ПОСТРОЕНИЕ АНАЛОГА С ВЫСШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДЛЯ МОДЕЛИ КОНФОРМНОЙ ЧАСТИЦЫ

О.Б. Барановский

Научный руководитель: доцент, к. ф.-м. н. И.В. Мастеров

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: oleg.bbaranovskiy@gmail.com

HIGHER-DERIVATIVE GENERALIZATION OF CONFORMAL PARTICLE

O.B. Baranovsky

Scientific Supervisor: associate prof., PhD I.V. Masterov

National Research Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: oleg.bbaranovskiy@gmail.com

Abstract. *In the present study, higher-derivative generalization of multidimensional conformal particleis derived.*

Одномерная конформная алгебра $so(1,2)$ включает в себя три генератора: генератор трансляций по времени H, генератор дилатаций Dи генератор специальных конформных преобразований K. Известно много примеров механических систем, обладающих $so(1,2)$ симметрией. К ним относятсятакие модели, как свободная частица [1], конформная частица [2], гармонический осциллятор [3], система тождественных частиц, взаимодействующих посредством конформного потенциала [4].

Алгебра Галилея допускает бесконечное множество конформных расширений [5, 6]. Все они параметризуются целым или полуцелым числом l, и называются l-конформными алгебрами Галилея. Каждая алгебра из этого семейства включает $so(1,2)$как подалгебру. Известно, чтосвободная нерелятивистская частица инвариантна относительно преобразований, образующих *1/2*-конформную группу Галилея (группа Шредингера) [1]. Также, в [7, 8] было показано, что модель свободной частицы с высшими производными инвариантна относительно преобразований, образующихl-конформную группу Галилея.

Целью данной работы является построение аналога с высшими производными модели конформной частицы [2].

Рассмотрим, для начала, модель свободной частицы с высшими производными [7]

$$S = \frac{1}{2}\int dt\, \lambda_{ij} x_i x_j^{(2l+1)}, \qquad (1)$$

где $\lambda_{ij} = \delta_{ij}$ в случае полуцелого l, и $\lambda_{ij} = \varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ij}$, $\varepsilon_{12} = 1$ в случае l целого. Это действие инвариантно относительно преобразований [7]

$$t' = t + a + bt^2 + ct, \quad x_i'(t') = x_i(t) + lcx_i(t) + 2lbtx_i(t) + \sum_{k=0}^{2l} a_i^{(k)} t^k - w_{ij} x_j(t)$$

где a, b, c, w_{ij} и $a_i^{(k)}$ - бесконечно малые параметры преобразований. Эти преобразования образуют *l*-конформную группу Галилея [5, 6].

Модель многомерной конформной частицы описывается функционалом действия [2]

$$S = \frac{1}{2}\int dt\left(\dot{x}_i\dot{x}_i - \frac{g}{x_i x_i}\right). \qquad (1)$$

Данное действие инвариантно относительно преобразований

$$t' = t + a + bt^2 + ct, \quad x_i'(t') = x_i(t) + \frac{c}{2}x_i(t) + btx_i(t) - w_{ij}x_j(t), \quad w_{ij} = -w_{ji},$$

которые образуют $SO(1,2)\oplus SO(3)$ подгруппу в группе Шредингера. Для модели свободной частицы с высшими производными такая же подгруппа реализуется преобразованиями

$$t' = t + a + bt^2 + ct, \quad x_i'(t') = x_i(t) + lcx_i(t) + 2lbtx_i(t) - w_{ij}x_j(t), \quad w_{ij} = -w_{ji}. (2)$$

Для построения аналога с высшими производными модели конформной частицы, возьмем за основу действие свободной частицы с высшими производными (1) и добавим к лагранжиану некоторый произвольный потенциал

$$S = \frac{1}{2}\int dt\left(\lambda_{ij}x_i x_j^{(2l+1)} - V(x)\right). \qquad (3)$$

Тогда, требуя инвариантности действия (4) относительно преобразований (3), получим следующий вид потенциала:

$$V(x) = \frac{g}{(x_i x_i)^{1/2l}}.$$

Таким образом, модель $S = \frac{1}{2}\int dt\left(\lambda_{ij}x_i x_j^{(2l+1)} - \frac{g}{(x_i x_i)^{1/2l}}\right)$,уравнения движения которой имеют вид

$$\lambda_{ij}x_j^{2l+1} = -\frac{g}{2l}\frac{x_i}{(x_k x_k)^{(2l+1)/2l}}, \qquad \textbf{Ошибка! Закладка не определена.}$$

можно понимать как обобщение на случай высших производных модели конформной частицы (2).

Покажем, что уравнение (5) при *l*=3/2 в случае одномерного движения можно получить при помощи метода нелинейных реализаций [9, 10]. Для этого, выберем параметризацию элементов группы следующим образом [11]:

$$G = G(t,z,u) = e^{itH}e^{izK}e^{iuD}, \ [H,D] = iH, \ [H,K] = 2iD, \ [D,K] = iK.$$

Домножение $G(t,z,u)$ слева на $G(a,b,c)$ приводит к преобразованию координат $\delta t = a + bt^2 + ct, \ \ \delta z = b(1-2tz) - cz, \ \ \delta u = c + 2bt$, где a, b и c - бесконечно малые параметры.

Построим лево-инвариантные один-формы Маурера-Картана [11]:

$$G^{-1}dG = i(w_H H + w_D D + w_K K), \text{где } w_H = e^{-u}dt, \ w_D = du - 2zdt, \ w_K = e^u(dz + z^2dt). \qquad (4)$$

Введем новую переменную $\rho = e^{3u/2}$. Следующим шагом исключим z, наложив связь на w_D:

$$w_D = 0 \;\Rightarrow\; z = \frac{1}{3}\frac{\dot\rho}{\rho}\,.$$

Тогда, преобразования (6) примут вид

$$\delta t = a + bt^2 + ct,\quad \delta\rho = \frac{3}{2}c\rho + 3bt\rho\,.$$

Учитывая инвариантность функции $\sigma = \frac{w_K}{w_H} = \frac{1}{3}\rho^3\left(\frac{\ddot\rho}{\rho} - \frac{2}{3}\frac{\dot\rho^2}{\rho^2}\right)$ и оператора $D = \rho^{2/3}\frac{d}{dt}$ относительно преобразований (6), построим из них инвариантное уравнение четвертого порядка

$$D^2\sigma + 3\sigma^2 = -\frac{g}{9} \;\Rightarrow\; \rho^{(4)} = -\frac{g}{3\rho^{5/3}}\,,$$

которое совпадает с уравнением (5) при l=3/2 в одномерии.

Заключение. В работе была построена *so*(1,2)-инвариантная система, обобщающая модель многомерной конформной частицы на случай высших производных. Уравнение движения системы в одномерии для l=3/2 было получено при помощи метода нелинейных реализаций.

Работа поддержана грантом Президента РФ МК-2101.2017.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Niederer U. The maximal kinematical invariance group of the free Schrodinger equation // Helv. Phys. Acta. – 1972. – Vol. 45. - P. 802-810.
2. de Alfaro V., Fubini S., Furlan G. Conformal invariance in Quantum mechanics // NuovoCim. A. -1976. – Vol. 34. – P. 569-612.
3. Niederer U. The maximal kinematical invariance group of the harmonic oscillator // Helv. Phys. Acta. – 1973. – Vol. 46. - P. 191-200.
4. Calojero F. Solution of the one-dimentional N body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials // J. Math. Phys. -1971. – Vol. 12. – P. 419-436.
5. Henkel M. Local scale invariance and strongly anisotropic equilibrium critical system // Phys. Rev. Lett. - 1997. –Vol.78. –P. 1940- 1943.
6. Negro J., delOlmo M.A., Rodriguez-Marco A. Nonrelativistic conformal groups // J. Math. Phys. -1997. – Vol.38. –P. 3786-3809.
7. Gomis J., Kamimura K. Schrodinger equations for higher order non-relativistic particles and N-Galilean conformal symmetry // Phys. Rev. D. -2012. –Vol.85. -045023.
8. Duval C., Horvathy P.A. Conformal Galilei groups, Veronese curves, and Newton-Hooke spacetimes // J. Phys. A. -2011. –Vol.44. -335203.
9. Coleman S.R., Wess J., Zumino B. Structure of phenomenological Lagrangians. 1. // Phys. Rev. -1969. – Vol.177. –P.2239-2247.
10. Ivanov E.A., V.I. Ogievetsky The inverse Higgs phenomenon in nonlinear realizations // Teor. Mat. Fix. - 1975. –Vol.25 –P. 164-177.
11. Ivanov E.A., Krivonos S.O., Leviant V.M. Geometry of conformal mechanics // J. Phys. A. -1989. –Vol.22. –P.345-354.