Управление, вычислительная техника и информатика

УДК 519.2

ОПТИМАЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНАЯ ПЕРЕДАЧА СИГНАЛА ПО КАНАЛАМ С ПАМЯТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ БЕСШУМНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

С.В. Рожкова

Томский политехнический университет
E-mail: rozhkova@tpu.ru

Рассматривается задача оптимальной передачи стохастических процессов по непрерывно-дискретным каналам с памятью при наличии бесшумной обратной связи в наблюдениях. Доказываются экстремальные свойства оптимальных кодирований в смысле максимизации количества информации.

Ключевые слова:
Сигнал, стохастические системы, канал передачи, кодирование, декодирование.

Key words:
Signal, stochastic system, transmission channel, coding, decoding.

1. Постановка задачи

Сигнал x_t, сообщение на выходе канала передачи z_t и сообщение на выходе дискретного канала передачи $\eta(t_m)$ задаются на реализациях процессов, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями

$$dx_t = F(t)x_t dt + \Phi_1(t)dw_t,$$
$$p_0(t) = \mathbf{N}\{x;\mu_0,\gamma_0\}, \qquad (1)$$

$$dz_t = h(t,x_t,x_\tau,z)dt + \Phi_2(t)dv_t, \qquad (2)$$

$$\eta(t_m) = g(t_m x_{t_m}, x_\tau, z) + \Phi_3(t_m)\xi(t_m),$$

т. е. наблюдаемые процессы z_t и $\eta(t_m)$ обладают фиксированной памятью единичной кратности (N=1, $\tau_1=\tau$) с наличием мгновенной бесшумной обратной связи по процессу z_t.

Используемые обозначения: $\mathbf{P}\{\cdot\}$ – вероятность события; $\mathbf{M}\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $\mathbf{N}\{a;b\}$ – плотность нормального распределения с параметрами a и b; $\Phi_1^2(t)=Q(t)$, $\Phi_2^2(t)=R(t)$, $\Phi_3^2(t)=V(t)$.

Задача: в классе кодирующих функционалов $\mathbf{K}=\{\mathbf{H};\mathbf{G}\}=\{h\{\cdot\},g\{\cdot\}\}$, удовлетворяющих энергетическим ограничениям

$$\mathbf{M}\{h^2(t,x_t,x_\tau,z)\} \le \tilde{h}(t) \le \tilde{h},$$
$$\mathbf{M}\{g^2(t_m,x_{t_m},x_\tau,z)\} \le \tilde{g}(t_m) \le \tilde{g}, \qquad (3)$$

найти функционалы $h^0(\cdot)$ и $g^0(\cdot)$, обеспечивающие относительно задачи фильтрации минимальную ошибку декодирования $\Delta^0(t)=\inf\Delta(t)$, где $\Delta(t)=\mathbf{M}\{[x_t-\hat{x}(t,z,\eta)]^2\}$ является ошибкой оценки фильтрации $\hat{x}(t,z,\eta)$ процесса x_t, которая соответствует принятому сообщению $\{z_0^t;\eta_0^m\}$ при заданных $h\{\cdot\}$, $g\{\cdot\}$. Так как при заданных $h\{\cdot\}$ и $g\{\cdot\}$ оптимальной в среднеквадратическом смысле оценкой фильтрации является апостериорное среднее $\mu(t)=\mathrm{M}\{x_t|z_0^t,\eta_0^m\}$, то $\Delta(t)\ge\mathbf{M}\{\gamma(t)\}$, где $\gamma(t)\ge\mathbf{M}\{[x_t-\mu(t)]^2|z_0^t,\eta_0^m\}$. Таким образом, $\Delta^0(t)=\inf\mathbf{M}\{\gamma(t)\}$.

2. Основные результаты

Замечание 1. Считается, что до момента τ передача шла оптимальным способом.

Теорема 1. На классе $\mathrm{K}_l=\{\mathbf{H}_l;\mathbf{G}_l\}$ линейных функционалов

$$\mathbf{H}_l = \left\{ \begin{matrix} h(\cdot): h(t,x_t,x_\tau,z) = \\ = h(t,z) + H_0(t,z)x_t + H_1(t,z)x_\tau \end{matrix} \right\}, \qquad (4)$$

$$\mathbf{G}_l = \left\{ \begin{matrix} g(\cdot): g(t_m,x_{t_m},x_\tau,z) = \\ = g(t_m,z) + G_0(t_m,z)x_{t_m} + G_1(t_m,z)x_\tau \end{matrix} \right\}:$$

1) оптимальные кодирующие функционалы $h^0(\cdot)$, $g^0(\cdot)$ имеют представления

$$h^0(t,z^0) = -H_0^0(t,z^0)\mu^0(t),$$
$$H_0^0(t,z^0) = [\tilde{h}(t)/\Delta^0(t)]^{1/2}, \qquad (5)$$

$$H_1^0(t,z^0)=0,$$
$$g^0(t_m,z^0)=-G_0^0(t_m,z^0)\mu^0(t_m-0),$$
$$G_0^0(t_m,z^0)=[\tilde{g}(t_m)/\Delta^0(t_m-0)]^{1/2}, \qquad (6)$$
$$G_1^0(t_m,z^0)=0;$$

2) оптимальное сообщение $\{z_t^0;\eta^0(t_m)\}$ определяется соотношениями

$$dz_t^0=[\tilde{h}(t)/\Delta^0(t)]^{1/2}[x_t-\mu^0(t)]dt+\Phi_2(t)dv_t, \qquad (7)$$

$$\eta^0(t_m)=[\tilde{g}(t_m)/\Delta^0(t_m-0)]^{1/2}\times$$
$$\times[x_{t_m}-\mu^0(t_m-0)]dt+\Phi_3(t_m)\xi(t_m); \qquad (8)$$

3) оптимальное декодирование $\mu^0(t)$ и минимальная ошибка декодирования $\Delta^0(t)$ на интервалах $t_m\le t\le t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$d\mu^0(t)=F(t)\mu^0(t)dt+R^{-1}(t)[\tilde{h}(t)\Delta^0(t)]^{1/2}dz_t^0, \qquad (9)$$

$$d\Delta^0(t)/dt=[2F(t)-R^{-1}(t)\tilde{h}(t)]\Delta^0(t)+Q(t) \qquad (10)$$

с начальными условиями

$$\mu^0(t_m)=\mu^0(t_m-0)+[\tilde{g}(t_m)\Delta^0(t_m-0)]^{1/2}\times$$
$$\times[V(t_m)+\tilde{g}(t_m)]^{-1}\eta^0(t_m), \qquad (11)$$

$$\Delta^0(t_m)=V(t_m)[V(t_m)+\tilde{g}(t_m)]^{-1}\Delta^0(t_m-0), \qquad (12)$$

где $Q(t)=\Phi_1^2(t)$, $R(t)=\Phi_2^2(t)$, $V(t_m)=\Phi_3^2(t_m)$, $\mu^0(t_m-0)=\lim\mu(t)$, $\Delta^0(t_m-0)=\lim\Delta(t)$ при $t\le t_m$.

Доказательство:

При заданных $\{h(\cdot);g(\cdot)\}\in\mathbf{K}_l$ на интервалах $t_m\le t\le t_{m+1}$ (см. [1]) $\mu^0(t)$ и $\gamma^0(t)$ определяются уравнениями

$$d\mu(t)=F(t)\mu(t)dt+$$
$$+R^{-1}(t)[H_0(t,z)\gamma(t)+H_1(t,z)\gamma_{01}(\tau,t)]\times$$
$$\times[dz_t-(h(t,z)+H_0(t,z)\mu(t)+H_1(t,z)\mu(\tau,t))dt], \qquad (13)$$

$$d\gamma(t)/dt=2F(t)\gamma(t)-$$
$$-R^{-1}(t)[H_0(t,z)\gamma(t)+H_1(t,z)\gamma_{01}(\tau,t)]^2+Q(t), \qquad (14)$$

с начальными условиями

$$\mu(t_m)=\mu(t_m-0)+\begin{bmatrix}G_0(t_m,z)\gamma(t_m-0)+\\+G_1(t_m,z)\gamma_{01}(\tau,t_m-0)\end{bmatrix}\times$$
$$\times W^{-1}(t_m)\begin{bmatrix}\eta(t_m)-g(t_m,z)-\\-G_0(t_m,z)\mu(t_m-0)-\\-G_1(t_m,z)\mu(\tau,t_m-0)\end{bmatrix}, \qquad (15)$$

$$\gamma(t_m)=\gamma(t_m-0)+$$
$$+\begin{bmatrix}G_0(t_m,z)\gamma(t_m-0)+\\+G_1(t_m,z)\gamma_{01}(\tau,t_m-0)\end{bmatrix}^2W^{-1}(t_m), \qquad (16)$$

где

$$\mu(\tau,t)=\mathbf{M}\{x_\tau\,|z_0^t,\eta_0^m\},$$
$$\gamma_{01}(\tau,t)=\mathbf{M}\{[x_t-\mu(t)][x_\tau-\mu(\tau,t)]\,|z_0^t,\eta_0^m\},$$
$$\gamma_{11}(\tau,t)=\mathbf{M}\{[x_\tau-\mu(\tau,t)]^2\,|z_0^t,\eta_0^m\},$$

$$W(t_m,z)=V(t_m)+G_0^2(t_m,z)\gamma(t_m-0)+$$
$$+G_1^2(t_m,z)\gamma_{11}(\tau,t_m-0)+G_1(t_m,z)\gamma_{01}(\tau,t_m-0)+$$
$$+2G_0(t_m,z)G_1(t_m,z)\gamma_{01}(\tau,t_m-0). \qquad (17)$$

Пусть до момента t_m передача шла оптимальным способом. Тогда из (16), (17)

$$\gamma(t_m)=V(t_m)\Delta^0(t_m-0)(W^0(t_m,z))^{-1}+$$
$$+G_1^2(t_m,z^0)\begin{bmatrix}\Delta^0(t_m-0)\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0)-\\-(\Delta_{01}^0(\tau,t_m-0))^2\end{bmatrix}\times$$
$$\times(W^0(t_m,z))^{-1}, \qquad (18)$$

где

$$W^0(t_m,z)=V(t_m)+G_0^2(t_m,z)\Delta^0(t_m-0)+$$
$$+G_1^2(t_m,z)\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0)+$$
$$+G_1(t_m,z)\Delta_{01}^0(\tau,t_m-0)+$$
$$+2G_0(t_m,z)G_1(t_m,z)\Delta_{01}^0(\tau,t_m-0).$$

Для $t<t_m$ по неравенству Коши–Буняковского [2] относительно $\mathbf{M}\{\cdot|z_0^t,\eta_0^{m-1}\}$ получаем $\gamma(t)\gamma_{11}(\tau,t)-\gamma_{01}^2(\tau,t)\ge0$. Так как

$$G_0^2(t_m,z)\gamma(t_m-0)+G_1^2(t_m,z)\gamma_{11}(\tau,t_m-0)+$$
$$+2G_0(t_m,z)G_1(t_m,z)\gamma_{01}(\tau,t_m-0)=$$
$$=\mathbf{M}\left\{\begin{bmatrix}G_0(t_m,z)(x_{t_m}-\mu(t_m-0))+\\+G_1(t_m,z)(x_\tau-\mu(\tau,t_m-0))\end{bmatrix}^2\,|z_0^t,\eta_0^{m-1}\right\}\ge0,$$

то $W(t_m,z)\ge0$. Таким образом из (18)

$$\gamma(t_m)\ge V(t_m)\Delta^0(t_m-0)(W^0(t_m,z))^{-1}.$$

По неравенству Иенсена [2]

$$\mathbf{M}\{(W^0(t_m,z))^{-1}\}\ge[\mathbf{M}\{W^0(t_m,z)\}]^{-1}.$$

Тогда для $\Delta(t_m)=\mathbf{M}\{\gamma(t_m)\}$ из (17), (19) следует

$$\Delta(t_m)\ge V(t_m)\Delta^0(t_m-0)\times$$
$$\times\left[V(t_m)+\mathbf{M}\left\{\begin{matrix}G_0^2(t_m,z)\Delta^0(t_m-0)+\\+G_1^2(t_m,z)\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0)+\\2G_0(t_m,z)G_1(t_m,z)\Delta_{01}^0(\tau,t_m-0)\end{matrix}\right\}\right]^{-1}. \qquad (20)$$

Так как $\mathbf{M}\{\cdot\}=\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\cdot|z_0^{t_m},\eta_0^{m-1}\}\}$ [2], то использование (4) в (3) дает

$$\mathbf{M}\{g^2(\cdot)\}=$$
$$=\mathbf{M}\left\{\begin{bmatrix}g(t_m,z)+G_0(t_m,z)\mu(t_m-0)+\\+G_1(t_m,z)\mu(\tau,t_m-0)\end{bmatrix}^2\right\}+$$
$$\mathbf{M}\left\{\begin{matrix}G_0^2(t_m,z)\gamma(t_m-0)+\\+G_1^2(t_m,z)\gamma_{11}(\tau,t_m-0)+\\+2G_0(t_m,z)G_1(t_m,z)\gamma_{01}(\tau,t_m-0)\end{matrix}\right\}\le\tilde{g}(t_m). \qquad (21)$$

Из (20), (21), (12)

$$\Delta(t_m)\ge V(t_m)\Delta^0(t_m-0)[V(t_m)+\tilde{g}(t_m)]^{-1}=\Delta^0(t_m). \qquad (22)$$

Использование (6) в (18) дает

$$\gamma^0(t_m)=V(t_m)\Delta^0(t_m-0)[V(t_m)+\tilde{g}(t_m)]^{-1}.$$

Совпадение $\gamma^0(t_m)$ с нижней границей (22) для $\Delta(t_m)$ доказывает оптимальность кодирования (6), а (8), (11), (12) следуют в результате подстановки (6) в (2), (15), (16) при

$$\{z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1}\} = \{(z^0)_0^{t_m}, (\eta^0)_0^{m-1}\}.$$

Прибавление и вычитание в правой части (14) $R^{-1}(t)\ H_1^2(t,z)\ \gamma_{11}(\tau,t)$ дает для $t_m \le t < t_{m-1}$, с учетом того, что в момент t_m используется оптимальный функционал $g^0(\cdot)$, эквивалентное (14) интегральное уравнение

$$\gamma(t) = \Delta^0(t_m)\times$$
$$\times\exp\left\{\begin{aligned}&2\int_{t_m}^t F(\sigma)d\sigma - \\ &-\int_{t_m}^t R^{-1}(\sigma)\begin{bmatrix}H_0^2(\sigma,z)\gamma(\sigma)+\\ +H_1^2(\sigma,z)\gamma_{11}(\tau,\sigma)+\\ +2H_0(\sigma,z)H_1(\sigma,z)\gamma_{01}(\tau,\sigma)\end{bmatrix}\times \\ &\times d\sigma + \int_{t_m}^t R^{-1}(\sigma)H_1^2(\sigma,z)\begin{bmatrix}\gamma(\sigma)\gamma_{11}(\tau,\sigma)-\\ -\gamma_{01}^2(\tau,\sigma)\end{bmatrix}\times \\ &\times\gamma^{-1}(\sigma)d\sigma\end{aligned}\right\}+$$
$$+\int_{t_m}^t Q(\sigma)\times$$
$$\times\exp\left\{\begin{aligned}&2\int_\sigma^t F(u)du - \\ &-\int_\sigma^t R^{-1}(u)\begin{bmatrix}H_0^2(u,z)\gamma(u)+\\ +H_1^2(u,z)\gamma_{11}(\tau,u)+\\ 2H_0(u,z)H_1(u,z)\gamma_{01}(\tau,u)\end{bmatrix}\times \\ &\times du + \int_\sigma^t R^{-1}(u)H_1^2(u,z)\begin{bmatrix}\gamma(u)\gamma_{11}(\tau,u)-\\ -\gamma_{01}^2(\tau,u)\end{bmatrix}\times \\ &\times\gamma^{-1}(u)du\end{aligned}\right\}d\sigma, \qquad (23)$$

справедливость которого устанавливается дифференцированием по t. Так как $\mathbf{M}\{\cdot\}=\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\cdot|z_0^{t_m},\eta_0^m\}\}$ [2], то использование (4) в (3) дает

$$\mathbf{M}\{h^2(\cdot)\} = \mathbf{M}\left\{\begin{bmatrix}h(t,z)+H_0(t,z)\mu(t)+\\ +H_1(t,z)\mu(\tau,t)\end{bmatrix}^2\right\}+$$
$$+\mathbf{M}\left\{\begin{matrix}H_0^2(t,z)\gamma(t)+H_1^2(t,z)\gamma_{11}(\tau,t)+\\ +2H_0(t,z)H_1(t,z)\gamma_{01}(\tau,t)\end{matrix}\right\} \le \tilde{h}(t). \qquad (24)$$

По неравенству Коши–Буняковского относительно $\mathbf{M}\{\cdot|z_0^t,\eta_0^m\}$ получаем $\gamma(t)\gamma_{11}(\tau,t)-\gamma_{01}^2(\tau,t)\ge 0$. Тогда использование неравенства Иенсена $\mathbf{M}\{\varphi(\xi)\}\ge\varphi(\mathbf{M}\{\xi\})$ для выпуклой функции $\varphi(\xi)=\exp\{\xi\}$ в (23) приводит с учетом (24) для $\Delta(t)=\mathbf{M}\{\gamma(t)\}$ к неравенству

$$\Delta(t) \ge \Delta^0(t_m)\exp\{\int_{t_m}^t [2F(\sigma)-R^{-1}(\sigma)]d\sigma\} +$$
$$+\int_{t_m}^t Q(\sigma)\exp\{2\int_\sigma^t [2F(u)-R^{-1}(u)]du\}d\sigma, \qquad (25)$$

Использование (5) в (14) приводит для $t_m \le t < t_{m+1}$ к уравнению

$$d\gamma^0(t)/dt =$$
$$= [2F(t)-R^{-1}(t)\tilde{h}(t)(\gamma^0(t)/\Delta^0(t))]\gamma^0(t)+Q(t), \quad (26)$$
$$\gamma^0(t_m) = \Delta^0(t_m).$$

Пусть $\Delta^0(t)$ – правая часть (26). Тогда дифференцирование $\Delta^0(t)$ по приводит к уравнению (10) с начальным условием $\Delta^0(t_m)$. Очевидно, что решения (10), (26) совпадают, т. е. $\gamma^0(t)=\Delta^0(t)$. Совпадение $\gamma^0(t)$ с нижней границей (25) для $\Delta(t)$ доказывает оптимальность кодирования (5), а (7), (9), (10) следуют в результате подстановки (5) в (2), (13), (14). Справедливость данного результата для произвольного интервала времени $\tau \le t_m \le t < t_{m+1}$ следует по индукции с учетом Замечания 1.

Замечание 2. Согласно (5), (6), в классе $\mathbf{K}_l$ при ограничениях (3) в задаче фильтрации вся энергия $\{\tilde{h}(t);\tilde{g}(t_m)\}$ сообщения $\{h^0(\cdot);g^0(\cdot)\}$ сосредоточена относительно сигнала x_t в текущий момент времени, т. к. $H_1^0(t,z)=0$, $G_1^0(t_m,z)=0$. Таким образом, Теорема 1 дает решение и на начальном интервале времени $[0,\ \tau]$, когда память отсутствует, и Замечание 1 теряет свою актуальность. Задача непрерывной передачи процесса x_t вида (1) при отсутствии памяти решена в [2. Теорема 16.6].

Теорема 2. Кодирующие функционалы, оптимальные в классе $\mathbf{K}_l$ линейных функционалов (4), являются оптимальными в общем классе $\mathbf{K}$ нелинейных функционалов.

Доказательство:

Идея доказательства заключается в следующем. Пусть $\Delta_0(t)$ – ошибка декодирования, достигаемая на $\{h(\cdot);g(\cdot)\}\in\mathbf{K}$. Так как $\mathbf{K}_l\subset\mathbf{K}$, то $\Delta_0(t)\le\Delta^0(t)$, где $\Delta^0(t)$ определена в Теореме 1. Аналогично Теореме 16.5 в [2] доказательство проводится от противного путем доказательства неравенства $\Delta_0(t)\ge\Delta^0(t)$. Тогда противоречие исключается только при условие $\Delta_0(t)=\Delta^0(t)$.

Так как при условиях (1) $p(t,x)=\mathbf{N}\{x;a(t),D(t)\}$ [2], то при произвольном кодировании $\{h(\cdot);g(\cdot)\}\in\mathbf{K}$ Согласно [3] для $t_m \le t < t_{m+1}$

$$I_t[x_t;z_0^t,\eta_0^m] = I_{t_m}[\cdot]+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\begin{aligned}&\int_{t_m}^t R^{-1}(\sigma)\mathbf{M}\{[\overline{h(\tau,z|x_\sigma)}-\overline{h(\tau,z)}]^2\}d\sigma - \\ &-\int_{t_m}^t Q(\sigma)[\mathbf{M}\{J[x_\sigma]\}-D^{-1}(\sigma)]d\sigma\end{aligned}\right), \quad (27)$$

где

$$J[x_t] = \mathbf{M}\{[\partial\ln[p_t(x_t)]/\partial x_t]^2\,|z_0^t,\eta_0^m\}.$$

Есть условное информационное количество Фишера [4]. Так как

$$\overline{h(\tau,z)} = \mathbf{M}\{\overline{h(\tau,z|x_t)}\,|z_0^t,\eta_0^m\},$$

то

$$\mathbf{M}\{[\overline{h(\tau,z|x_t)}-\overline{h(\tau,z)}]^2\} = \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{[\cdot]^2\,|z_0^t,\eta_0^m\}\} =$$
$$= \mathbf{M}\left\{\mathbf{M}\left\{\begin{matrix}\overline{h(\tau,z|x_t)}^2+\overline{h(t,z)}^2- \\ -2\overline{h(\tau,z|x_t)}\cdot\overline{h(t,z)}\,|z_0^t,\eta_0^m\end{matrix}\right\}\right\} =$$
$$= \mathbf{M}\{\overline{h(\tau,z|x_t)}^2-\overline{h(t,z)}^2\} \le \mathbf{M}\{\overline{h(\tau,z|x_t)}^2\}.$$

По неравенству Иенсена с учетом (3)

$$\mathbf{M}\{\overline{h(\tau,z|x_t)}^2\} = \mathbf{M}\{[\mathbf{M}\{h(\cdot)|x_t,z_0^t,\eta_0^m\}]^2\} \le$$
$$\le \mathbf{M}\{\mathbf{M}\{h^2(\cdot)|x_t,z_0^t,\eta_0^m\}\} = \mathbf{M}\{h^2(\cdot)\} \le \tilde{h}(t).$$

Таким образом,

$$\mathbf{M}\{[\overline{h(\tau,z|x_t)} - \overline{h(\tau,z)}]^2\} \le \tilde{h}(t),$$

и с использованием неравенства Фишера $\mathbf{M}\{J[x_t]\} \ge \Delta^{-1}(t)$ [4] из (27) следует

$$I_t[x_t;z_0^t,\eta_0^m] \le$$
$$\le I_{t_m}[\cdot] + \frac{1}{2}\left(\begin{array}{l}\int_{t_m}^{t} R^{-1}(\sigma)\tilde{h}(\sigma)d\sigma - \\ -\int_{t_m}^{t} Q(\sigma)[\Delta^{-1}(\sigma) - D^{-1}(\sigma)]d\sigma\end{array}\right). \quad (28)$$

Пусть передача проходила в соответствии с кодированием $\{h^0(\cdot);g^0(\cdot)\}$ вида (5), (6). Так как в этом случае $p_t(x)=\mathbf{N}\{x;\mu^0(t),\Delta^0(t)\}$, то из (27) с учетом [3], (5), (6)

$$I_t^0[\cdot] = I_{t_m}^0[\cdot] + \frac{1}{2}\left(\begin{array}{l}\int_{t_m}^{t} R^{-1}(\sigma)\tilde{h}(\sigma)d\sigma - \\ -\int_{t_m}^{t} Q(\sigma)[(\Delta^0(\sigma))^{-1} - D^{-1}(\sigma)]d\sigma\end{array}\right). \quad (29)$$

Так как $[\Delta^{-1}-D^{-1}]=[\Delta^{-1}-(\Delta^0)^{-1}]+[(\Delta^0)^{-1}-D^{-1}(\sigma)]$, то при передаче на интервале $t\in[0,t_m]$ в соответствии с кодированием (5), (6), из (28), (29) следует

$$I_t[\cdot] \le I_{t_m}[\cdot] - \frac{1}{2}\int_{t_m}^{t} Q(\sigma)[\Delta^{-1}(\sigma) - (\Delta^0(\sigma))^{-1}]d\sigma. \quad (30)$$

Так как, согласно [1, 2] (неравенство Ихары),

$$\Delta(t) \ge D(t)\exp\{-2I_t[\cdot]\}, \quad (31)$$

то из (29), (31)

$$\Delta(t) \ge D(t)\exp\{-2I_t^0[\cdot]\}\times$$
$$\times\exp\{\int_{t_m}^{t} Q(\sigma)[\Delta^{-1}(\sigma) - (\Delta^0(\sigma))^{-1}]d\sigma\}. \quad (32)$$

Так как $\mathbf{K}_t\subset\mathbf{K}$, то $\Delta_0(t)\le\Delta^0(t)$, т. е. $\Delta_0^{-1}(t)\ge(\Delta^0(t_m))^{-1}$. Из [3] при $p(t,x)=\mathbf{N}\{x,a(t),D(t)\}$, $p_t(x)=\mathbf{N}\{x,\mu^0(t),\Delta^0(t)\}$ следует $I_t^0[\cdot]=(1/2)\ \ln[D(t)/\Delta(t)]$. Таким образом, (32) при $\Delta(t)=\Delta_0(t)$ приводит к требуемому противоречию $\Delta_0(t)\ge\Delta^0(t)$. Завершается доказательство теоремы выводом противоречивого неравенства $\Delta_0(t_m)\ge\Delta^0(t_m)$ в предположении, что на интервале $t\in[0,t_m)$ передача происходила в соответствии с кодированием $\{h^0(\cdot);g^0(\cdot)\}$ вида (5), (6). Из (31) с учетом [3] $\Delta(t_m)\ge D(t_m)\ \exp\{-2I^0_{t_m-0}[\cdot]\}\exp\{-2\Delta I^0_{t_m}[\cdot]\}$. Так как $p_{t_m-0}(x)=\mathbf{N}\{x;\mu^0(t_m-0),\Delta^0(t_m-0)\}$ [2] при $\{h(\cdot);g(\cdot)\}=\{h^0(\cdot);g^0(\cdot)\}$, то $I^0_{t_m-0}[\cdot]=(1/2)\ln[D(t_m)/\Delta^0(t_m-0)]$ и, таким образом, $\Delta(t_m)\ge\Delta^0(t_m-0)\exp\{-2\Delta I_{t_m}[\cdot]\}$. Умножение слева и справа последнего неравенства на $V(t_m)[V(t_m)+\tilde{g}(t_m)]^{-1}$ дает с учетом (12)

$$\Delta(t_m) \ge \Delta^0(t_m-0)V^{-1}(t_m)\times$$
$$\times[V(t_m)+\tilde{g}(t_m)]\exp\{-2\Delta I_{t_m}[\cdot]\}. \quad (33)$$

Из [3] с использованием неравенства Иенсена и учетом того, что $\exp\{-y\}\le(1-y)^{-1}$, $\ln\{y\}\le y-1$ следует

$$\Delta I_{t_m}[\cdot] \le (1/2)\ln[1+\tilde{g}(t_m)/V(t_m)]. \quad (34)$$

Использование (34) в (33) приводит при $\Delta(t_m)=\Delta_0(t_m)$ к требуемому противоречию $\Delta_0(t_m)\ge\Delta^0(t_m)$. Справедливость доказанного результата для произвольного интервала $\tau\le t_m\le t\le t_{m+1}$ следует по индукции с учетом Замечания 2.

Теорема 3. Пусть $I_t^0[x_t;(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m]$ есть количество информации, достигаемое на кодирующих функционалах (5), (6). Тогда имеет место свойство

$$I_t^0[x_t;(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m] = \sup I_t[x_t;z_0^t,\eta_0^m], \quad (35)$$

где sup берется по всем $\{h(\cdot);g(\cdot)\}\in\mathbf{K}=\{\mathbf{H};\mathbf{G}\}$ и

$$I_t^0[x_t;(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m] =$$
$$= (1/2)\sum_{t_i\le t}\ln[1+(\tilde{g}(t_i)/V(t_i))] +$$
$$+(1/2)\left[\int_0^t\left(\begin{array}{l}R^{-1}(\sigma)\tilde{h}(\sigma) - \\ -Q(\sigma)[(\Delta^0(\sigma))^{-1} - D^{-1}(\sigma)]\end{array}\right)d\sigma\right], \quad (36)$$

а $D(t)=\mathbf{M}\{[x_t-a(t)]^2\}$, $a(t)=\mathbf{M}\{x_t\}$.

Доказательство:

Из (27) с учетом [3] для $\tau\le t_i\le t_m\le t$ следует

$$I_t[x_t;z_0^t,\eta_0^m] =$$
$$= (1/2)\sum_{\tau\le t_i\le t}\mathbf{M}\{\ln[C(\eta(t_i),z|x_{t_i})/C(\eta(t_i),z)]\} +$$
$$+(1/2)\left(\begin{array}{l}\int_\tau^t R^{-1}(\sigma)\mathbf{M}\{[\overline{h(\tau,z|x_\sigma)} - \overline{h(\tau,z)}]^2\}d\sigma - \\ -\int_\tau^t Q(\sigma)[\mathbf{M}\{J[x_\sigma]\} - D^{-1}(\sigma)]d\sigma\end{array}\right), \quad (37)$$

где $J[x_\sigma]$ – упомянутое выше условное информационное количество Фишера. Использование (28), (30), (34) в (37) дает, что $I_t[x_t;z_0^t,\eta_0^m]\le I_t^0[\cdot]$, где $I_t^0[\cdot]$ определяется правой частью формулы (36). Использование [3], (5), (6), (12), (16) в (37) дает, что верхняя граница $I_t^0[\cdot]$ для $I_t[\cdot]$ достигается на кодирующих функционалах $h^0(\cdot)$ и $g^0(\cdot)$ вида (5), (6). Следовательно (35) доказано для $\tau\le t_m\le t$. Справедливость результата и для начального интервала времени $[0,\tau]$ следует с учетом Замечания 2.

Заключение

Полученные результаты могут быть использованы для анализа пропускной способности каналов в задаче оптимальной передачи сигналов, и в частности непрерывно-дискретных сигналов, реализациями которых являются случайные процессы.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013, проект № 14.B37.21.0861.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демин Н.С., Рожкова С.В., Рожкова О.В. Обобщенная скользящая экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2000. – № 4. – С. 39–51.
2. Липцер Р.Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
3. Dyomin N.S., Rozhkova S.V., Safronova I.E. About structure of Shannon information amount for joint filtering and extrapolation problem by continuous-discrete memory observations // Informatica. – 2004. – V.15. – № 2. – P. 171–202.
4. Липцер Р.Ш. Оптимальное кодирование и декодирование при передаче гауссовского марковского сигнала по каналу с бесшумной обратной связью // Проблемы передачи информации. – 1974. – № 4. – С. 3–15.

Поступила 03.10.2012 г.

УДК 519.2

ОПТИМАЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНАЯ ПЕРЕДАЧА СИГНАЛА ПО КАНАЛАМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С.В. Рожкова

Томский политехнический университет
E-mail: rozhkova@tpu.ru

Рассматривается задача оптимальной передачи стохастических процессов по непрерывно-дискретным каналам с запаздыванием. Доказываются экстремальные свойства оптимальных кодирований в смысле максимизации количества информации.

Ключевые слова:
Сигнал, стохастические системы, канал передачи, кодирование, декодирование.
Key words:
Signal, stochastic system, transmission channel, coding, decoding.

1. Постановка задачи

Сигнал x_t, сообщение на выходе канала передачи z_t и сообщение на выходе дискретного канала передачи $\eta(t_m)$ задаются на реализациях процессов, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями

$$dx_t = F(t)x_t dt + \Phi_1(t)dw_t,$$
$$p_0(x) = \mathbf{N}\{x;\mu_0,\gamma_0\}, \qquad (1)$$

$$dz_t = h(t,x_\tau,z)dt + \Phi_2(t)dv_t, \qquad (2)$$

$$\eta(t_m) = g(t_m,x_\tau,z) + \Phi_3(t_m)\xi(t_m),$$

$0\le t_0<\tau\le t_m\le t$, т. е. в отличие от [1] в данной работе рассматривается случай непрерывно-дискретной передачи с запаздыванием, когда в непрерывном и дискретном каналах передаются прошлые значения x_τ процесса x_t при наличии мгновенной бесшумной обратной связи по процессу z_t.

Используемые обозначения: $\mathbf{P}\{\cdot\}$ – вероятность события; $\mathbf{M}\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $\mathbf{N}\{a;b\}$ – плотность нормального распределения с параметрами a и b; $\Phi_1^2(t)=Q(t)$, $\Phi_2^2(t)=R(t)$, $\Phi_3^2(t_m)=V(t_m)$.

Задача: в классе кодирующих функционалов $\mathbf{K}^1=\{\mathbf{H}^1;\mathbf{G}^1\}=\{h\{\cdot\},g\{\cdot\}\}$, удовлетворяющих энергетическим ограничениям

$$\mathbf{M}\{h^2(t,x_\tau,z)\}\le\tilde{h}(t),$$
$$\mathbf{M}\{g^2(t_m,x_\tau,z)\}\le\tilde{g}(t_m), \qquad (3)$$

найти функционалы $h^0\{\cdot\}$ и $g^0\{\cdot\}$, обеспечивающие относительно задачи фильтрации минимальную ошибку декодирования $\Delta^0(t)=\inf\Delta(t)$, где $\Delta(t)=\mathbf{M}\{[x_t-\hat{x}(t,z,\eta)]^2\}$ является ошибкой оценки фильтрации $\hat{x}(t,z,\eta)$ процесса x_t, которая соответствует принятому сообщению $\{z_0^t;\ \eta_0^m\}$ при заданных $h\{\cdot\}$, $g\{\cdot\}$. Так как при заданных $h\{\cdot\}$ и $g\{\cdot\}$ оптимальной в среднеквадратическом смысле оценкой фильтрации является апостериорное среднее $\mu(t)=\mathbf{M}\{x_t|z_0^t,\eta_0^m\}$ [2], то $\Delta(t)\ge\mathbf{M}\{\gamma(t)\}$, где $\gamma(t)\ge\mathbf{M}\{[x_t-\mu(t)]^2|z_0^t,\eta_0^m\}$. Таким образом, $\Delta^0(t)=\inf\mathbf{M}\{\gamma(t)\}$.

2. Основные результаты

Замечание 1. Очевидно, что до момента τ, где $0\le t_0<\tau\le t_m\le t$, мы имеем $h(\cdot)=h(t,x_t,z)$, $g(\cdot)=h(t_m,x_{t_m},z)$, т. е. передаются текущие значения процесса x_t, справедливо Замечание 2 из [1]. Считаем, что при $\tau<t$ передача шла оптимальным способом согласно этому Замечанию.

Теорема 1. На классе $\mathbf{K}_l^1=\{\mathbf{H}_l^1;\mathbf{G}_l^1\}$ линейных функционалов

$$\mathbf{H}_l^1=\{h(\cdot): h(t,x_\tau,z)=h(t,z)+H_1(t,z)x_\tau\}, \qquad (4)$$
$$\mathbf{G}_l^1=\{g(\cdot): g(t_m,x_\tau,z)=g(t_m,z)+G_1(t_m,z)x_\tau\}:$$

1) оптимальные кодирующие функционалы $h^0(t,x_\tau,z^0)$, $g^0(t_m,x_\tau,z^0)$ имеют представления

$$h^0(t,z^0)=-H_1^0(t,z^0)\mu^0(\tau,t),$$
$$H_1^0(t,z^0)=[\tilde{h}(t)/\Delta_{11}^0(\tau,t)]^{1/2}, \qquad (5)$$