АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Ю.Л. Орешкина, Р.Г. Долотова
Томский политехнический университет
ylo1@tpu.ru, dolot63@mail.ru

Введение

Преобразование пространства, которое отображает каждую плоскость на плоскость, называется аффинным преобразованием. Прямая есть линия пересечения двух плоскостей. Поэтому согласно определению аффинное преобразование пространства отображает каждую прямую на прямую. Аффинное преобразование пространства сохраняет параллельность плоскостей, параллельность прямых, параллельность прямой и плоскости, отображает скрещивающиеся прямые на скрещивающиеся прямые. Каждое из этих утверждений тривиально доказывается способом приведения к противоречию. В 1880 году французский геометр Г. Дарбу в письме к Ф. Клейну доказал инвариантность отношения трех точек прямой при аффинном преобразовании плоскости, опираясь лишь на тот факт, что образом всякой прямой является прямая [1].

Выражение смешанного произведения векторов в аффинных координатах

Некомпланарные векторы $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}$, образуют векторный (аффинный) базис пространства [2]. Пусть векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ имеют разложения по векторам этого базиса: $\bar{a} = x_1\bar{e_1} + y_1\bar{e_2} + z_1\bar{e_3}$, $\bar{b} = x_2\bar{e_1} + y_2\bar{e_2} + z_2\bar{e_3}$, $\bar{c} = x_3\bar{e_1} + y_3\bar{e_2} + z_3\bar{e_3}$. Используя алгебраические свойства смешанного произведения, выразим смешанное произведение $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ через аффинные координаты этих векторов (1):

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=(x_1\bar{e_1} + y_1\bar{e_2} + z_1\bar{e_3}, \bar{b})(x_2\bar{e_1} + y_2\bar{e_2} + z_2\bar{e_3}, \bar{c})(x_3\bar{e_1} + y_3\bar{e_2} + z_3\bar{e_3}) \quad (1)$$

В раскрытом виде выражение смешанного произведения $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ содержит 27 слагаемых, из которых 21 равно нулю по причине компланарности векторов. Запишем остальные шесть слагаемых:

$$\begin{aligned}\bar{a}\bar{b}\bar{c} = {} & x_1y_2z_3(\bar{e_1}\bar{e_2}\bar{e_3}) + x_2y_3z_1(\bar{e_3}\bar{e_1}\bar{e_2}) \\ & + x_3y_1z_2(\bar{e_2}\ \bar{e_3}\ \bar{e_1}) \\ & + x_1y_3z_2(\bar{e_1}\ \bar{e_3}\ \bar{e_2}) \\ & + x_2y_1z_3(\bar{e_2}\ \bar{e_1}\ \bar{e_3}) \\ & + x_3y_2z_1(\bar{e_3}\ \bar{e_2}\ \bar{e_1}) \\ & = (x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 \\ & - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 \\ & - x_3y_2z_1)(\bar{e_1}\ \bar{e_3}\ \bar{e_2})\end{aligned}$$

Выражение в скобках есть определитель третьего порядка. Итак, имеем окончательно формулу (2):

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix}\ (\bar{e_1}\ \bar{e_2}\ \bar{e_3}) \quad (2)$$

Определение и свойства родства

Рассмотрим два тетраэдра $ABCD$ и $ABCD_1$ с общей гранью ABC. Руководствуясь теоремой о задании аффинного преобразования, зададим аффинное преобразование f пространства парами точек $A \to A,\ B \to B,\ C \to C,\ D \to D_1$. Поскольку при этом преобразовании неподвижны три неколлинеарные точки A, B, C, то будет неподвижна и каждая точка плоскости ABC [3].

Это — не единственный случай, когда аффинное преобразование пространства имеет плоскость неподвижных точек. Аффинное преобразование пространства, имеющее плоскость неподвижных точек, называется родственным преобразованием, или родством, а плоскость его неподвижных точек называется плоскостью родства. Родство можно задать его плоскостью и парой соответственных точек, не принадлежащих ей. Родство является важным частным видом аффинного преобразования пространства и имеет свои частные виды. Например, зеркальная симметрия — частный вид родства. Рассмотрим свойства родственных преобразований. Соответственные при родстве элементы (точки, прямые, плоскости и др.) называют родственными элементами.

1. Родственные прямые (плоскости) пересекаются на плоскости α родства или ей параллельны.
2. Прямые, каждая из которых соединяет две родственные точки, параллельны.
3. Если направление родства непараллельно плоскости этого род- ства, то каждый отрезок, соединяющий две родственные точки, делится плоскостью родства в одном и том же отношении.
4. Всякая плоскость, параллельная направлению родства, неподвижна при этом родстве. В ней индуцируется родство плоскости, осью которого является прямая ее пересечения с плоскостью данного родства пространства.

Примеры решения задач методом аффинных преобразований

Задача 1.

Докажите, что диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через точки пересечения медиан треугольников A_1BD и CB_1D_1 и делится этими точками на три равных отрезка. В этой задаче с помощью аффинных преобразований докажем равенство трех отрезков.

1) Проверим аффинные свойства фигуры и условия задачи. Аффинным образом любого параллелепипеда может быть куб. Деление отрезка в заданном отношении – это аффинное свойство.

2) Рассмотрим одноименный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором AC_1 диагональ проходит через точки пересечения медиан треугольников A_1BD и CB_1D_1, (рис.1).

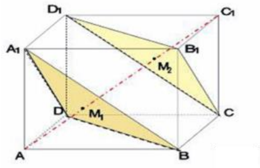

Рис. 1. Решение задачи с использование аффинного преобразования

3) Докажем, что диагональ делится этими точками на три равных отрезка [4].

1. Рассмотрим пирамиду $C_1CD_1B_1$. В ней C_1B_1= C_1C=C_1D_1- ребра куба, а B_1D_1= D_1C= CB_1 как диагонали равных граней, M_2- точка пересечения медиан треугольника CB_1D_1, она же точка пересечения биссектрис, следовательно, является центром вписанной окружности, т.е. центром правильного треугольника. C_1M_2- высота правильной пирамиды $C_1CD_1B_1$. Вычислим длину C_1M_2- предварительно взяв ребро куба за α. Тогда B_1D_1= D_1C=CB_1 =$\alpha\sqrt{2}$, а $B_1M_2 = \frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ - радиус описанной окружности. Найдем C_1M_2 из треугольника $C_1B_1M_2$.

Тогда C_1M_2= $\sqrt{a^2 - B_1M_2^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2}{3}a^2}$.=$\sqrt{\frac{1}{3}a^2}$=$\frac{a\sqrt{3}}{3}$

2. Аналогично найдем A_1M_2= $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ в пирамиде $ABDA_1$.

3. Из треугольника ACC_1находим диагональ куба AC_1=.$\sqrt{AC^2 + CC_1^2}$=$\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2}$=$\sqrt{3a^2}$=a$\sqrt{3}$

4. Вычислим M_1M_2=AC_1-(AM_1+C_1M_2)=.a$\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

5. Получили AM_1=M_1M_2=C_1M_2. Значит, точки M_1и M_2 делят диагональ AC_1 куба на три равных отрезка.

4) Существует аффинное отображение, переводящее куб в произвольный параллелепипед. Значит, эта задача будет верна и для произвольного параллелепипеда.

5) Обобщения. Какие свойства, доказанные на кубе, сохранятся для произвольного параллелепипеда, а какие нет.

Например: параллельность плоскостей и отношение сохранится, перпендикулярность диагонали плоскостям нет, правильные треугольники не сохранятся, так же как и центр правильного треугольника, он перейдет в точку пересечения медиан.

Задача 2.Даны три луча l_1, l_2, l_3 в плоскости и три точки A, B, C. Построить треугольник с вершинами на этих лучах, стороны которого проходят через точки A, B, C соответственно (помощью одной линейки), рис. 2.

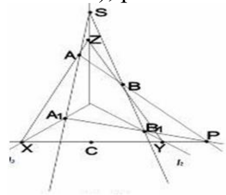

Рис. 2. Построение треугольника с вершинами на лучах

Будем рассматривать эту картинку как аффинный образ (при некотором аффинном отображении) пирамиды XOYZ на плоскость. Вершины пирамиды лежат на осях координат, а точки A, B, C - точки в координатных плоскостях. Тогда задача сводится к тому, чтобы построить линии пересечения плоскости (ABC) с координатными плоскостями. Существует, конечно, способ построения с помощью циркуля и линейки, но нам он не нужен. Итак, без циркуля.

1. Возьмем произвольную точку S на луче l_1.
2. Проведем прямые SA и SB.
3. SA$\cap l_3 = \{A_1\}$, SB$\cap$ $l_2 = \{B_1\}$
4. AB$\cap$ $A_1B_1 = \{P\}$, такая, что P и C лежат в одной плоскости.
5. PC$\cap$ $l_3 = \{X\}, PC \cap l_2 = \{Y\}, XA \cap l_1 = \{Z\}$
6. ZY, $B \in ZY$
7. XYZ - искомый треугольник.

Выводы

Таким образом, если каркас задан аналитически – системой уравнений, то можно перейти к графическому заданию, вычертив на чертеже ряд линий каркаса, как графики определенных функций. Однопараметрические семейства кривых второго порядка можно использовать для построения каркасной поверхности, определителем которой служит некоторый дискретный каркас.

Литература:

1. Топоногов В.А. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. В.А. Топоногов. – Издательство «Физматкига». – М. 2012 г.
2. Савелов А.А. Плоские кривые / Под ред. А.П. Нордена. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960.
3. Математическая энциклопедия (в 5-и томах). – М.: Советская энциклопедия, 1982.
4. Филиппов В.А. Основы геометрии поверхностей оболочек пространственных конструкций. В.А. Филиппов. – Издательство «Физматкига». – М. 2009 г.