ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

А.О. Иващенко
Научный руководитель: к. ф.-м. н. Т.В. Емельянова
Томский государственный университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: annaivashchenko06@gmail.com

SEQUENTIAL METHOD OF AUTOREGRESSIVE CONTINUOUS TIME MODEL PARAMETERS ESTIMATION

A.O. Ivashchenko
Scientific Supervisor: PhD T.V. Emelyanova
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin st., 36, 634050
E-mail: annaivashchenko06@gmail.com

Abstract. *This article revisits a sequential approach to the estimation of the parameter in a first-order autoregressive model (AR(1)) with continuous time. There is provided a numerical study to get a results of sequential estimations of the parameter in first-order autoregressive model with continuous time and is computed a stopping rule and the optimal time of observations. Also there is provided a comparing analysis of estimation results with using the sequential approach both the optimal time of observations.*

Введение. В настоящей работе предложена последовательная процедура оценивания параметров модели устойчивой авторегрессии первого порядка (AR(1)) с непрерывным временем. Проведено имитационное моделирование для получения последовательных оценок параметров модели авторегрессии первого порядка с непрерывным временем, а также вычисление момента остановки и оптимального времени наблюдения системы. Проведен сравнительный анализ результатов оценивания, полученных при использовании оптимального времени наблюдения и последовательного подхода к оцениванию.

В задачах обработки временных рядов, идентификации, прогнозирования и управления в динамических системах широко используются модели с непрерывным временем, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями. Зачастую параметры таких уравнений неизвестны, поэтому перед использованием модели для решения основных задач фильтрации, прогнозирования, управления требуется идентифицировать параметры непосредственным оцениванием [1].

В практических задачах объем доступных данных всегда конечен и желательно знать качество оценок, вычисленных по наблюдениям на ограниченном временном интервале. Для решения задач в неасимптотической постановке требуются методы, позволяющие контролировать точность оценок при малых объемах данных. В связи с этим успешно применяется последовательный анализ, который характеризуется тем, что длительность наблюдений не фиксируется заранее и определяется специальными правилами [1].

В 1950-60х годах для точечного и интервального оценивания с неизвестным средним значением был предложен метод, использующий правила остановки. С помощью этих правил последовательно определялся необходимый объем выборки - случайный и не превышающий фиксированного объема [2].

В работе предлагается оценить параметры модели устойчивой авторегрессии первого порядка (AR(1)) с непрерывным временем, а также сравнить результаты оценивания, полученные при использовании оптимального времени наблюдения и последовательного подхода к оцениванию.

Рассматривается процесс диффузионного типа, заданный стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX_t = \mu f(X,t)dt + \sigma_t dW_{t,} \tag{1}$$

где $W = (W_t^1, ..., W_t^n)_{t \geq 0}$ – винеровский процесс, $f(X,t) = X_{t-1}$, $X_0 = 0$, μ – оцениваемый параметр, а σ_t – наблюдаемая функция. Для оценивания параметров процесса диффузионного типа предлагается использовать оценку по методу максимального правдопободия [3]

$$\hat{\mu}_T = \frac{\int_0^T f(X,t)dX_t}{\int_0^T f^2(X,t)dX_t} \tag{2}$$

Такая оценка обладает свойствами асимптотической нормальности и асимптотической эффективности.

Для модели (1) предлагается использовать момент остановки $\tau^* \geq 0$ вида [5]

$$\tau^* = \inf\left\{ t \geq 0 : \int_0^t | f(X,t) |^2 \, dt = t^*(c) \right\} \tag{3}$$

где $t^*(c)$ – пороговое значение, вычисляемое по формуле $t^*(c) = \arg\inf\left\{ t \geq 0 : ct + \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2} + t} \right\}$, а c – цена наблюдений $(c = 1/A)$.

Таким образом, оценка параметра модели авторегрессии с непрерывным временем представляет собой оценку по методу максимального правдоподобия [5], вычисленная в момент остановки τ^*

$$\hat{\mu}_{\tau^*} = \frac{\int_0^{\tau^*} f(X,t)dX_t}{\int_0^{\tau^*} f^2(X,t)dX_t} \tag{4}$$

Также для модели (1) вычисляется оценка параметра μ при использовании оптимального времени наблюдения t_0, которое, в отличие от момента остановки, не является случайной величиной и зависит от выбора количества затрат на проведение экспериментов

$$t_0 \approx A^{1/2}\sigma, \tag{5}$$

где A – обратная величина цены одного наблюдения [4].

Для авторегрессионной модели с непрерывным временем было проведено численное моделирование в среде Matlab, с помощью которого наглядно показано, что последовательная процедура оценивания дает надежные оценки в среднеквадратическом смысле, в сравнении с оптимальным временем наблюдения, даже для нормального распределения ошибок.

Для осуществления моделирования параметр μ положили равным $0{,}4$, шаг дискретизации $\Delta t = 0{,}07$, $X_0 = 0$, объем выборки $N = 500$. Рассмотрим результаты численного моделирования для последовательной процедуры оценивания. На рис. 1 представлена иллюстрация отклонения оценок от истинного значения параметра, вычисленных при оптимальном времени наблюдения t_0 и в случайный момент остановки τ^*.

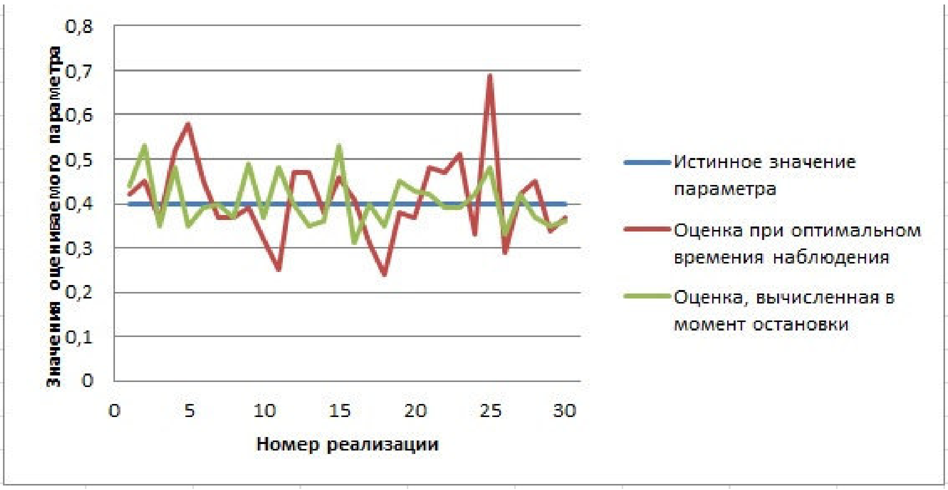

Рис. 1. Отклонение моделируемых оценок от истинного значения параметра μ

Для модели с непрерывным временем результаты численного моделирования показали, что последовательные оценки имеют меньшее отклонение от истинного значения параметра, чем оценки, вычисленные при оптимальном времени наблюдения. Аналогичные результаты получены при уменьшении истинного значения параметра авторегрессии μ до $0{,}1$.

Таким образом, последовательная процедура оценивания с применением правила остановки является эффективной и позволяет получить оптимальные оценки в среднеквадратическом для модели устойчивой авторегрессии первого порядка (AR(1)) с непрерывным временем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Емельянова Т.В., Конев В.В. О последовательном оценивании параметров непрерывной авторегрессии. – Вестник Томского гос. у-та: Математика и механика. – 2013. - №5(25). - с. 12-25.
2. Вальд А. Последовательный анализ: пер. с англ. / А. Вальд; под ред. Б. А. Севастьянова – М.: Государственное изд. физико-математической литературы, 1960. – 329 с.
3. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974.
4. Novikov A., Shiryaev A. N. Discussion on “Sequential Estimation for Time Series Models” by T. N. Sriram and Ross Iaci. – Sequential Analysis. – 2014. - №33. - P. 182-185.