а затраты на производство продукции были минимальны

$$f = \sum_{s=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} b_{sj} t_{sj} \to \min_{t} . \qquad (10)$$

Заключение. Основным результатом исследования является оценка производственных мощностей предприятия и построение математической модели плана выпуска продукции ограниченного временем на основе информации о схеме производства продукции, ресурсах. Сформулирована двухкритериальная задача линейного программирования, которая включает: 1) критерий максимизации прибыли при заданных ограничениях на сырье и номенклатуру продукции; 2) критерий минимизации затрат на производство, связанный с загрузкой оборудования. В докладе будут представлены расчёты производственной мощности предприятия и решение оптимизационной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рагозина Марина Алексеевна Понятия производственного потенциала и производственной мощности промышленного предприятия в рыночной экономике // Вестник СибГУ им. М.Ф. Решетнева. 2009. №2. С.407-412

2. Хазанова, Л. Э. Математические методы в экономике [Текст] : учеб. пособие / Л. Э. Хазанова. - 2-е изд., испр. и перераб. - М. : Изд-во БЕК, 2002. - 144 с.

3. Исследование операций и методы оптимизации. Часть 1. Лекционный курс. Составитель А.А. Мицель. – Томск: Изд. Томский государственный университет, 2014. – 137

УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ В ПОСТАВКАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛИНЕЙНОГО И КВАДРАТИЧНОГО КРИТЕРИЕВ

Смагин В.И., Кошкин Г.М., Ким К.С.
(г. Томск, Томский государственный университет
e-mail: vsm@mail.tsu.ru, kgm@mail.tsu.ru, kks93@rambler.ru

INVENTORY CONTROL WITH TIME DELAYS IN DELIVERES USING LINEAR AND QUADRATIC CRITERIA

Smagin V.I., Koshkin G.M., Kim K.S.
(Tomsk, Tomsk State University)

Аннотация. Рассматривается задача управления запасами с учетом запаздываний в поставках. Алгоритм управления запасами синтезирован в условиях неполной информации о модели спроса и построен на основе оптимизации линейного и квадратичного критериев, с использованием калмановской фильтрации для систем с неизвестным входом и процедуры сглаживания. Приводится пример, иллюстрирующий предлагаемый подход.

Ключевые слова: управление запасами, временные запаздывания, линейный критерий, квадратичный критерий, неизвестный вход, фильтр Калмана; сглаживание.

Введение. Синтез управлений, основанный на оптимизации как линейных, так и квадратичных критериев, применяется во многих подходах, например, при управлении по прогнозирующей модели [1], при управлении по локальному критерию [2] и др. Основным преимуществом метода оптимального управления с такими критериями является значительное упрощение процедуры синтеза. Отметим, что указанные методы были применены к решению задач управления техническими системами, химическими процессами, к управлению запасами и оптимизации портфеля ценных бумаг [3–7]. В настоящей работе рассматривается алгоритм управления по дискретной модели склада с запаздываниями. Предполагается, что модель спроса содержит неизвестные параметры. В отличие от [6], в данной работе рассматривается модель склада со многими запаздываниями, что позволяет учитывать поставки товаров от разных поставщиков. Кроме того, предлагается использовать алгоритмы сглаживания для вычисления оценок с повышенной точностью, используемых при синтезе управлений.

Синтез управлений по квадратичному критерию. Рассмотрим модель склада, которая описывается дискретным уравнением

$$x(k+1) = Ax(k) + \sum_{i=0}^{M} B_i u(k-h_i) - s(k);$$

$$k = 0,1,2,\ldots;\ x(0) = x_0;\ u(j) = \psi(j),\ j = -h_M, -(h_M - 1), \ldots, -1;\ h_M > h_{M-1} > \ldots > h_0 \geq 0, \tag{1}$$

где $x(\cdot) \in R^n$ – вектор, i-я компонента которого x_i – количество товара i-го вида, $u(\cdot) \in R^m$ – вектор поставок (вектор управления), i-я компонента которого $u_i(\cdot)$ – объем поставки товара i-й номенклатуры, h_i – временные запаздывания, $s(k) \in R^n$ – вектор спроса в k -й такт ($s_i(\cdot)$ – значение спроса i-й номенклатуры), x_0 и $\psi(j)$ $(j = -h_M, -(h_M - 1), \ldots, -1)$ – известные векторы, A и B_i заданные матрицы.

Предполагается, что модель спроса содержит неизвестные параметры:

$$s(k+1) = (R + \Delta R)s(k) + f + \Delta f + q(k),\ s(0) = s_0, \tag{2}$$

где R – известная матрица, f – известный вектор, ΔR и Δf представляют собой матрицу и вектор неизвестных параметров, которые можно интерпретировать как ошибки в описании модели. Модель (2) может быть представлена как динамическая модель с неизвестным входом

$$s(k+1) = Rs(k) + f + r(k) + q(k),\ s(0) = s_0,$$

где $r(k) = \Delta R s(k) + \Delta f$ – неизвестный вход. Модель канала наблюдений за вектором спроса имеет вид

$$w(k) = Hs(k) + \tau(k),$$

где H – матрица, $\tau(k)$ – случайный вектор ошибок, $q(k)$ и $\tau(k)$ – последовательности гауссовских случайных векторов со следующими характеристиками:

$$\mathrm{M}\{q(k)\} = 0,\ \mathrm{M}\{\tau(k)\} = 0,\ \mathrm{M}\{q(k)q^T(j)\} = Q\delta_{kj},\ \mathrm{M}\{\tau(k)\tau^T(j)\} = T\delta_{kj},\ \mathrm{M}\{q(k)\tau^T(j)\} = 0,$$

где δ_{kj} символ Кронекера.

В качестве квадратичного критерия используем критерий вида:

$$I(k) = \mathrm{M}\{x(k+1) - z(k))^{\mathrm{T}} C(x(k+1) - z(k)) + \sum_{i=0}^{M} u(k-h_i)^{\mathrm{T}} D_i u(k-h_i)\},$$

где $\mathrm{M}\{\cdot\}$ – математическое ожидание, $C > 0,\ D_i \geq 0$ – весовые матрицы, z – отслеживаемый вектор.

Оптимальное управление определим из уравнения

$$\frac{\partial I(k)}{\partial u(k-h_i)} = 0;\ i = \overline{0, M}. \tag{3}$$

Управление будет рассчитываться из условия (3) с использованием оценок фильтрации $\hat{s}_f(\cdot)$ и прогнозов спроса $\hat{s}_p(\cdot)$. Например, для определения $u(0)$, необходимо решить систему уравнений при $k = h_M$, которая представляется в виде:

$$u(h_M-h_0)=-(B_0^{\mathrm{T}}CB_0+D_0)^{-1}B_0^{\mathrm{T}}C(A^{h_M+1}x(0)+\sum_{l=1}^{h_M}A^l\sum_{\substack{j=0\\h_M-h_j-l\ge0}}^{M}B_ju(h_M-h_j-l)+\sum_{l=1}^{h_M}A^l\sum_{\substack{j=0\\-h_M\le h_M-h_j-l<0}}^{M}B_j\psi(h_M-h_j-l)+$$

$$+\sum_{j=1}^{M}B_ju(\tau_M-h_j)+\sum_{l=1}^{h_M-1}A^lF\hat{s}_p(h_M-l)-A^{h_M}\hat{s}_f(0)-z(h_M)),$$

$$u(h_M-h_1)=-(B_1^{\mathrm{T}}CB_1+D_1)^{-1}B_1^{\mathrm{T}}C(A^{h_M+1}x(0)+$$

$$u(h_M-h_1)=-(B_1^{\mathrm{T}}CB_1+D_1)^{-1}B_1^{\mathrm{T}}C(A^{h_M+1}x(0)+\sum_{l=1}^{h_M}A^l\sum_{\substack{j=0\\h_M-h_j-l\ge0}}^{M}B_ju(h_M-h_j-l)+\sum_{l=1}^{h_M}A^l\sum_{\substack{j=0\\-h_M\le h_M-h_j-l<0}}^{M}B_j\psi(h_M-h_j-l)$$

$$+\sum_{\substack{j=0,\\j\ne1}}^{M}B_ju(h_M-h_j)-\sum_{l=1}^{h_M-1}A^l\hat{s}_p(h_M-l)-A^{h_M}\hat{s}_f(0)-z(h_M)),$$

$$\vdots$$

$$u(0)=-(B_M^{\mathrm{T}}CB_M+D_M)^{-1}B_M^{\mathrm{T}}C(A^{h_M+1}x(0)+\sum_{l=1}^{h_M}A^l\sum_{\substack{j=0\\h_M-h_j-l\ge0}}^{M}B_ju(h_M-h_j-l)+\sum_{l=1}^{h_M}A^l\sum_{\substack{j=0\\-h_M\le h_M-h_j-l<0}}^{M}B_j\psi(h_M-h_j-l)+$$

$$+\sum_{j=0}^{M-1}B_ju(h_M-h_j)-\sum_{l=1}^{h_M-1}A^ls_p(h_M-l)-A^{h_M}s(0)-z(h_M)). \tag{4}$$

На следующем шаге, чтобы найти $u(1)$, необходимо решить систему (4) с $k=h_M+1$. Затем, система (4) решается для $k=h_M+2$, $k=h_M+3$, и так далее.

Получим оценку фильтрации на основе алгоритма калмановской фильтрации с неизвестным входом [8, 9]:

$$\hat{s}_f(k)=R\hat{s}_f(k-1)+f+\hat{r}(k-1)+K_f(k)[w(k)-H(R\hat{s}_f(k-1)+f+\hat{r}(k-1))],\ \hat{s}_f(0)=\bar{s}_0,$$

$$K_f(k)=P(k-h/k-1)H^{\mathrm{T}}\ (HP(k-h/k-h-1)H^{\mathrm{T}}+\mathrm{T})^{-1},\quad P(k/k-1)=RP(k-1)R^{\mathrm{T}}+Q,$$

$$P(k)=(E_{n_1}-K_f(k)H)P(k/k-1),\ P(0)=P_0, \tag{5}$$

где оценка $\hat{r}(\cdot)$ представлена ниже (см. (13).

Экстраполятор, который будет осуществлять прогноз на 1 шаг $\hat{s}_p(k+1)$, определим следующим образом:

$$\hat{s}_p(k+1)=R\hat{s}_p(k)+f+\hat{r}(k)+K_p(k)(w(k)-H\hat{s}_p(k)),\ \hat{s}_p(0)=\bar{s}_0,$$

$$K_p(k)=RP_{pr}(k)H^{\mathrm{T}}(HP_{pr}(k)\Phi^{\mathrm{T}}+T)^{-1},$$

$$P_{pr}(k+1)=(R-K_p(k)H)P_{pr}(k)(R-K_p(k)H)^{\mathrm{T}}+Q+K_p(k)TK_p^{\mathrm{T}}(k),\ P_{pr}(0)=P_0. \tag{6}$$

Значения прогнозов $\hat{s}_p(k+j)$ для $j\ge2$ определяются по формуле

$$\hat{s}_p(k+j)=R\hat{s}_p(k+j-1)+f+\hat{r}(k+j-1). \tag{7}$$

Заметим, что в (7) $\hat{r}(k+j-1)$ для $j\ge2$ можно находить, используя методы анализа временных рядов [10]

Определим оценку $\hat{r}$ методом наименьших квадратов по критерию [8]

$$J=\sum_{i=1}^{k}\left\{\|\chi(i)\|_V^2+\|r(i-1)\|_W^2\right\}, \tag{8}$$

где $\chi(i)=w(i)-H\tilde{s}(i)$ $(\tilde{s}(i)=R\hat{s}(i-1)+f)$; $V>0$, $\mathrm{W}\ge0$ весовые матрицы соответствующих размерностей, $\|\chi(i)\|_V^2=\chi^{\mathrm{T}}(i)V\chi(i)$. В результате, минимизируя (8), получим

$$\hat{r}(k)=[H^{\mathrm{T}}VH+W]^{-1}H^{\mathrm{T}}V\mathrm{M}\{\Omega(k)\}, \tag{9}$$

где $\Omega(k)=w(k)-H[R\hat{s}(k-1)+f]$.

Вычислим значение $M[\Omega(k)]$ в (9), используя алгоритмы непараметрического сглаживания [11, 12]. Применяя аналог ядерных оценок регрессии Надарая-Ватсона [12], имеем

$$\hat{r}(k) = [H^{\mathrm{T}} VH + W]^{-1} H^{\mathrm{T}} V\mathrm{M}\{\hat{\Omega}(k)\}. \tag{10}$$

В формуле (10) j-ая компонента вектора $\hat{\Omega}(k)$ принимает вид:

$$\hat{\Omega}_j(k) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{\Omega_j(i)}{\mu_j} K\left(\frac{k-i+1}{\mu_j}\right)}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\mu_j} K\left(\frac{k-i+1}{\mu_j}\right)}. \tag{11}$$

В соотношении (11) $K(\cdot)$ – ядерная функция, μ_j – коэффициент сглаживания. Предлагается использовать гауссовские ядра, а коэффициент сглаживания вычислять с помощью метода кросс-валидации [12].

Минимизация линейного критерия. Определим стоимость хранения товаров на скользящем временном интервале $[k, k + T]$ с помощью дополнительного линейного критерия

$$J_1(k,z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=k}^{k+T} c_i x_i(t,z) \tag{12}$$

со следующими ограничениями:

$$x_i(k) \geq X_i, \ \ \forall k \in [k, k+T], \ \ i = 1,\ldots,n, \tag{13}$$

где c_i – стоимость хранения единицы товара для i-й номенклатуры в единицу временного интервала, X_i является страховым запасом для i-й номенклатуры. В (12) зависимость $x_i(t,z)$ от z определяется с использованием управления (4) и уравнений модели (1).

Минимизация критерия (12) при ограничениях (13) осуществляется по вектору z с помощью численных методов, и на каждом шаге управление (объем поставок) $u(k)$ пересчитывается. Полученное значение оптимального вектора z^* дает минимальную стоимость критерия на интервале $[k, k + T]$. Вектор z^* используется для определения объема поставок в соответствии с (4), затем решается задача минимизации критерия $J_1(k+1, z)$ при ограничениях (13) ($\forall k \in [k+1, k+T+1]$). Процедура реализуется рекурсивно.

Поставки определяются с учетом следующих ограничений:

$$\bar{u}_i(k) = \begin{cases} (0 \quad 0)^{\mathrm{T}}, \ \text{if} \ \ G(u(k)) \leq G\min, \\ u(k), \ \text{if} \ \ G\min \leq G(u(k)) \leq G\max, \\ \frac{u(k)}{\alpha(k)}, \ \text{if} \ \ G(u(k)) \geq G\max, \end{cases} \tag{14}$$

где $G\max$ – грузоподъемность транспортного средства, $G(u(k)) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i(k)$ (p_i – вес единицы товара i-ой номенклатуры). В (14) $\alpha(k) = \frac{G(u(k))}{G\max}$ является коэффициентом сжатия. Значение $G\min$ удовлетворяет условию $K_Г G\max \leq G\min \leq G\max$, где $K_Г$ – коэффициент использования грузоподъемности транспортного средства.

Заключение. Разработан алгоритм управления запасами с учетом транспортных запаздываний поставок от различных поставщиков для моделей спроса с неизвестными параметрами. Для расчета спроса и его прогноза предлагается использовать алгоритмы калмановской фильтрации и непараметрического сглаживания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Camacho E.F., Bordons C. Model Predictive Control. – London: Springer-Verlag, 2004.
2. Kogan M.M., Neĭmark Yu.I. On the optimality of locally optimal solutions of linear-quadratic problems of control and filtering // Automation and Remote Control. – 1992. – V. 53, – N. 4, – P.561–569.
3. Conte P., Pennesi P. Inventory control by model predictive control methods // Proc. 16th IFAC World Congress, Czech Republic, – Prague, 2005. – P. 1–6.
4. Stoica C., Arahal M. Application of robustied model predictive control to a production-inventory system // Proc. 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference Shanghai. – China, 2009. – P. 3993–3998.
5. Henneta J.-C. A globally optimal local inventory control policy for multistage supply chains // Int. J. of Production Research. – 2009. – V. 47. – Issue 2. – P. 435–453.
6. Smagin V.I., Koshkin G.M., Kim R.S. Locally Optimal Inventory Control with Time Delay in Deliveries and Incomplete Information on Demand // Proc. II International Symposium on Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science and Operations Management. February 15-18. – Beer Sheva. Israel, 2016. – P. 570–574.
7. Dombrovskii V., Obedko T. Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization // Automatica. – 2015. – V. 54. – P. 325–331.
8. Janczak D., Grishin Y., State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming // Control and Cybernetics. – 2006. – V. 35. – N. 4. – P. 851–862.
9. Smagin V., Koshkin G. Kalman filtering and conrol algorithms for systems with unknown disturbances and parameters using nonparametric technique // Proc. 20th Int. Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR), – Miedzyzdroje, Poland. – 2015. – P. 247-251.
10. Anderson T.W., The Statiatical Analysis of Time Series. – New York, John Wiley, 1971.
11. Dobrovidov A., Koshkin G., Vasiliev V. Non-parametric state space models. Heber, UT 84032, USA. – Kendrick Press, Inc. 2012.
12. Leung D. Cross-validation in nonparametric regression with outliers // Annals of Statistics. –2005. – V. 33. – P. 2291–2310.

РЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВЫРУЧКИ

Е.С. Соломенцева
(г. Томск, Томский Государственный Университет Систем Управления и Радиоэлектроники)
e-mail: katerinkas_1995@mail.ru

REGRESSION MODELS FOR REVENUE FORECASTING

E.S. Solomenceva
(Tomsk, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics)

Abstract. This work is dedicated to forecasting revenue using regression models. Autoregressive model, model of seasonal component, model of revenue dependence from day of week are considered.

Key words: Regression models, receipts, forecast, error.

Введение. Выручка является одним из основным показателем деятельности предприятия. Для планирования бюджета, расходов организации, а также выявления тенденции развития определяются прогнозные значения выручки. В настоящее время существует большое