МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРРИТОРИАЛЬНОГО ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ

А.Л. Сивушина, А.О. Комбу

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. В.И. Рюмкин

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: ansivushina@gmail.com

MATHEMATICAL MODELING OF TERRITORIAL PRICING

A.L. Sivushina, A.O. Komby

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Cand. Sci. (Phys.–Math.) V.I. Ryumkin

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: ansivushina@gmail.com

Abstract. *In the present study, we construct and analized the mathematical game model of territorial pricing for a specific set of products, producers of which are spaced, and the sale of goods is made by the intermediaries who buy goods from manufacturers and independently, with defined costs, delivering goods to points of implementation.*

Введение. Рыночное ценообразование на различные виды товаров существенным образом зависит от территориального распределения пунктов производства и сбыта товаров, а также от развития транспортной инфраструктуры, обеспечивающей доставку этих товаров в пункты реализации. В связи с этим создание и анализ адекватных математических моделей территориального ценообразования является одной из насущных задач, решение которых призвано обеспечить развитие экономики страны. В данной работе предлагается игровая математическая модель ценообразования, описывающая действия конкурирующих агентов, в результате которых возникают равновесные ситуации, определяющие соответствующие рыночные цены на товары.

Построение модели. Рассмотрим рыночную систему, состоящую из четырех взаимосвязанных подсистем:

- Подсистемы из L пространственно разнесенных (расположенных достаточно далеко друг от друга) пунктов производства $A_1, A_2, \ldots, A_L$ определенного набора товаров $T_1, T_2, \ldots, T_K$;
- Подсистемы из M пространственно разнесенных пунктов реализации $B_1, B_2, \ldots, B_M$ этих товаров;
- Подсистемы из N агентов-посредников $G_1, G_2, \ldots, G_N$, покупающих товары у производителей в пунктах производства и реализующих эти товары в пунктах реализации $B_1, B_2, \ldots, B_M$;
- Подсистемы из большого числа покупателей (конечных потребителей) этих товаров.

Считаем, что все предлагаемые к продаже товары обладают свойством бесконечной делимости и в конечном итоге всегда продаются (по соответствующим ценам – чем больше товара, тем ниже цена).

Обозначим через p_{ik} цену товара T_k в пункте производства P_i, а через ξ_{ikj} – стоимость перевозки единицы товара T_k из P_i в B_j. Обозначим через X^n_{ikj} количество товара T_k, которое агент G_n поставляет из A_i в B_j. Тогда общее количество X_{kj} товара T_k в пункте B_j будет равно

$$X_{kj} = \sum_{n=1}^{N} X^n_{kj}\,,\ \text{где}\ X^n_{kj} = \sum_{i=1}^{L} X^n_{ikj}\,.$$

Предположим, что рыночная цена товара T_k в пункте реализации B_j является функцией общего предложения этого товара. Пусть эта функциональная зависимость описывается следующей линейной функцией:

$$P_{kj}(X_{kj}) = (1 - X_{kj}/\alpha_{kj})\beta_{kj}, \qquad X_{kj} \in [0, \alpha_{kj}],$$

где $\alpha_{kj}, \beta_{kj} > 0$ – некоторые положительные постоянные.

Тогда общий доход H_n для *n*-го игрока G_n будет вычисляться по формуле

$$H_n = \sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{K} H_n(kj)\,, \tag{1}$$

где $H_n(kj)$ – его доход на *k*-м товаре, получаемом в пункте реализации B_j:

$$H_n(kj) = X^n_{kj}(1 - X_{kj}/\alpha_{kj})\beta_{kj} - \sum_{i=1}^{L} X^n_{ikj}(\xi_{ikj} + p_{ik}), \qquad X_{kj} \in [0, \alpha_{kj}]\,. \tag{2}$$

Таким образом, формулой (2) определяется стратегическая игра Γ^N для N лиц, в которой стратегиями каждого *n*-го игрока G_n являются числовые массивы (X^n_{ikj}) с неотрицательными элементами, ограниченными значениями параметров α_{kj}.

Исследование модели. Представляет интерес вопрос о существовании классических игровых равновесий и профили соответствующих стратегий игроков для предложенной модели. В качестве равновесий, наиболее подходящих под доминирующую в настоящее время либеральную рыночную модель свободной конкуренции, в данной работе рассматриваются равновесия Нэша, Штакельберга [1], а также равновесие, возникающее в модифицированной модели Штакельберга [2] с несколькими лидерами и несколькими последователями.

Равновесие Нэша в игре N лиц. Равновесие Нэша в игре Γ^N выражает собой совокупность стратегий игроков, действующих в условиях жесткой конкуренции без права на коалиции («каждый за себя»). В равновесной по Нэшу ситуации ни один из игроков в одиночку не заинтересован в отклонении от своей равновесной по Нэшу стратегии, но при условии, что все другие игроки при этом также не изменяют своим рановесным по Нэшу стратегиям.

Утверждение 1. Пусть справедливы следующие условия:

1) *для каждой пары* (k, j) *существует единственное* $i = q(k, j)$ *такое, что для него достигается минимум суммы* $\xi_{ikj} + p_{ik}$.

2) *товары взаимно независимы между собой в том смысле, что наличие или отсутствие товара одного вида не влияет на спрос товара другого вида.*

Тогда равновесие Нэша существует, причем равновесные по Нэшу стратегии игроков и соответствующие цены определяются формулами

$$\widetilde{X}_{kj}^{n} = \frac{1}{N+1}\delta_{q(k,j)}^{l}\alpha_{kj}\left(1-\frac{\xi_{lkj}+p_{lk}}{\beta_{kj}}\right),\ n=\overline{1,N},$$

$$\widetilde{P}_{kj}(\widetilde{X}_{kj}) = \left(\beta_{kj} - \frac{N}{N+1}\delta_{q(k,j)}^{l}\left(\beta_{kj}-\xi_{lkj}-p_{lk}\right)\right),$$

где δ_m^l *обозначает символ Дирака:* $\delta_m^l = \begin{cases} 1, & l=m, \\ 0, & l \neq m. \end{cases}$

Равновесие в модифицированной модели Штакельберга. Рассмотрим игру N лиц, в которой имеется Θ лидеров и $N-\Theta$ последователей. Игра представляется следующей двухшаговой схемой.

Шаг 1. Лидеры $G_1, G_2, \ldots, G_\Theta$ одновременно и независимо друг от друга выбирают свои стратегии $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_\Theta$.

Шаг 2. Последователи $G_{\Theta+1}G_{\Theta+2}, \ldots, G_N$ анализируют $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_\Theta$ и выбирают свои стратегии $\tilde{s}_{\Theta+1}\tilde{s}_{\Theta+2}, \ldots, \tilde{s}_N$, разыгрывая между собой равновесие Нэша.

Особенность данной модели состоит в том, что лидеры находятся в привилегированном положении, поскольку могут просчитать наилучшие ответы последователей на каждый профиль лидерских стратегий и реализовать такой совместный лидерский профиль, который максимизирует их прибыль.

Утверждение 2. Пусть справедливы условия утверждения 1. Тогда равновесная ситуация для модифицированной модели Штакельберга существует, причем равновесные стратегии лидеров, последователей и соответствующие цены определяются формулами:

$$\overline{X}_{kj}^{n} = \frac{1}{\Theta+1}\delta_{q(k,j)}^{l}\frac{\alpha_{kj}}{\beta_{kj}}\left(\beta_{kj}-\xi_{lkj}-p_{lk}\right),\ n=\overline{1,\ \Theta}.$$

$$\widetilde{X}_{kj}^{n} = \frac{1}{(N-\Theta+1)(\Theta+1)}\delta_{q(k,j)}^{l}\frac{\alpha_{kj}}{\beta_{kj}}\left(\beta_{kj}-\xi_{lkj}-p_{lk}\right),\ n=\overline{\Theta+1,N},$$

$$P_{kj}(X_{kj}) = \left(\beta_{kj} - \delta_{q(k,j)}^{l}\left(\beta_{kj}-\xi_{lkj}-p_{lk}\right)\frac{N\Theta+N-\Theta^2}{(N+\Theta+1)(\Theta+1)}\right).$$

Заключение. Построена стратегическая игровая математическая модель рыночного ценообразования. На ее основе рассмотрена модифицированная модель Штакельберга. В рамках предложенных моделей решен вопрос о существовании игровых равновесий, получены формулы, определяющие соответствующие равновесные стратегии и цены. Намечены перспективные направления развития построенной модели (возможность кооперации игроков, взаимная зависимость товаров).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колокольцев В.Н. Математическое моделирование многоагентных систем конкуренции и кооперации. – СПб.: Издательство «Лань», 2012. – 622 с.
2. Шагин В.Л. Теория игр. – М.: Издательство Юрайт, 2014. – 223 с.