НАБЛЮДАТЕЛЬ ПОЛНОГО И ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА

Петров П.В., Сидорова А.А.
Научный руководитель: Сидорова А.А.
Национальный исследовательский Томский политехнический университет
sidorova@tpu.ru

Введение

На практике достаточно распространенной является ситуация, когда не все компоненты вектора состояний доступны для измерения. В этом случае, чтобы в системе управления возможно было использовать обратную связь по состоянию, необходимо восстановить вектор состояния системы, недоступный для измерения. Восстановление вектора состояния называется его оценкой, а устройства, формирующие на выходе вектор оценки состояний, а также позволяющие отделить полезный сигнал от помех, наблюдателями (идентификаторами, фильтрами).

Наблюдатель может иметь порядок, равный порядку системы (наблюдатель полного порядка, например, фильтр Калмана), который оценивает вектор состояния учитывая все переменные состояния, или меньший, по сравнению с системой (наблюдатель пониженного порядка, наблюдатели Люенбергера), который имеет размерность на 1 или на количество измеряемых компонент меньше, чем система. Последний формирует новый вектор, в котором учитываются только те компоненты вектора состояния, которые не доступны для измерения.

Наблюдатель полного порядка

В большинстве задач регулирования и слежения, используется следующее предположение: полный вектор состояния можно измерить точно. Это предположение обычно нереально. Более часто встречается случай, когда в системе n-го порядка, $rank[C(t)] < n,$ т.е. мгновенное значение вектора состояния $x(t)$ нельзя вычислить через векторную наблюдаемую переменную $y(t)$.

Задача может быть решена за счет введения в систему специального устройства – наблюдателя, осуществляющего оценку вектора состояния $x(t)$ по наблюдаемой переменной $y(t)$. Наблюдатель представляет собой динамическую систему, выходная переменная которой со временем должна приближаться к состоянию системы, которое необходимо восстановить [1].

Синтезируем модальный наблюдатель полного порядка для динамического объекта второго порядка

$$\ddot{z}(t) + a\dot{z}(t) + bz(t) = u(t), \qquad (1)$$

где $z(t)$ – фазовое состояние объекта, a, b – заданные константы, определяющие динамику объекта, $u(t)$ – внешний сигнал.

Пусть наблюдению доступна переменная

$$y(t) = Qz(t) + D\dot{z}(t). \qquad (2)$$

Если ввести замену $x_1 = z,\ x_2 = \dot{z},$ то модель объекта в форме уравнений состояния примет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \qquad (3)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} Q & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Наблюдатель с постоянными параметрами для этой системы описывается уравнением

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \left[y(t) - \begin{bmatrix} Q & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} \right],$$

где постоянные коэффициенты k_1 и k_1 необходимо выбрать. Структурная схема объекта с наблюдателем представлена на рисунке 1.

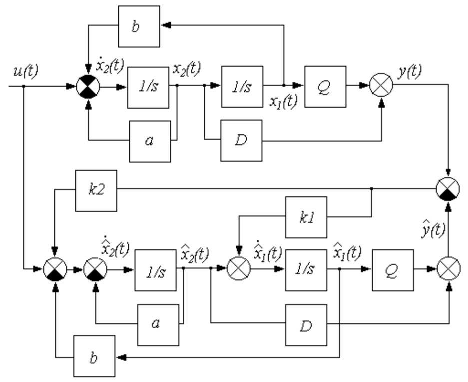

Рис. 1. Структурная схема объекта с наблюдателем полного порядка

Характеристический полином наблюдателя определяется уравнением

$$let\left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 Q & k_1 D \\ k_2 Q & k_2 D \end{bmatrix} \right\} = \det \begin{bmatrix} s + k_1 Q & -1 + k_1 D \\ b + k_2 Q & s + a + k_2 D \end{bmatrix} =$$

$$= s^2 + s(k_1 Q + k_2 D + a) + [k_1(aQ - bD) + k_2 Q + b].$$

Наблюдатель пониженного порядка

Идея построения наблюдателей с размерностью, меньшей размерности системы, состоит в том, чтобы исключить из вектора оцениваемых переменных все или некоторые измеряемые переменные. В частном случае, измерения этих переменных могут напрямую использоваться для управления, если они слабо зашумлены. Назовем такие наблюдатели наблюдателями пониженного порядка. В литературе их часто называют также наблюдателями Люенбергера [2].

Синтезируем наблюдатель пониженного порядка для динамического объекта второго порядка. Модель объекта и канала наблюдений можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} u(t), \quad (7)$$

$$y(t) = [0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Соответственно, наблюдатель Люенберга минимального порядка будет скалярным динамическим звеном (r=1), описываемым уравнением

$$\dot{y}(t) = D(t)y(t) + Q(t)z(t) + T(t)ku(t), \quad (9)$$

где вектор $T = [T_1 \quad T_2]$ определяется уравнением

$$[-T_2 b - DT_1 \quad T_1 - T_2 a - DT_2] = [Q \quad 0]. \quad (10)$$

Тогда неизвестные T_1 и T_2 могут быть найдены из системы уравнений

$$\begin{cases} -T_2 b - DT_1 = Q, \\ T_1 - T_2 a - DT_2 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Оценка вектора компонент x_1 и x_2 равна

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ T_1 & T_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{T_1}{T_2} & \dfrac{1}{T_2} \end{bmatrix} u(t). \quad (12)$$

Отсюда следует, что оценку наблюдаемой компоненты $x_2(t) = \dot{x}(t)$ можно представить в виде

$$\hat{x}_2(t) = k_1 z(t) + k_2 y(t),$$
$$k_1(t) = -\frac{T_1}{T_2},\ k_2(t) = \frac{1}{T_2}. \quad (13)$$

Для того чтобы закончить синтез наблюдателя Люенбергера, необходимо задать константу $D < 0$ и произвольное не равное нулю число Q. Структурная схема объекта с наблюдателем пониженного порядка представлена на рисунке 2.

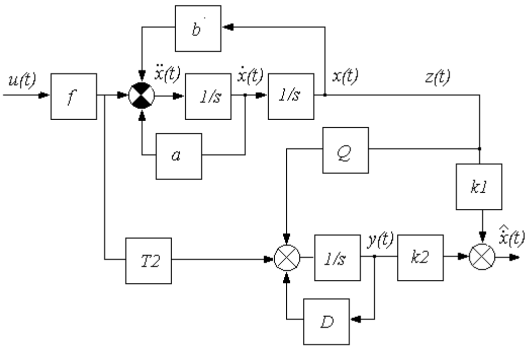

Рис. 2. Структурная схема объекта с наблюдателем пониженного порядка

Сравнение наблюдателя полного порядка и наблюдателя пониженного порядка.

Для сравнения наблюдателей примем следующие значения параметров: $a = 0.5,\ b = 5,\ k = 10,\ Q = 1,\ D = -1$ и начальными условиями $x_{10} = 30$ и $x_{20} = 2$.

Схемы моделирования представлены на рисунках 3 и 4 [3].

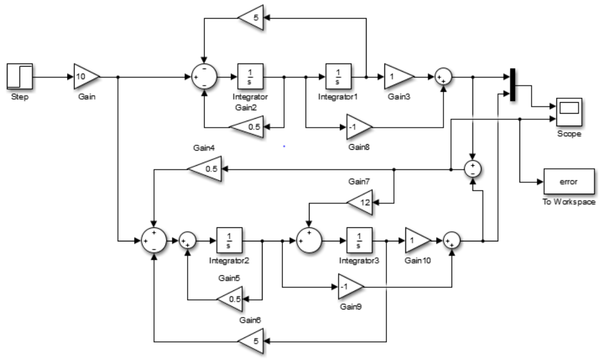

Рис. 3. Схема моделирования объекта с наблюдателем полного порядка

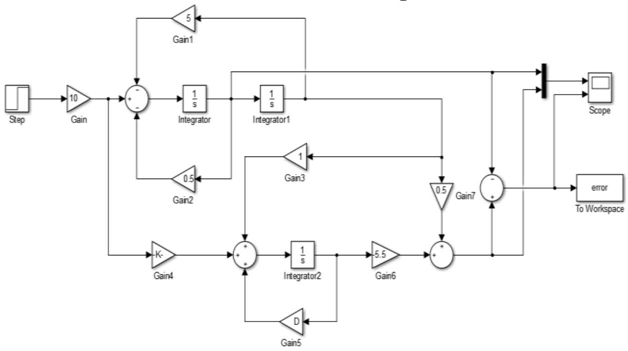

Рис. 4. Схема моделирования наблюдателя пониженного порядка

Сравнение наблюдателей произведем по ошибке восстановления, которая графически представлена на рисунке 5.

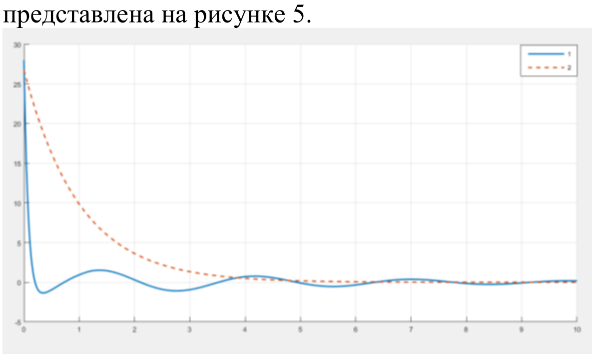

Рис. 5. Графики ошибки наблюдателей (1 – наблюдатель полного порядка, 2– наблюдатель пониженного порядка)

Заключение

Наблюдатель пониженного порядка проще реализуем и достаточно точен при использовании его в системах, где помехи незначительны или отсутствуют. К сожалению, на практике зачастую приходится иметь дело с сильно зашумленными сигналами и соответственно пользоваться наблюдателями пониженного порядка нежелательно. В данной ситуации целесообразно использовать наблюдатель полного порядка, например фильтр Калмана.

Литература

1. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977 – 650 с.
2. Динамические наблюдатели.- Томск: Изд. ТГУ, 1992.
3. Дьяконов В. Simulink 4. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002. –528 с.