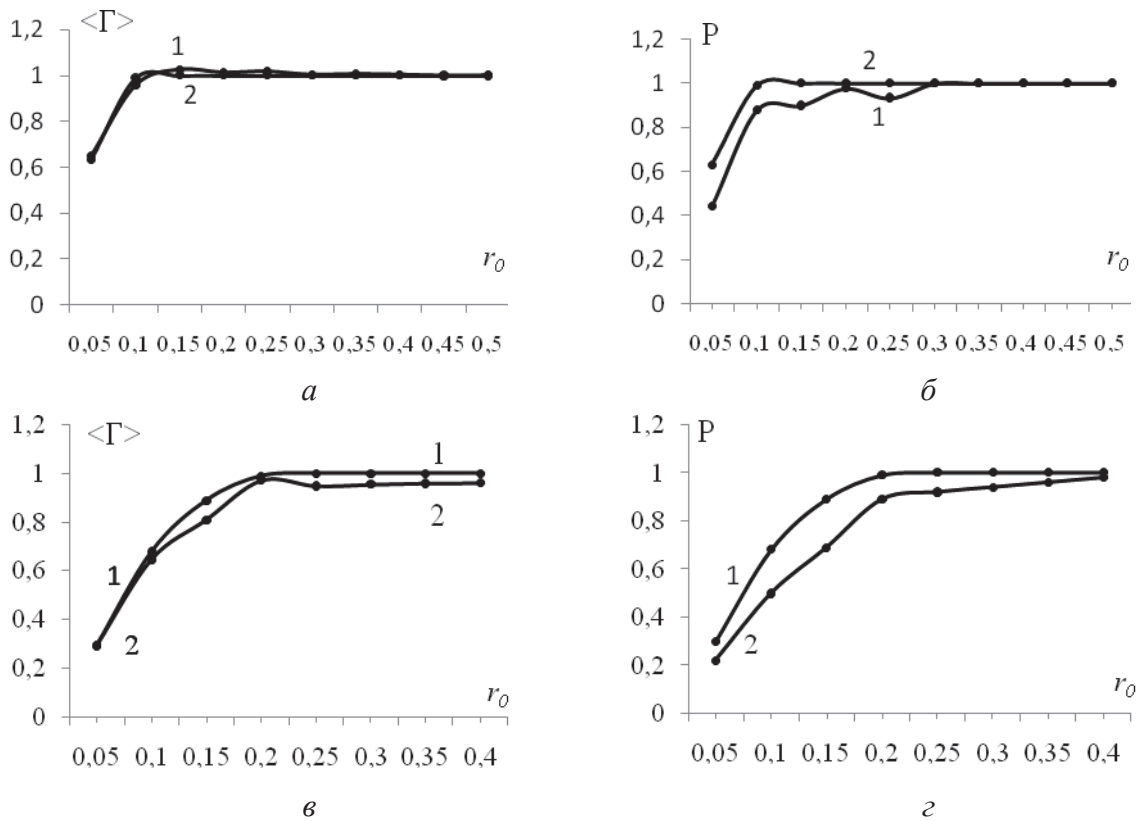
#### Особенности регистрации параметров пучка в турбулентной среде

Так как достаточно большое количество современных оптических систем предназначены для работы в условиях свободной атмосферы, нами была исследована возможность регистрации особых точек при наличии турбулентных искажений на трассе распространения пучка [3, 4]. Соответствующие численные эксперименты проводились с датчиком размерности  $64 \times 64$ , обеспечивающим наибольшую точность регистрации локальных наклонов.

Результаты определения циркуляции пучка (средние значения по 100 реализациям), включающего в плоскости генерации единственный оптический вихрь, представлены на рис. 5, а, б, в,  $Z=0,25$ . На этом же рисунке приводится зависимость вероятности регистрации особой точки от интенсивности турбулентных искажений (рис. 5, б, г). Данные были получены для идеальной системы (кривые 1), т. е. с использованием для вычислений гради-



**Рис. 4.** Определение оптимального фокусного расстояния растра микролинз для датчиков различной размерности: а) датчик  $16 \times 16$ , фокусные расстояния (см): 0,8 (кривая 1), 0,7 (2), 0,9 (3); б) датчик  $32 \times 32$ : 1,1 (кривая 1), 1,0 (2), 1,2 (3); в) датчик  $64 \times 64$ : 1,05 (кривая 1), 1,1 (2), 0,9 (3)



**Рис. 5.** Зависимость средних значений циркуляции волнового фронта от интенсивности турбулентных искажений (а, в) и вероятности регистрации дислокации в турбулентной атмосфере (б, г). Результаты получены для идеальной оптической системы (кривая 1 на всех графиках) и при регистрации наклонов датчиком Гартмана (кривая 2) размерности  $64 \times 64$ .  $Z=0,25$  (а, б) и  $Z=0,5$  (в, г). Усреднение результатов выполнено по 100 реализациям распределения показателя преломления

ентов волнового фронта, и на основе измерений наклонов датчиком Гартмана (кривые 2).

Отметим основные характерные особенности кривых. Во-первых, средние значения циркуляции, полученные в идеальной системе на трассе большей длины ( $Z=0,5$ ), являются на 5...10 % более высокими, по сравнению со значениями, регистрируемыми датчиком. На более короткой из трасс ( $Z=0,25$ ) кривые практически совпадают. Во-вторых, зависимость средних значений циркуляции от интенсивности искажений повторяет зависимость, полученную для вероятности регистрации вихря. В-третьих, обе величины ( $\langle \Gamma \rangle$  и  $P$ ) уменьшаются с уменьшением радиуса Фрида  $r_0$ . На длинных трассах ( $Z=0,5$ ) спад наблюдается для меньшей интенсивности турбулентности, т. е. при больших значениях  $r_0$ .

Результаты, представленные в параграфе, позволяют сделать вывод о том, что при использовании представленного алгоритма наблюдается уменьшение точности регистрации особых точек при увеличении длины трассы и при увеличении интенсивности турбулентных искажений. При этом датчик с размерностью раstra  $64 \times 64$  обеспечивает вероятность регистрации близкую к вероятности, полученной при вычислении циркуляции с использованием градиентов волнового фронта.

### Заключение

В статье рассмотрен метод регистрации оптических вихрей в лазерном излучении на основе вычисления циркуляции и ротора поля локальных наклонов волнового фронта. Использование модели датчика Гартмана в численных экспериментах позволило учесть ограничения, вносимые этим прибором. Представленные в работе данные позволяют сделать следующие выводы:

1. При распространении лазерного излучения, прошедшего тонкий слой турбулентной атмосферы, искажения проявляются на трассах малой длины ( $Z=0,01$ ), но, несмотря на это, оптические вихри в волновом фронте отсутствуют. При дальнейшем распространении ( $Z=0,05-0,1$ ) число дислокаций резко увеличивается, причем экстремум функции тем выше, чем больше интенсивность турбулентных искажений. С увеличением пройденного расстояния число вихрей уменьшается.
2. Для датчиков всех размерностей, рассмотренных в работе (от  $16 \times 16$  до  $64 \times 64$ ), удается подобрать оптимальные размеры контура интегрирования и оптимальное фокусное расстояние микролинз, обеспечивающие уверенную регистрацию в неискажающей среде топологического заряда одной особой точки на трассах длиной от 0 до 0,5 дифракционных длин.

- Предложенный алгоритм при нулевой длине трассы распространения и отсутствии турбулентных или любых других возмущений обеспечивает удовлетворительную точность регистрации суммарного топологического заряда группы особых точек, только если их количество не слишком велико ( $\leq 60$ ).
- При использовании алгоритма для регистрации параметров пучка в турбулентной

атмосфере наблюдается уменьшение его точности при увеличении длины трассы и при увеличении интенсивности турбулентных искажений. При этом датчик с размерностью растра  $64 \times 64$  обеспечивает вероятность регистрации близкую к вероятности, полученной при вычислении циркуляции с использованием градиентов волнового фронта.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Soskin M.S., Vasnetsov M.V. Singular optics // Prog. Opt. – 2001. – V. 42. – P.219–276.
- Siegman A.E. Lasers. – Mill Valley, Calif.: University Science, 1986. – 1304 p.
- Young C.Y., Gilchrest Y.V., Macon B.R. Turbulence induced beam spreading of higher order mode optical waves // Optical Engineering. – 2002. – V. 41. – № 5. – P. 1097–1103.
- Palacios D.M., Rozas D., Swartzlander G.A., Jr. Observed scattering into a dark optical vortex core // Phys. Rev. Lett. – 2002. – V. 88. – P. 103902.

Поступила 27.11.2012 г.

УДК 536.253

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА КОНДЕНСАЦИИ СЕРНОГО АНГИДРИДА В АТМОСФЕРЕ, ПРИЛЕГАЮЩЕЙ К ТЕПЛОВОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СТАНЦИИ

Д.В. Гвоздяков, В.Е. Губин

Томский политехнический университет  
E-mail: dim2003@tpu.ru; gubin@tpu.ru

Представлены результаты численной оценки интенсивности процесса конденсации серного ангидрида в воздушном пространстве, прилегающем к тепловой электрической станции. Определены размеры ядер капель кислоты, которые в процессе седиментации могут выпадать на поверхность Земли.

#### Ключевые слова:

Математическое моделирование, тепловая электрическая станция, дымовые газы, загрязнение, серный ангидрид, конденсация, частица, серная кислота.

#### Key words:

Mathematical modeling, thermal power plant, smoke gases, pollution, sulphurous anhydride, condensation, particle, sulfuric acid.

#### Введение

Проблема антропогенного загрязнения атмосферы Земли многие годы является актуальной [1, 2]. Одним из основных источников загрязняющих веществ являются объекты теплоэнергетического комплекса, такие как тепловые электрические станции (ТЭС) [1, 2]. С каждым годом объемы эмиссии загрязняющих веществ в воздушный бассейн планеты увеличиваются [3–5], хотя, следует отметить, прогнозы мировой антропогенной эмиссии оксидов серы и азота неоднозначны (табл. 1). Наличие в воздушном пространстве Земли таких загрязняющих веществ как  $\text{SO}_2$ ,  $\text{SO}_3$ ,  $\text{NO}_x$ , при их взаимодействии с компонентами атмосферного воздуха, может приводить к образованию соответствующих кислот [2]. Взаимодействие кислотных дождей с биосферой, сооружениями, техникой, как правило, заканчиваются для них губительными последствиями [1, 5].

Таблица 1. Фактические выбросы оксидов серы и оксидов азота в 2000 г. и прогнозы мировой антропогенной эмиссии [3]

Источник	Оксиды серы, млн т				Оксиды азота, млн т			
	2000	2025	2050	2100	2000	2025	2050	2100
IPCC (Межправительственная комиссия по изменению климата) 1992 [5], сценарий IS92a	178	240	308	296	122	174	210	273
WEC (Всемирный энергетический совет) 1993 [6], сценарий В	–	132	–	–	–	89	–	–
Клименко В.В., Клименко А.В. [3]	145	135	100	50	114	126	114	87

Присутствующие в воздушном пространстве оксиды азота и серы способны конденсироваться [1, 2] при благоприятных для этого условиях на поверхности ядер конденсации (микроскопические частицы воды). В атмосфере Земли присутствуют аэрозоли, которые условно можно разделить на три группы в зависимости от их радиуса  $\delta_j$  [2, 7, 8]:

- $\delta_j < 0,1 \cdot 10^{-6}$  м, ядра Айткена;
- $0,1 \cdot 10^{-6} < \delta_j < 1 \cdot 10^{-6}$  м, большие;
- $\delta_j > 1 \cdot 10^{-6}$  м, «гигантские».

При достижении размеров  $0,5 \cdot 10^{-3} \dots 2,5 \cdot 10^{-3}$  м возможно выпадение кислотных осадков на поверхность Земли в процессе седиментации [1, 2] как на территориях, прилегающих к ТЭС, так и на отдаленных территориях.

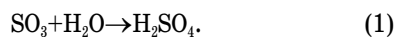
В работе рассматривается серный ангидрид  $SO_3$ , который образуется в газоходах котлов ТЭС путем частичного окисления  $SO_2$  (до 5 % от общей доли  $SO_2$ ) при сжигании высокосернистых топлив и относится к классу умеренно опасных продуктов сгорания натуральных топлив ТЭС. Несмотря на высокую опасность антропогенной эмиссии кислотообразующих веществ в воздушный бассейн и достаточно большое внимание, уделяемое проблеме кислотных дождей [1, 2], до настоящего времени не изучены процессы образования капель кислот в атмосфере Земли.

Целью настоящего исследования является численное моделирование процесса конденсации серного ангидрида в атмосфере Земли на поверхности ядер конденсации размером от  $0,1 \cdot 10^{-6}$  до  $5,0 \cdot 10^{-6}$  м.

#### Постановка задачи и метод решения

При постановке задачи принималось допущение, что образовавшаяся при конденсации капля серной кислоты при движении не деформируется и сохраняет свою форму в течение всего процесса. Учитывался конвективный теплообмен частицы серной кислоты с внешней средой, параметры которой принимались постоянными по высоте. При решении задачи не учитывался радиационный теплообмен с внешней средой. При расчете скорости движения частицы принималось, что на нее действуют силы тяжести и сопротивления воздушной среды.

Механизм (1) образования серной кислоты [9–10, 2] основан на взаимодействии, при котором серный ангидрид  $SO_3$  поглощается водяным паром.



На рис. 1 представлена область решения задачи в начальный момент.

Особенностью рассматриваемой задачи является рост внешней границы частицы в результате конденсации серного ангидрида с переменной по времени скоростью, величина которой зависит от изменяющейся во времени температуры поверхности частицы. При такой постановке задача сводится к решению ниже приведенной системы дифференциальных уравнений с соответствующими начальными и граничными условиями.

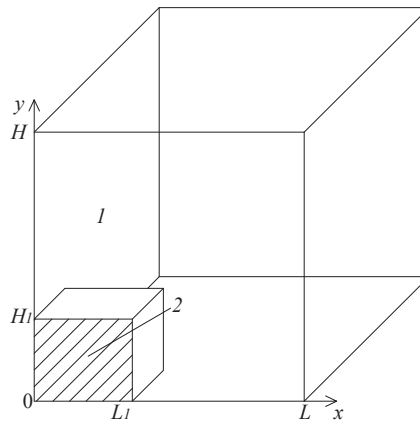


Рис. 1. Область решения задачи в начальный момент: 1) воздух плюс пары серного ангидрида; 2) ядро конденсации

Процесс переноса энергии, количества движения и массы в рассматриваемых условиях описывается системой нестационарных дифференциальных уравнений в частных производных [11, 12]. Считается, что температура и концентрация на источнике (дымовая труба ТЭС) не зависят от времени. Для моделирования изменения основных искомым функций использованы нестационарные двумерные уравнения смешанной конвекции в приближении Буссинеска [13].

Безразмерные уравнения движения, энергии, неразрывности и диффузии в безразмерных переменных «вихрь скорости–функция тока–температура–концентрация» имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = \Omega, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau} + U \cdot \frac{\partial \Theta_1}{\partial X} + V \cdot \frac{\partial \Theta_1}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \cdot \left( \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial Y^2} \right) + \frac{Q W_K L_1}{\rho C_p \Delta T}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial C_3}{\partial \tau} + U \cdot \frac{\partial C_3}{\partial X} + V \cdot \frac{\partial C_3}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Sc}} \cdot \left( \frac{\partial^2 C_3}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C_3}{\partial Y^2} \right) - \frac{W_K \cdot L_1}{\rho \cdot U_0}, \quad (5)$$

$$\frac{1}{\text{Fo}} \cdot \frac{\partial \Theta_2}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial Y^2}, \quad (6)$$

где  $X, Y$  – координаты декартовой системы координат;  $\tau$  – время;  $\Theta$  – температура;  $C_3$  – концентрация серного ангидрида;  $U, V$  – скорости в направлении оси  $X$  и  $Y$ , соответственно;  $\Psi$  – функция тока;  $\Omega$  – вихрь скорости;  $Q$  – тепловой эффект реакции, Дж/кг;  $W_K$  – массовая скорость конденсации



серного ангидрида, кг/(м<sup>3</sup>·с);  $L_1$  – геометрический размер частицы (ядра конденсации), м;  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $C_p$  – удельная теплоемкость, Дж/(кг·К);  $U_0$  – скорость внешней среды, м/с; Re – число Рейнольдса; Pr – число Прандтля; Sc – число Шмидта; Fo – число Фурье; 1 – воздух плюс пары серного ангидрида; 2 – ядро конденсации; 3 – серный ангидрид.

Для расчета скорости конденсации использовалась формула [13, 14]:

$$W_k = \beta \frac{P_A - P_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right)}{\sqrt{\frac{2\pi RT}{M}}}, \quad (7)$$

где  $P_A$  – атмосферное давление, Па;  $P_0$  – предэкспонента, Па;  $E$  – энергия активации процесса конденсации, Дж/кг;  $R$  – универсальная газовая постоянная, Дж/(моль·К);  $M$  – молярная масса, кг/моль;  $\beta$  – коэффициент конденсации.

Выражение (7) устанавливает, что скорость конденсации пропорциональна разности двух односторонних максвелловских скоростей конденсации [13]. Таким образом, вводятся два допущения: 1) конденсирующаяся среда у поверхности ядра конденсации макроскопически неподвижна; 2) состояние конденсирующейся среды может быть описано локальной максвелловской функцией [14].

Начальные условия для системы уравнений (2)–(6) в момент времени  $\tau=0$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \Theta(X, Y, 0) &= 0, \quad C(X, Y, 0) = 0, \\ \Psi(X, Y, 0) &= 0, \quad U(X, Y, 0) = 0, \\ \Theta(X, Y, 0) &= 0, \quad V(X, Y, 0) = 0. \end{aligned}$$

Граничные условия для (2)–(6) уравнений:

$$\begin{aligned} X = 0, 0 \leq Y \leq H_1: \quad \frac{\partial \Theta}{\partial X} &= 0, \quad C_3 = 0, \quad \Psi = 0, \quad \Omega = 0; \\ X = 0, H_1 \leq Y \leq H: \quad \Theta &= \Theta_1, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial Y} &= U_4, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial X} = -V_4, \quad C_3 = C_0; \\ X = L_1, 0 \leq Y \leq H_1: \quad \frac{\partial \Theta_1}{\partial X} &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial \Theta_2}{\partial X} - \frac{Q \cdot W_k \cdot l_1}{\Delta T \cdot \lambda_1}, \\ \Theta_1 &= \Theta_2, \quad \frac{\partial C_3}{\partial X} = \frac{W_k \cdot l_1}{D \cdot \rho}, \quad \Psi = \Omega = 0; \\ X = L, 0 \leq Y \leq H: \quad \Theta &= \Theta_1, \quad \frac{\partial C_3}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial X} = 0; \\ Y = 0, 0 \leq X \leq L_1: \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Y} &= 0, \quad C_3 = 0, \quad \Psi = 0, \quad \Omega = 0; \\ Y = 0, L_1 \leq X \leq L: \quad \Theta &= \Theta_1, \quad C_3 = C_0, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial Y} &= U_4, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial X} = -V_4; \\ Y = H_1, 0 \leq X \leq L_1: \quad \frac{\partial \Theta_1}{\partial X} &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial \Theta_2}{\partial X} - \frac{Q \cdot W_k \cdot l_1}{\Delta T \cdot \lambda_1}, \\ \Theta_1 &= \Theta_2, \quad \frac{\partial C_3}{\partial X} = \frac{W_k \cdot l_1}{D \cdot \rho}, \quad \Psi = \Omega = 0; \\ Y = H, 0 \leq X \leq L: \quad \Theta &= \Theta_1, \quad \frac{\partial C_3}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = 0. \end{aligned}$$

где  $U_4, V_4$  – значения компонент скорости на границе, соответствующей источнику ввода серного ан-

гидрида;  $C_0$  – безразмерная концентрация серного ангидрида на границе области.

Разностные аналоги дифференциальных уравнений решены локально-одномерным методом [15–16]. При решении задачи использовался алгоритм, разработанный [17, 18] для решения задач сопряженного теплопереноса в областях с локальными источниками энергии и массы.

Начальная концентрация серного ангидрида в воздушном пространстве принималась соответствующей значениям для летнего времени года [19]. Начальная концентрация серного ангидрида составляет 3,0 мг/м<sup>3</sup>. При постановке задачи были приняты следующие допущения:

- 1) не учитывалось испарение капли в процессе движения;
- 2) не принималось во внимание влияние солнечной радиации;
- 3) ядро конденсации имеет форму куба.

### Результаты и обсуждения

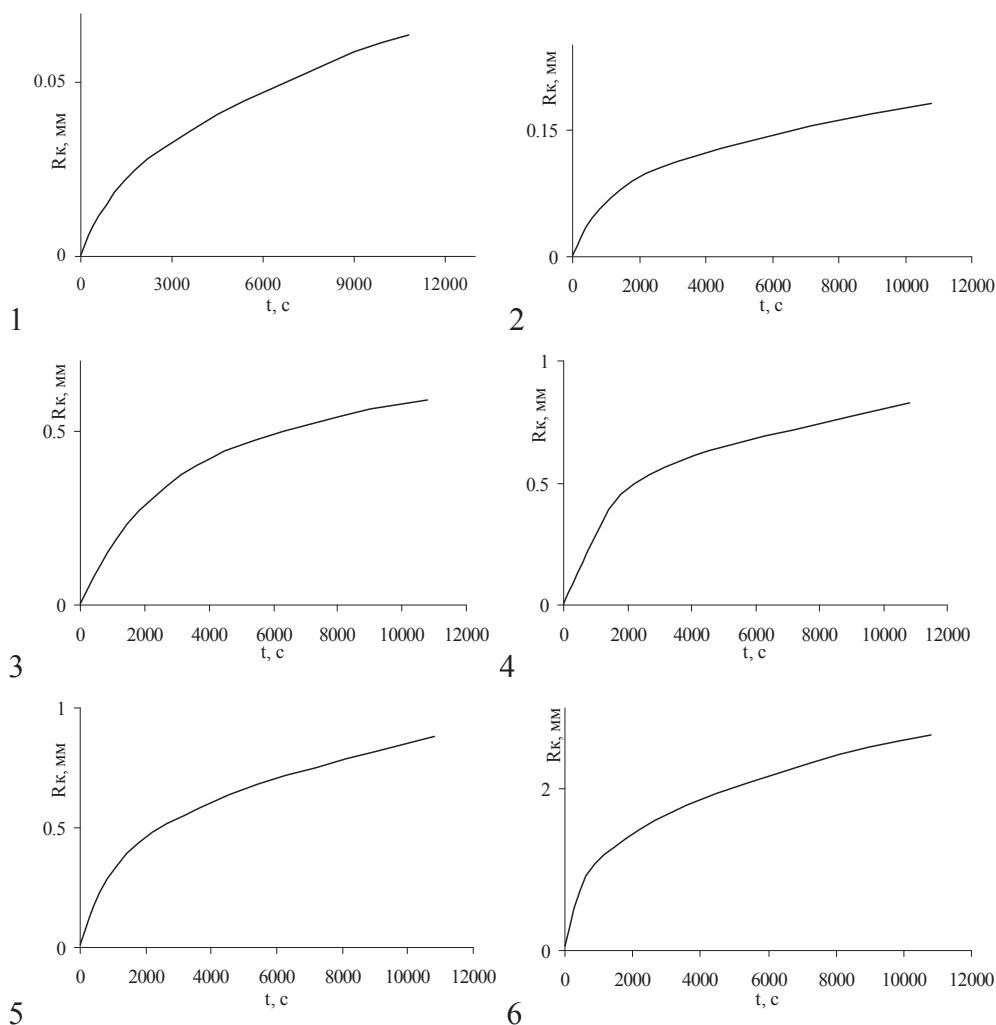
Численные исследования проведены для типичных параметров работы тепловой электрической станции (работа на номинальной мощности без превышения допустимых объемов выбросов в атмосферу загрязняющих веществ). В рассмотренном ниже диапазоне размеров находятся все три категории частиц. Проанализирован процесс конденсации серного ангидрида в воздушном пространстве, прилегающем к тепловой электрической станции. В табл. 2 представлены результаты численного моделирования роста частиц в процессе конденсации.

Таблица 2. Результаты численных исследований

t, с	$\delta_0 \cdot 10^6, \text{ м}$					
	0,03	0,1	0,5	0,8	1,0	5,0
	$\delta_1 \cdot 10^3, \text{ м}$					
600	0,012	0,045	0,110	0,178	0,230	0,920
1800	0,025	0,089	0,270	0,445	0,440	1,380
3600	0,036	0,118	0,400	0,587	0,580	1,790
5400	0,045	0,138	0,471	0,652	0,680	2,080
7200	0,052	0,155	0,520	0,719	0,750	2,310
9000	0,059	0,169	0,562	0,776	0,820	2,510
10800	0,064	0,181	0,588	0,826	0,880	2,670

Примечание:  $\delta_0$  – размер ядра конденсации в начальный момент времени, м;  $\delta_1$  – размер сформировавшейся частицы в момент времени t, с.

Установлено, что при начальном размере ядра конденсации  $1,0 \cdot 10^{-6}$  м уже через 1800 с образуется частица размером более  $1,0 \cdot 10^{-3}$  м. Известно, что частицы соответствующего размера относятся к типу «грубодисперсных» [9] (являются дождевыми каплями). При начальном размере ядра  $5,0 \cdot 10^{-6}$  м формируется частица размером более  $1,0 \cdot 10^{-3}$  м за 600 с с момента начала процесса конденсации. Дальнейшее увеличение начального размера ядра может приводить к образованию частиц с размером более  $2,5 \cdot 10^{-3}$  м. Такие частицы размером  $1,0 \cdot 10^{-3}$  м и более способны выводиться из



**Рис. 2.** Изменение размеров частиц (м): 1)  $\delta_0=0,03 \cdot 10^{-6}$ ; 2)  $\delta_0=0,1 \cdot 10^{-6}$ ; 3)  $\delta_0=0,5 \cdot 10^{-6}$ ; 4)  $\delta_0=0,8 \cdot 10^{-6}$ ; 5)  $\delta_0=1,0 \cdot 10^{-6}$ ; 6)  $\delta_0=5,0 \cdot 10^{-6}$

атмосферы за счет процесса седиментации [1, 2, 9]. В результате тепломассопереноса в области дымового факела тепловой электрической станции образовавшиеся частицы размером менее  $1,0 \cdot 10^{-3}$  м с начальным размером ядра конденсации  $0,03 \cdot 10^{-8} \dots 0,8 \cdot 10^{-7}$  м могут осаждаться на поверхности более крупных частиц [1, 2]. Таким образом, ускорение процесса формирования атмосферных осадков может очень быстро привести к выпадению дождевых капель на территориях, прилегающих к тепловой электрической станции.

На рис. 2 графически показан рост частицы в зависимости от времени при различных начальных размерах ядер конденсации.

Известно, что на фиксированном расстоянии от тепловой электрической станции при определенном классе устойчивости атмосферы можно выделить территории с максимальными значениями концентраций веществ антропогенного происхождения [20]. Таким образом, целесообразным является дальнейший анализ процесса образования ча-

стиц серной кислоты с учетом влияния процесса испарения за счет солнечной радиации и фотохимических процессов, протекающих в атмосфере, прилегающих к ТЭС. Учет вышеперечисленных факторов может существенно повысить точность прогноза процесса образования и выпадения осадков, содержащих серную кислоту на территориях, прилегающих к ТЭС.

#### Заключение

Проведен численный анализ процесса конденсации серного ангидрида на поверхности ядра конденсации в воздушном пространстве, прилегающем к ТЭС. Установлено, что частицы, способные выводиться из атмосферы Земли за счет процесса седиментации, образуются при начальном размере ядра конденсации  $1,0 \cdot 10^{-6}$  м и более за время  $0,5 \dots 3$  ч. Частицы с меньшим размером способны переноситься на большие расстояния от источника антропогенных компонент за счет конвекции и диффузии.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Заиков Г.Е., Маслов С.А., Рубайло В.Л. Кислотные дожди и окружающая среда. – М.: Химия, 1991. – 144 с.
2. Израэль Ю.А., Назаров И.М., Прессман А.Я., Ровинский Ф.Я., Рябошапка А.Г. Кислотные дожди. – Л.: Гидрометеиздат, 1989. – 270 с.
3. Клименко В.В., Клименко А.В. Сокращение выбросов малых парниковых газов как альтернатива снижению эмиссии углекислого газа. Ч. I // Теплоэнергетика. – 2000. – № 6. – С. 6–12.
4. Внуков А.К. Защита атмосферы от выбросов энергообъектов: справочник. – М.: Энергоатомиздат, 1992. – 176 с.
5. Climate Change 1992. The Supplementary Report to the IPCC Scientific Assessment / J.T. Houghton, B.A. Callender, S.C. Varney. Cambridge University Press, 1992.
6. Brendow K. West and East European approaches to sustainable energy // World Energy Council Journal. December. 1993. – P. 41–53.
7. Фелленберг Г. Загрязнение природной среды. Введение в экологическую химию. – М.: Мир, 1997. – 232 с.
8. Грин Х., Лейн В. Аэрозоли – пыли, дымы и туманы. – Л.: Химия, 1969. – 428 с.
9. Терехов В.И., Пахомов М.А. Тепломассоперенос и гидродинамика в газокapельных потоках: монография. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2008. – 284 с.
10. Андруз Дж., Бримлекумб П., Дишклез Т. и др. Введение в химию окружающей среды. – М.: Мир, 1999. – 271 с.
11. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
12. Берковский Б.М., Полевиков В.К. Вычислительный эксперимент в конвекции. – Минск: Университетское, 1988. – 167 с.
13. Кнаке О., Странский И.Н. Механизм испарения // УФН. – 1959. – Т. 68. – № 2. – С. 261–305.
14. Лабунцов А.Д. Физические основы энергетики. Избранные труды по теплообмену, гидродинамике, термодинамике. – М.: Изд-во МЭИ, 2000. – 388 с.
15. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
16. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. – М.: Наука, 1975. – 424 с.
17. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Об одном подходе к математическому моделированию тепловых режимов радиоэлектронной аппаратуры и электронной техники // Микроэлектроника. – 2008. – Т. 37. – № 2. – С. 150–158.
18. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Сопряженный теплоперенос в замкнутой области с локально сосредоточенным источником тепловыделения // Инженерно-физический журнал. – 2006. – Т. 79. – № 1. – С. 56–63.
19. Гвоздяков Д.В., Губин В.Е., Кузнецов Г.В. Численная оценка формирования условий атмосферного образования серной кислоты в районе расположения тепловой электрической станции // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2012. – № 2–2. – С. 195–200.
20. Федосов А.А. Математическая модель загрязнения атмосферы выбросами тепловых электрических станций // Альтернативная энергетика и экология. – 2006. – № 9 (41). – С. 98–102.

Поступила 27.05.2013 г.

УДК 532.529.2

## СЕДИМЕНТАЦИЯ ЧАСТИЦ В ФЕРРОКОЛЛОИДАХ С УЧЕТОМ ДИНАМИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

А.Ф. Глухов, В.А. Демин

Пермский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: demin@psu.ru

*Проведено численное исследование процесса осаждения частиц в феррожидкости на основе керосина в тонком вертикальном канале с учетом возможного термодиффузионного перераспределения частиц при неоднородном нагреве. Определены значения термодиффузионного параметра, при которых действие термодиффузии для установленной разности температур на торцах канала становится сопоставимым с седиментационным механизмом расслоения.*

### Ключевые слова:

*Феррожидкость, седиментация частиц, термодиффузия, динамические граничные условия.*

### Key words:

*Ferrofluid, sedimentation of particles, thermodiffusion, dynamical boundary conditions.*

Большинство задач гидродинамики и тепло-массообмена математически сводятся к краевым задачам. Очевидно, что граничные условия определяют вид решений наравне с уравнениями. Однако степень обоснованности у граничных условий на разные неизвестные величины в гидродинамике неодинаковая. В задачах теплообмена краевые условия на температуру выставляются, как правило, физически строго: на границах расчетных областей температура должна быть непрерывной,

в дополнение нормальная компонента теплотока на поверхности раздела также не должна испытывать скачка [1]. Данное условие на теплоток вытекает фактически из закона сохранения энергии и соответствующим образом модифицируется при наличии фазового перехода, источников тепла, экзо- или эндотермической реакции на поверхности. Граничные условия на поле скорости также неоднократно подвергались обсуждению и существенно модифицировались при решении различных ги-

дродинамических задач. Проблема переработки условия прилипания на твердых границах в эффективные граничные условия разносторонне рассмотрена в научной литературе [2, 3].

С решением задач о движении неоднородных по составу жидкостей и газов складывается иная ситуация. В настоящее время наиболее распространены три типа граничных условий на концентрацию компонентов среды, обоснование применимости которых часто представляется недостаточно строгим. Если смесь соприкасается с твердой нерастворимой поверхностью, то на границе раздела должна обращаться в ноль нормальная компонента вектора плотности потока вещества  $J_{n|T}=0$ .

Другая картина складывается при рассмотрении диффузии вещества от твердого тела, растворяющегося в жидкости. Процесс диффузии в ходе растворения тела в жидкости характеризуется наличием локального равновесия вблизи твердой поверхности [4]. В этом случае концентрация в прилегающей к поверхности тела жидкости равна концентрации насыщенного раствора  $C_0$ . Данное положение является следствием того, что диффузия уже растворенного компонента в этом слое идет медленнее, чем сам процесс растворения. В результате имеет место граничное условие на такой поверхности  $C|_T=C_0$ .

Если на границе раздела происходит поглощение попадающего на нее диффундирующего вещества, то краевым будет условие равенства концентрации нулю  $C|_T=0$ . Подобная ситуация имеет место, когда на границе раздела происходит химическая реакция с поглощением растворенного компонента [4].

Диффузионные явления часто характеризуются гигантскими временами. В ходе этих процессов условия на границах рассматриваемой области могут меняться с течением времени, что математически сильно усложняет задачу. Проанализируем процесс оседания частиц в неоднородно нагретой феррожидкости. Малые размеры взвешенных частиц позволяют называть феррожидкость наносuspension. В роли несущей жидкости могут выступать разные среды, но наиболее распространенной является керосин. Взвесь представляет собой практически однодоменные магнетитовые частицы, которые обладают магнитными моментами. Частицы покрываются поверхностно-активным веществом, которое предотвращает их слипание и препятствует дальнейшему выпадению кластеров в осадок. Большие значения магнитных моментов при относительно малых размерах частиц и возможность длительного нахождения во взвешенном состоянии в жидкости-носителе приводят к тому, что феррожидкость ведет себя во внешнем магнитном поле как суперпарамагнетик, т. е. парамагнетик с аномально большой магнитной восприимчивостью [5]. Магнетитовые частицы обсуждаемой феррожидкости имеют характерный размер порядка 10 нм. Скорость оседания таких частиц в керосине можно оценить с помощью формулы Стокса

$$U \sim D\Delta\rho V_0 g / k\bar{T} = 10^{-7} \text{ см/с},$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести;  $D$  – коэффициент диффузии для феррочастиц в керосине;  $V_0$  – объем коллоидной частицы;  $\Delta\rho$  – разность плотностей магнетита и керосина;  $k$  – постоянная Больцмана;  $\bar{T}$  – средняя абсолютная температура в полости. Для коэффициента диффузии частиц при малых концентрациях справедлива формула Эйнштейна. При радиусе частицы 10 нм получается весьма малое значение этого параметра  $D=2 \cdot 10^{-7} \text{ см}^2/\text{с}$ .

Эволюция распределения концентрации частиц при отсутствии конвективного переноса подчиняется уравнению [6]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D(\Delta C + \alpha \Delta T) + U \nabla C \cdot \vec{\gamma}. \quad (1)$$

Здесь  $T$ ,  $C$  – это поля температуры и концентрации частиц;  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $\vec{\gamma}$  – единичный вектор, направленный вертикально вверх;  $\alpha$  – параметр, описывающий явление термодиффузии в коллоиде;  $U$  – скорость оседания частиц. В уравнении учтены три механизма перераспределения частиц в жидкости-носителе: диффузия, термодиффузия и седиментация, т. е. предполагается, что поток вещества определяется формулой

$$\vec{J} = -\rho D(\nabla C + \alpha \nabla T) + \rho C \vec{U}.$$

Изотермическая задача об оседании частиц феррожидкости в тонком вертикальном канале без учета термодиффузии экспериментально и теоретически была рассмотрена в [7]. С другой стороны, для количественного описания перераспределения наночастиц в неоднородно нагретой несущей жидкости все чаще используется подход, основанный на добавлении в выражение для потока вещества дополнительного феноменологического слагаемого по аналогии с тем, как это делается для описания явления термодиффузии в молекулярных смесях. А именно, предполагается, что поток частиц в несущей жидкости пропорционален градиенту температуры с некоторым кинетическим коэффициентом [8]. Удивительной является величина используемого параметра разделения смеси и знак термодиффузии. Так, для описания конвективных процессов в наножидкости Hуflon MFA при плотности частиц  $2,15 \text{ г/см}^3$  и их среднем размере 25 мкм потребовалось предположить, что в рассматриваемой среде имеет место отрицательная термодиффузия с параметром разделения смеси  $\psi=-7,5$ . Однако при таких размерах частиц на фоне внешнего градиента температуры должен действовать классический термофоретический механизм перераспределения взвеси. В этом случае частицы под действием термофоретической силы должны перемещаться из нагретых областей в холодные, что соответствует положительной термодиффузии. Таким образом, вопрос о знаке термодиффузии и величине параметра разделения смеси остается открытым и требует детального экспериментального и теоретического изучения.

При неоднородном нагреве зависимость от времени распределения температуры вдоль вертикального канала в безконвективном приближении описывается стандартным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, \quad (2)$$

где  $\chi$  – температуропроводность смеси. Перекрестными эффектами в выражении для потока тепла в дальнейшем будем пренебрегать. Для одномерного случая, когда температура зависит только от вертикальной координаты, точное решение этого уравнения записывается в виде ряда. Выпишем сначала решение в случае подогрева снизу для реализуемого в опыте набора граничных и начальных условий:

$$T(0, t) = 1, \quad T(l, t) = 0, \quad T(x, 0) = 0,$$

где  $l$  – длина вертикального канала. Распределение температуры в каждый момент времени имеет вид

$$T(x, t) = 1 - \frac{x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{2}{\pi n} \right) \times \exp \left\{ -\frac{\pi^2 n^2}{l^2} \chi t \right\} \sin \left( \frac{\pi n}{l} x \right). \quad (3)$$

Подогреву сверху соответствует другой набор граничных и начальных условий

$$T(0, t) = 0, \quad T(l, t) = 1, \quad T(x, 0) = 0.$$

Уравнение теплопроводности (2) дает следующее решение

$$T(x, t) = \frac{x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n} \times \exp \left\{ -\frac{\pi^2 n^2}{l^2} \chi t \right\} \sin \left( \frac{\pi n}{l} x \right). \quad (4)$$

Легко увидеть, что в канале длиной  $l=5$  см линейный профиль температуры в среде с температуропроводностью  $\chi=0,7 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>/с устанавливается за характерное время

$$\tau_{\chi} \sim l^2 / \pi^2 \chi \approx 1 \text{ ч.}$$

Это много меньше аналогичного диффузионного времени

$$\tau_D \sim l^2 / \pi^2 D \approx 150 \text{ сут.}$$

Далее в зависимости от условий подогрева одно из распределений температуры (3), (4) подставлялось в уравнение (1), которое вследствие нетривиальности граничных условий решалось численно методом конечных разностей. При дискретизации мгновенного поля температуры в ходе суммирования соответствующего ряда учитывалось до 1000 гармоник. Алгоритм для расчета поля концентрации был разработан в соответствии с явной схемой решения уравнений в частных производных [9, 10]. При аппроксимации производных по времени и производных по координатам использо-

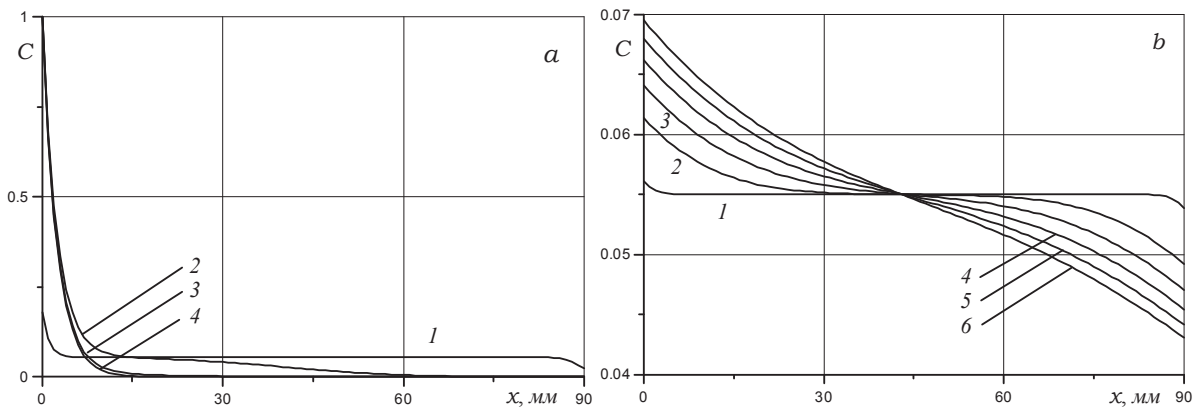
вались, соответственно, односторонние и центральные разности. Рабочее количество узлов вдоль канала варьировалось в интервале 91...101. Вычислительная процедура подразумевала использование различных граничных условий для концентрации частиц на разных этапах процесса седиментации. В начале процесса

$$J_n(0, t) = J_n(l, t) = 0, \quad C(x, 0) = C_0.$$

Для физически больших значений скорости седиментации при достижении концентрации на нижней границе максимального значения  $C=1$  вводился запрет на ее дальнейшее увеличение. В этом случае предполагалось, что за счет быстрого осаждения частиц на нижней границе устанавливалось насыщение, и в дальнейшем внизу использовалось условие  $C(0, t)=1$ . На верхней границе концентрация не может иметь отрицательные значения, поэтому, когда концентрация при  $x=l$  достигала нуля, во все последующие моменты времени накладывалось условие  $C(l, t)=0$ .

Результаты расчетов в предельном случае  $\alpha=0$  хорошо согласуются с данными эксперимента [7], в ходе которого изучался процесс расслоения магнитного коллоида в гравитационном поле в однородных по температуре условиях при малых скоростях оседания. Распределение концентрации по высоте пробирки измерялось индукционным датчиком. Сенсор представлял собой однослойную катушку из медного провода внутренним диаметром 4,6 и длиной 30 мм. Методика измерения распределения концентрации частиц вдоль канала основывалась на установлении связи между величиной индуктивности и динамической магнитной восприимчивостью образца на частоте  $\sim 500$  кГц. Далее по магнитной восприимчивости определялась концентрация частиц. Наблюдения за процессом расслоения проводились в течение  $1,7 \cdot 10^4$  часов. Отметим, что подобная конструкция датчика была использована в [11] при изучении агрегативной устойчивости ферроколлоида. В ходе сравнения с [7] расчеты проводились для следующего набора параметров:  $\chi=7,0 \cdot 10^{-4}$  см<sup>2</sup>/с,  $D=1,9 \cdot 10^{-7}$  см<sup>2</sup>/с,  $l=9$  см,  $C_0=0,055$ ,  $U=1,6 \cdot 10^{-8}$  см/с. Выбранное значение  $C_0$  отвечает 5,5 % массовой концентрации частиц в жидкостеносителе (рис. 1). Вычислялись мгновенные профили концентрации частиц вдоль канала и средние значения концентрации вблизи дна и верхней границы в зависимости от времени. Осреднение проводилось по 1/5 длины канала сверху и снизу и моделировало интегральное измерение концентрации индуктивным датчиком.

Профили концентрации, представленные на рис. 1, показывают, что именно вблизи дна и в верхней части канала изменения концентрации с течением времени наиболее существенны и могут быть зарегистрированы экспериментально. При относительно малых скоростях седиментации (рис. 2, а, кривые 3, 4) даже на временах порядка года концентрация частиц на нижней границе не достигает единицы и коллоид находится в состоя-

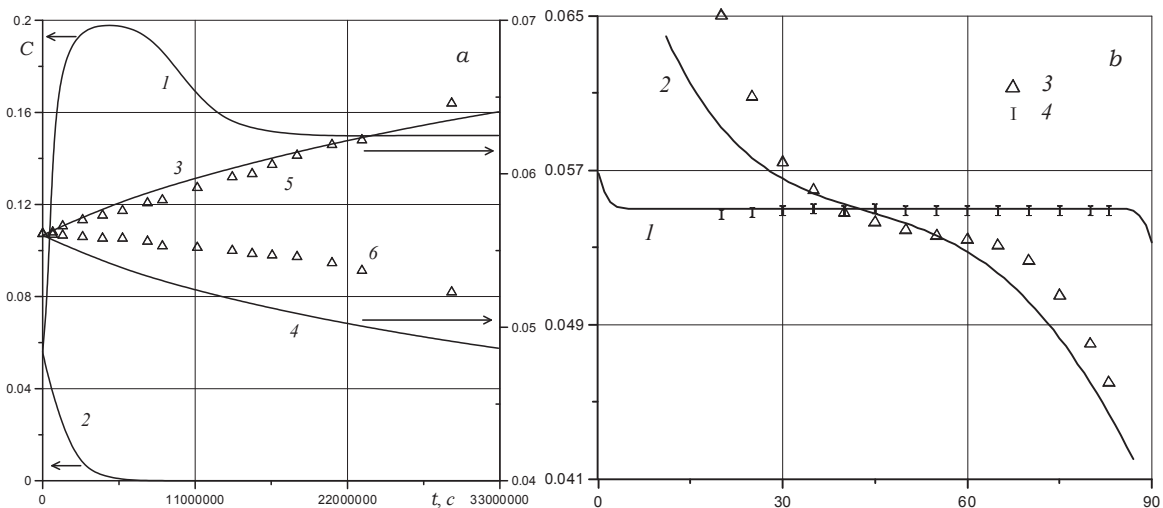


**Рис. 1.** Профили концентрации частиц вдоль канала в разные моменты времени при отсутствии термодиффузии при разных скоростях седиментации: а)  $U=7,6 \cdot 10^{-7}$  см/с, кривые 1-4 отвечают моментам времени  $t=40, 1800, 3700, 5500$  ч; б)  $U=1,6 \cdot 10^{-8}$  см/с, кривые 1-6 соответствуют  $t=40, 1800, 3656, 5500, 7300, 9100$  ч

нии далеко от равновесия. Увеличение скорости осаждения приводит к появлению максимума на графике зависимости средней концентрации вблизи дна канала от времени (рис. 2, а, кривая 1). Этот результат является следствием осреднения концентрации по длине и относительно быстрого стремления суспензии к равновесному состоянию.

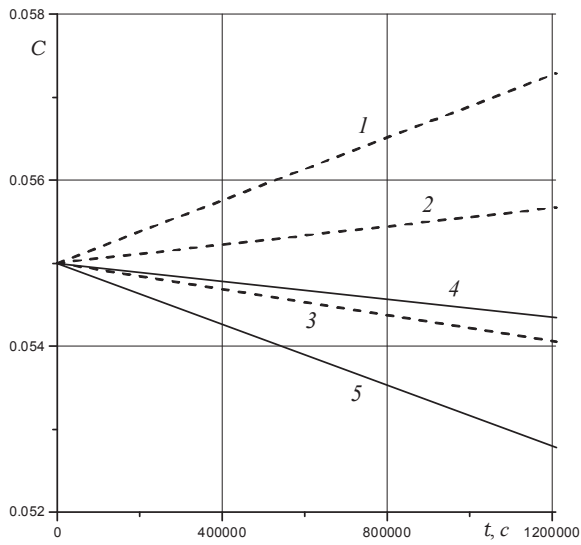
Рабочей феррожидкостью является суспензия с частицами, скорость осаждения которых равна  $U=1,6 \cdot 10^{-8}$  см/с, поэтому дальнейшие результаты расчетов будут представлены именно для этого значения параметра седиментации. При нагреве снизу положительная термодиффузия должна препятствовать седиментации, а отрицательная стремится ускорить процесс осаждения примеси на дно сосуда. В случае нагрева сверху термодиффузионный механизм перераспределения частиц работает противо-

положным образом. На измерении характеристик по разнице в оседании частиц при подогреве сверху и снизу может быть основана экспериментальная методика определения термодиффузионного коэффициента для частиц в феррожидкости. Влияние термодиффузии на процесс перераспределения феррочастиц становится заметным даже на относительно малых временах. На рис. 3 представлены зависимости средней концентрации частиц на торцах канала от времени. Вычисления проведены для модельного значения термодиффузионного параметра при разности температур 1 К и скорости  $U=1,6 \cdot 10^{-8}$  см/с. Кривые 1, 2 и 3 демонстрируют, что за время, равное приблизительно 14 суткам, на дне сосуда в зависимости от знака термодиффузии должна накапливаться разница в концентрации частиц, равная приблизительно 3 %.



**Рис. 2.** Осредненное значение концентрации частиц на торцах канала в зависимости от времени при отсутствии термодиффузии при разных скоростях седиментации: а) 1, 2 –  $U=7,6 \cdot 10^{-7}$  см/с (шкала слева), 3, 4 –  $U=1,3 \cdot 10^{-8}$  см/с (шкала справа);  $C_0=0,056$ . Кривые 1, 3 – средняя концентрация вблизи дна; 2, 4 – концентрация вблизи верхнего торца канала. Символы 5, 6 – концентрация вблизи нижнего и верхнего торцов в опытах [7]; б) профили концентрации в разные моменты времени  $t$ : 1 – 40; 2 – 6700 ч; 3, 4 – экспериментальные данные

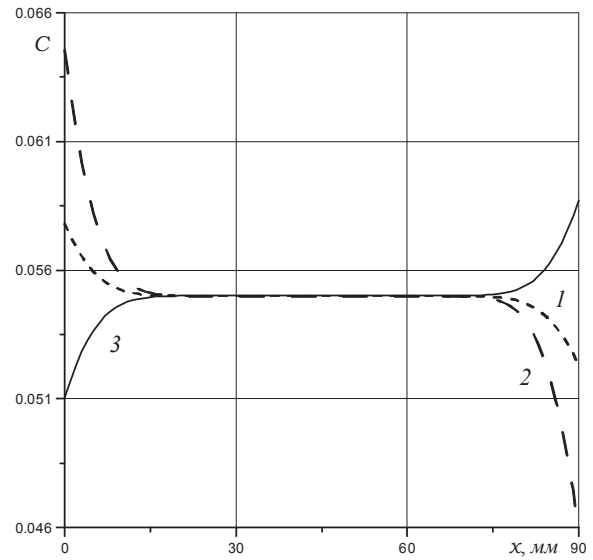




**Рис. 3.** Средняя концентрация частиц на торцах канала в зависимости от времени для разных значений термодиффузионного параметра: штриховые линии 1-3 соответствуют расчету вблизи дна при  $\alpha = -0,1, 0, 0,1 \text{ K}^{-1}$ , сплошные линии 4-6 отвечают концентрации вблизи верхней крышки сосуда при тех же значениях термодиффузионного параметра

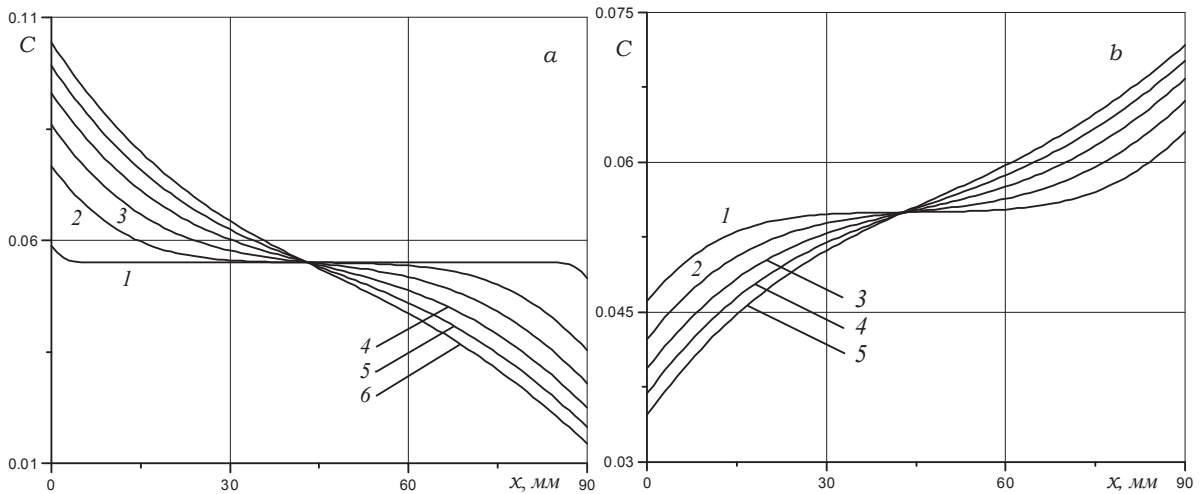
При отсутствии термодиффузии ( $\alpha=0$ ) средняя концентрация частиц у дна растет практически по линейному закону, что хорошо согласуется с точным решением [7], описывающим оседание частиц в безграничном сосуде. Практически в той же мере концентрация частиц на верхней границе канала уменьшается. Близкий к линейному закон изменения средней концентрации на обоих концах канала сохраняется при создании разности температур на теплообменниках для всех четырех возможных вариантов седиментационного поведения. Наличие четырех разных ситуаций обуславливается двумя вариантами подогрева снизу или сверху и разными возможными знаками термодиффузион-

ного коэффициента  $\alpha$  в уравнении (1) для концентрации.



**Рис. 4.** Распределение концентрации частиц в канале через  $t=14$  суток для разных знаков термодиффузии: 1, 2, 3 -  $\alpha=0; -0,1; 0,1 \text{ K}^{-1}$

Расчеты демонстрируют принципиально разное действие термодиффузии в смеси на любых временах. Сравним продольные распределения концентрации при положительной и отрицательной термодиффузии, анализируя рис. 5. Численное моделирование показывает, что действие термодиффузии на перераспределение частиц в жидкости-носителе становится сопоставимым с седиментацией уже при значениях термодиффузионного коэффициента  $\alpha \sim 0,1 \text{ K}^{-1}$  вне зависимости от знака этого параметра. Для перепада температуры всего  $0,11 \text{ K/cm}$  действие термодиффузии при указанных значениях термодиффузионного параметра не может остаться незамеченным в эксперименте.



**Рис. 5.** Распределение концентрации частиц вдоль канала в разные моменты времени. Кривые 1-6 соответствуют  $t=40; 1800; 3700; 5500; 7300; 9100$  ч для разных знаков термодиффузии: а)  $\alpha = -0,1 \text{ K}^{-1}$ ; б)  $\alpha = 0,1 \text{ K}^{-1}$

## Выводы

Результаты расчетов показывают возможность экспериментального измерения термодиффузионного коэффициента для феррожидкости на основе керосина с размерами частиц порядка 10 нм. Разработанная методика позволяет распространить ее на другие коллоидные растворы

для частиц различных размеров с произвольной плавучестью.

*Работа поддержана грантом РФФИ «Колебательные конвективные процессы в нано- и микрожидкостях в микрофлюидических системах: анализ и контроль» в рамках регионального конкурса инициативных проектов «Урал-а». Код проекта 13-01-96010.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с.
3. Gershuni G.Z., Lyubimov D.V. Thermal vibrational convection. – NY: Wiley&Sons, 1998. – 358 p.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики. Т. VI. Гидродинамика. – М.: Физматлит, 2001. – 736 с.
5. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. – М.: Мир, 1989. – 356 с.
6. Shliomis M.I., Smorodin B.L. Onset of convection in colloids stratified by gravity // Phys. Rev. E. – 2005. – V. 71. – P. 036312 (6).
7. Глухов А.Ф., Путин Г.Ф. Установление равновесного барометрического распределения частиц в магнитной жидкости // Сб.

- Гидродинамика. – Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1999. – Вып. 12. – С. 92–103.
8. Смородин Б.Л., Черепанов И.Н. Волновые режимы течения наножидкости в замкнутой полости // Вестн. Пермск. ун-та. Сер. Физика. – 2012. – Вып. 3 (21). – С. 1–5.
9. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
10. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. – 225 с.
11. Peterson E.A., Kruger D.A. Field induced agglomeration in magnetic colloids // J. Colloid and Interface Science. – 1977. – V. 62. – № 1. – P. 24–33.

Поступила 02.01.2013 г.

УДК 538.911, 539.32

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПОСОБ РАСЧЕТА УПРУГИХ МОДУЛЕЙ ОБРАЗЦОВ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ С ГПУ-РЕШЕТКОЙ

И.Ю. Зубко, М.В. Симонов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет  
E-mail: zoubko@pstu.ru

На основе разработанного ранее алгоритма теоретического исследования упругих свойств металлических микро- и нано-монокристаллов с кубическими решетками [1, 2] вычисляются упругие модули образцов конечных размеров с гексагональной плотноупакованной решеткой. Форма образца согласована с симметрией решетки [3]. В качестве потенциала выбирается степенной потенциал Ми. Для исследования упругих свойств используется подход атомарной статики. Задается вид деформационного градиента и определяется текущая конфигурация кристалла. Для расчета упругих модулей в текущей конфигурации кристалла вычисляется полная потенциальная энергия образца, отнесенная к его объему. Приравнивая квадратичные слагаемые в ее разложении в степенной ряд по параметрам деформирования упругому потенциалу, определяются упругие модули образца. Показано, что гексагональная плотноупакованная решетка, состоящая из двух простых подрешеток, не может при заданной аффинной кинематике деформироваться однородно. Для обеспечения минимума потенциальной энергии гексагонального плотноупакованного кристалла в текущей конфигурации необходимо задавать относительное смещение подрешеток, зависящее от параметров деформирования. Получено, что упругие модули гексагонального плотноупакованного кристалла зависят от размеров образца. Эта зависимость имеет горизонтальную асимптоту, соответствующую макроскопическому монокристаллическому телу с известными упругими свойствами, что позволяет провести идентификацию параметров потенциала взаимодействия атомов. Все вычисления в работе выполнены в символьном виде с помощью пакета Wolfram Research «Mathematica».

### Ключевые слова:

ГПУ-решетка, микро- и нанокристаллы, вычисление упругих модулей, идентификация параметров потенциала взаимодействия атомов, зависимость механических свойств от размеров тела.

### Key words:

HCP-lattice, micro- and nanocrystals, elastic module computation, identification of interatomic potential parameters, dependence of mechanical properties on specimen size.

### Аффинное деформирование ГПУ-монокристалла

Для металлов наряду с гранецентрированной (ГЦК) и объемцентрированной кубической (ОЦК) кристаллической решеткой одним из наиболее

распространенных типов является гексагональная плотноупакованная (ГПУ) решетка [4]. Такое строение имеют титан, цинк, цирконий, бериллий, магний и ряд других металлов. Используя изобра-

жение решеток в виде набора шаров, можно представить, что ГПУ-решетка обладает двухслойной периодичностью, последовательность ее слоев по вертикали записывают в виде ...АВАВАВ..., причем слои, условно обозначаемые как А и В, соответствуют наиболее плотному периодическому расположению шаров на плоскости (их центры лежат в узлах периодической сетки из правильных треугольников). Структуры этих слоев не отличаются, но один слой в ГПУ-решетке сдвинут относительно другого так, что атомы слоя А расположены напротив центров пустот слоя В (рис. 1, б, в). Для ГПУ-решетки выделяют две простые подрешетки, они являются объединением слоев атомов типа А или В. ГПУ-решетка в отличие от ГЦК или ОЦК-решетки характеризуется не одним, а двумя межатомными расстояниями. Переменная  $a$  используется для обозначения равновесного расстояния между атомами одного слоя, а переменная  $b$  – для обозначения равновесного расстояния между одноименными слоями (удвоенное расстояние между слоями А и В).

При исследовании механических свойств образца с ГПУ-решеткой конечных размеров для исключения влияния на результат наложения классов симметрий образца и решетки рассматривается тело, имеющее оси симметрии такого же порядка, что и сама кристаллическая решетка. Для ГПУ-решетки в работе [3] обоснован выбор формы образца в виде прямоугольной призмы с правильным треугольником в основании (рис. 1). В этом случае все боковые грани содержат одинаковое количество атомов.

При вычислении упругих модулей ГПУ-кристалла для него определяются отсчетная и текущая конфигурация, связь между которыми задается аффинором (деформационный градиент в механике сплошных сред). Принимается, что в обеих конфигурациях структура решетки строго задана и расстояние между соседними атомами любой из подрешеток не меняется по образцу. Отсчетная конфигурация кристалла определяется только

значениями параметров  $a$  и  $b$ , соответствующих минимуму (по двум переменным  $a$  и  $b$ ) удельной потенциальной энергии  $\Phi$  образца:

$$\Phi \rightarrow \min_{a,b}, \Phi = \sum_{k>j} \sum_j \varphi(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_j) / \text{Mes}(V),$$

$$\mathbf{R}_k, \mathbf{R}_j \in V, \text{Mes}(V) = \sqrt{3} a^2 b N^3 / 4,$$

где  $\varphi(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_j)$  – потенциальная энергия взаимодействия пары атомов с радиус-векторами  $\mathbf{R}_k$  и  $\mathbf{R}_j$ ;  $V$  – область, занимаемая исходным образцом;  $\text{Mes}(V)$  – ее объем. Поскольку в определении используется потенциальная энергия системы, то равновесные расстояния связаны с параметрами выбранного межатомного потенциала. Для моделирования взаимодействия атомов в металлах с ГПУ-строением выбирается степенной потенциал Леннарда-Джонсовского типа, описывающий для двух атомов свойство отталкиваться на малых и притягиваться на больших расстояниях и содержащий два слагаемых степенного вида с противоположными знаками. Показатели степени (крутизна соответствующих кривых) в этих слагаемых описывают убывание взаимодействия с расстоянием. Такой потенциал называется потенциалом Ми [5, 6]:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \beta (n(\alpha/|\mathbf{x}|)^m - m(\alpha/|\mathbf{x}|)^n) / (m - n), \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}$  – вектор, соединяющий два атома;  $\alpha$  – равновесное расстояние для пары атомов;  $\beta$  – энергия, соответствующая глубине потенциальной ямы взаимодействия двух атомов. Для потенциала Леннарда-Джонса  $m=12, n=6$ .

В работе [3] с помощью силового подхода получены представления параметров ГПУ-решетки  $a$  и  $b$  через параметр  $\alpha$  для различных значений показателей степени  $m$  и  $n$  потенциала Ми. Показано, что любой паре значений показателей степени  $m$  и  $n$  в потенциале Ми соответствует определенное отношение параметров кристаллической ГПУ-решетки  $b/a$ . При использовании энергетического подхода идентификация параметров потенциала дает иной результат. Например, равновесные параметры решетки магния суть  $a^{\text{Мг}}=3,208 \cdot 10^{-4}$  (мкм),

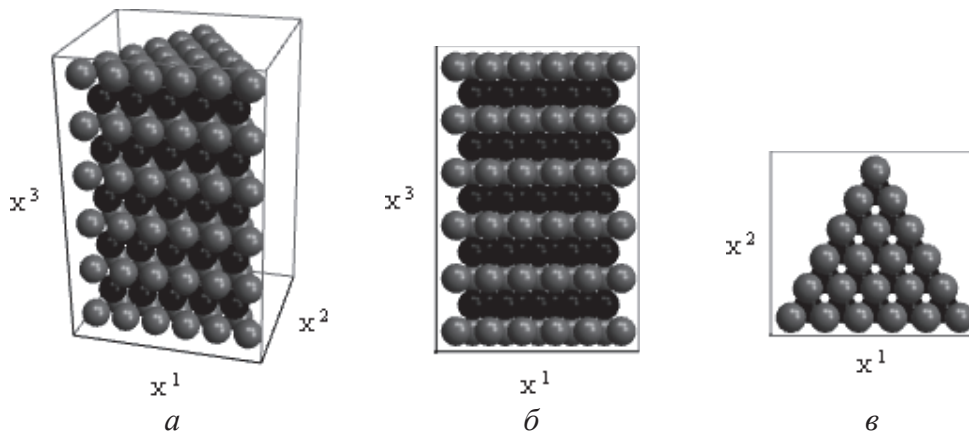


Рис. 1. Образец с ГПУ-решеткой, атомы слоя А изображены серым цветом, атомы слоя В – черным цветом: а) общий вид; б) вид спереди; в) вид сверху

$b^{Mg}=7,610 \cdot 10^{-4}$  (мкм), их отношение равно  $b^{Mg}/a^{Mg}=1,6240$ . Им соответствуют параметры потенциала Ми  $m=12, n=4, \alpha=3,64 \cdot 10^{-4}$  (мкм). Расчеты с этими значениями дают  $b^{\circ}/a^{\circ}=1,6245$  (отклонение 0,03 %),  $a^{\circ}=0,8823\alpha, b^{\circ}=1,4333\alpha$ . Потенциал Леннард-Джонса позволяет получить отношение  $b^{\circ}/a^{\circ}=1,6314$  ( $a^{\circ}=0,9422\alpha, b^{\circ}=1,5370\alpha$ ), ближе всех из металлов с ГПУ-решеткой к которому стоит кобальт  $b^{Co}/a^{Co}=1,6329$ .

Текущая конфигурация кристалла получается в результате действия на его отсчетную конфигурацию аффинора  $\mathbf{F}$ , в результате чего радиус-вектор  $\mathbf{R}_i$  каждого атома из отсчетной конфигурации переходит в радиус-вектор  $\mathbf{r}_i=\mathbf{F} \cdot \mathbf{R}_i$  текущей конфигурации. При исследовании упругих свойств образца рассматриваются чистое растяжение-сжатие вдоль произвольной оси  $l, \mathbf{F}=\mathbf{E}+(\lambda-1)\mathbf{U}$ , где  $l$  – единичный вектор;  $\lambda$  – кратность удлинения;  $\mathbf{E}$  – единичный тензор второго ранга, или простой сдвиг в плоскости с нормалью  $\mathbf{n}$  в направлении  $\mathbf{b} \mathbf{F}=\mathbf{E}+\gamma\mathbf{bn}$ , где  $\gamma$  – интенсивность сдвига. Элементарный объем  $dV$  меняется как  $dV=JdV$ , где  $J=\det\mathbf{F}$ .

Тензор напряжений Коши  $\sigma$ , определенный в текущей конфигурации, при упругом деформировании металлов (являющимся малым) связан с линейным тензором малых деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}=(\mathbf{F}+\mathbf{F}^T)/2-\mathbf{E}$ , обобщенным законом Гука

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2)$$

где тензор четвертого ранга  $\mathbf{C}$  – тензор линейно-упругих свойств материала. В силу симметрии  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $\boldsymbol{\sigma}$  тензор  $\mathbf{C}$  симметричен относительно перестановок внутри первой и последней пар индексов  $C_{ijkl}=C_{jikl}=C_{ijlk}$ , и закон Гука (2) можно представить в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\mathbf{F} - \mathbf{E}). \quad (3)$$

Плотность внутренней энергии (упругий потенциал) для линейно-упругой среды

$$u = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{F} - \mathbf{E}) : \mathbf{C} : (\mathbf{F} - \mathbf{E})$$

из термодинамических соображений представляет собой положительно определенную квадратичную форму, то есть  $u > 0$  при любых  $\boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$  и  $u = 0$  только при нулевых деформациях  $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ . Отсюда следует дополнительная симметрия компонент тензора  $\mathbf{C}$  относительно перестановки первой и последней пар индексов  $C_{ijkl}=C_{klij}$ .

Симметрия тензора напряжений Коши следует из уравнения баланса момента количества движения для неполярных сред. В экспериментах с макрообразцами металлов несимметрии тензора напряжений Коши не обнаружено. Но для объектов наноразмера утверждение о симметрии тензора  $\boldsymbol{\sigma}$  экспериментально не обосновано и не опровергнуто. Если в качестве исходной формы обобщенного закона Гука принять соотношение (3), в правой части которого фигурирует несимметричный тензор дисторсии  $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{F}-\mathbf{E}$ , появляется возможность исследовать вероятные несимметричные упругие свойства кристаллов наноразмеров. При этом не предполагается априорной симметрии тензора напря-

жений Коши, то есть согласно структуре соотношения (3) из него не следует симметрия внутри пар индексов компонент тензора линейно-упругих модулей, в общем случае будем рассматривать  $C_{ijkl} \approx C_{jikl} \approx C_{ijlk}$ .

При разложении тензора дисторсии  $\boldsymbol{\beta}$  на сумму  $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\omega}$  симметричной  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и кососимметричной  $\boldsymbol{\omega}$  частей, из (3) следует равенство  $\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{C}:\boldsymbol{\omega}$ . В тензоре четвертого ранга  $\mathbf{C}$  можно выделить полусимметричную часть  $\mathbf{C}^{(s,s)}$ , для которой выполняются условия симметрии в парах индексов  $C_{ijkl}^{(s,s)}=C_{jikl}^{(s,s)}=C_{ijlk}^{(s,s)}$ , «полуантисимметричную» часть  $\mathbf{C}^{(a,a)}$ , для которой справедливо  $C_{ijkl}^{(a,a)}=-C_{jikl}^{(a,a)}=-C_{ijlk}^{(a,a)}$ , и две смешанные части  $\mathbf{C}^{(s,a)}$  и  $\mathbf{C}^{(a,s)}$ , для которых принимается  $C_{ijkl}^{(s,a)}=C_{jikl}^{(s,a)}=-C_{ijlk}^{(s,a)}$ ,  $C_{ijkl}^{(a,s)}=-C_{jikl}^{(a,s)}=C_{ijlk}^{(a,s)}$ . Подставляя  $\mathbf{C}=\mathbf{C}^{(s,s)}+\mathbf{C}^{(s,a)}+\mathbf{C}^{(a,s)}+\mathbf{C}^{(a,a)}$  в закон (3), получим:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{(s,s)} : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C}^{(a,s)} : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C}^{(s,a)} : \boldsymbol{\omega} + \mathbf{C}^{(a,a)} : \boldsymbol{\omega},$$

следовательно, несимметричный тензор напряжений разделяется на симметричную  $\boldsymbol{\sigma}^{(s)}=\mathbf{C}^{(s,s)}:\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{C}^{(s,a)}:\boldsymbol{\omega}$  и антисимметричную части  $\boldsymbol{\sigma}^{(a)}=\mathbf{C}^{(a,s)}:\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{C}^{(a,a)}:\boldsymbol{\omega}$ . Упругая энергия в «несимметричном случае» представляется в виде

$$u = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}^{(s,s)} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} : \mathbf{C}^{(a,a)} : \boldsymbol{\omega}. \quad (4)$$

Симметрия по парам индексов здесь учтена в виде  $\boldsymbol{\varepsilon}:\mathbf{C}^{(s,a)}:\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}:\mathbf{C}^{(a,s)}:\boldsymbol{\varepsilon}=0$ . Из представления (4) следует, что тензоры  $\mathbf{C}^{(s,s)}$  и  $\mathbf{C}^{(a,a)}$ , составляющие тензор линейно-упругих свойств  $\mathbf{C}$ , являются положительно определенными. Сумма тензоров  $\mathbf{C}^{(s,a)}$  и  $\mathbf{C}^{(a,s)}$  также является положительно определенной.

Кососимметричная часть дисторсии  $\boldsymbol{\omega}$  при малых деформациях, характерных для упругого отклика металлов, описывает поворот образца как жесткого тела. Для определения соответствующих компонент тензора линейно-упругих свойств  $\mathbf{C}^{(s,a)}$ ,  $\mathbf{C}^{(a,s)}$  и  $\mathbf{C}^{(a,a)}$  необходимо, чтобы возникла реакция образца на задаваемый тензором  $\boldsymbol{\omega}$  поворот. Она возможна только при наличии связи между атомами образца и некоторого его окружения, например, такая ситуация может реализоваться в поликристалле при повороте некоторого зерна относительно своих соседей. Таким образом, для монокристалла могут быть определены упругие модули, входящие в тензор  $\mathbf{C}^{(s,s)}$ , а модули  $\mathbf{C}^{(a,a)}$ ,  $\mathbf{C}^{(s,a)}$  и  $\mathbf{C}^{(a,s)}$  отражают взаимодействия зерен в поликристалле и зависят от различия во взаимной ориентации и относительного расположения зерен.

#### Строение несимметричного тензора упругих свойств ГПУ-монокристалла

При наложении ортогонального преобразования (например, поворота образца) компонент тензора  $\mathbf{C}$  преобразуются по закону  $\mathbf{C}^*=\mathbf{C}_{ijk}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}^i)(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}^j)(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}^k)(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}^l)$ , где  $\mathbf{Q}$  – собственно ортогональный тензор. Если преобразование  $\mathbf{Q}$  принадлежит группе  $L_C$  симметрии тензора линейно упругих свойств, то справедливо равенство  $\mathbf{C}^*=\mathbf{C}$ . Это условие дает систему дополнительных ограничений на компоненты тензора  $\mathbf{C}$ :

$$C_{mnpq} = C_{ijkl} Q_m^i Q_n^j Q_p^k Q_q^l, \quad i, j, k, l = \overline{1,3}. \quad (5)$$

В работе [7] установлен изоморфизм 21-мерного пространства упругих модулей для 3-мерной среды и эрмитова пространства той же размерности для симметричного тензора  $C$ . Введенные в [7] соотношения позволяют проводить анализ его строения для различных классов симметрии материала. Например, для ГПУ-монокристалла получено 5 независимых ненулевых компонент

$$C_{1111}, C_{1122}, C_{1133}, C_{2323}, C_{3333}. \quad (6)$$

Для несимметричного тензора  $C$  требуется проводить отдельное исследование.

В качестве осей координат выберем оси, связанные с кристаллической решеткой, как показано на рис. 1. Базисные векторы, соответствующие этим осям, будем обозначать как  $e_i, i=1,3$ . Тогда группа симметрии  $L_C$  будет содержать помимо тождественного преобразования  $E$  и инверсии  $-E$  преобразования поворота  $Q_{e_3}^{2\pi/3}$  вокруг оси  $e_3$  на угол  $2\pi/3$  и преобразования зеркальной симметрии  $R_1$  и  $R_3$  относительно плоскостей с нормальными  $e_1, e_3$ . Анализ системы (5) с тензорами  $Q_{e_3}^{2\pi/3}, R_1$  и  $R_3$  с учетом симметрии по парам индексов дает 8 ненулевых независимых компонент:

$$C_{1111}, C_{1122}, C_{1133}, C_{2323}, C_{2332}, C_{3232}, C_{3333}. \quad (7)$$

Наложение условия симметрии внутри пар индексов приводит к обычному набору (6) компонент полусимметричного тензора линейно-упругих свойств, полученному в [7].

#### Постановка численных экспериментов для определения упругих модулей

При наложении на образец заданной аффинной деформации с помощью (1) вычисляется потенциальная энергия исследуемого образца с ГПУ-решеткой. Упругая энергия материала сопоставляется с вычисленной потенциальной энергией ГПУ-образца. В опыте на трехосное растяжение-сжатие вдоль выбранных координатных осей (рис. 1) с кратностями удлинения  $\lambda_i, i=1,3$  упругая энергия принимает вид:

$$u = \frac{1}{2} C_{1111} (\lambda_1 - 1)^2 + \frac{1}{2} C_{1111} (\lambda_2 - 1)^2 + C_{1122} (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1) + \frac{1}{2} C_{3333} (\lambda_3 - 1)^2 + C_{1133} (\lambda_1 - 1)(\lambda_3 - 1) + C_{1133} (\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 1). \quad (8)$$

Причем

$$C_{1111} > 0, C_{3333} > 0, C_{1111} + C_{1122} > 0, C_{1111} + C_{3333} + 2C_{1133} > 0.$$

При простом сдвиге, для которого  $\beta_{12} = \gamma$  (остальные компоненты  $\beta_{ij} = 0$ ), и при простом сдвиге, для которого  $\beta_{21} = \gamma$  (остальные  $\beta_{ij} = 0$ ), упругая энергия одинакова:

$$u = \frac{1}{2} (C_{1111} - C_{1122} - C_{1212}) \gamma^2, \quad C_{1111} - C_{1122} - C_{1212} > 0. \quad (9)$$

В серии опытов на простой сдвиг образца, в которых одна из следующих компонент тензора дисторсии отлична от нуля:  $\beta_{13} = \gamma$  или  $\beta_{31} = \gamma$ , или  $\beta_{23} = \gamma$ , или  $\beta_{32} = \gamma$ , а остальные равны нулю  $\beta_{ij} = 0$ , выражения для упругой энергии также совпадают:

$$u = \frac{1}{2} C_{2332} \gamma^2, \quad C_{2332} > 0. \quad (10)$$

Таким образом, с использованием энергетического подхода можно определить только 6 упругих модулей  $-C_{1111}, C_{1122}, C_{1133}, C_{1212}, C_{2332}, C_{3333}$ . Для симметричного случая справедливо соотношение  $C_{1212} = (C_{1111} - C_{1122})/2$  [7], которое может быть проверено для ГПУ-монокристалла конечного размера с помощью прямого расчета.

Возникновение несимметрии упругого отклика в виде  $C_{1212} \approx (C_{1111} - C_{1122})/2$  может проявиться только при деформировании, содержащем сдвиги в плоскости  $x'Ox^2$ . Если происходит простой сдвиг с компонентами дисторсии  $\beta_{12} = \gamma$ , остальные  $\beta_{ij} = 0$ , или простой сдвиг, в котором  $\beta_{21} = \gamma$ , остальные компоненты  $\beta_{ij} = 0$ , то из (3) и (7):

$$\begin{cases} \sigma_{12} = (C_{1111} - C_{1122} - C_{1212}) \gamma, \\ \sigma_{21} = C_{1212} \gamma \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sigma_{12} = C_{1212} \gamma, \\ \sigma_{21} = (C_{1111} - C_{1122} - C_{1212}) \gamma, \end{cases}$$

остальные компоненты равны нулю. При простом сдвиге влияние «несимметричных» компонент тензора упругих модулей приводит к появлению кососимметричной части тензора напряжений  $\sigma^{(s)}$ .

Ее аксиальный вектор  $\sigma_x = \frac{1}{2} \epsilon : \sigma^{(s)}$  в этих двух случаях равен

$$\sigma_x = \{0; 0; \frac{1}{2} (C_{1111} - C_{1122} - 2C_{1212}) \gamma\}$$

или

$$\sigma_x = \{0; 0; -\frac{1}{2} (C_{1111} - C_{1122} - 2C_{1212}) \gamma\}.$$

То есть при  $C_{1111} - C_{1122} - 2C_{1212} > 0$  в качестве реакции образца на простой сдвиг может возникнуть момент, стремящийся повернуть образец в направлении, противоположном сдвигу. Для симметричной части тензора напряжений  $\sigma^{(s)}$  в обоих случаях справедливо  $\sigma_{12}^{(s)} = \sigma_{21}^{(s)} = 1/2 (C_{1111} - C_{1122}) \gamma$ , остальные  $\sigma_{ij}^{(s)} = 0$ , что соответствует закону Гука (2).

#### Вычислительный эксперимент с помощью подхода атомарной статики

Для теоретического исследования физических свойств конденсированных сред на микро- и наноровнях нередко применяется дискретный подход, основанный на прямом моделировании движения частиц, вызванного их взаимодействием и приложенными внешними воздействиями. Наиболее распространенным является метод молекулярной динамики (МД), при использовании которого для каждой частицы (атома или молекулы) численно решаются уравнения движения (уравнения баланса количества движения и момента количества движения), содержащие силы и моменты взаимодействия выбранной частицы со всеми остальными частицами тела или с частицами из некоторой ее окрестности [5, 6, 8]. Силы взаимодействия частиц вводятся с помощью потенциалов межатомного взаимодействия. Получаемые количественные ре-

зультаты зависят от заранее заданных числовых значений параметров потенциалов.

В данной статье применяется подход, основанный на методе атомарной статистики. В основе подхода лежит рассмотрение статистики взаимодействующих частиц при явном задании структуры кристаллической решетки. Для проведения расчетов используется потенциал Ми (1). Применение статической постановки и точного задания положений атомов в кристаллической решетке позволяет получить аналитическое решение задачи по определению упругих свойств образца конечного размера для произвольных значений параметров потенциала, рассматриваемых как переменные исследуемых функций (упругих модулей). Точные выражения для упругих модулей получаются для объемов материала с небольшим числом атомов  $N$  на ребре образца (от 3 до 20). Для получения макроскопических значений параметров по этим точным решениям делается предельный переход  $N \rightarrow \infty$ . Это позволяет идентифицировать параметры потенциала.

При действии аффинора на отсчетную конфигурацию кристалла, задаваемую параметрами решетки  $a$  и  $b$ , слои А и В ГПУ-образца деформируются одновременно, что приводит к нарушению симметрии расположения атомов типа В в лунках между атомами типа А (рис. 2, а). Нарушение однородности расположения атомов решетки при наложении общей однородной деформации кристалла более детально показано для отдельного треугольника, образованного атомами типа А, в лунке между которыми расположен атом типа В. Положение  $C'$  атома типа В после такого деформирования (полупрозрачный шар на рис. 2, в) не соответствует центру  $C''$  описанной окружности треугольника из атомов типа А. Новый центр  $C'''$  определяется геометрически (черный шар на рис. 2, в). Тогда при растяжении в плоскости  $x^1Ox^2$  дополнительное смещение атома типа В относительно атомов типа А, зависящее от кратностей удлинения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , приводит к уменьшению потенциальной энергии системы атомов:

$$C'C'' = |\Delta x^2| = a \left| \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \right| / 4\sqrt{3} \lambda_2. \quad (11)$$

Следовательно, решетка ГПУ-кристалла, состоящая из двух простых подрешеток типа А и В, при заданной аффинной кинематике (предписанном деформационном градиенте) не всегда может деформироваться однородно.

При растяжении-сжатии вдоль оси  $Ox_3$  однородность ГПУ-решетки не нарушается и дополнительного смещения слоев В относительно слоев А не требуется. Полученное точное решение (11) для смещения центрального атома в треугольнике может не обеспечивать минимум потенциальной энергии для более сложной системы атомов ГПУ-монокристалла. Две ненулевые компоненты взаимного смещения слоев ГПУ-кристалла в плоскости  $x^1Ox^2$  являются двумя дополнительными степенями свободы кристаллической решетки при де-

формировании кристалла. Поиск этих (малых) смещений для ГПУ-кристалла рассматриваемой формы проводится с помощью разложения в степенной ряд полной потенциальной энергии образца  $\Phi$  по искомым параметрам с точностью до членов второй степени. Для этого в текущей конфигурации атомам типа А предписывается смещение  $\{\delta_1 a; \delta_2 a; 0\}$ , а атомам типа В – смещение  $\{-\delta_1 a; -\delta_2 a; 0\}$  с произвольными  $\delta_1, \delta_2$ . При деформации растяжения-сжатия вдоль осей  $Ox^i, i=1,3$  зеркальная симметрия кристалла относительно плоскости  $x^2Ox^3$  не нарушается и смещение  $\delta_1=0$ , определения требует только параметр  $\delta_2$ . Положения атомов  $\hat{\mathbf{r}}_i^{(A)}$  и  $\hat{\mathbf{r}}_i^{(B)}$  слоев А и В соответственно в текущей конфигурации находятся как

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_i^{(A)} &= \mathbf{r}_i^{(A)} + \{0; \delta_2 a; 0\} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{R}_i^{(A)} + \{0; \delta_2 a; 0\}, \\ \hat{\mathbf{r}}_i^{(B)} &= \mathbf{r}_i^{(B)} - \{0; \delta_2 a; 0\} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{R}_i^{(B)} - \{0; \delta_2 a; 0\}. \end{aligned}$$

Для заданного размера образца при известных из [3] значениях равновесных параметров ГПУ-решетки  $a, b$  и произвольных параметрах  $\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и  $\delta_2$  находится выражение для полной потенциальной энергии образца. Это выражение раскладывается в степенной ряд по кратностям удлинения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  в окрестности  $\lambda_i=1$  и по смещению  $\delta_2$  в окрестности  $\delta_2=0$ . В этом ряду берутся только члены, линейные по малым  $\lambda_i-1$ , и члены до второй степени включительно по  $\delta_2$ . Минимум получаемой квадратичной функции по  $\delta_2$  определяется как вершина параболы. В результате смещение  $\delta_2$  выражается как функция только от параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . В частности, для образца с  $N=6$  атомами потенциал Леннард-Джонса дает функцию

$$\delta_2 \approx 0,1817(\lambda_1 - \lambda_2),$$

причем при равных кратностях удлинения  $\lambda_1=\lambda_2$  (всестороннее расширение в плоскости  $x^1Ox^2$ ) дополнительное смещение, как и следовало ожидать, равно нулю. При увеличении числа атомов на ребре образца коэффициенты при  $\lambda_1-\lambda_2$  возрастают и образуют сходящуюся числовую последовательность. В пределе при числе атомов на ребре  $N \rightarrow \infty$ , соответствующем макроуровню, получается зависимость

$$\delta_2^\infty \approx 0,1994(\lambda_1 - \lambda_2).$$

При учете малости отклонения кратностей удлинения от 1 из (11) следует соотношение, которое отличается от полученной оценки для всего образца:

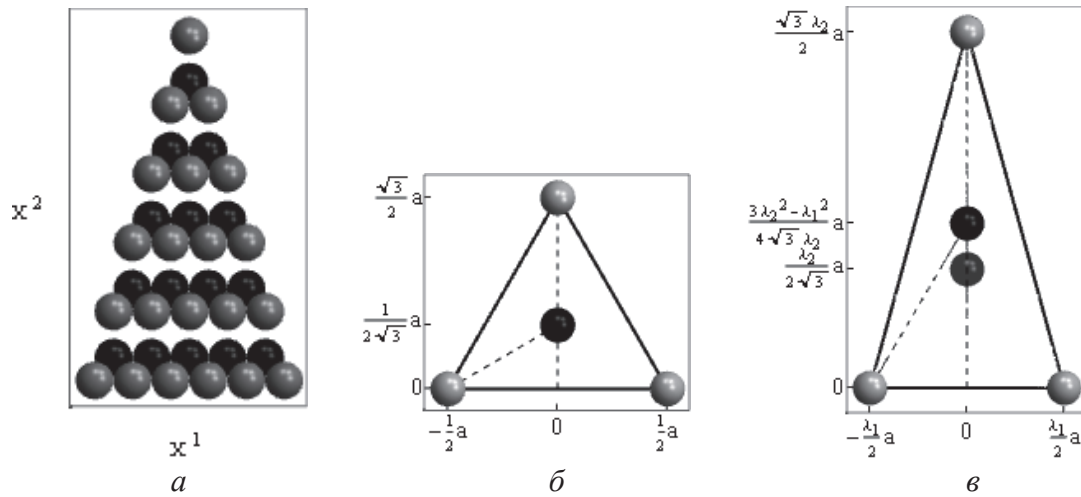
$$\delta_2 = |\Delta x^2| / 2a \approx (\lambda_1 - \lambda_2) / 4\sqrt{3} \approx 0,1444(\lambda_1 - \lambda_2).$$

При наложении аффинной кинематики вычисляется потенциальная энергия

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} &= \sum_{k \neq j} \sum_j \varphi(\hat{\mathbf{r}}_k - \hat{\mathbf{r}}_j) / \text{Mes}(\hat{V}), \\ \hat{\mathbf{r}}_k, \hat{\mathbf{r}}_j &\in \hat{V}, \quad \text{Mes}(\hat{V}) = J \text{Mes}(V) \end{aligned}$$

деформированного ГПУ-образца, деленная на объем деформированного образца  $\hat{V}$ , раскладывается в степенной ряд по параметрам деформирова-





**Рис. 2.** Неоднородная структура при растяжении ГПУ-решетки в плоскости  $x'Ox^2$  ( $\lambda_2 > \lambda_1$ ): а) слои А и В; б) «элементарный треугольник» атомов до деформации (шары уменьшены); в) «элементарный треугольник» после деформации, полупрозрачный шар соответствует положению атома типа В без дополнительного смещения (11)

ния при сохранении членов до второй степени включительно. Линейные слагаемые в этом разложении оказываются нулевыми. Квадратичные слагаемые приравниваются соответствующему упругому потенциалу (8)–(10). В частности, для образца с  $N=6$  атомами на ребре при трехосном растяжении-сжатии образца с использованием потенциала Леннард-Джонса потенциальная энергия (учитывалось, что  $\bar{V} = \sqrt{3}a^2bN^3\lambda_1\lambda_2\lambda_3/4$ ) равна

$$u - u_0 \approx (97,7144(\lambda_1 - 1)^2 + 92,0764(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1) + 97,7144(\lambda_2 - 1)^2 + 67,9871(\lambda_1 - 1)(\lambda_3 - 1) + 67,9871(\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 1) + 118,4084(\lambda_3 - 1)^2)\beta/\alpha^3,$$

где  $u_0$  – потенциальная энергия в недеформированном состоянии. Сопоставляя  $u - u_0$  с (8), получим значения упругих модулей для ГПУ-образца с  $N=6$  атомами на ребре:

$$C_{1111} = 195,43\beta/\alpha^3, \quad C_{1122} = 92,08\beta/\alpha^3, \\ C_{1122} = 92,08\beta/\alpha^3, \quad C_{3333} = 236,82\beta/\alpha^3.$$

При реализации простого сдвига, при котором  $\beta_{12} = \gamma$  (остальные компоненты  $\beta_{ij} = 0$ ), и при простом сдвиге, при котором  $\beta_{21} = \gamma$  (остальные компоненты  $\beta_{ij} = 0$ ), для ГПУ-образца при  $N=6$  атомах найдены дополнительные смещения  $\delta_1 = 0,1893\gamma$ ,  $\delta_2 = 0$ . Выражения для упругой энергии, полученные в этих опытах, совпадают:

$$u - u_0 \approx 25,84\gamma^2\beta/\alpha^3 = \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122} - C_{1212})\gamma^2,$$

следовательно,

$$C_{1111} - C_{1122} - C_{1212} = 51,68\beta/\alpha^3$$

и

$$C_{1212} = 51,68\beta/\alpha^3 = \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}).$$

В опытах на простой сдвиг, в которых одна из следующих компонент тензора дисторсии ненулевая:  $\beta_{13} = \gamma$  или  $\beta_{31} = \gamma$ , или  $\beta_{23} = \gamma$ , или  $\beta_{32} = \gamma$ , а остальные равны нулю  $\beta_{ij} = 0$ , для ГПУ-образца с  $N=6$  атомами на

ребре дополнительные смещения слоев атомов, обеспечивающие минимум потенциальной энергии в деформированной конфигурации, оказываются нулевыми  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ . При этом выражения для упругой энергии совпадают  $u - u_0 \approx 25,97\gamma^2\beta/\alpha^3 = 1/2C_{2332}\gamma^2$ , следовательно,  $C_{2332} = 51,93\beta/\alpha^3$ .

При повторении расчетов для различных  $N$  упругие модули образуют числовые последовательности, быстро сходящиеся с ростом размеров образца. В пределе  $N \rightarrow \infty$  получены значения макроскопических упругих модулей для ГПУ-монокристалла

$$C_{1111}^\infty \approx 305,71\beta/\alpha^3, \quad C_{1122}^\infty \approx 144,87\beta/\alpha^3, \quad C_{1133}^\infty \approx 98,59\beta/\alpha^3, \\ C_{3333}^\infty \approx 353,88\beta/\alpha^3, \quad C_{1111}^\infty - C_{1122}^\infty - C_{1212}^\infty \approx 80,06\beta/\alpha^3, \\ C_{2332}^\infty \approx 73,80\beta/\alpha^3, \quad \text{то есть } C_{1212}^\infty \approx 80,77\beta/\alpha^3.$$

В симметричном случае

$$C_{1212}^\infty = (C_{1111}^\infty - C_{1122}^\infty)/2 \approx 80,42\beta/\alpha^3 \quad (\text{отличие менее } 0,5\%).$$

То есть расчеты части упругих модулей (7) с помощью потенциала Леннард-Джонса показали, что ГПУ-монокристалл обладает симметричными упругими свойствами.

При использовании потенциала Ми с параметрами, соответствующими магнию, получены следующие значения упругих модулей при  $N=6$ :

$$C_{1111} \approx 218,52\beta/\alpha^3, \quad C_{1122} \approx 110,38\beta/\alpha^3, \quad C_{1133} \approx 84,58\beta/\alpha^3, \\ C_{1212} \approx 54,07\beta/\alpha^3 = (C_{1111} - C_{1122})/2, \quad C_{2332} \approx 60,35\beta/\alpha^3.$$

При  $N \rightarrow \infty$  получены значения макроскопических упругих модулей ГПУ-кристалла:

$$C_{1111}^\infty \approx 521,90\beta/\alpha^3, \quad C_{1122}^\infty \approx 262,49\beta/\alpha^3, \\ C_{1133}^\infty \approx 175,34\beta/\alpha^3, \quad C_{3333}^\infty \approx 603,14\beta/\alpha^3, \\ C_{1212}^\infty \approx 129,95\beta/\alpha^3 \approx (C_{1111}^\infty - C_{1122}^\infty)/2 = 129,71\beta/\alpha^3, \\ C_{2332}^\infty \approx 120,05\beta/\alpha^3.$$

Из экспериментов для магния известны значения упругих модулей [9]:

$$C_{1111}^{\text{Mg}} = 59,76 \text{ (ГПа)}, \quad C_{1122}^{\text{Mg}} = 26,12 \text{ (ГПа)}, \quad C_{1133}^{\text{Mg}} = 21,63 \text{ (ГПа)}, \\ C_{2332}^{\text{Mg}} = 61,68 \text{ (ГПа)}, \quad C_{2323}^{\text{Mg}} = 16,34 \text{ (ГПа)},$$

по которым можно идентифицировать параметр  $\beta$

потенциала Ми. Принимая, что  $C_{1111}^{Mg} = C_{1111}^{\infty}$ , получим  $\beta = 4,2118 \cdot 10^{-10}$  (Дж), тогда  $\beta/\alpha^3 = 0,1145$  (ГПа), то есть

$C_{1111}^{\infty} = 59,76$  (ГПа),  $C_{1122}^{\infty} = 30,05$  (ГПа),  $C_{1133}^{\infty} = 20,08$  (ГПа),  $C_{3333}^{\infty} = 69,06$  (ГПа),  $C_{2323}^{\infty} = 13,75$  (ГПа),  $C_{2332}^{\infty} = 14,88$  (ГПа).

Наибольшее отклонение в вычисленных с помощью указанных параметров модулях от экспериментальных значений составляет 16 % (для модуля  $C_{2332}$ ). Такое отклонение связано с недостаточной точностью предельного перехода  $N \rightarrow \infty$  и с тем, что расчеты проводились для идеально чистого металла, а экспериментальные данные получены для технически чистого магния, содержащего примеси.

### Выводы

В работе продемонстрированы возможности энергетического способа по вычислению упругих модулей образцов конечных размеров с ГПУ-решеткой в рамках подхода атомарной статики. В статьях [9, 10] с помощью силового (и моментного [10]) способа описания взаимодействия атомов найдены упругие модули бесконечных монокристаллов с ГПУ-решеткой при рассмотрении взаимодействия произвольного атома с атомами из одной [10] или нескольких [9] координационных сфер. В отличие от указанных работ здесь использовался энергетический подход сопоставления упругой энергии деформируемого сплошного тела и потенциальной энергии деформированного монокристалла, отнесенной к его объему в текущей конфигурации. Исследовались кристаллы конечных размеров, учитывалось взаимодействие каждого атома кристалла со всеми остальными атомами образца. Потенциальная энергия определялась на осно-

ве классических двухчастичных (безмоментных) потенциалов степенного вида. Показано, что ГПУ-решетка, состоящая из двух вложенных простых подрешеток, при заданной аффинной кинематике не может деформироваться однородно. Для обеспечения минимума потенциальной энергии ГПУ-кристалла в текущей конфигурации необходимо задавать относительные смещения подрешеток, которые были найдены как функции от параметров деформирования тела. Показано, что упругие свойства материала с ГПУ-решеткой зависят от размеров образца. Макроскопические упругие модули получены за счет предельного перехода (стремление размера кристалла к бесконечности). Это позволяет идентифицировать параметры потенциала по макроскопическим свойствам материалов. В отличие от работ [9, 10] здесь не предполагалось априорной симметрии тензора напряжений Коши и тензора линейно-упругих свойств  $C$ . Показано, что в этом случае упругий отклик материала с ГПУ-решеткой должен описываться 8 независимыми ненулевыми упругими модулями. С помощью энергетического подхода можно найти только 6 из них. Показано, что при независимом вычислении компонент  $C_{1111}$ ,  $C_{1122}$  и  $C_{1212}$  они оказываются связанными равенством  $C_{1212} = (C_{1111} - C_{1122})/2$ , которое соответствует симметричному тензору  $C$  для ГПУ-решетки. На примере магния показан способ идентификации всех параметров используемого потенциала Ми.

*Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 1220-0-880-0-1052-а и № 1110-0-119-9-6033-р-Урал-а.*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зубко И.Ю., Трусов П.В. Определение упругих постоянных ГЦК-монокристаллов с помощью потенциала межатомного взаимодействия // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2011. – № 1. – С. 147–169.
2. Зубко И.Ю., Мелентьева О.В., Морозова В.П., Кочуров В.И. Вывод упругого закона монокристаллов металлов из потенциала межатомного взаимодействия // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4. – Ч. 5. – С. 2181–2183.
3. Симонов М.В., Зубко И.Ю. Определение равновесных параметров решетки различных ГПУ-монокристаллов с помощью потенциала межатомного взаимодействия Ми // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2012. – № 3. – С. 204–217.
4. Васильев Д.М. Физическая кристаллография. – М.: Металлургия, 1981. – 248 с.
5. Кривцов А.М. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. – М.: Физматлит, 2007. – 304 с.
6. Кривцов А.М. Упругие свойства одноатомных и двухатомных кристаллов. – СПб.: Изд. СПбГПУ, 2010. – 144 с.
7. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. – М.: Наука, 1988. – 190 с.
8. Метод молекулярной динамики в физической химии / под редакцией Ю.К. Товбина. – М.: Наука, 1996. – 334 с.
9. Баранов М.А., Дубов Е.А., Дятлова И.В., Черных Е.В. Атомно-дискретное описание влияния анизотропных межатомных взаимодействий на упругие свойства ГПУ-металлов // Физика твердого тела. – 2004. – Т. 46. – № 2. – С. 212–217.
10. Кривцов А.М., Подольская Е.А. Моделирование упругих свойств кристаллов с гексагональной плотноупакованной решеткой // Механика твердого тела. – 2010. – № 3. – С. 77–86.

*Поступила 03.05.2013 г.*

## О НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ ИСПАРЕНИЯ РАСПЫЛЕННОЙ ВОДЫ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЧЕРЕЗ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПРОДУКТЫ СГОРАНИЯ

Р.С. Волков, Г.В. Кузнецов, П.А. Стрижак

Томский политехнический университет

E-mail: romanvolkov@tpu.ru

С использованием высокоскоростной измерительной системы проведено экспериментальное исследование макроскопических закономерностей испарения распыленных рабочих жидкостей (пресной воды и воды с примесями соли) при прохождении через пламя фиксированной высоты. Установлены интегральные характеристики испарения (размеры, масса, концентрация) капель. Определены условия распыления исследуемых рабочих жидкостей, обеспечивающие полноту их испарения.

### Ключевые слова:

Испарение, теплоперенос, пламя, капли, распыленная вода, примеси соли, поля скоростей.

### Key words:

Evaporation, heat-and-mass transfer, flame, drops, sprayed water, salt admixture, velocities field.

### Введение

Выполненные в последние годы аналитические [1–4] и численные [5–8] исследования эффективности современных технологий тушения пожаров различной степени сложности с использованием авиации показали целесообразность специального распыления флегматизаторов при сбрасывании в зону горения и подчеркнули высокую важность полноты испарения их основной массы в газовой фазе (до контакта с горящими материалами, веществами и конструкциями). Установлены характерные времена полного испарения одиночных капель, их совокупности и крупных массивов сбрасываемой воды – «водяных снарядов» [5–8]. Определено влияние группы основных факторов (размеры и скорость движения капель, расстояния между соседними каплями, температура продуктов сгорания и другие) на полноту испарения флегматизатора на примере пресной воды. Известно [3, 4], что условия движения соленой воды в зоне пламени могут значительно отличаться от условий для пресной воды. Представляет интерес проведение экспериментального исследования условий движения распыленной пресной воды и воды с примесями соли наиболее типичной концентрации через пламя фиксированной высоты, а также сопоставление с результатами численных исследований [5–8].

Целью настоящей работы является экспериментальное исследование интегральных характеристик испарения распыленной рабочей жидкости при движении через высокотемпературные продукты сгорания.

### Методика проведения эксперимента

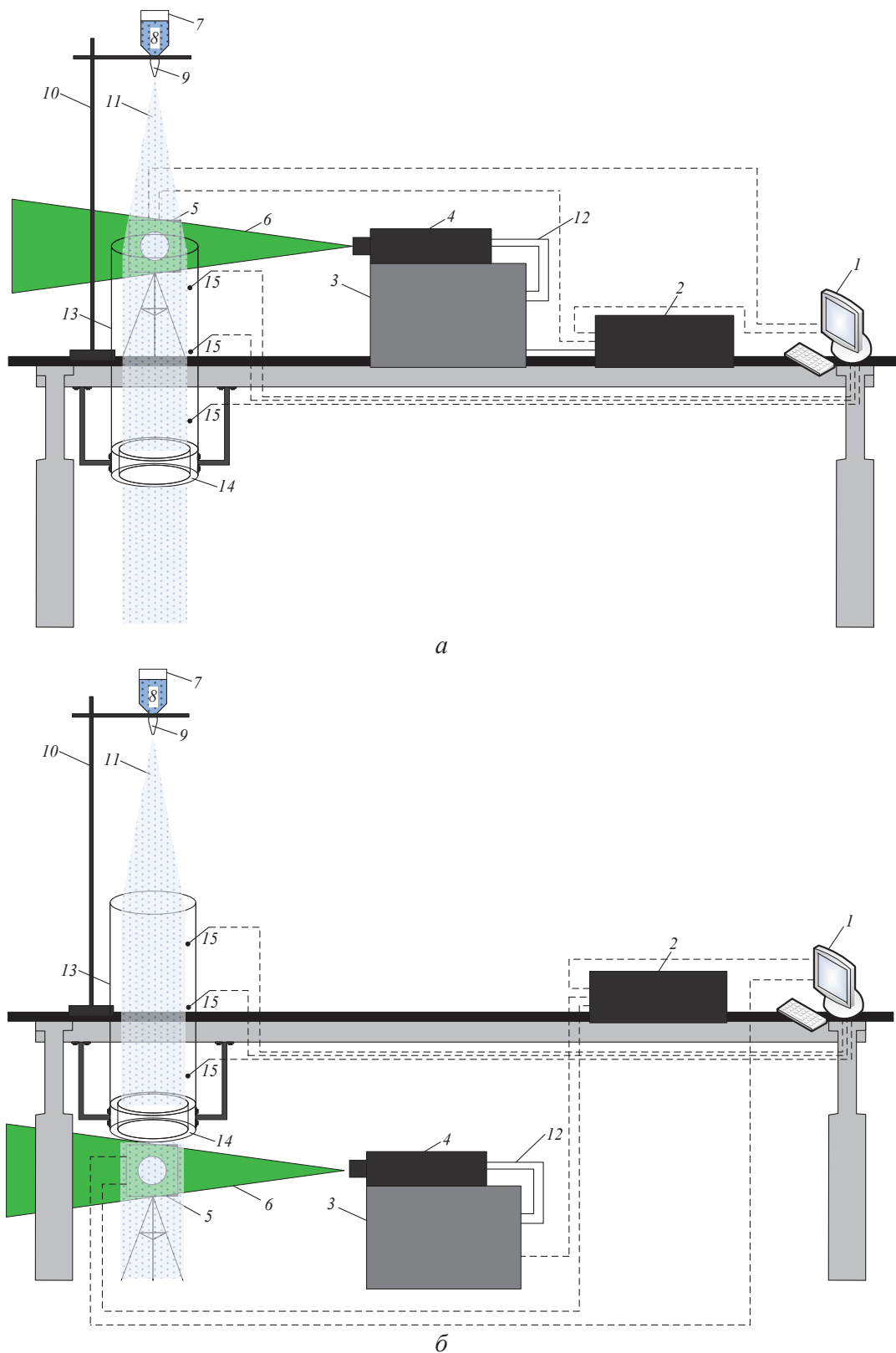
При планировании экспериментов использована схема, предусматривающая распыление рабочей жидкости (состав № 1 (%):  $H_2O$  – 97,  $TiO_2$  – 0,5,  $NaCl$  – 2,5; состав № 2 (%):  $H_2O$  – 99,5,  $TiO_2$  – 0,5) с определённой высоты в зону пламени (рис. 1). Поваренная соль ( $NaCl$ ) введена в рабочую жидкость для оценки ее влияния на полноту испарения.

Наночастицы диоксида титана ( $TiO_2$ ) выступают в роли «трассеров» [9] и необходимы для повышения четкости видеок кадров при «просвечивании» лазером траектории движения двухфазного потока с использованием PIV-системы.

В сериях экспериментов рабочие жидкости указанных составов поочередно заливались в емкость – 7 (рис. 1). Для формирования потока распыленной жидкости использовался дозатор – 9, обеспечивающий постоянство размеров и концентраций капель от эксперимента к эксперименту. Для регистрации видеопотока с изображением движущегося двухфазного потока использовалась измерительная PIV-система, состоящая из генератора лазерного излучения – 3, двойного твердотельного импульсного лазера – 4, подсвечивающего области съемки посредством «светового ножа» – 6, кросскорреляционной камеры – 5, фиксирующей изображения потока жидкости на входе и выходе цилиндрического канала – 13, синхронизатора – 2 и ПК – 1 с программным обеспечением, позволяющим «кадрировать» результаты съёмки (задержка между кадрами составляла 100 мс) и строить поля скоростей двухфазного потока в рабочей области. Особенности использования типичных диагностических PIV-систем и соответствующих измерительных методик описаны в [9].

Для регистрации температуры продуктов сгорания использовалась методика термометрических измерений [10]. Измерения температуры выполнялись хромель-копелевыми термометрами – 15 на разных отметках по высоте в зоне движения продуктов сгорания (выбраны три контрольные точки – 0,15, 0,5 и 0,85 м). Температура продуктов сгорания составила  $1070 \pm 30$  К. Важно отметить, что установленные значения температуры соответствуют средней температуре пожара [3, 4], т. е. наиболее типичным условиям, реализуемым на практике.

Скорости, линейные размеры и концентрации капель в рабочей области определялись по результатам обработки полученных видеопотоков с приме-



**Рис. 1.** Схема экспериментальной установки (а, б – видеорегистрация капель до и после зоны пламени): 1 – ПК; 2 – синхронизатор ПК, кросскорреляционной камеры и лазера; 3 – генератор лазерного излучения; 4 – двойной твердотельный импульсный лазер; 5 – кросскорреляционная камера; 6 – световой «нож»; 7 – ёмкость с рабочей жидкостью; 8 – рабочая жидкость; 9 – дозатор; 10 – штатив; 11 – поток капель рабочей жидкости; 12 – канал движения вспомогательной охлаждающей жидкости; 13 – цилиндр из жаростойкого светопрозрачного материала; 14 – полый цилиндр, во внутреннее пространство которого залита горячая жидкость; 15 – терпары

нением специализированного программного обеспечения используемой PIV-системы (рис. 1).

Цикл опытов включал в себя две серии по десять экспериментов в каждой. В первой серии экспериментов фиксировались видеокadres распыленной рабочей жидкости на входе в цилиндрический канал – 13 (высота 1 м, диаметр 0,3 м) при отсутствии пламени в последнем (рис. 1, а). Во второй серии регистрировались изображения капель после прохождения ими зоны пламени (рис. 1, б). Для формирования устойчивого пламени использовалось типичное жидкое топливо – керосин, которое заливалось в основание полого цилиндра – 14 экспериментальной установки.

После проведения серии опытов полученные видеокadres обрабатывались и строились поля скоростей распыленной жидкости в рабочей области. Обработка видеоизображений основана на кросс-корреляционном алгоритме (типичном для PIV-систем), представляющем метод быстрого преобразования Фурье с добавлением условий выполнения корреляционной теоремы [9].

При построении полей скорости определялись интегральные параметры, характеризующие движение капель распыленной рабочей жидкости через пламя. В качестве последних приняты скорость, масса, геометрические размеры капель, а также их концентрация в рабочей области. Для удобства оценки изменения перечисленных характеристик испарения капель при движении через пламя последние условно разделены на три группы: «малые» –  $0,075 < R_{cp} < 0,175$  мм; «средние» –  $0,175 < R_{cp} < 0,275$  мм; «большие» –  $0,275 < R_{cp} < 0,375$  мм.

Погрешности определения размеров капель согласно методике [11] составили 0,001 мм. Случайные погрешности измерения массы капель, оцениваемые по методике [12], для рассматриваемой установки (рис. 1) не превысили 1 %. Среднеквадратичные отклонения массы в серии опытов составили меньше  $10^{-6}$  г.

### Результаты и обсуждение

Полученные при проведении опытов типичные видеокadres распыленной рабочей жидкости (например, состав № 1), а также соответствующие им поля скоростей приведены на рис. 2, 3. Установлено, что при прохождении распыленной жидкостью высокотемпературной зоны пламени (рис. 3) общая концентрация капель значительно (в несколько раз) снижается относительно начальной (рис. 2), что говорит о достаточно высокой скорости испарения последних.

По полученным видеограммам и полям скоростей оценены основные параметры испарения распыленной жидкости (состав № 1), движущейся в виде совокупности капель через пламя. Результаты приведены в таблице (группа № 1 – «малые» капли, группа № 2 – «средние» капли, группа № 3 – «большие» капли).

В результате серии опытов установлено, что при прохождении капель с характерными разме-

рами  $0,075 < R_{cp} < 0,375$  мм пламени высотой 1 м масса «больших» капель  $m_{cp}$  уменьшается на 56 % (таблица). Масса «средних» капель  $m_{cp}$  уменьшается на 84 %. «Малые» капли испаряются полностью ( $m_{cp} \rightarrow 0$  и  $R_{cp} \rightarrow 0$ ). Происходит существенное изменение внутренней структуры двухфазного парожидкостного потока при движении через высокотемпературные газы. Так, например, средняя относительная концентрация капель на выходе, отнесенных к группе «больших», существенно (в 5,5 раз) больше начальной (таблица), что говорит о значительном уменьшении доли «средних» и «малых» капель в рабочей области после пламени.

**Таблица.** Средние значения параметров испарения капель распыленной рабочей жидкости (состав № 1)

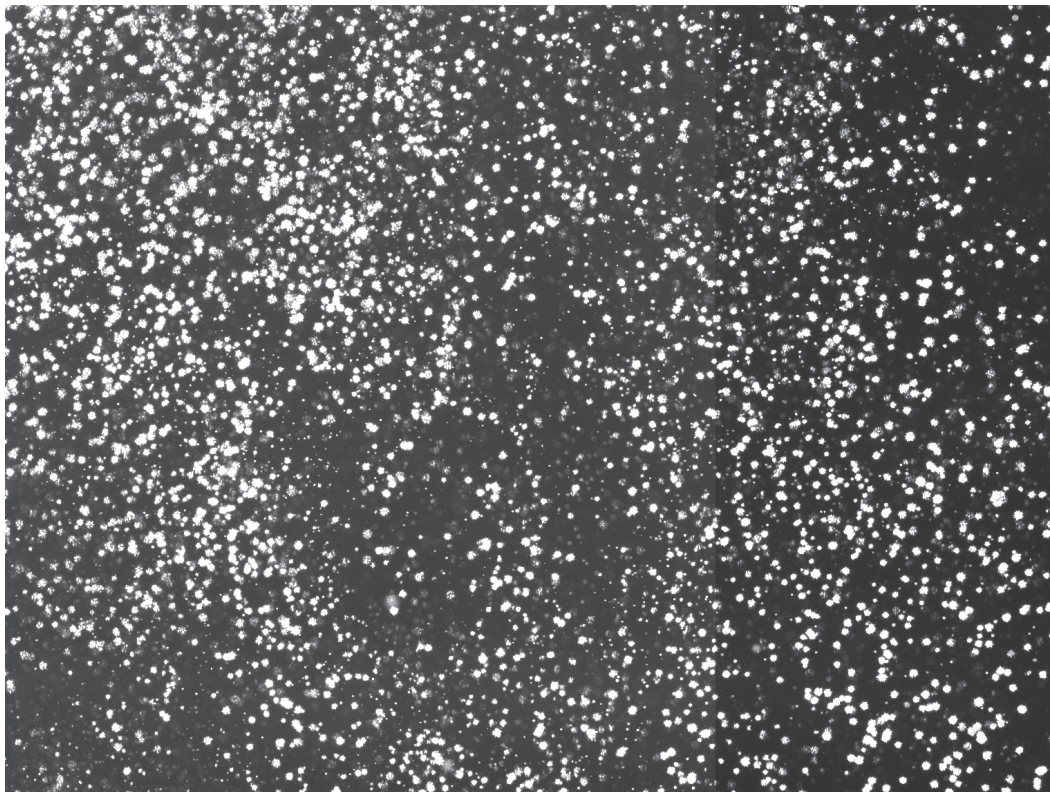
Наименование параметра	№ группы	На входе в канал	На выходе из канала
$R_{cp}$ , мм	1	0,112	0
	2	0,207	0,111
	3	0,285	0,217
$m_{cp}$ , г	1	$0,616 \cdot 10^{-5}$	0
	2	$3,794 \cdot 10^{-5}$	$0,593 \cdot 10^{-5}$
	3	$9,968 \cdot 10^{-5}$	$4,403 \cdot 10^{-5}$
$\alpha_{cp}$ , %	1	39,20	0
	2	48,27	31,54
	3	12,53	68,46
$v_{cp}$ , м/с	1	0,802	0,357
	2		0,478
	3		0,710

$R_{cp}$  – средний радиус, мм;  $m_{cp}$  – средняя масса, г;  $\alpha_{cp}$  – средняя относительная концентрация в рабочей области, %;  $v_{cp}$  – средняя скорость, м/с.

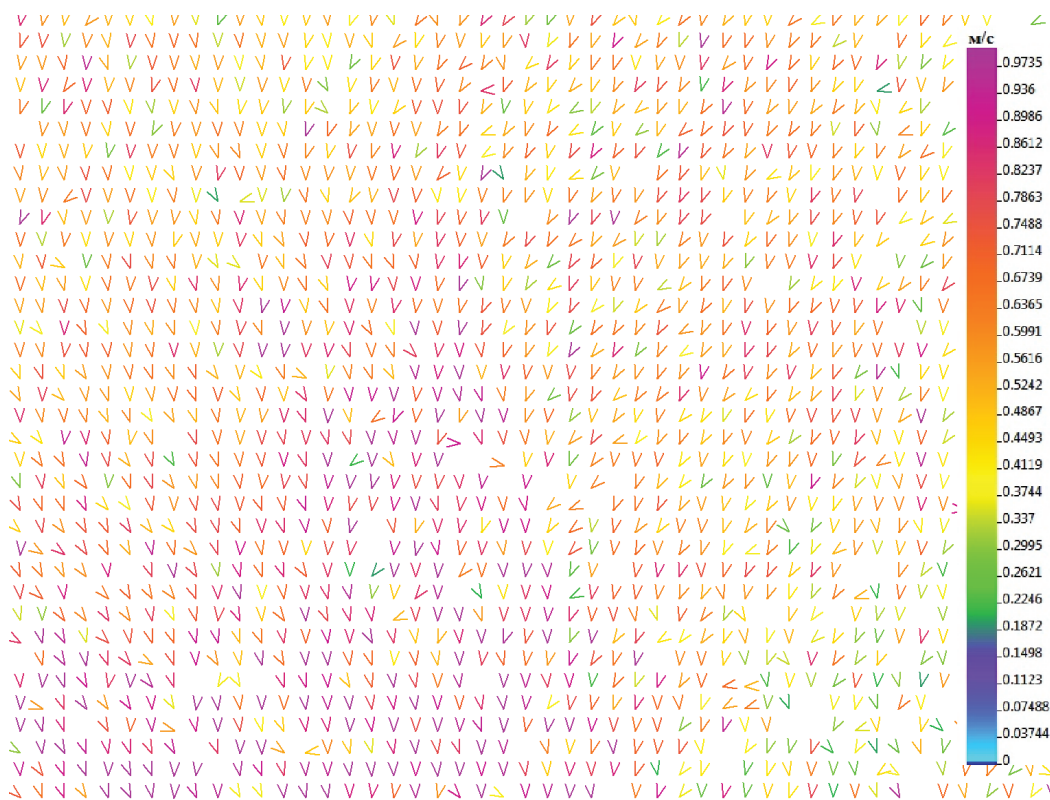
Также эксперименты показали, что некоторая доля (около 12...16 %) «малых» и «средних» капель, движущихся во фронте потока, уносится с уходящими дымовыми газами на входе в канал – 13. Это можно объяснить как высокими температурами пламени, так и относительно высокими скоростями восходящих продуктов сгорания (до 0,3 м/с). Этот фактор очень важен и его целесообразно учитывать при доработке моделей тепло-массообмена [5–8].

Анализ таблицы показывает, что скорости капель на выходе из области горения  $v_{cp}$  снижаются в среднем на 0,35 м/с относительно скоростей на входе в канал. Также установлено, что средняя скорость потока рабочей жидкости  $v_{cp}$  существенно (52 %) меньше скоростей на выходе канала без пламени. Это обусловлено как движением продуктов сгорания, так и интенсивным фазовым переходом при парообразовании. Полученный результат хорошо коррелирует с зависимостями, полученными при проведении численного моделирования [5–8] для скоростей и характерных времен существования водяных капель. Однако, абсолютные значения  $v_{cp}$  в теоретических работах [5–8] в несколько раз превышают скорости, установленные в серии опытов (таблица). Это можно объяснить тем, что при моделировании [5–8] высокотемпературные продукты сгорания считались неподвижными





*a*



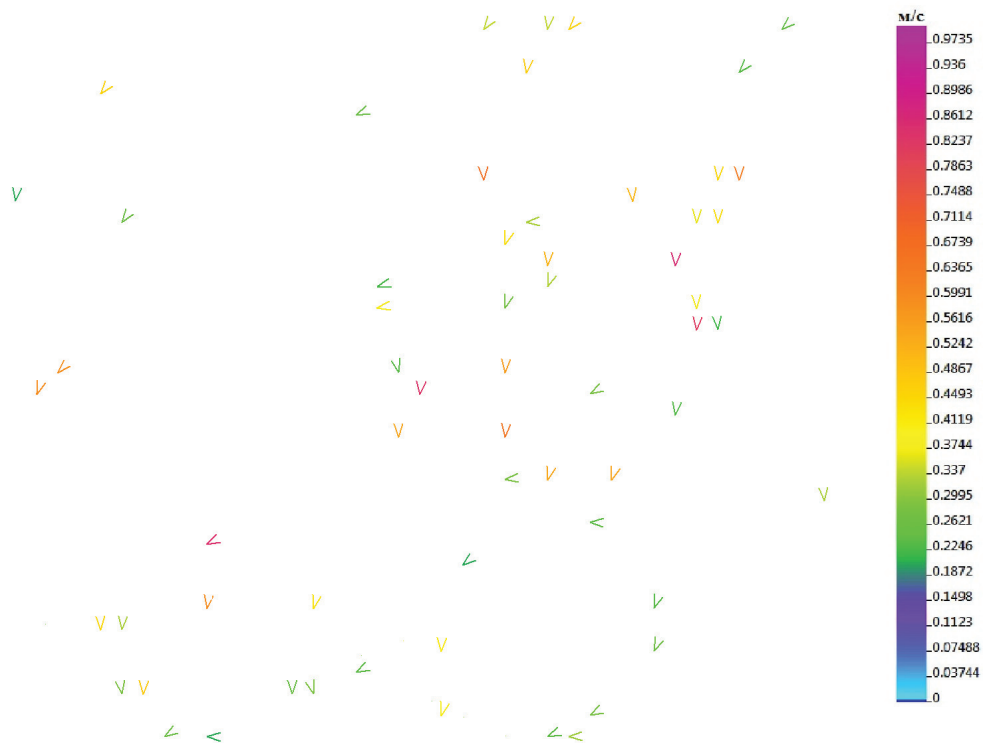
*б*

**Рис. 2.** Видеogramма (а) и поле скорости (б) капле жидкости на входе в канал





*a*



*б*

**Рис. 3.** Видеограмма (а) и поле скорости (б) капель жидкости после пламени

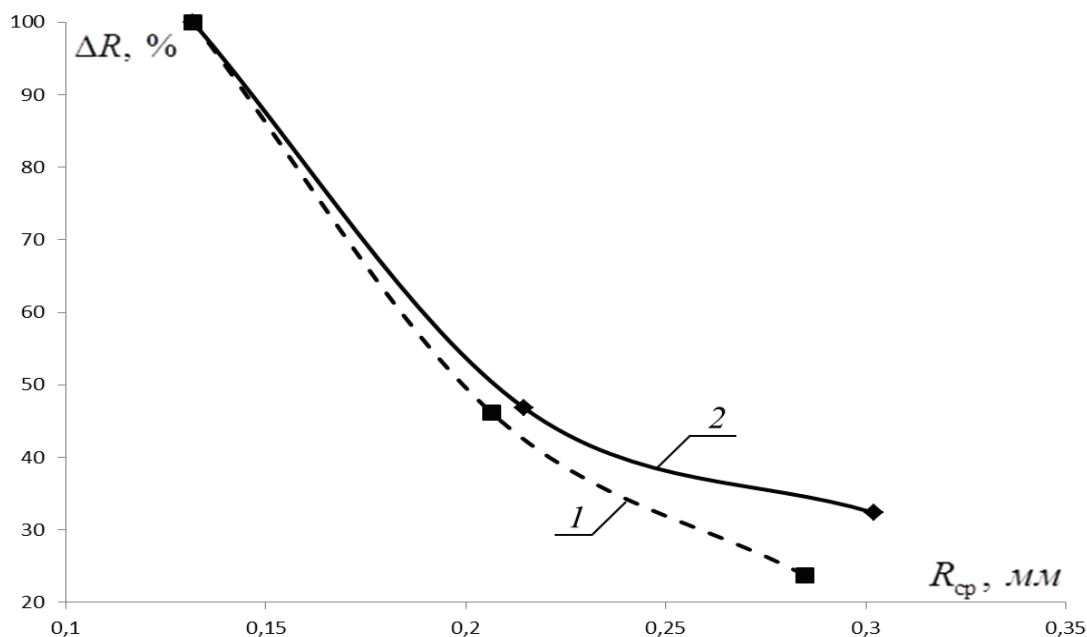


Рис. 4. Зависимости параметра  $\Delta R$  от  $R_{cp}$ : 1 – рабочая жидкость № 1 (%) ( $H_2O - 97, TiO_2 - 0,5, NaCl - 2,5$ ); 2 – рабочая жидкость

№ 2 (%) ( $H_2O - 99,5, TiO_2 - 0,5$ );  $R_{cp}$  – средний радиус капель на входе в пламя;  $\Delta R = \frac{R_{cp,вх.} - R_{cp,вых.}}{R_{cp,вх.}} \cdot 100\%$  – параметр, характеризующий уменьшение размера капли после прохождения пламени

относительно капель распыленной жидкости.

По экспериментальным значениям, полученным в серии опытов, построены зависимости параметра  $\Delta R$  от среднего радиуса капли в потоке  $R_{cp}$ , иллюстрирующие характерные отличия интенсивности испарения исследуемых рабочих жидкостей (состав № 1 и 2).

Анализ рис. 4 показывает, что при среднем радиусе капель  $R_{cp} < 0,2$  мм отклонения параметра  $\Delta R$  для исследуемых составов не превышают 4 %. При увеличении средних размеров капель  $R_{cp}$  влияние примесей NaCl на интенсивность испарения усиливается. Так, например, при  $R_{cp} = 0,25$  мм значение параметра  $\Delta R$  для рабочей жидкости № 1 составляет 32 %, а для рабочей жидкости № 2 – 38 %. При  $R_{cp} = 0,28$  мм те же параметры равны 25 и 35 % соответственно.

Установленную закономерность можно объяснить тем, что примеси солей, в частности NaCl, существенно замедляют процессы фазового перехода вследствие повышения теплоемкости рабочей жидкости и необходимости подвода большего количества тепла для интенсификации парообразования по сравнению с пресной водой. Этот результат хорошо согласуется с аналитическими зависимостями [3, 4]. При уменьшении размеров капель относительно  $R_{cp} = 0,15$  мм характерные времена существования последних в потоке высокотемпературных газов значительно снижаются для исследуемых рабочих жидкостей (состав № 1 и 2). Подведенной энергии достаточно для прогрева капель малых раз-

меров жидкости без и с примесями NaCl за практически равные времена. Влияние примесей NaCl несколько ослабляется и характерные значения  $\Delta R$  для исследуемых рабочих жидкостей становятся сопоставимыми (рис. 4). Выявленный эффект представляет интерес для дальнейшего численного исследования с целью установления пределов применимости теоретических заключений [5–8] в направлении специализированного распыления соленой и пресной воды с различными примесями (ретродантами).

#### Выводы

1. Установлено, что доля испарившейся рабочей жидкости для типичных по размерам капель исследуемых распыленных составов не превышает 60 %. Лишь при достижении  $R_{cp}$  значений, соответствующих 0,1...0,2 мм, капли в серии экспериментов при прохождении пламени высотой 1 м испарялись практически полностью. Эти значения  $R_{cp}$  можно рекомендовать к использованию в качестве максимальных для обеспечения полноты испарения распыляемой жидкости.
2. Выполненные опыты позволили выявить важную особенность, связанную с существенным замедлением движения капель распыленной жидкости в зоне пламени (таблица). Этот результат можно объяснить действием соответствующих сил сопротивления, вызванных движением восходящих продуктов сгорания, фазовым переходом на поверхности капель и други-

- ми факторами. Установленные эффекты следует учесть при доработке моделей теплопереноса [5–8], в которых движение высокотемпературных газов не исследовалось (в первом приближении принималось условие  $v_{пр}=0$  м/с).
3. Показано, что рабочая жидкость с примесями NaCl существенно медленнее испаряется по сравнению с пресной водой. Этот результат хорошо согласуется с [3, 4]. Однако также установлено, что при достижении некоторых значений  $R_{cp}$  (менее 0,15 мм) интенсивности испаре-

ния капель рассматриваемых рабочих жидкостей (с NaCl и без примесей солей) сопоставимы. Этот результат иллюстрирует возможность некоторого обобщения результатов численных исследований [5–8], выполненных с пресной водой, при разработке соответствующих рекомендаций тушения лесных пожаров водой с определенным содержанием солей.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (МК-620.2012.8).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сокоиков В.В., Тугов А.Н., Гришин В.В., Камышев В.Н. Автоматическое водяное пожаротушение с применением тонкораспыленной воды на электростанциях // Энергетик. – 2008. – № 6. – С. 37–38.
2. Корольченко Д.А., Громовой В.Ю., Ворогушин О.О. Применение тонкораспыленной воды для тушения пожаров в высотных зданиях // Вестник МГСУ. – 2011. – Т. 2. – № 1. – С. 331–335.
3. Андрияшкин А.Ю., Пелех М.Т. Эффективность пожаротушения тонкораспыленной водой // Проблемы управления рисками в техносфере. – 2012. – Т. 21. – № 1. – С. 64–69.
4. Копылов Н.П., Чибисов А.Л., Душкин А.Л., Кудрявцев Е.А. Изучение закономерностей тушения тонкораспыленной водой модельных очагов пожара // Пожарная безопасность. – 2008. – № 4. – С. 45–58.
5. Волков Р.С., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Численная оценка оптимальных размеров капель воды в условиях ее распыления средствами пожаротушения в помещениях // Пожаровзрывобезопасность. – 2012. – № 5. – С. 74–78.
6. Vysokomornaya O.V., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. Heat and Mass Transfer in the Process of Movement of Water Drops in a High-temperature Gas Medium // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2013. – V. 86. – № 1. – P. 62–68.
7. Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Влияние формы капли воды на результаты математического моделирования ее испарения при движении через высокотемпературные продукты сгорания // Тепловые процессы в технике. – 2013. – № 6. – С. 254–261.
8. Высокоморная О.В., Марков А.О., Назаров М.Н., Стрижак П.А., Янов С.Р. Численное исследование влияния условий распыления воды на температуру в следе «водяного снаряда» // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322. – № 4. – С. 24–31.
9. Raffel M., Willert C., Kompenhans J. Particle image velocimetry. – Berlin: Springer Verlag, 1998. – 253 p.
10. Полежаев Ю.В., Юрьевич Ф.Б. Тепловая защита. – М.: Энергия, 1976. – 391 с.
11. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента. – М.: Мир, 1972. – 381 с.
12. Зайдель А.Н. Элементарные оценки ошибок измерений. Академия Наук СССР. – Л.: Наука, 1968. – 96 с.

*Поступила 26.06.2013 г.*

---

# Рецензии

## Рецензия на монографию А.А. Тихонова «Тензорное моделирование геомагнитного поля»

Использование тензорного исчисления является характерной особенностью математического аппарата современных естественных наук. Достаточно упомянуть, что тензорное исчисление давно уже широко применяется в механике деформируемого твёрдого тела, аэрогидродинамике, теории электричества, аналитической и дифференциальной геометрии. При этом необходимость применения тензорного исчисления вызвана не только удобством использования и наглядностью математических формулировок, но и объективными свойствами изучаемых объектов и происходящих с ними процессов. Эту мысль подтверждает и недавно опубликованная монография А.А. Тихонова «Тензорное моделирование геомагнитного поля» (AV Akademikerverlag GmbH & Co. KG., Saarbruecken, Germany, 2011, ISBN 978-3-8454-7932-3, прежнее название издательства – LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co.). Книга предлагает по-новому взглянуть на такой, казалось бы, всем хорошо известный объект природы как магнитное поле Земли, применив для его описания аппарат тензорного исчисления.

Мотивацией к разработке нового подхода к описанию геомагнитного поля явилась необходимость аналитического моделирования и решения ряда задач динамики искусственных спутников Земли (ИСЗ), взаимодействующих с геомагнитным полем. Известно, что решение такого рода задач, сопряженное с изучением как орбитального движения ИСЗ, так и вращательного движения ИСЗ относительно центра масс, требует тщательного предварительного анализа сил и моментов, действующих на ИСЗ в околоземном пространстве, и построения адекватных математических моделей, позволяющих с достаточной степенью точности исследовать и прогнозировать движение ИСЗ аналитическими и численными методами. Магнитное поле Земли (МПЗ) оказывает разнообразное воздействие на ИСЗ, движущийся в околоземном пространстве. Это воздействие может происходить посредством таких сил и моментов, как, на-

пример, магнитные, возникающие при наличии на ИСЗ соленоидов, гистерезисных стержней, постоянных магнитов (в том числе и за счет намагничивания самого ИСЗ в геомагнитном поле); лоренцевы, возникающие при движении заряженного ИСЗ относительно МПЗ; кулоновы, возникающие вследствие взаимодействия ИСЗ с плазмой околоземного пространства; силы, обусловленные вихревыми токами Фуко, и др. Для математического описания такого рода сил и моментов требуется знать индукцию МПЗ (а иногда не только индукцию, но и градиент индукции) как функцию радиус-вектора точки околоземного пространства. Ввиду сложного строения МПЗ и отсутствия указанной функциональной зависимости в конечном аналитическом виде возникает проблема математического моделирования МПЗ как неизбежного этапа при построении наиболее подходящей математической модели динамики ИСЗ, на базе которой будет производиться аналитическое и/или численное исследование той или иной задачи космодинамики.

Анализу и решению этой проблемы и посвящена монография А.А. Тихонова, написанная с учетом имеющегося многолетнего опыта автора в изучении задач вращательного относительно центра масс движения ИСЗ, взаимодействующих с МПЗ, и в стиле работ, ориентированных при моделировании МПЗ в первую очередь именно на решение задач космодинамики.

Монография состоит из трех разделов. В первом разделе обсуждаются вопросы моделирования МПЗ и использования классических моделей МПЗ при исследовании динамики вращательного движения ИСЗ, взаимодействующих с МПЗ. Основное внимание уделяется наиболее широко используемой в аналитических исследованиях модели МПЗ, называемой «прямой диполь», а также известной модели «наклонный диполь». Для МПЗ, моделируемого прямым магнитным диполем, получено уточнённое выражение вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , учитывающее градиентность МПЗ. При этом показано, что известный в литературе одно-

сторонний подход к учёту градиентности МПЗ, не учитывающий кривизну силовых линий МПЗ в объёме ИСЗ, является недостаточно корректным. Обсуждаются причины, по которым использование хорошо известной простейшей модели МПЗ «прямой магнитный диполь», позволившей решить большое количество важных прикладных задач, не всегда приводит к качественно верным результатам. Обоснована необходимость замены этой модели другой – более общей моделью. Однако попытка простой замены модели «прямой диполь» следующей по сложности известной моделью МПЗ «наклонный диполь» приводит к тому, что учитываются не все поправки к индукции МПЗ одного порядка величины. Это означает, что с точки зрения задачи динамики ИСЗ модель МПЗ «наклонный диполь» не уточняет модели «прямой диполь». Следовательно, для построения математической модели вращательного движения ИСЗ, взаимодействующего с МПЗ посредством, например, магнитного или лоренцева моментов, пропорциональных магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , корректно учитывающей все слагаемые одного порядка, необходимо в выражении для вектора  $\mathbf{B}$  учитывать влияние следующей, т. е. квадрупольной составляющей геомагнитного потенциала и, возможно даже, составляющих более высоких порядков (в зависимости от постановки задачи). Так, естественным образом возникла проблема создания и исследования различных моделей МПЗ, учитывающих его высшие (после дипольной) составляющие.

Во втором разделе в процессе решения сформулированной выше проблемы подробно рассмотрено квадрупольное приближение МПЗ. Путем введения в рассмотрение тензора первого ранга  $\mathbf{M}^{(1)}$ , названного дипольным магнитным моментом МПЗ, и тензора второго ранга  $\mathbf{M}^{(2)}$ , названного квадрупольным магнитным моментом МПЗ, получена новая – тензорная форма представления квадрупольного приближения потенциала МПЗ в виде суммы двух слагаемых одностепенной структуры. В каждом из слагаемых одинаковый набор множителей, причем каждый из множителей зависит только от определенных параметров задачи – от параметров орбиты ИСЗ или от координат точки пространства или, как тензоры  $\mathbf{M}^{(1)}$  и  $\mathbf{M}^{(2)}$ , – от гауссовых коэффициентов. Среди перечисленных выше параметров только гауссовы коэффициенты определяют собственные свойства МПЗ. Основываясь на этом факте, автор оценивает составляющие геомагнитного потенциала по норме указанных тензоров и сравнивает их между собой на основании этих оценок. Поскольку такие оценки не зависят от координат точек околоземного пространства, получаются довольно интересные объективные результаты, показывающие между прочим, как в течение последних ста лет  $\|\mathbf{M}^{(1)}\|$  убывает,  $\|\mathbf{M}^{(2)}\|$  растет, причем  $\|\mathbf{M}^{(2)}\|$  растет быстрее, чем убывает  $\|\mathbf{M}^{(1)}\|$ . Далее предложен математический аппарат, позволяющий аналитически построить вектор  $\mathbf{B}$  в квадрупольном

приближении и представить его в тензорной форме с использованием уже известных тензоров  $\mathbf{M}^{(1)}$  и  $\mathbf{M}^{(2)}$ . Для этого в общем виде решена задача нахождения градиента произвольной гармонической функции  $U$  и градиента поля вектора  $\mathbf{B} = -\text{grad}U$  по его известному скалярному потенциалу  $U = U(x^1, x^2, x^3)$ , заданному в произвольных криволинейных ортогональных координатах  $x^1, x^2, x^3$ . Произведено сравнение квадрупольной модели МПЗ с известными более простыми моделями МПЗ. Показано, что при вычислении вектора  $\mathbf{B}$  учет квадрупольной составляющей потенциала МПЗ дает поправки того же порядка малости, что и поправки от наклона магнитного диполя МПЗ к модели «прямой диполь» и вносит значительно более существенный вклад в точность вычисления вектора  $\mathbf{B}$ , чем учет градиентности МПЗ в рамках дипольной модели МПЗ.

В третьем разделе дано развитие математического аппарата, изложенного во втором разделе. Программно и алгоритмически обоснована возможность тензорного мультипольного представления геомагнитного потенциала, а также магнитной индукции и ее градиента, с произвольной степенью точности путем введения в рассмотрение тензоров высших рангов. Сравнивая полученное тензорное представление потенциала МПЗ с известным гармоническим представлением в виде ряда Лежандра в сферических координатах (Международное аналитическое поле), невозможно не заметить, что представление А.А. Тихонова выгодно отличается от традиционного, *во-первых*, краткостью записи, *во-вторых*, однотипной структурой слагаемых, а *в-третьих* – явным присутствием в каждом слагаемом множителя  $\mathbf{M}^{(n)}$ , зависящего только от гауссовых коэффициентов и, следовательно, являющегося характеристикой собственных свойств конкретной мультипольной составляющей потенциала МПЗ. Последнее из упомянутых преимуществ представляется наиболее важным. Действительно, отсутствие зависимости мультипольного тензора  $\mathbf{M}^{(n)}$  от координат точек околоземного пространства позволяет рассматривать его как объективную характеристику соответствующей мультипольной составляющей потенциала МПЗ. Такая альтернативная форма представления потенциала вносит ясность в понимание мультипольной структуры геомагнитного поля и позволяет лучше представить его как поле, образованное совокупностью магнитных мультиполей, каждое из которых, как многомерный объект, характеризуется тензором соответствующего ранга. Полученные выражения отличаются краткостью записи и удобством использования как при ручном аналитическом исследовании, так и в компьютерных исследованиях с использованием методов компьютерной алгебры или численных методов.

Наряду с теоретическим обоснованием тензорного подхода к мультипольному моделированию геомагнитного поля, книга содержит готовые к использованию алгоритмы и программы. Например,

алгоритм и программа для математического пакета Maple, реализующего символьные вычисления, позволяющие построить аналитические выражения компонент мультипольного тензора  $M^{(n)}$  произвольного ранга. Для практического использования в прикладных задачах космодинамики приведены аналитические выражения компонент первых семи мультипольных тензоров МПЗ, выраженные через гауссовы коэффициенты. Приводится также программа, позволяющая аналитически строить вектор  $\mathbf{B}$  в любом конечном приближении.

Предложена методика оценки корректности мультипольных моделей МПЗ. Произведено разбиение околоземного пространства на области, в которых корректен учет конечного числа мультипольных составляющих вектора  $\mathbf{B}$  в зависимости от выбранных критериев точности. Это позволяет установить то необходимое и достаточное количество слагаемых в мультипольном разложении вектора  $\mathbf{B}$ , которое обеспечивает заданную точность нахождения вектора  $\mathbf{B}$  в любой точке орбиты ИСЗ с заданными параметрами радиуса и наклона.

Следует отметить, что все результаты, полученные в монографии и сформулированные в терминах, принятых при описании магнитного поля Земли, в равной мере могут быть применены к описанию гравитационного поля Земли, а также гравитационных и магнитных полей других планет.

Таким образом, полученные в монографии результаты позволяют еще раз убедиться в эффективности тензорного аппарата при математическом моделировании процессов и явлений в окружающем нас мире.

*Георгиевский Дмитрий Владимирович,  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
механико-математического факультета  
Московского государственного университета  
им. М.В. Ломоносова*



# Научные мероприятия

## ОТЧЕТ О ПРОВЕДЕНИИ РОССИЙСКО-ГЕРМАНСКОГО СЕМИНАРА «БИОСОВМЕСТИМЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ПОКРЫТИЯ: ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ, НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ»

25–26 февраля 2013 г. в Томском политехническом университете проводился Российско-Германский семинар «Биосовместимые материалы и покрытия: фундаментальные проблемы и приложения, направления развития» (Russian-German workshop «Biocompatible Materials and Coatings: Fundamental Problems & Trends, Biomedical application» (BMC-2013)).

### Организаторы семинара:

1. Национальный исследовательский Томский политехнический университет.
2. Технологическая платформа «Медицина будущего», Россия.
3. Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск.
4. Сибирский государственный медицинский университет, г. Томск.
5. Институт неорганической химии Университета Дуйсбург-Эссен, Германия.
6. Институт технологии г. Карлсруэ, Германия.

### Цель семинара

- 1) **Обсуждение** современного состояния, фундаментальных вопросов и мировых тенденций развития исследований в области медицинского материаловедения.

- 2) **Координация** усилий специалистов России в области медицинского материаловедения, обсуждение вопроса организации Общества биоматериалов в России.

В работе семинара принимали участие более 70 специалистов России и Германии, работающих в области медицинского материаловедения. Отчет о работе семинара размещен на сайте семинара <http://bmc.tpu.ru>

Заключительное пленарное заседание было проведено в виде круглого стола, на котором приняты следующие решения:

1. Признать итоги работы Российско-Германского семинара «Биосовместимые материалы и покрытия: фундаментальные проблемы и приложения, направления развития» положительными.
2. Считать практику регулярного проведения Российско-Германского семинара полезной и способ-

ствующей укреплению международных научных связей.

3. Признать важной задачей координацию усилий специалистов России в области медицинского материаловедения.

4. Сформировать рабочую группу по созданию некоммерческой общественной организации с ориентировочным названием «Общество биоматериалов в России» в составе:

- Баринов С.М., чл. корр. РАН, профессор Института металлургии и материаловедения РАН, г. Москва, председатель;
- Штильман М.И., профессор Российского химико-технологического университета им. Д.И. Менделеева, г. Москва, зам. председателя;
- Пичугин В.Ф., профессор ТПУ, г. Томск, зам. председателя;
- Шаркеев Ю.П., профессор Института физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск;
- Шишацкая Е.И., профессор Сибирского федерального университета, г. Красноярск;
- Чайкина М.В., профессор Института химии твердого тела и механохимии СО РАН, г. Новосибирск;
- Хлусов И.А., профессор Сибирского государственного медицинского университета, г. Томск;
- Лясников В.Н., профессор Саратовского государственного технического университета им. Ю.А. Гагарина, г. Саратов;
- Гнеденков С.В., профессор ДВО РАН, г. Владивосток.

5. Поручить рабочей группе подготовить предложения и разработать план действий по созданию Общества биоматериалов в России. Разработать проект устава общества, в котором определить его структуру, цели и задачи. Установить следующие контрольные сроки:

- 28 апреля 2013 г. рассылка подготовленных документов заинтересованным участникам семинара и организациям;
- 26–28 июня 2013 г. интернет-заседание рабочей группы.

# Summaries

UDC 621.52+511.52

**Simonyan S.O.**  
**DETERMINATION OF SQUARE PARAMETRIC GENERALIZED  
INVERSE MOORE-PENROSE MATRICES APPLYING  
DIFFERENTIAL TRANSFORMATIONS OF PUKHOV**

The author has proposed rather simple numerical analytical technique for determining square parametric generalized inverse Moore-Penrose matrices. The known test task is considered.

UDC 519.6

**Shumilov B.M., Esharov E.A., Kuduev A.Zh., Ymanov Y.S.**  
**QUINTIC MULTI-WAVELET**

The authors have proposed two new types of multi-wavelets on the basis of quintic Hermitian splines. The algorithm of wavelet decomposition was obtained. The article introduces the results of the numerical experiments.

UDC 514.757.2

**Ivlev E.T., Al-Khassani M.A., Luchinin A.A.**  
**DIFFERENTIABLE MAPPING OF AFFINE  $Q_m$   
AND PROJECTIVE  $P_n$  SPACES ( $m < n$ )**

It is proved that affine space mapping into manifolds of degenerate and non degenerate null-pairs of projective space are determined in invariant way by affine and projective spaces mapping.

UDC 517.988.8

**Korytov I.V.**  
**FUNCTION REPRESENTING ERROR FUNCTIONAL  
OF A CUBATURE FORMULA IN SOBOLEV SPACE**

Representation of error functional of a cubature formula is set up for an arbitrary function from Sobolev space normalized while using the derivatives of all orders up to the highest one. In comparison with the papers devoted to the issue of setting up the functional representations by the summable functions the Sobolev space here is normalized without pseudodifferential operator. The existence, uniqueness and summability of the representing function are proved. Neither norm nor representation of the functional coincides with those described before at any value of the highest order of the function derivatives in the class considered.

UDC 519.87

**Monakhova E.A.**  
**ON CONSTRUCTION OF MULTIDIMENSIONAL CIRCULANT  
GRAPHS OF DIAMETER TWO**

The paper considers the task of optimization of undirected circulant networks consisting in maximizing a number of nodes at predetermined graph degree and diameter. New lower bounds of a number of nodes for circulant networks of any degrees and diameter two were obtained. For the first time the infinite families of circulants of diameter two achieving the obtained bounds were constructed.

UDC 514.757.2

**Al-Khassani M.A., Moldovanova E.A.**  
**DIFFERENTIABLE MAPPING OF AFFINE  $Q_n$   
AND PROJECTIVE  $P_n$  SPACES**

The authors have studied the fields of invariant geometric images occurring when mapping affine space into projective space. Using

these geometric images it is shown that the affine space mappings into manifolds of degenerate and non degenerate null-pairs of projective space occur in invariant way with the mapping considered.

UDC 517

**Churikov V.A.**  
**DIFFERENTIATION POLYNOMIALS IN LOCAL FRACTIONAL  
ANALYSIS BASED ON  $d$ -OPERATOR**

It is shown that in local fractional analysis there are rather simple integrable fractional-order functions, a certain order base primitive of which equals zero.

UDC 519.25 (550.831.05)

**Ustinova I.G., Pakhomova E.G.**  
**ESTIMATION OF AUTOCORRELATION FUNCTION  
IN THE FORM OF EXPONENT LINEAR COMBINATION**

The paper considers approximation of autocorrelation function in the form of exponent linear combination. The possibility of such approximation has been shown by the example of exponential and exponential-cosine autocorrelation functions.

UDC 517

**Churikov V.A.**  
**THE GENERALIZED  $G$ -OPERATOR  
OF COMPLEX ORDERS OF REAL VARIABLE**

The author introduces the local differentiation and integration  $G$ -operator of a complex order real variable which is the generalization of  $d$ -operator of real orders in the case of infinite number of local operators for which the conformity principle is fulfilled. The paper considers its several properties and special cases.

UDC 531.01.

**Rodionov A.I.**  
**COVARIANT FORMS OF PRINCIPLES  
AND EQUATIONS OF MOTION  
IN THE SYSTEMS WITH DIFFERENTIAL CONSTRAINTS**

The paper introduces the author's idea of the system of differential variation principles and equations of mechanics in the systems with arbitrary differential constraints. It is based on the classical mechanics extension variant which describes the dynamics of any orders holonomic and nonholonomic systems. For the constrained system its Affix is introduced. It moves in  $E_{2n}$  space on the manifold  $R_m$ , restrained by the differential constraints as well. Based on the motion equations the author introduces the covariant forms of mechanics equations and principles of highest order nonholonomic systems.

UDC 621.762.4.04.016.2

**Dvilis E.S., Chartpuk P., Khasanov O.L.,  
Sokolov V.M., Eshetov B.A.**  
**ANALYTIC AND MODEL OPTIMIZATION  
OF KINEMATIC DIAGRAMS FOR POWDER MATERIAL  
UNIFORM-DENSE COMPACTION**

The article introduces the comparative model and analytic description of helical implementation of collector method for compacting powder material developed and licensed at Tomsk polytechnic university. The collector method principle is based on density autoalignment throughout the compact by multidirectional movement of mold forming surfaces. Within the principle the authors have pro-

posed the kinematic diagram of sealing cylindrical compacts in the collector mold with spiral slides spun around compaction axis at a certain optimum angle. The authors have proposed the analytic tools for initial analytic study of the compaction diagram efficiency. Powder compaction in different ways was modeled by the finite element method. The results of the comparative simulation showed that statistical variability of deformation local values in compacts made by collector method with spiral slides decreases to 48 % in comparison with common static compaction and to 5 % in comparison with the original version of the collector method. Thus, the collector method with spiral slides allows decreasing additionally density gradients and may be used for manufacturing ceramics of nanopowders which are characterized by pronounced negative effect of wall-adjacent friction at their compaction in closed rigid molds.

UDC 62–531.7

**Gavrilin A.N., Korovin G.I., Rozhkov P.S.**  
**DYNAMICS OF CUTTING STRUCTURAL STEELS WITH END-MILLING CUTTERS**

The article is devoted to optimization of structural steel milling modes when using special vibration-proof tool of the original construction.

UDC 621.822.6.001

**Efremenkova E.A., Sorokova S.N., Kobza E.E.**  
**THE PECULIARITIES OF DESIGNING DOUBLE-POLE DRIVE WITH THE INTERMEDIATE ROLLING ELEMENTS**

The paper considers the peculiarities of designing a drive with the intermediate rolling elements and free iron ring with two pitch points. The details of the direct design, by the original parameters of the drive, and the design based on the prescribed center to center distance is shown.

UDC 535.36

**Goryachev B.V., Mogilnitsky S.B.**  
**THE RESEARCH OF LAYERED DISPERSION MEDIA REFLECTANCE**

The authors have considered the radiation transfer in triple dispersion media with reflective surface. The analytic expressions for determining the values of reflectance and transmission coefficient of dispersion media consisting of three plane layers limited by the reflective surface were obtained. It was shown that stratosphere and bottom atmospheric layers even at low value of optical density and its weak change impact considerably the reflectance of the system «triple media–reflective surface» at all magnitudes of substrate reflection coefficient. It was ascertained that the increase of elongation degree of scattering radiation indicatrix in a cloud layer results in reflectance decrease of the whole dispersion media; this effect is similar to reduction of optical density of atmosphere cloud layer.

UDC 543.544.72

**Zhdaneev O.V.**  
**CHROMATOGRAPHIC SYSTEM WITH RADIAL GEOMETRY**

The paper describes the principle of chromatographic system with radial geometry. The proposed version of chromatographic column allows simplifying the manufacture in comparison with the traditional samples of the variable geometry columns and applying stationary phase layer under control.

UDC 544.452.14

**Medvedev V.V., Ilyin A.P., Reshetov A.A.**  
**THE EFFECT OF ALUMINUM OXIDE ON THRESHOLDS OF LASER IGNITION OF ALUMINUM NANOPOWDER AND IRON OXIDE MIXTURE**

The paper introduces the results of experimental researches on pyrotechnic composition (aluminum nanopowder+iron oxide) ignition by laser radiation ( $\lambda=1,06 \mu\text{m}$ ) with pulse duration 3,5 ms. The authors have measured energy thresholds of laser ignition of the investigated composition and the composition with aluminum oxide admixtures at different press in densities. Phase composition of end

combustion products was studied. It was ascertained that the admixtures of aluminum oxide nanopowder into iron-aluminum termite reduce energy ignition thresholds when increasing sample density.

UDC 669.141.32:620.192.7

**Apasov A.M., Apasov A.A., Kozlov E.V.**  
**DESTRUCTION OF NITROCARBONIZED STEEL**

The authors have studied the structure of steel subjected to carbonitriding and subsequent heat treatment to determine the reasons of its destruction. The mechanism of hear cracks initiation was defined and their evolution trajectories were determined.

UDC 621.791.92

**Gnyusov S.F., Ignatov A.A., Durakov V.G.**  
**THE FEATURES OF WEAR OF STEEL P6M5-BASED COMPOSITION COATING IN TRIBOCONTACT WITH STEEL ShKh15 IN A WIDE RANGE OF VELOCITIES AND LOADS**

The paper introduces the results of investigation of friction surface structure and tribotechnical characteristics of steel P6M5-based composition coatings after friction with a steel disc in the range of slip velocities from 1,2 to 3,6 m/s and loads from 20 to 100 N. The authors have determined two extremely gross wear areas and two areas of steady-state wear in the friction pair steel P6M5–steel ShKh15. For friction pair «steel P6M5+20 wt. % WC»–steel ShKh15 the authors have determined the considerable reduction of composition coating wear rate (2–3 times) in comparison with the steel P6M5-based coating. The wear rate of composition coating grows linearly with the load; it is connected with oxidative wear development.

UDC 669:621.7

**Khokhlov V.A., Potekaev A.I., Galsanov S.V.**  
**STUDY OF STRESS RELAXATION IN THERMOMECHANICAL TITANIUM NICKELIDE-BASED JUNCTIONS AND METHODS FOR THEIR RELIABILITY GROWTH**

The stress temporal changes were obtained due to the study of girth strength and energy dissipation in pipe thermomechanical junctions by nickelide titanium ferrule. The methods for their reliability growth were developed.

UDC 669:539.612

**Potekaev A.I., Khokhlov V.A., Galsanov S.V., Shulepov I.A.**  
**ENERGY DISSIPATION AND ADHESIVE PROPERTIES OF QUASI-HERTZ CONTACT OF SHAPE MEMORY MATERIALS**

Energy dissipation in material contact determined by the hysteresis loop parameters was related to the adhesive interaction on physical contact areas at its cyclic compression. The features of forming loops in discrete contact of titanium nickelide bodies were mentioned.

UDC 538.911

**Klopotov V.D., Potekaev A.I., Klopotov A.A., Kulagina V.V., Knestyapin E.A., Markova T.N., Morozov M.M.**  
**TRIPLE TITANIUM ALUMINIDE-BASED DIAGRAMS. ANALYSIS AND CONSTRUCTION**

Based on ordering the condition diagrams Ti–Al–Me (Me=V, Cr, Mn, Fe, Co, Ni, Cu) the authors have determined the reduction of homogeneity areas sizes in firm solution on the basis of  $\beta$ -Ti among the alloying elements  $V \rightarrow Cr \rightarrow Mn \rightarrow Fe \rightarrow Co \rightarrow Ni \rightarrow Cu$  with the growth of a number of intermetallic compounds inside the isothermal triangle. It is revealed that almost all «internal» compounds possess a cubic or hexagonal syngony.

UDC 544.452

**Ilyin A.P., Mostovshchikov A.V.**  
**CRYSTAL AIR COMBUSTION PRODUCTS OF ALUMINUM NANOPOWDERS UNDER MAGNETIC FIELD ACTION**

The authors have studied the microstructure of microcrystal air combustion products of aluminum nanopowder and the effect of mag-

netic field on their structure. It has been ascertained that two level filamentary crystals are the combustion products of loose aluminum nanopowders. At air combustion the hexagonal form monocrystals are formed in uniform magnetic field and the prolate form edged crystals of micron size are formed in the case of inhomogeneous magnetic field. The formation of stretched-out structure products can be explained by mass transfer of combustion products towards heat flows. The ordered hexagonal crystal structures are probably formed due to the oxidation products overheating under magnetic field action and the increase of mobility of their structural units in thermal wave of crystallization. According to the electron microscopy the formation of the edge crystals is possible at optimal size of combustion products particles.

UDC 621.762.3

**Skorentsev A.L., Rusin N.M., Kolubaev E.A.**  
**THE INFLUENCE OF EQUAL CHANNEL ANGULAR PRESSING ON STRUCTURE AND PROPERTIES OF ANTIFRICTION ALLOY Al-40Sn**

The authors have studied the influence of equal channel angular pressing on structure and properties of sintered alloy Al-40Sn. It was ascertained that the layer structure is formed in the alloy due to deformation processing; the phase layer thickness decreases when increasing pressing number. Besides the strengthening of Hall-Petch the alloy strength grows additionally due to interphase layer thinning. It was revealed that processing with the equal channel angular pressing method reduces the wear rate of the investigated alloy and influences slightly its friction coefficient value at dry friction.

UDC 621.791

**Poletika I.M., Krylova T.A., Tetyutskaya M.V., Makarov S.A.**  
**FORMATION OF WEAR-RESISTANCE COATINGS BY OFF-VACUUM ELECTRON-BEAM TUNGSTEN CARBIDE SURFACING AND FURTHER HEAT TREATMENT**

Hardened coatings of low wear resistance were obtained by surfacing tungsten carbide powder on low-carbon steel at accelerator ELV-6. To increase wear resistance the authors have carried out the experiments on thermal treatment influence on structure and features of the coatings surfaced with tungsten carbide.

UDC 539.4

**Barannikova S.A., Shlyakhova G.V., Zuev L.B., Maltsev Yu.A.**  
**THE STUDY OF FINE STRUCTURE OF CABLE ELEMENTS IN ENGINEERING Nb-Ti ALLOY-BASED SUPERCONDUCTORS AT MULTISTAGE COLD DRAWING**

Applying the methods of atomic force, electron and optical microscopy the authors have studied the structure evolution at an intermediate stage of cold drawing at  $\varnothing 1,3 \rightarrow \varnothing 1,2$  mm transition of superconducting Nb+47 % Ti alloy-based cable; the latter is used in magnetic system of the International Thermonuclear Experimental Reactor. The aim of the research is to analyze the influence of cold drawing deformation on the structure of multifilamentary Nb-Ti alloy-based superconductor. The authors have studied the microstructure, phase composition and their influence on properties of superconducting alloy Nb-Ti after cold drawing and intermediate annealing. The areas of plastic strain localization in spots of superconductor breaks were found out. The change of form and chemical composition of Nb-Ti fibers was detected in a defect-free region and in cable break zone. The authors determined the diffusion Nb barrier around Nb-Ti fibers in copper matrix. The laws identified should be taken into account when developing the cold drawing deformation technique to obtain the superconducting cores of the desired size.

UDC 621.372.413

**Artemenko S.N., Igumnov V.S.**  
**POWER AMPLIFICATION OF RESONANCE MICROWAVE COMPRESSOR WITH ENERGY OUTPUT BY OSCILLATION MODE TRANSFORMATION**

The paper introduces the results of estimations of principle characteristics of the resonance microwave compressor with energy output by oscillation mode transformation on coupling window of a reso-

lator with closed waveguide stub. The authors have considered the problem of providing weak coupling of the resonator with the load in energy storage mode. The power and amplification of microwave compressor output pulses were estimated. It was shown that pulse power amplification in the compressor investigated may be comparable to the amplification in the compressor with energy output through the H-tee-based interference switch. The waveguide stubs with coupling windows area comparable to the resonator section area are required to be applied in microwave compressor with oscillation mode transformation to achieve the amplification which is comparable to wave amplification in a storage resonator.

UDC 621.382

**Vintzenko I.I.**  
**MODIFICATION OF THE RELATIVISTIC MAGNETRON ELEMENTS**

The paper introduces the results of the experimental investigations of relativistic microwave magnetrons aimed to increase the efficiency and stability of the generated microwave pulses. The main elements of the magnetron: anode block, microwave output, antenna system and cathode unit have been modernized for these purposes.

UDC 537.533.9

**Koval T.V., Le Khu Zung**  
**THE RESEARCH OF THE INFLUENCE OF FERROMAGNETIC INSERT ON DENSITY DISTRIBUTION OF LOW-POWER ELECTRON BEAM**

The paper considers transportation of low-power high-current charge compensated electron beam in axially symmetric magnetic field and in non-symmetrical magnetic field of a reverse current distributor with ferromagnetic inserts arranged behind the collector. The influence of geometrical dimensions and properties of the material of cylindrical inserts (solid and hollow) on beam density distribution on the collector was numerically studied. It was shown that electron beam density section and target distribution may be controlled by ferromagnetic inserts.

UDC 537.333

**Grigoriev V.P., Zvigintsev I.L., Kuznetsov P.E.**  
**«SNAKE» INSTABILITY OF CHARGE COMPENSATED NONUNIFORM ELECTRON BEAM**

The large-scale lateral instability of charge partially compensated electron beam conditioned by resonance of coupled transverse oscillations of electron flow and ion channel is studied. The instability increments have been determined depending on wave length. It was shown that the instability is controlled on nonlinear stage due to lateral perturbation strength dependence on beam shift from equilibrium path.

UDC 621.039.51

**Kuzmin A.V.**  
**ON CALCULATION OF NEUTRON AGE IN GRAPHITE**

The authors have compared the results of calculation of fission neutron age by the experimental data of carbon neutronic characteristics in different manuals. The paper introduces solution algorithms for slowing-down neutrons age. The comparison of calculation results at fission neutron slowing-down to indium resonance energy by the group method showed good convergence with theoretical and experimental data.

UDC 534.2:539

**Belomestnykh V.N., Soboleva E.G.**  
**POISSON'S RATIOS OF ALKALI-HALIDE CRYSTALS. P. II. SODIUM HALOGENIDES**

The Poisson's ratios of sodium halogenide crystals under reference conditions and at temperature change have been studied. It was ascertained that at temperature rise in crystals NaX (X=F, Cl, Br, I) the type of inequation between anisotropic Poisson's ratio  $\sigma_{(nkl)}$  in certain points of their elastic isotropy changes.

UDC 622.692.4.05

**Bogdanov E.P., Rikkonen S.V.**  
**HYDROMECHANICAL RESISTANCE MOMENT  
 OF CONTROL SHUTTER IN MAIN OIL PIPELINE**

The authors have proposed the formal geometrical method of approximate hydromechanical calculations of a control butterfly shutter in main oil pipelines. The method allows computing pressure drops, resistance moments on a drive shaft and determining power losses in the shutter.

UDC 622.692.4.053: 621. 646.001.5

**Bogdanov E.P., Rikkonen S.V.**  
**CALCULATION OF HYDROMECHANICAL FEATURES  
 OF A PIPE VALVE OF THE MAIN PIPELINE**

The technique for calculating pressure and power losses in the pipeline element (wedge valve) considering liquid flow under and over a wedge gate has been developed. The technique allows determining power losses for transmission of different density and viscosity liquid at different ratio of pipeline length and armature elements amount. It allows developing as well the mathematical algorithm to control the pipe valve considering power losses and so minimizing to a certain degree the losses.

UDC 535:621.373.826

**Smagulov A.A., Lapin I.N., Svetlichny V.A.**  
**THE DEVELOPMENT OF THE AUTOMATED INSTALLATION  
 TO SYNTHESIZE NANOPARTICLES OF NOBLE METALS  
 BY THE METHOD OF LASER ABLATION  
 OF VOLUME TARGETS IN LIQUID**

The authors have developed the automated installation to obtain nanoparticles of noble metals by the method of laser ablation of volume targets in liquid. The installation contains the system of target displacement for its uniform irradiation and the original licensed flow system with control of nanoparticle concentration in solution by optical transmission and with feedback. The installation with fundamental harmonic pumped Nd: YAG pulse laser allows synthesizing continuously colloid solutions of Ag, Au and Pt nanoparticles in the range of concentrations 0,01...0,1 g/l with high frequency.

UDC 53.088.228+004.942

**Filippov M.M., Babushkin Yu.V., Gribenyukov A.I.**  
**ESTIMATION OF TEMPERATURE SENSOR EFFECT ON  
 TEMPERATURE FIELD OF RING HEATING MODULE**

The computation experiments on investigation of temperature sensor effect on temperature field of ring heating module of multipoint heat-treatment installation have been carried out. The results of calculation show that the temperature sensors effect considerably the temperature distribution in heating module and its energy consumption.

UDC 519.63

**Zimin V.P.**  
**STUDYING THE FEATURES OF PLASMA BOUNDARY  
 CONDITIONS IN COLLECTOR OF THERMIONIC DIODE**

The author has analyzed the model of monotone plasma boundary conditions in collector of thermionic diode on planes plasma density-ion current, plasma density-energy density of electrons and the others. The typical behavior of boundary conditions curves was classified; the features of their change including the ignition area of arc mode were studied.

UDC 621.384.64:539.12.04

**Mashchenko A.I.**  
**FREQUENCY LINEAR INDUCTION ACCELERATOR WITH TWO  
 BIPOLAR PULSES**

The paper introduces the electric circuit of frequency linear induction accelerator with magnetic commutation which forms on a load a sequence of two bipolar pulses separated from each other by time

gap. The author proposes the technique for calculating the circuit elements and the results of calculation of output pulse parameters of the accelerator when modeling its active load operation. The obtained design values of the output pulses demonstrate the possibility in principle of such accelerator application for example in processes in the field of material science.

UDC 621.039.58: 532.529.5

**Vityuk V.A., Vurim A.D., Shamamin I.V., Kozlovsky S.B.**  
**THERMOPHYSICAL METHOD FOR DETERMINING ENERGY  
 PARAMETERS OF MODEL FUEL ASSEMBLIES IN IMPULSE  
 TESTS ON PULSED URANIUM-GRAPHITE REACTOR**

The paper introduces the computational-experimental technique for controlling energy release in fuel assemblies at their testing in central experimental channel of pulse research reactor. The results of the technique approbation in the course of the test sequence with the experimental device are introduced. The device is intended for studying the behavior of model fuel assemblies of the reactor unit of VVER-1000 type under conditions modeling the final accident stage with loss of coolant.

UDC 536.2:536.33

**Morozova E.Yu., Lisitsyn V.M., Tsipilev V.P., Yakovlev A.N.**  
**LASER DAMAGE ON DOUBLE-LAYER SYSTEM INTERFACE**

The paper considers the issue of pulse laser heating of double-layer system in which the first layer is transparent relative to the actuating flow and the second is a highly lossy one. Temperature profiles of heating double-layer system at different lengths of actuating pulse have been obtained by the numerical simulation technique. It was shown that heating maximum position does not conform to medium interface. The results obtained were used when analyzing the process of laser separation of gallium nitride crystal from sapphire substrate.

UDC 535.211

**Aksenov V.P., Kanev F.Yu., Kuksenok D.S.,  
 Makenova N.A., Khapaeva A.V.**  
**RECORDING THE VORTEX BEAM PARAMETERS  
 IN TURBULENT ATMOSPHERE.  
 P. I. THE USE OF WAVE FRONT GRADIENTS**

Based on the methods of the numerical experiments the authors study the possibility of determining the characteristics of vortex radiation expanding in turbulent medium. To obtain the estimation results given in the first part of the paper the parameters are determined using gradients of phase distribution of light field; the ideal optical system is considered.

UDC 535.211

**Aksenov V.P., Kanev F.Yu., Kuksenok D.S.,  
 Makenova N.A., Khapaeva A.V.**  
**RECORDING THE VORTEX BEAM PARAMETERS  
 IN TURBULENT ATMOSPHERE. P. 2. CONSIDERATION  
 OF WAVE FRONT SENSOR RESTRICTIONS**

In the second part of the paper the Hartmann sensor model is introduced into design diagram; it allows determining its influence on optical system operation accuracy and optimizing the device parameters. In the closing paragraph the accuracy of detecting the optical vortex in turbulent medium using the sensor is compared with the accuracy of the results of the ideal optical system operation.

UDC 536.253

**Gvozdyakov D.V., Gubin V.E.**  
**MATHEMATICAL MODELING OF SULPHUROUS ANHYDRIDE  
 CONDENSATION IN ATMOSPHERE ADJOINING THERMAL  
 ELECTRIC STATION**

The paper introduces the results of numerical estimation of intensity of sulphurous anhydride condensation in air adjoining thermal electric station. The authors have determined the size of cores of acid drops which can fall on the Earth surface at sedimentation.

UDC 532.529.2

**Glukhov A.F., Demin V.A.**  
**SEDIMENTATION OF PARTICLES IN FERROCOLLOIDS**  
**CONSIDERING DYNAMIC BOUNDARY CONDITIONS**

The authors have carried out the numerical investigation of particle sedimentation in kerosene-based ferrofluid in a thin vertical channel considering probable thermodiffusion particle redistribution at nonuniform heating. The values of thermodiffusion parameter have been determined. Thermal diffusion at such parameters for specified temperature difference on channel edges is comparable to sedimentation segregation mechanism.

UDC 538.911, 539.32

**Zubko I.Yu., Simonov M.V.**  
**ENERGY METHOD TO CALCULATE ELASTIC MODULES**  
**OF FINITE SIZE SAMPLES WITH HCP-LATTICE**

The elastic modules of the finite size samples with hexagonal close-packed lattice have been calculated on the basis of theoretical research algorithm for elastic properties of metal micro- and nanomonocrystals with cubic lattice developed before [1, 2]. The sample form is matched with the lattice symmetry [3]. The power potential Mie is selected as a potential. The approach of atomic statics is used to research the elastic properties. The type of deformation gradient is prescribed and crystal current configuration is determined. To calculate the elastic modules in crystal current configuration the total potential energy of the sample taken relative to its volume is deter-

mined. The elastic modules of the sample are determined equating the square terms in its power series expansion by deformation parameters to elastic potential. It was shown that hexagonal close-packed lattice consisting of two simple sublattices cannot be deformed uniformly at preset affine kinematics. Relative shift of sublattices depending on deformation parameters should be predetermined to support the minimum of potential energy of hexagonal close-packed crystal in current configuration. It was ascertained that the elastic modules of hexagonal close-packed crystal depend on the sample size. This dependence has horizontal asymptote conforming to macroscopic monocrystal body with known elastic properties; it allows identifying the parameters of atom interaction potential. All the computations have been carried out in symbolic form in Wolfram Research «Mathematica».

UDC 536.46

**Volkov R.S., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A.**  
**SOME PHYSICAL LAWS OF SPRAYED**  
**WATER EVAPORATION WHEN MOVING THROUGH**  
**HIGH-TEMPERATURE COMBUSTION PRODUCTS**

Macroscopic laws of sprayed hydraulic fluids (fresh water and water with salt admixture) evaporation when moving through the fixed height flame has been studied by the experiment using high-speed measuring system. The integral parameters of drop evaporation (size, mass, concentration) were determined. The authors found out the conditions of spraying the test hydraulic fluids ensuring the completeness of their evaporation.



# Сведения об авторах

- Аксенов Валерий Петрович**, 1952 г.р., д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. Института оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН, г. Томск. Р.т. 49-13-72. E-mail: avp@iao.ru. Область научных интересов: сингулярная оптика, системы регистрации сингулярного волнового фронта излучения, методы восстановления фазы.
- Аль-Хассани Мудхар Аббас**, 1973 г.р., преподаватель кафедры математики педагогического университета естественных наук Аль-Басра Университета, Басра, Ирак. Аспирант кафедры высшей математики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 56-37-29. E-mail: mudhar73@yahoo.com. Область научных интересов: дифференциальная геометрия погруженных многообразий.
- Апасов Александр Михайлович**, 1950 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры «Металлургия черных металлов» Юргинского технологического института (филиала) ТПУ. Р.т. 8-(384-51)-5-31-99. E-mail: mchmyti@rambler.ru. Область научных интересов: неразрушающий контроль и техническая диагностика, история металлургии, специальная электрометаллургия, материаловедение, наноструктуры и нанотехнологии.
- Апасов Андрей Александрович**, 1976 г.р., инженер-технолог Строительной компании, г. Юрга. Р.т. 8-(384-51)-4-18-09. Область научных интересов: неразрушающий контроль и техническая диагностика, сварочное производство.
- Артемко Сергей Николаевич**, 1951 г.р., д-р физ.-мат. наук, ведущ. науч. сотр. лаборатории 46 Физико-технического института ТПУ. Р.т. 41-74-51. E-mail: snartemenko@mail.ru. Область научных интересов: радиофизика, СВЧ электроника больших мощностей, компрессия СВЧ импульсов.
- Бабушкин Юрий Владимирович**, 1952 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной математики Института кибернетики ТПУ. Р.т. 42-61-00. E-mail: am@tpu.ru. Область научных интересов: математическое моделирование тепловых процессов, исследование систем управления объектами с распределенными параметрами.
- Баранникова Светлана Александровна**, 1971 г.р., д-р физ.-мат. наук, ведущ. науч. сотр. лаборатории физики прочности Института физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск. Р.т. 28-69-23. E-mail: bsa@ispms.tsc.ru. Область научных интересов: физика прочности, пластичности и разрушения, дефекты структуры, локализация пластической деформации металлов и сплавов, материаловедение.
- Беломестных Владимир Николаевич**, 1939 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры естественнонаучного образования Юргинского технологического института (филиала) ТПУ. Р.т. 8-(384-51)-6-44-32. E-mail: bvnilat@yandex.ru. Область научных интересов: физико-химическая акустика кристаллов.
- Богданов Евгений Петрович**, 1960 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры «Электромеханические комплексы и материалы» Энергетического института ТПУ. Р.т. 56-34-53. E-mail: epbogdanov@mail.ru. Область научных интересов: качество выходных параметров и электромагнитная совместимость источников электроэнергии, энергоэффективность электрических систем.
- Винтизенко Игорь Игоревич**, 1960 г.р., д-р физ.-мат. наук, зав. лаб. 53 Физико-технического института ТПУ. Р.т. 70-56-86. E-mail: vintizenko@tpu.ru. Область научных интересов: физика пучков заряженных частиц и ускорительная техника, релятивистская высокочастотная электроника.
- Витюк Владимир Анатольевич**, 1981 г.р., начальник группы лаборатории испытаний реакторного топлива дочернего государственного предприятия «Институт атомной энергии» Республиканского государственного предприятия «Национальный ядерный центр Республики Казахстан», г. Курчатов. Р.т. 8-(722-51)-2-35-49, доб. 196. E-mail: vityuk@nnc.kz. Область научных интересов: ядерные физика и технологии.
- Волков Роман Сергеевич**, 1987 г.р., аспирант кафедры автоматизации теплоэнергетических процессов Энергетического института ТПУ. Р.т. 70-17-77, доб. 1957. E-mail: romanvolkov@tpu.ru. Область научных интересов: теплоперенос, фазовые переходы, экспериментальные исследования двухфазных потоков, высокоскоростные системы диагностики.
- Вурим Александр Давидович**, 1953 г.р., канд. физ.-мат. наук, заместитель директора по испытаниям дочернего государственного предприятия «Институт атомной энергии» Республиканского государственного предприятия «Национальный ядерный центр Республики Казахстан», г. Курчатов. Р.т. 8-(722-51)-2-35-49, доб. 217. E-mail: vurim@nnc.kz. Область научных интересов: ядерные физика и технологии.
- Гаврилин Алексей Николаевич**, 1960 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры автоматизации и роботизации в машиностроении Института кибернетики ТПУ. Р.т. 41-96-74. E-mail: tom-gawral@list.ru. Область научных интересов: виброзащита технологических систем.
- Галсанов Солбон Владимирович**, 1988 г.р., аспирант кафедры механики деформируемого твердого тела физико-технического факультета Томского государственного университета. Р.т. 53-35-77. E-mail: S\_galsanov@sibmail.com. Область научных интересов: изучение триботехнических свойств никелида титана.
- Гвоздяков Дмитрий Васильевич**, 1985 г.р., ассистент кафедры атомных и тепловых электростанций Энергетического института ТПУ. Р.т. 56-37-49. E-mail: dim2003@tpu.ru. Область научных интересов: конвективный теплообмен в газах, двухфазные потоки, энергосбережение, теплоэнергетика.

- Глухов Александр Федорович**, 1955 г.р., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры общей физики Пермского государственного университета. Р.т. 8-(342)-239-64-03. E-mail: glu@psu.ru. Область научных интересов: тепловая конвекция многокомпонентных сред, теплофизические измерения, молекулярная физика.
- Гнусов Сергей Федорович**, 1960 г.р., д-р техн. наук, профессор кафедры «Оборудование и технология сварочного производства» Института неразрушающего контроля ТПУ. Р.т. 41-95-41. E-mail: gnufov@rambler.ru. Область научных интересов: использование фазового превращения и эффекта сверхпластичности при формировании композиционных материалов, износостойких покрытий и сварке биметаллического инструмента.
- Горячев Борис Валентинович**, 1947 г.р., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры общей физики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 56-38-45. E-mail: bvg@tpu.ru. Область научных интересов: перенос излучения, атмосферная оптика.
- Грибенюков Александр Иванович**, 1947 г.р., канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. Института мониторинга климатических и экологических систем СО РАН, зам. директора по науке ООО «Лаборатория оптических кристаллов», г. Томск. Р.т. 49-25-89. E-mail: loc@imces.ru. Область научных интересов: материаловедение, оптика, прикладная нелинейная оптика.
- Григорьев Владимир Петрович**, 1941 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой прикладной математики Института кибернетики ТПУ. Р.т. 42-04-00. E-mail: grig@am.tpu.ru. Область научных интересов: физика плазмы и пучков заряженных частиц, моделирование динамических процессов в физике и экологии.
- Губин Владимир Евгеньевич**, 1976 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры атомных и тепловых электростанций Энергетического института ТПУ. Р.т. 56-03-34. E-mail: Gubin@tpu.ru. Область научных интересов: конвективный теплообмен в газах, двухфазные потоки, энергосбережение.
- Двилис Эдгар Сергеевич**, 1969 г.р., канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. научно-образовательного инновационного центра «Нanomатериалы и нанотехнологии» Института физики высоких технологий ТПУ. Р.т. 42-69-36. E-mail: dvilis@tpu.ru. Область научных интересов: нанопорошки, компактирование, рентгенофазовый и микроструктурный анализы.
- Демин Виталий Анатольевич**, 1970 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической физики Пермского государственного университета. Р.т. 8-(342)-239-62-27. E-mail: demin@psu.ru. Область научных интересов: тепловая конвекция, теория гидродинамической устойчивости, тепломассоперенос в многокомпонентных средах.
- Дураков Василий Григорьевич**, 1963 г.р., канд. техн. наук, ст. науч. сотр. Института физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск. Р.т. 28-69-13. E-mail: electron@ispms.tsc.ru. Область научных интересов: электронно-лучевая наплавка и сварка.
- Ефременков Егор Алексеевич**, 1975 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры «Технология автоматизированного машиностроительного производства» Института кибернетики ТПУ. Р.т. 56-38-28. E-mail: ephrea@mail.ru. Область научных интересов: разработка, проектирование и технология изготовления передач с промежуточными телами качения.
- Ешетов Багдат Алтаевич**, 1989 г.р., магистрант кафедры наноматериалов и нанотехнологий Института физики высоких технологий ТПУ. Р.т. 42-69-36. E-mail: eshetov\_15@mail.ru. Область научных интересов: технология силикатных и тугоплавких неметаллических материалов.
- Жданев Олег Валерьевич**, 1978 г.р., канд. физ.-мат. наук, ассистент кафедры промышленной и медицинской электроники ТПУ. E-mail: Oleg\_1978@mail.ru. Область научных интересов: петролеумика, геофизика и испытания скважин, аналитическая химия, физико-химия пластовых жидкостей, физика и техника лазеров.
- Звигинцев Илья Леонидович**, 1985 г.р., ассистент кафедры прикладной математики Института кибернетики ТПУ. Р.т. 42-04-00. E-mail: zvigintsev@yandex.ru. Область научных интересов: физика плазмы и пучков заряженных частиц.
- Зимин Вячеслав Прокопьевич**, 1955 г.р., канд. техн. наук, ст. науч. сотр., доцент кафедры прикладной математики Института кибернетики ТПУ. Р.т. 42-61-00. E-mail: zimmin@tpu.ru. Область научных интересов: моделирование процессов в низкотемпературной плазме, информационные технологии, применение нейросетевой технологии и вычислительного эксперимента при решении практических задач.
- Зубко Иван Юрьевич**, 1976 г.р., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования систем и процессов Пермского национального исследовательского политехнического университета. Р.т. 8-(342)-239-12-97. E-mail: zoubko@pstu.ru. Область научных интересов: микро- и мезомеханика.
- Зуев Лев Борисович**, 1940 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий лабораторией физики прочности Института физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск. Р.т. 49-13-60. E-mail: lbz@ispms.tsc.ru. Область научных интересов: физика прочности, пластичности и разрушения, металловедение и термическая обработка материалов; локализация пластической деформации, неразрушающие методы.
- Ивлев Евгений Тихонович**, 1935 г.р., канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 56-37-29. E-mail: iet@tpu.ru. Область научных интересов: локальная дифференциальная геометрия.
- Игнатов Андрей Алексеевич**, 1987 г.р., аспирант кафедры «Оборудование и технология сварочного производства» Института неразрушающего контроля ТПУ. Р.т. 41-95-41. E-mail: andrjuh@sibmail.com. Область научных интересов: использование фазового превращения при формировании износостойких покрытий.

- Игумнов Владислав Сергеевич**, 1982 г.р., аспирант, инженер лаборатории 46 Физико-технического института ТПУ. Р.т. 41-74-51. E-mail: igumnov@tpu.ru. Область научных интересов: радиофизика, СВЧ электроника больших мощностей, компрессия СВЧ импульсов.
- Ильин Александр Петрович**, 1949 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры общей и неорганической химии Института физики высоких технологий ТПУ. Р.т. 56-36-33. E-mail: genchem@mail.ru. Область интересов: электрический взрыв, нанопорошки, неравновесные процессы, физика и химия наноматериалов.
- Канев Федор Юрьевич**, 1960 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры электрических сетей и электротехники Энергетического института ТПУ, вед. науч. сотр. лаборатории когерентной и адаптивной оптики Института оптики атмосферы СО РАН, г. Томск. Р.т. 49-13-72. E-mail: mna@iao.ru. Область научных интересов: проблема распространения оптического излучения в атмосфере, адаптивная оптика, сингулярная оптика.
- Клопотов Анатолий Анатольевич**, 1952 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой общего материаловедения и композиционных материалов Томского государственного архитектурно-строительного университета, ст. науч. сотр. НИИ медицинских материалов, г. Томск. Р.т. 65-07-23. E-mail: klopotovaa@tsuab.ru. Область научных интересов: структурные исследования фазовых переходов в металлических сплавах.
- Клопотов Владимир Дмитриевич**, 1950 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 41-38-15. E-mail: vklopotov@mail2000.ru. Область научных интересов: структурные исследования фазовых переходов в металлических сплавах.
- Кнестяпин Евгений Александрович**, 1989 г.р., аспирант кафедры общего материаловедения и композиционных материалов Томского государственного архитектурно-строительного университета. Р.т. 65-07-23. E-mail: knestyap@gmail.com. Область научных интересов: структурные исследования фазовых переходов в металлических сплавах.
- Кобза Евгений Евгеньевич**, 1986 г.р., аспирант кафедры «Технология автоматизированного машиностроительного производства» Института кибернетики ТПУ. Р.т. 41-95-39. E-mail: low.crow@mail.ru. Область научных интересов: разработка, проектирование и технология изготовления передач с промежуточными телами качения.
- Коваль Тамара Васильевна**, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики Института кибернетики ТПУ. Р.т. 42-04-00. E-mail: tvkoval@mail.ru. Область научных интересов: коллективное взаимодействие пучков заряженных частиц с электромагнитными полями и веществом.
- Козлов Эдуард Викторович**, 1934 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой физики Томского архитектурно-строительного университета, руководитель научной школы по физике фазовых переходов, физике прочности и пластичности. Р.т. 65-42-63, 65-42-65. E-mail: kozlov@tsuab.ru. Область научных интересов: физика конденсированного состояния, материаловедение.
- Козловский Сергей Борисович**, 1988 г.р., аспирант кафедры физико-энергетических установок, инженер-оператор лаборатории № 32 Физико-технического института ТПУ. Р.т. 72-31-44. E-mail: kozlovskiy@tpu.ru. Область научных интересов: ядерные физика и технологии.
- Колубаев Евгений Александрович**, 1979 г.р., канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. Института физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск. Р.т. 28-68-15. E-mail: eak@ispms.ru. Область научных интересов: трение, изнашивание, поверхность, покрытия, микроструктура, фрикционные колебания, акустическая эмиссия.
- Коровин Георгий Иванович**, 1959 г.р., технический директор ООО ПК «Мион», г. Томск. Р.т. 21-30-37 E-mail: pk-mion@mail.ru. Область научных интересов: разработка инновационных конструкций режущего инструмента.
- Корытов Игорь Витальевич**, 1961 г.р., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики и математической физики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 41-89-17. E-mail: korytov@tpu.ru. Область научных интересов: численное интегрирование функций одного и нескольких переменных, оценка погрешности квадратурных и кубатурных формул методами функционального анализа.
- Крылова Татьяна Александровна**, канд. техн. наук, мл. науч. сотр. лаборатории композиционных материалов Института физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск. Р.т. 28-68-33. E-mail: krylovaT@sibmail.com. Область научных интересов: металловедение и термическая обработка металлов.
- Кудуев Алтынбек Жалилбекович**, 1980 г.р., ст. преподаватель кафедры информационных технологий и автоматизированных систем факультета математики и информационных технологий Омского государственного университета. Р.т. 8-(10-996)-322-256-242. E-mail: altun\_12@rambler.ru. Область научных интересов: вейвлеты, сплайны, высокопроизводительные вычисления, моделирование.
- Кузнецов Гений Владимирович**, 1949 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор, заместитель директора Энергетического института ТПУ. Р.т. 56-36-13. E-mail: elf@tpu.ru. Область научных интересов: теплофизика, теплоэнергетика, теплотехника, тепломассоперенос, двухфазные течения, тепловые электрические станции, математическое моделирование.
- Кузнецов Павел Евгеньевич**, 1993 г.р., студент кафедры прикладной математики Института кибернетики ТПУ. Р.т. 42-04-00. E-mail: zvigintsev@yandex.ru. Область научных интересов: математическое моделирование физических процессов в плазме.
- Кузьмин Ариан Валерьевич**, 1942 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры атомных и тепловых электростанций



- Энергетического института ТПУ. Р.т. 42-08-37. E-mail: kuzminav@tpu.ru. Область научных интересов: физика ядерных реакторов.
- Куксенюк Дмитрий Сергеевич**, 1992 г.р., студент кафедры оптико-электронных систем и дистанционного зондирования Радиофизического факультета Томского государственного университета. Р.т. 49-13-72. E-mail: moty@sibmail.com. Область научных интересов: адаптивная оптика, атмосферная оптика.
- Кулагина Валентина Васильевна**, канд. физ.-мат. наук, докторант Сибирского физико-технического института, г. Томск. Р.т. 41-38-15. E-mail: kanc@spti.tsu.ru. Область научных интересов: исследования фазовых переходов в сплавах.
- Лапин Иван Николаевич**, 1980 г.р., науч. сотр. лаборатории новых материалов и перспективных технологий Сибирского физико-технического института Томского государственного университета. Р.т. 53-15-91. E-mail: 201kiop@mail.ru. Область научных интересов: лазерная абляция, спектроскопия, рентгеновские методы анализа, новые материалы.
- Ле Ху Зунг**, 1984 г.р., аспирант кафедры прикладной математики Института кибернетики ТПУ. Р.т. 42-04-00. E-mail: lehuydungvn@gmail.com. Область научных интересов: транспортировка электронных пучков в плазменно-наполненных каналах.
- Лисицын Виктор Михайлович**, 1938 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры лазерной и световой техники Института физики высоких технологий ТПУ. Р.т. 56-41-33. E-mail: lisytsyn@tpu.ru. Область научных интересов: радиационная физика твердого тела, радиационные дефекты, кинетика твердофазных реакций, горение и взрыв, импульсная спектрометрия.
- Лучинин Анатолий Алексеевич**, 1934 г.р., канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 56-37-29. E-mail: luchinin@tpu.ru. Область научных интересов: локальная дифференциальная геометрия.
- Макаров Семен Александрович**, 1985 г.р., мл. научн. сотр. лаборатории композиционных материалов Института физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск. Р.т. 28-68-33. E-mail: semakm@sibmail.com. Область научных интересов: металловедение и термическая обработка металлов.
- Макенова Наиля Алтынхановна**, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры электрических сетей и электротехники Энергетического института ТПУ, науч. сотр. лаборатории когерентной и адаптивной оптики Института оптики атмосферы СО РАН, г. Томск. Р.т. 56-34-33. E-mail: mna.05@mail.ru. Область научных интересов: адаптивная оптика, коррекция атмосферных искажений лазерного излучения, нелинейная оптика.
- Мальцев Юрий Андреевич**, 1992 г.р., студент кафедры теории прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета. Р.т. 52-98-45. E-mail: aspire-life@yandex.ru. Область научных интересов: дефекты структуры, локализация пластической деформации металлов и сплавов.
- Маркова Татьяна Николаевна**, аспирант, инженер кафедры физики Сибирского государственного индустриального университета, г. Новокузнецк. Р.т. 8-(384-3)-42-22-77. E-mail: patriot\_rf@mail.ru. Область научных интересов: исследования фазовых переходов в сплавах.
- Машенко Александр Иванович**, 1953 г.р., канд. техн. наук, ст. науч. сотр. лаборатории № 53 Физико-технического института ТПУ. Р.т. 70-56-86. E-mail: mashchenko@tpu.ru. Область научных интересов: сверхпроводящая коммутационная аппаратура, сверхпроводящие магнитные системы, магнитные импульсные генераторы, линейные индукционные ускорители.
- Медведев Валерий Викторович**, 1950 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры транспорта и хранения нефти и газа Института природных ресурсов ТПУ. Р.т. 56-41-33. E-mail: medvedev@tpu.ru. Область научных интересов: взаимодействие лазерного излучения с веществом, физика горения и взрыва.
- Могильницкий Сергей Борисович**, 1951 г.р., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры общей физики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 56-38-35. E-mail: msb@tpu.ru. Область научных интересов: перенос излучения, атмосферная оптика.
- Молдованова Евгения Александровна**, старший преподаватель кафедры высшей математики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 56-37-29. E-mail: eam@tpu.ru. Область научных интересов: локальная дифференциальная геометрия.
- Монахова Эмилия Анатольевна**, канд. техн. наук, доцент, ст. науч. сотр. Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск. Р.т. 8-(383)-301-14-89. E-mail: emilia@rav.sssc.ru. Область научных интересов: дискретная оптимизация, параллельные алгоритмы, вычислительные системы, теория графов, эволюционные вычисления, искусственный интеллект.
- Морозов Максим Михайлович**, 1970 г.р., канд. техн. наук, докторант кафедры физики Сибирского государственного индустриального университета, г. Новокузнецк. Р.т. 8-(384-3)-42-22-77. E-mail: 7mmm81@gmail.com. Область научных интересов: исследования фазовых переходов в сплавах.
- Морозова Елена Юрьевна**, 1984 г.р., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры лазерной и световой техники Института физики высоких технологий ТПУ. Р.т. 56-41-33. E-mail: morozova@tpu.ru. Область научных интересов: моделирование процессов взаимодействия лазерного излучения с веществами, физика взрыва, энергетические материалы.
- Мостовщиков Андрей Владимирович**, 1989 г.р., магистрант кафедры общей и неорганической химии Института физики высоких напряжений ТПУ. Р.т. 70-17-77, доб. 1466. E-mail: pasebellum@mail.ru. Область научных интересов: горение нанопорошка алюминия, физика твердого тела, процессы кристаллизации.

- Пахомова Елена Григорьевна**, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 56-35-93. E-mail: peg@tpu.ru. Область научных интересов: алгебра, теория групп.
- Полетика Ирина Михайловна**, д-р техн. наук, ведущ. науч. сотр. лаборатории композиционных материалов Института физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск. Р.т. 28-68-58. E-mail: poletika@list.ru. Область научных интересов: физика конденсированного состояния.
- Потекаев Александр Иванович**, 1951 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Сибирского физико-технического института им. акад. В.Д. Кузнецова при Томском государственном университете. Р.т. 41-46-53. E-mail: potekaev@spti.tsu.ru. Область научных интересов: трибология, слабоустойчивые структуры, межфазовые превращения.
- Решетов Александр Александрович**, 1952 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры автоматики и вычислительной техники Института геологии и нефтегазового дела Тюменского государственного нефтегазового университета. Р.т. 8-(345-2)-41-68-38. E-mail: resh@tsoгу.ru. Область научных интересов: нанопорошки, физика горения и взрыва.
- Рикконен Сергей Владимирович**, 1952 г.р., канд. техн. наук, доцент, главный конструктор ООО «НПО «Система», г. Томск. Р.т. 56-34-53. E-mail: RIKK2@yandex.ru. Область научных интересов: электромеханические преобразователи энергии, вибрационная техника, реология нефти и нефтепродуктов, энергоэффективность электрических и гидродинамических систем.
- Родионов Андрей Иванович**, 1948 г.р., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической механики и сопротивления материалов Новосибирского государственного технического университета. Р.т. 8-(383-3)-46-17-77. E-mail: teormech@ngs.ru. Область научных интересов: теоретическая и прикладная механика, механика деформируемого твердого тела, общая и теоретическая физика.
- Рожков Павел Сергеевич**, 1985 г.р., аспирант ТПУ, инженер ООО ПК «Мион», г. Томск. Р.т. 21-30-37. E-mail: pk-mion@mail.ru. Область научных интересов: виброзащита технологических систем.
- Русин Николай Мартемьянович**, 1955 г.р., канд. техн. наук, ст. науч. сотр. лаборатории физико-химии порошковых материалов Института физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск. Р.т. 28-68-44. E-mail: rusinnm@mail.ru. Область научных интересов: физика и механика конденсированных материалов, трибология, материаловедение.
- Скоренцев Александр Леонидович**, 1987 г.р., технолог лаборатории физико-химии порошковых материалов Института физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск. Р.т. 28-69-62. E-mail: skoralexan@mail.ru. Область научных интересов: антифрикционные материалы, равноканальное угловое прессование, трение, изнашивание.
- Светличный Валерий Анатольевич**, 1970 г.р., канд. физ.-мат. наук, доцент, заместитель заведующего лаборатории новых материалов и перспективных технологий Сибирского физико-технического института Томского государственного университета. Р.т. 53-15-91. E-mail: svet@spti.tsu.ru. Область научных интересов: нелинейная оптика, оптическая спектроскопия, новые материалы.
- Симонов Максим Владимирович**, 1992 г.р., студент кафедры математического моделирования систем и процессов Пермского национального исследовательского политехнического университета. Р.т. 8-(342)-239-12-97. E-mail: stud-mm09@yandex.ru. Область научных интересов: физика и механика кристаллических материалов.
- Симонян Саркис Оганесович**, 1946 г.р., д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой информационных технологий и автоматизации Государственного инженерного университета Армении, г. Ереван, заслуженный деятель науки Республики Армения, академик Инженерной Академии Армении. Р.т. 8-(37-410)-58-27-67. E-mail: ssimonyan@seua.am. Область научных интересов: системный анализ, моделирование, оптимизация, управление, дифференциальные преобразования.
- Смагулов Аманжол Амангельдыевич**, 1989 г.р., инженер лаборатории новых материалов и перспективных технологий Сибирского физико-технического института Томского государственного университета. Р.т. 53-15-91. E-mail: amanjol1989@mail.ru. Область научных интересов: лазерная абляция, наночастицы.
- Соболева Эльвира Гомеровна**, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры естественнонаучного образования Юргинского технологического института (филиала) ТПУ. Р.т. 8-(384-51)-6-44-32. E-mail: sobolevaeno@mail.ru. Область научных интересов: физико-химическая акустика кристаллов.
- Соколов Виталий Михайлович**, 1938 г.р., канд. техн. наук, ст. науч. сотр. научно-образовательного инновационного центра «Наноматериалы и нанотехнологии» Института физики высоких технологий ТПУ. Р.т. 42-69-36. E-mail: sokolov@tpu.ru. Область научных интересов: нанопорошки, компактирование, рентгенофазовый и микроструктурный анализы.
- Сорокова Светлана Николаевна**, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Физика высоких технологий в машиностроении» Института физики высоких технологий ТПУ. Р.т. 42-14-80. E-mail: s\_sorokova@tpu.ru. Область научных интересов: компьютерное и математическое моделирование в естественных науках.
- Стрижак Павел Александрович**, 1985 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры автоматизации теплоэнергетических процессов Энергетического института ТПУ. Р.т. 70-17-77, доб. 1910. E-mail: pavelspa@tpu.ru. Область научных интересов: процессы тепломассопереноса, зажигание конденсированных веществ локальными источниками нагрева, разработка энергоэффективных теплоносителей, численное и экспериментальное исследование двухфазных парожидкостных потоков.

- Тетюцкая Марина Владимировна**, канд. техн. наук, мл. науч. сотр. лаборатории композиционных материалов Института физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск. Р.т. 28-68-33. E-mail: tetutskaya@inbox.ru. Область научных интересов: металловедение и термическая обработка металлов.
- Устинова Ирина Георгиевна**, канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 56-35-93. E-mail: igu@sibmail.com. Область научных интересов: математические методы моделирования процессов и явлений, фильтрация геофизических полей.
- Филиппов Максим Михайлович**, 1982 г.р., канд. техн. наук, ведущий эксперт информационно-исследовательского центра информационно-аналитического управления ТПУ. Р.т. 70-56-79. E-mail: nauka@tpu.ru. Область научных интересов: математическое моделирование тепловых процессов, исследование систем управления объектами с распределенными параметрами.
- Хапаева Анна Вячеславовна**, 1993 г.р., студентка кафедры электрических сетей и электротехники Энергетического института ТПУ. Р.т. 56-34-33. E-mail: mna.05@mail.ru. Область научных интересов: оптика, адаптивная оптика.
- Хасанов Олег Леонидович**, 1958 г.р., д-р техн. наук, профессор, директор научно-образовательного инновационного центра «Наноматериалы и нанотехнологии» Института физики высоких технологий ТПУ. Р.т. 42-72-42. E-mail: khasanov@tpu.ru. Область научных интересов: нанопорошки, компактирование, нанокерамика, наноструктура.
- Хохлов Виктор Александрович**, 1945 г.р., канд. техн. наук, доцент кафедры механики деформируемого твердого тела физико-технического факультета Томского государственного университета. Р.т. 53-12-67. E-mail: khokhlov@sibmail.com. Область научных интересов: изучение триботехнических свойств никелида титана.
- Ципилев Владимир Папилович**, 1940 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры лазерной и световой техники Института физики высоких технологий ТПУ. Р.т. 56-41-33. E-mail: tsipilev@tpu.ru. Область научных интересов: нестационарные процессы, горение, детонация, взрыв, взаимодействие лазерного излучения с веществом, оптика рассеивающих сред, импульсная спектрометрия, кинетика твердофазных реакций.
- Чартпук Пракорб**, 1977 г.р., аспирант кафедры наноматериалов и нанотехнологий Института физики высоких технологий ТПУ. Р.т. 42-69-36. E-mail: prakorb@hotmail.com. Область научных интересов: технология силикатных и тугоплавких неметаллических материалов.
- Чуриков Виктор Анатольевич**, 1960 г.р., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Физико-технического института ТПУ. Р.т. 56-35-93. E-mail: vachu-rikov@list.ru. Область научных интересов: дробный анализ, математические модели в психологии, рентгеновская и нейтронная оптика, гамма-лазеры, квантовая теория поля.
- Шаманин Игорь Владимирович**, 1962 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор, академик АИН, руководитель отделения ядерных технологий, профессор кафедры физико-энергетических установок, заведующий лабораторией № 16 Физико-технического института ТПУ. Р.т. 41-63-63. E-mail: shiva@tpu.ru. Область научных интересов: ядерная физика и технологии.
- Шляхова Галина Витальевна**, 1966 г.р., канд. техн. наук, науч. сотр. лаборатории физики прочности Института физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск. Р.т. 28-69-23. E-mail: shgv@ispms.tsc.ru. Область научных интересов: структура металлов и сплавов, материаловедение, атомно-силовая микроскопия.
- Шулепов Иван Анисимович**, 1954 г.р., канд. физ. мат. наук, ст. науч. сотр. лаборатории 22 Физико-технического института ТПУ. Р.т. 42-39-63. E-mail: shulepov@tpu.ru. Область научных интересов: исследование свойств поверхности твердых тел.
- Шумилов Борис Михайлович**, 1947 г.р., д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики общеобразовательного факультета Томского государственного архитектурно-строительного университета. Р.т. 65-93-58. E-mail: sbm@tsuab.ru. Область научных интересов: вейвлеты, сплайны, высокопроизводительные вычисления, моделирование.
- Ыманов Улукбек Сайдакромович**, 1981 г.р., ст. преподаватель кафедры информационных технологий и автоматизированных систем факультета математики и информационных технологий Ошского государственного университета. Р.т. (810-996)-322-25-62-42. E-mail: umanv8106@rambler.ru. Область научных интересов: вейвлеты, сплайны, высокопроизводительные вычисления, моделирование.
- Эшаров Элзарбек Асанович**, 1978 г.р., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики общеобразовательного факультета Томского государственного архитектурно-строительного университета. Р.т. 65-93-58. E-mail: elzare78@mail.ru. Область научных интересов: вейвлеты, сплайны, высокопроизводительные вычисления, моделирование.
- Яковлев Алексей Николаевич**, 1971 г.р., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры лазерной и световой техники Института физики высоких технологий ТПУ. Р.т. 70-16-19. E-mail: yakovlev\_an@tpu.ru. Область научных интересов: нестационарные процессы, взаимодействие лазерного излучения с веществом, оптика рассеивающих сред, импульсная спектрометрия, кинетика твердофазных реакций.



## К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Принимаются статьи, подготовленные в MS Word-2003 (файл и распечатка). Статья должна быть подписана авторами и иметь сопроводительное письмо на бланке организации.

Объем статьи до 8 стр., включая рисунки и таблицы, размещенные в тексте по упоминанию. Размер бумаги А4, поля по 25 мм. Текст в 1 интервал **без переносов, лишних пробелов и абзацных интервалов**, шрифт Times New Roman, 12 пунктов. Файлы рисунков (в градациях серого) в jpg, tif, cdr или иных форматах редакторов Photoshop, Corel Draw с разрешением 300 dpi прилагаются к статье. Рисунки и таблицы: **Рис. 1. Название; Таблица. Название.** Кавычки вида «...». Интервалы – 1,2...1,8 мм или 5–7 шт. Формулы – в MathType, настройка по умолчанию. Нумеруются только те формулы, на которые есть ссылка в тексте.

Курсивом – буквы латинского алфавита, кроме входящих в имена собственные, обозначения стандартных математических функций и химических элементов ( $U_{пр.}$ ,  $\Phi_i$ , но  $Al_2O_3$ ,  $\cos\alpha_i$ ,  $\max$ ,  $\lg$ , «BASF»). Векторы – полужирным курсивом. Список литературы – по ГОСТ Р 7.0.5-2008 (см. пример). Литература – по упоминанию: [1, 2], [2. С. 245], [3–7].

УДК 621.37 (Пример оформления статьи)

## АНАЛИЗ РАБОТЫ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОЙ РЕГУЛИРОВКИ

И.И. Иванов, П.П. Петров\*

Томский политехнический университет

\*ОАО «Центр», г. Москва

E-mail: ivanov@tpu.ru

Показана возможность расчета ... Установлено, что ... Сделан вывод о том, что ... (Аннотация, 10 кегль).

### Ключевые слова (ниже ключевые слова на английском языке):

Усилительный каскад, регулировка тока.

В [1, 2] показано, что усилительный каскад с автоматической регулировкой потребляемого тока (АРПТ) позволяет получить ...

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фамилия И.О. Название книги. – М.: Издательство, 2013. – 123 с.
2. Название книги / под ред. И.О. Фамилия. – М.: Издательство, 2013. – 123 с.
3. Фамилия И.О. Название статьи // Журнал. – 2013. – Т. 316. – № 1. – С. 71–77.
4. Фамилия И.О. Название диссертации: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Томск, 2008. – 19 с.
5. Название изобретения: пат. 2000000 Рос. Федерация. № 2009129009/10; заявл. 27.07.13; опубл. 10.10.13, Бюл. № 4. – 3 с.
6. Фамилия И.О. Название статьи // Наименование конференции: Труды VII Междунар. научно-практ. конф. молодых ученых. – Томск, 2013. – Т. 1. – С. 226–228.
7. Фамилия И.О. Название статьи // Наименование ресурса. 2013. URL: <http://www.tpu.ru/html/izvestia.htm> (дата обращения: 25.09.2013).

Поступила 25.01.2013 г.


### Сведения об авторах:

**Иванов Иван Иванович**, 1975 г.р., канд. техн. наук, ст. науч. сотр. кафедры автоматизации и компьютерных систем Института кибернетики ТПУ. Р.т. 22-22-22. E-mail: ivanov@tpu.ru. Область научных интересов: анализ...

**Редактирование и корректура** *А.С. Глазырин*  
**Компьютерная верстка** *О.Ю. Аршинова*  
**Перевод на англ. язык** *С.В. Жаркова*

Подписано к печати 19.09.2013. Формат 60x84/8. Бумага «Снегурочка».  
Печать XEROX. Усл. печ. л. 26,06. Уч.-изд. л. 23,56.  
Заказ 932-13. Тираж 500 экз.

---

ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.  
Тел./факс: 8(3822) 563-291, [www.tpu.ru](http://www.tpu.ru), [izv@tpu.ru](mailto:izv@tpu.ru)