УДК 514.763

ОТОБРАЖЕНИЕ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА В МНОГООБРАЗИЕ НУЛЬ-ПАР ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

М.А. Аль-Хассани, Е.А. Молдованова

Томский политехнический университет
E-mail: eam@tpu.ru

Изучаются дифференцируемые отображения аффинного пространства в многообразия всех невырожденных и всех вырожденных нуль-пар проективного пространства. Рассматривается связь между этими отображениями.

Ключевые слова:
Дифференцируемые отображения, многомерные пространства.
Key words:
Differentiable mapping, multidimensional spaces.

1. Введение

Как известно [1], одной из важных проблем в теории дифференциально-геометрических структур на многообразии M_N является проблема изучения этих структур для дифференцируемых отображений. Исследованиям таких структур посвящены [2–8]. Среди этих работ особое место занимает [4], где автор указал на возможность определения дифференцируемых отображений заданием фундаментального геометрического объекта.

Данная работа посвящена изучению отображений f_m^{2n}: $Q_m \to M_{2n}$ и f_m^{2n-1}: $Q_m \to M_{2n-1}$ аффинного пространства Q_m в многообразие M_{2n} всех невырожденных нуль-пар и многообразие M_{2n-1} всех вырожденных нуль-пар проективного пространства P_n, соответственно. Второй раздел посвящен аналитическому аппарату, в котором выводятся дифференциальные уравнения отображений f_m^{2n} и f_m^{2n-1}. В третьем и четвертом разделах показывается, что с каждым из указанных отображений инвариантным образом ассоциируется другое отображение.

Все построения в данной статье носят локальный характер, а функции, встречающиеся в статье, предполагаются функциями класса C^∞.

Обозначения и терминология соответствует принятым в [1–12].

2. Аналитический аппарат

Рассматривается m-мерное аффинное пространство Q_m, отнесенное к подвижному аффинному реперу $Q=\{\bar{B},\bar{\varepsilon}_a\}$ с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\,\bar{B}=\bar{\varepsilon}_a\theta^a,\ \ d\,\bar{\varepsilon}_a=\theta_a^b\bar{\varepsilon}_b,\ D\theta^a=\theta^b\wedge\theta_b^a,$$
$$D\theta_a^b=\theta_a^c\wedge\theta_c^b,\ \ (a,b,c=\overline{1,m}).\qquad(1)$$

Рассматривается n-мерное эквипроективное пространство P_n, отнесенное к подвижному эквипроективному реперу $P=\{\bar{A}_J\}$ с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\,\bar{A}_J=\omega_J^K\bar{A}_K\ ,\ D\omega_J^K=\omega_J^I\wedge\omega_I^K\ ,\ (I,J,K=\overline{0,n}).\qquad(2)$$

Здесь предполагается, что линейно независимые точки $\bar{A}_K\in P_n$ удовлетворяют условию:

$$[\bar{A}_0,\bar{A}_1,......,\bar{A}_n]=1,\qquad(3)$$

т. е. внешнее произведение аналитических точек $\bar{A}_K$ равно 1. Из (2) и (3) получаем $\omega_K^K=0$. Обозначим M_{2n} множество (дифференцируемое многообразие) всех невырожденных нуль-пар $\{M;L_{n-1}\}$ проективного пространства P_n, где точка M не принадлежит гиперплоскости L_{n-1} в P_n. Проективный репер P выбирается так, чтобы

$$\bar{M}=\bar{A}_0\ ,\quad L_{n-1}=(\bar{A}_1,\bar{A}_2,......,\bar{A}_n).\qquad(4)$$

Здесь и в дальнейшем символом $L_{s-1}=(\bar{X}_1,\bar{X}_2,...,\bar{X}_s)$ обозначается s-плоскость L_s, проходящая через линейно независимые аналитические точки $\bar{X}_1,\bar{X}_2,...,\bar{X}_s$. Тогда из (2) и (4) заключаем, что 1-формы ω_0^i и ω_i^0 являются базовыми 1-формами дифференцируемого многообразия M_{2n}, которые удовлетворяют структурным уравнениям:

$$D\omega_0^i=\omega_0^j\wedge\Omega_j^i\ ,\quad D\omega_i^0=\Omega_i^j\wedge\omega_j^0\ ,$$
$$\Omega_i^j=\omega_i^j-\delta_i^j\,\omega_0^0\quad(i,j,k,l=\overline{1,n}).\qquad(5)$$

Рассматривается отображение

$$f_m^{2n}:Q_m\to M_{2n}\qquad(6)$$

аффинного пространства Q_m в многообразие M_{2n}. Дифференциальные уравнения этого отображения с учетом (1), (2) и (5) будут иметь вид:

$$\omega_0^i=A_a^i\theta^a\ ,\quad \omega_i^0=A_{ia}\theta^a\ ,$$
$$dA_a^i+A_a^j\,\Omega_j^i-A_b^i\,\theta_a^b=A_{ab}^i\,\theta^b\ ,$$
$$A_{ia}-A_{ja}\,\Omega_i^j-A_{jb}\,\theta_a^b=A_{iab}\,\theta^b\ ,$$
$$A_{[ab]}^i=0\ ,\quad A_{i[ab]}=0\ ,\quad (i,j=\overline{1,n};\ a,b=\overline{1,m}).\qquad(7)$$

Дифференциальным уравнениям (7) удовлетворяют компоненты внутреннего фундаментального геометрического объекта отображения (6) в смысле Г.Ф. Лаптева [4]:

$$\Gamma_{2n}=\{\,A_a^i,A_{ia}\,\}.\qquad(8)$$

Обозначим M_{2n-1} дифференцируемое многообразие всех вырожденных нуль-пар $\{M;L_{n-1}\}$ проективного пространства P_n, где $M\in L_{n-1}$. Проективный репер P в данном случае выбирается так, чтобы

$$\overline{M} = \overline{A}_0 , \quad L_{n-1} = (\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n). \tag{9}$$

Тогда с учетом (2) и (9) 1-формы ω_0^i и $\omega_{i_1}^1$ являются базовыми 1-формами многообразия M_{2n-1}, удовлетворяющими структурным уравнениям:

$$D\omega_0^i = \omega_0^j \wedge \Omega_j^0 , \quad D\omega_{i_1}^1 = \omega_{j_1}^1 \wedge \overset{*}{\Omega}{}_{i_1}^{j_1} + \omega_{i_1}^0 \wedge \omega_0^1 ,$$

$$\overset{*}{\Omega}{}_{i_1}^{j_1} = \omega_{i_1}^{j_1} - \delta_{i_1}^{j_1} \omega_1^1 , \; (i_1, j_1 = \overline{2,n} \; ; \; i,j = \overline{1,n}). \tag{10}$$

Рассматривается отображение

$$f_m^{2n-1} : Q_m \to M_{2n-1} \tag{11}$$

аффинного пространства Q_m в многообразие M_{2n-1}. Дифференциальные уравнения этого отображения с учетом (1), (2) и (10) будут иметь вид:

$$\omega_0^i = A_a^i \theta^a , \quad dA_a^i + A_a^j \Omega_j^i - A_b^i \theta_a^b = A_{ab}^i \theta^b ,$$
$$\omega_{i_1}^1 = A_{i_1 a}^1 \theta^a ,$$

$$dA_{i_1 a}^1 + A_{j_1 a}^1 \overset{*}{\Omega}{}_{i_1}^{j_1} - A_{i_1 b}^1 \theta_a^b + A_a^1 \omega_{i_1}^0 = A_{i_1 ab}^1 \theta^b ,$$
$$\underline{A_{[ab]}^i} = 0 , \quad \underline{A_{i_1 [ab]}^1} = 0,$$
$$(a,b = \overline{1,m}; \quad i,j = \overline{1,n}; \quad i_1, j_1 = \overline{2,n}). \tag{12}$$

Заметим, что дифференциальным уравнениям (12) удовлетворяют компоненты внутреннего фундаментального геометрического объекта отображения (11):

$$\Gamma_{2n-1} = \{ A_a^i , A_{i_1 a}^1 \}, \quad (a = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,n}; \quad i_1 = \overline{2,n}). \tag{13}$$

В данной статье решаются следующие задачи:

Задача 1. Найти охваты компонент геометрического объекта (8) и их продолжения компонентами геометрического объекта (13) и их продолжений в смысле Г.Ф. Лаптева [4], т. е. выявить случаи, когда компоненты геометрического объекта Γ_{2n} являются функциями компонент объекта Γ_{2n-1}. Геометрически это означает показать, что с отображением (6) инвариантным образом можно связать отображение (11).

Задача 2 аналогична задаче 1 и является обратной к этой задаче, т. е. с геометрической точки зрения надо показать, что с отображением (11) инвариантным образом можно связать отображение (6).

3. Отображение f_m^{2n}: $Q_m \to M_{2n}$

В этом разделе будет проведено решение задачи 1: Дано отображение (6). Требуется инвариантным аналитическим и геометрическим образом найти отображение (11).

С помощью компонент геометрического объекта (8) и дифференциальных уравнений (7) в точке $B \in Q_m$ рассмотрим следующие величины, удовлетворяющие соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$g_{ab} = \frac{1}{2} A_{(a}^i A_{|i|b)} , \quad dg_{ab} - g_{cb} \theta_a^c - g_{ac} \theta_b^c = g_{abc} \theta^c ,$$
$$g_{abc} = \frac{1}{2} (A_{(a|c|}^i A_{i|b|)} + A_{(a}^i A_{|i|bc)}); \tag{14}$$

$$\det [g_{ab}] \neq 0, \quad \mathrm{g}^{bc} g_{ab} = \delta_a^c ,$$
$$dg^{ab} + g^{cb} \theta_c^a + g^{ac} \theta_c^b = g_c^{ab} \theta^c , \quad g_c^{ab} = -g_{stc} g^{as} g^{bt} ; \tag{15}$$

$$B_i^j = A_a^j A_{ib} g^{ab} , \quad dB_i^j + B_i^k \Omega_k^j - B_{ik}^j \Omega_i^k = B_{ic}^j \theta^c ,$$
$$B_{ic}^j = A_{ac}^j A_{ib} g^{ab} + A_a^j A_{ibc} g^{ab} + A_a^j A_{ib} g_c^{ab} ; \tag{16}$$

$$\overset{*}{C}_{ij} = g^{ab} A_{ia} A_{jb} , \quad d\overset{*}{C}_{ij} - \overset{*}{C}_{kj} \Omega_i^k - \overset{*}{C}_{ik} \Omega_j^k = \overset{*}{C}_{ijc} \theta^c ,$$
$$\overset{*}{C}_{ijc} = g_c^{ab} A_{ia} A_{jb} + g^{ab} A_{iac} A_{jb} + g^{ab} A_{ia} A_{jbc} ; \tag{17}$$

$$\overset{*}{B}{}_a^j = B_i^j A_a^i , \quad d \overset{*}{B}{}_a^j + \overset{*}{B}{}_a^k \Omega_k^j - \overset{*}{B}{}_b^j \theta_a^b = \overset{*}{B}{}_{ac}^j \theta^c ,$$

$$\overset{*}{B}{}_{ac}^j = B_{ic}^j A_a^i + B_i^j A_{ac}^i ; \tag{18}$$

$$\overset{*}{B}_{ka} = A_{ia} B_k^i , \quad d\overset{*}{B}_{ka} - \overset{*}{B}_{ia} \Omega_k^i - \overset{*}{B}_{kb} \theta_a^b = \overset{*}{B}_{kac} \theta^c ,$$
$$\overset{*}{B}_{kac} = B_{kc}^j A_{ja} + B_k^j A_{jac} ; \tag{19}$$

$$G_{ab} = \frac{1}{2} B_i^k B_k^j A_{(a}^i A_{|j|b)} ,$$
$$dG_{ab} - G_{cb} \theta_a^c - G_{ac} \theta_b^c = G_{abc} \theta^c ,$$
$$G_{abc} = \frac{1}{2} B_{ic}^k B_k^j A_{(a}^i A_{|j|b)} + \frac{1}{2} B_i^k B_{kc}^j A_{(a}^i A_{|j|b)} +$$
$$+ \frac{1}{2} B_i^k B_k^j A_{(a|c|}^i A_{|j|b)} + \frac{1}{2} B_i^k B_k^j A_{(a}^i A_{|j|b)c} ; \tag{20}$$

$$l_c = \frac{1}{m} g_{abc} g^{ab} , \quad dl_c - l_a \theta_c^a = l_{cb} \theta^b ,$$

$$l_{cb} = -\frac{1}{m} g_{abcs} g^{ab} - \frac{1}{m} g_{abc} g_s^{ab} ; \tag{21}$$

$$\tilde{G}_{abc} = \frac{1}{3} g_{(abc)} - \frac{1}{3} l_{(a} g_{bc)} ,$$
$$d\tilde{G}_{abc} - \tilde{G}_{sbc} \theta_a^s - \tilde{G}_{asc} \theta_b^s - \tilde{G}_{abs} \theta_c^s = \tilde{G}_{abcs} \theta^s ,$$
$$\tilde{G}_{abcs} = \frac{1}{3} g_{(abc)s} - \frac{1}{3} l_{(a|s|} g_{bc)} - \frac{1}{3} l_{(a} g_{bc)s} ; \tag{22}$$

$$G_a = \tilde{G}_{abc} G^{bc} , \quad G^{bc} G_{ab} = \delta_a^c ,$$
$$dG^{bc} + G^{ac} \theta^b + G^{ca} \theta_a^b = G_a^{bc} \theta^a ,$$
$$\det[G_{ab}] \neq 0, \quad G_a^{bc} = -G_{sta} G^{sb} G^{tc} ,$$
$$dG_a - G_b \theta_a^b = \tilde{G}_{ac} \theta^c ,$$
$$G_c^{ab} = -G_{stc} G^{as} G^{bt} , \quad \tilde{G}_{act} = \tilde{G}_{abct} G^{bc} + \tilde{G}_{abc} G_t^{ab} ; \tag{23}$$

$$G^a = G_b g^{ba} , \quad dG^a + G^b \theta_b^a = G_c^a \theta^c ,$$

$$G_c^a = \tilde{G}_{bc} g^{ba} + G_b g_c^{ba} ; \tag{24}$$

$$H^i = A_a^i G^a , \quad dH^i + H^j \Omega_j^i = H_c^i \theta^c ,$$

$$H_c^i = A_{ac}^i G^a + A_a^i G_c^a ; \tag{25}$$

$$H_i = A_{ia} G^a , \quad dH_i - H_j \Omega_i^j = H_{ic} \theta^c ,$$

$$H_{ic} = A_{iac} G^a + A_{ia} G_c^a ; \tag{26}$$

$$(a,b,c,s,t = \overline{1,m}; \quad i,j,k = \overline{1,n}).$$

Замечание 3.1. В точке $B \in Q_m$ рассматриваются m^2 величин $\underline{A_a^i A_{ib}}$, зависящих от $2mn$ величин A_a^i и A_{ib} (i=1,n; $a,b = \overline{1,m}$). Поэтому при изучении отображения f_m^{2n}: $Q_m \to M_{2n}$ мы должны считать, что числа m и n удовлетворяют неравенствам $m \leq 2n$, $m>1$, $n>1$. Следовательно, определять все величины по формулам (13)–(25) имеет смысл.

Далее будут изучены поля инвариантных геометрических образов, определяемых полями величин (14)–(26). Рассмотрим направление

$$u = (\overline{B}, \overline{\varepsilon}_a) u^a \in Q_m . \tag{27}$$

Из (4) и (2) с учетом (7) следует, что вдоль направления u точка $A_0 \in P_n$ описывает линию с касательной

$$x = (\bar{A}_0, \bar{A}_i) A_a^i u^a, \qquad (28)$$

а характеристика $\mathrm{Ch}(L_{n-1})_u$ гиперплоскости L_{n-1} вдоль u, т. е. пересечение L_{n-1} со своей бесконечной близкой L'_{n-1} первого порядка вдоль u, определяется в точечных координатах x^i проективного репера P пространства P_n уравнениями

$$x^0=0,\ A_{ia}x^iu^a=0. \qquad (29)$$

Из (27)–(29) с учетом (14) получаем, что гиперконус $Q^2_{m-1} \in Q_m$ второго порядка с вершиной в точке B, определяемый уравнением

$$g_{ab}u^au^b=0, \qquad (30)$$

представляет собой совокупность всех направлений $u \in Q_m$, вдоль которых $x \cap L_{n-1} \in \mathrm{Ch}(L_{n-1})_u$. В силу (15) и (30) гиперконус $Q^2_{m-1} \subset Q_m$ в общем случае не вырождается в гиперконус, по крайней мере, с прямолинейной вершиной, проходящей через точку B. Из (15) и (30) замечаем, что гиперконус $q_{m-1,2} \subset Q_m$, определяемый в тангенциальных координатах u_a репера Q уравнением:

$$g^{ab}u_au_b=0, \qquad (31)$$

огибает гиперконус $Q^2_{m-1} \subset Q_m$. Точке $B \in Q_m$ сопоставим в соответствующей гиперплоскости $L_{n-1} \in P_n$ аналитическую точку

$$\bar{X} = x^i \bar{A}_i, \qquad (32)$$

отвечающую геометрической точке X. Из (7) и (29) следует, что множество всех направлений $u \in Q_m$ (см. (27)), образы которых при отображении (6) пересекают гиперплоскость $L_{n-1} \subset P_n$ в точках $\mathrm{Ch}(L_{n-1})_u \subset L_{n-1}$, образует в Q_m гиперплоскость $\Gamma_{m-1}(X)$, определяемую в точечных координатах u^a репера Q уравнением $x^jA_{ja}u^a=0$.

Образ полюса этой гиперплоскости относительно гиперконуса (30) при отображении (6) с учетом (31) и (16) пересекает гиперплоскость $L_{n-1} \subset P_n$ в точке Y с аналитической точкой $\bar{Y}=y^i\bar{A}_i$, $y^j=B^j_ix^i$.

Такова геометрическая интерпретация центропроективного преобразования

$$\Pi = \{B^j_i\} \qquad (33)$$

с центром в точке A_0 такого, что $\Pi(A_0X)=A_0Y$. Аналогичным образом получаем, что множество всех точек (32) с геометрическими точками $\bar{X} \in L_{n-1}$ такими, что линейные поляры прообразов которых при отображении (6) принадлежат гиперконусу (31), образует в силу (17) в L_{n-1} квадрику $Q^2_{m-2} \subset L_{n-1}$, которая определяется уравнениями $x^0=0$, $\overset{*}{C}_{ij}x^ix^j=0$. Отсюда следует, что уравнение $\overset{*}{C}_{ij}x^ix^j=0$ определяет в P_n гиперконус Q^2_{m-1} второго порядка с вершиной в точке A_0. Этот гиперконус представляет собой множество всех прямых A_0X, пересекающих L_{n-1} в точках квадрики Q^2_{m-2}.

Из (6), (7), (28), (18) и (33) следует, что направлению (27) отвечает направление

$$y = (\bar{A}_0, \bar{A}_j) y^i, \quad y^j = B^j_i A^i_a u^a = \overset{*}{B}{}^j_a\, u^a, \qquad (34)$$

которое является образом направления x при центроаффинном преобразовании Π, причем направление $x \in P_n$ – образ направления $u \in Q_m$ при отображении (6). Аналогично с учетом (19) и (29) получаем, что уравнение

$$\overset{*}{B}_{ia}x^iu^a = 0 \qquad (35)$$

определяет при фиксированном направлении (27) гиперплоскость в P_n – образ той гиперплоскости $A_0 \cup \mathrm{Ch}(L_{n-1})_u$ при преобразовании Π, что при отображении (6) характеристикой вдоль направления (27) гиперплоскости L_{n-1} является $\mathrm{Ch}\,(L_{n-1})_u$.

Из (18)–(20) следует, что уравнение

$$G_{ab}u^au^b = 0 \qquad (36)$$

определяет в Q_m гиперконус G^2_{m-1} второго порядка с вершиной B как множество всех таких направлений (27), которым отвечают направления (34) в P_n, принадлежащие гиперплоскостям в P_n, определяемым уравнениями (35). Заметим с учетом (23) и (36), что в точке $B \in Q_m$ в общем случае $\det[G_{ab}]$ не равен нулю, т. е. в общем случае гиперконус $G^2_{m-1} \subset Q_m$ вырождается в гиперконус по крайней мере с прямолинейной вершиной, проходящей через точку $B \in Q_m$.

Пользуясь условиями инвариантности точек и геометрических образов в аффинном пространстве Q_m и учитывая (1), (14), (15), (21) и (22), получаем, что уравнение

$$\tilde{G}_{abc}u^au^bu^c = 0 \qquad (37)$$

определяет в Q_m алгебраический гиперконус $\tilde{G}^3_{m-1}$ третьего порядка с вершиной $B \in Q_m$. Этот гиперконус вдоль всех направлений (27), принадлежащих гиперконусу Q^2_{m-1}, проходит через Q^2_{m-1} и бесконечно близкий $(Q^2_{m-1})'$ первого порядка, причем $\tilde{G}^3_{m-1}$ и Q^2_{m-1} аполярны.

Из (36) и (37) с учетом (22) и (23) замечаем, что гиперплоскость $H_{m-1} \subset Q_m$ определяется в аффинных координатах u^a уравнением

$$G_au^a=0 \qquad (38)$$

и аполярна относительно гиперконусов $\tilde{G}^3_{m-1}$ и Q^2_{m-1}, т. е. квадратичная поляра любого направления $u \in \tilde{G}^3_{m-1}$ и гиперконус Q^2_{m-1} аполярны. Из (38) и (30) следует, что направление $G=(\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a)\ G^a \in Q_m$ полярно сопряжено гиперплоскости $H_{m-1} \subset Q_m$ относительно гиперконуса $Q^2_{m-1} \subset Q_m$.

Из (25) и (26) с учетом (6) и (7) следует, что при отображении f^{2n}_m: $Q_m \to M_{2n}$ направление G переходит в направление $\tilde{g}=(A_0,\bar{A}_i)A^i_aG^a \equiv (\bar{A}_0,\bar{A}_i)H_i \in P_n$, а гиперплоскость $L^*_{n-1} \subset P_n$, определяемая уравнением в проективных координатах $H_ix^i=0$, проходит через точку A_0 и $\mathrm{Ch}(L_{n-1})_G$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. С отображением f^{2n}_m: $Q_m \to M_{2n}$ $(m \le n)$ инвариантным образом ассоциируется отображение f^{2n-1}_m: $Q_m \to M_{2n-1}$, где каждая вырожденная нуль-пара $\{A_0, L^*_{n-1}\}$ состоит из точки A_0 и гиперплоскости $A_0 \in L^*_{n-1}$.

4. Отображение f^{2n-1}_m: $Q_m \to M_{2n-1}$

В этом разделе будет приведено решение задачи 2: Дано отображение (11). Требуется инвариантным аналитическим и геометрическим образом найти отображение (6).

Из (12) и (9) с учетом (1) и (11) замечаем, что в точке $B\in Q_m$ прообразом гиперплоскости $L_{n-1}=(\overline{A}_0,\overline{A}_2,......,\overline{A}_n)\in P_n$ при отображении f_m^{2n-1}: $Q_m\to M_{2n-1}$ является гиперплоскость $\Gamma_{m-1}\subset Q_m$, проходящая через точку B и в точечных координатах u^a аффинного репера Q определяемая уравнением:

$$A_a^1 u^a = 0. \qquad (39)$$

Проводится такая канонизация аффинного репера Q, при которой

$$A_{a_1}^1 = 0, \quad A_1^1 \neq 0, \quad (a_1 = \overline{2,m}). \qquad (40)$$

Из дифференциальных уравнений (12) в точке $B\in Q_m$ с учетом (40) и (2) получаются дифференциальные уравнения

$$\theta_{a_1}^1 = B_{a_1 a}^1\theta^a,$$
$$dB_{a_1 a}^1 + B_{a_1 a}^1\theta_1^1 - B_{b_1 a}^1\theta_{a_1}^{b_1} - B_{a_1 b}^1\theta_a^b = B_{a_1 ab}^1\theta_1^b,$$
$$B_{a_1 a}^1 = -(A_1^1)^{-1}A_{a_1 b}^1, \quad B_{[a_1 b_1]}^1 = 0, \quad B_{a_1[ab]}^1 = 0,$$
$$(a,b=\overline{1,m}; \quad a_1,b_1=\overline{1,n}). \qquad (41)$$

С учетом (41) и в соответствии с [11] получаем, что канонизации аффинного репера Q типа (40) существует. Геометрически с учетом (39) эта канонизация означает, что

$$\Gamma_{m-1} = (\overline{B}, \overline{\varepsilon}_2, \ldots, \overline{\varepsilon}_m) \subset Q_m. \qquad (42)$$

При этом из рассмотрения исключается случай $A_1^1=0$, когда гиперплоскость Γ_{m-1} либо не определена, либо определена неоднозначно.

Из (41) с учетом (42) и (1) следует, что вдоль направления (27) гиперплоскость $\Gamma_{m-1}\subset Q_m$ будет изменяться параллельно самой себе тогда и только тогда, когда величины u^a удовлетворяют уравнениям:

$$B_{a_1 a}^1 u^a = 0, \quad (a_1 = \overline{2,m}; a = \overline{1,m}). \qquad (43)$$

Проводится такая канонизация аффинного репера Q_m, при которой

$$B_{a_1 1}^1 = 0, \quad \det[B_{a_1 b_1}^1] \neq 0, \quad (a_1, b_1 = \overline{2,m}). \qquad (44)$$

Из дифференциальных уравнений (41) с учетом (44) и (1) получаются дифференциальные уравнения:

$$\theta_1^{a_1} = B_{1a}^{a_1}\theta^a, \; dB_{1a}^{a_1} - B_{1a}^{a_1}\theta_1^1 + B_{1a}^{b_1}\theta_{b_1}^{a_1} - B_{1b}^{a_1}\theta_a^b = B_{a_1 ab}^1\theta^b,$$
$$(a,b=\overline{1,m}; a_1,b_1=\overline{2,m}).$$

Эти дифференциальные уравнения в соответствии с [11] свидетельствуют о существовании канонизации аффинного репера Q типа (44). Геометрически эта канонизация с учетом (43) означает, что направлением (27), о котором идет речь выше, будет

$$\Gamma_1 = (B, \overline{\varepsilon}_1) \subset Q_m. \qquad (45)$$

При этом из рассмотрения исключается случай $\det[B_{a_1 b_1}^1]=0$, когда направления Γ_1 либо вовсе нет, либо оно определяется неоднозначно.

Из (12) с учетом (45) заключаем, что образом направления Γ_1 при отображении f_m^{2n-1}: $Q_m\to M_{2n-1}$ является направление $L_1\subset P_n$ вида

$$x = (\overline{A}_0, \overline{A}_i)A_1^i. \qquad (46)$$

Проводится такая канонизация проективного репера P в пространстве P_n, при которой

$$A_1^{i_1} = 0, \quad A_1^1 \neq 0. \qquad (47)$$

Тогда из дифференциальных уравнений (12) с учетом (47), (2), (40) и (41) получаются дифференциальные уравнения

$$\omega_1^{a_1} = A_{1a}^{i_1}\theta^a,$$
$$dA_{1a}^{i_1} - A_{1a}^{i_1}\omega_1^1 + A_{1a}^{j_1}\omega_{j_1}^{i_1} - A_{1b}^{i_1}\theta_a^b - A_{1a}^{i_1}\omega_1^0 = A_{1ab}^{i_1}\theta^b, \qquad (48)$$

Здесь явный вид величин $A_{1ab}^{i_1}$ для нас несущественный.

Из дифференциальных уравнений (48) в соответствии с [11] замечаем, что канонизация проективного репера P типа (47) существует. Геометрически с учетом (46) эта канонизация означает, что $L_1=(\overline{A}_0, \overline{A}_1)$.

Из (9) и (45) с учетом (2) следует, что характеристикой Ch $(L_{n-1})_{\Gamma_1}$ гиперплоскости L_{n-1} в направлении Γ_1 будет $(n-2)$-плоскость L_{n-2}, определяемая уравнениями:

$$x^1 = 0, \quad A_1^1 x^0 + x^{i_1}A_{i_1 1}^1 = 0. \qquad (49)$$

Проводится канонизация проективного репера P, при которой

$$A_{i_1 1}^1 = 0, \quad A_1^1 \neq 0. \qquad (50)$$

Из дифференциальных уравнений (12) с учетом (2) и (49) получаются дифференциальные уравнения

$$\omega_{i_1}^0 = A_{i_1 a}\theta^a,$$
$$dA_{i_1 a} + A_{i_1 a}\omega_0^0 - A_{j_1 a}\omega_{i_1}^{\gamma_1} - A_{i_1 b}\theta_a^b + A_{i_1 a}^1\omega_1^0 = A_{i_1 ab}\theta^b. \qquad (51)$$

Эти дифференциальные уравнения в соответствии с [11] свидетельствует о существовании канонизации репера P типа (50). Геометрически эта канонизация означает, что

$$L_{n-2} = (\overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n) \subset P_n. \qquad (52)$$

Точке $B\in Q_m$ сопоставим точку $X\in L_1$, соответствующую аналитической точке

$$\overline{X} = x^0\overline{A}_0 + x^1\overline{A}_1. \qquad (53)$$

Из (2), (42) и (52) с учетом (51) следует, что нефокальная [12] точка (53) будет описывать линию с касательной в нефокальном направлении $u=(\overline{B},\overline{\varepsilon}_{a_1})u^{a_1}\in\Gamma_{m-1}$, которая вместе с прямой L_1 пересекает $(n-2)$-плоскость L_{n-2} в точке $Y(x)=(x^0A_{a_1}^{i_1}+x^1A_{1a_1}^{i_1})\overline{A}_{i_1}u^{a_1}$, $(a_1=\overline{2,m})$. Эта нефокальная точка описывает вдоль того же направления $u\in\Gamma_{m-1}$ линию с касательной, которая вместе с L_{n-2} пересекает прямую L_1 в точке $Z(x)=(x^0A_{a_1}^{i_1}+x^1A_{1a_1}^{i_1})(A_{i_1 b_1}\overline{A}_0+A^1_{i_1 b_1}\overline{A}_1)u^{a_1}u^{b_1}$. Отсюда следует, что множество всех направлений $u\in\Gamma_{m-1}$ таких, что $Z(x)$ совпадает с точкой A_0, образует в аффинном пространстве гиперконус, который пересекается с Γ_{m-1} по конусу $K_{m-2}^2(x^0,x^1)$ и определяется в аффинных координатах репера Q_m уравнениями

$$u^1 = 0, \;\; (x^0 p_{a_1 b_1} + x^1 q_{a_1 b_1})u^{a_1}u^{b_1} = 0, \;\; (a_1, b_1 = \overline{2,m}). \qquad (54)$$

Здесь симметрические величины $p_{a_1 b_1}$ и $q_{a_1 b_1}$ определяются по формулам и в силу (12) и (51) удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$p_{a_1b_1} = \frac{1}{2} A^{i_1}_{(a_1} A^1_{|i_1|b_1)},$$
$$dp_{a_1b_1} - p_{c_1b_1}\theta^{c_1}_{a_1} - p_{a_1c_1}\theta^{c_1}_{b_1} = p_{a_1b_1a}\theta^a,$$
$$q_{a_1b_1} = \frac{1}{2} A^{i_1}_{1(a_1} A^1_{|i_1|b_1)},$$
$$dq_{a_1b_1} - q_{c_1b_1}\theta^{c_1}_{a_1} - q_{a_1c_1}\theta^{c_1}_{b_1} - q_{a_1b_1}\omega^0_1 = q_{a_1b_1a}\theta^a,$$
$$(a_1, b_1, c_1 = \overline{2,m};\ a = \overline{1,m}). \quad (55)$$

Здесь явный вид всех величин $p_{a_1b_1a}$ и $q_{a_1b_1a}$ для нас не существенный.

Таким образом, каждой точке (53) отвечает $K^2_{m-2}(x^0,x^1)\subset\Gamma_{m-1}$. Из (54) следует, что точке A_0 отвечает конус K^2_{m-2}, определяемый уравнениями

$$u^1 = 0, \quad p_{a_1b_1}u^{a_1}u^{b_1} = 0. \quad (56)$$

Из (55) заключаем, что в общем случае в точке $B\in Q_m$ выполняется условие

$$\det[p_{a_1b_1}] \neq 0, \quad (57)$$

т. е. конус $K^2_{m-2}\subset\Gamma_{m-1}$ не вырождается в конус по крайней мере с прямолинейной вершиной, проходящей через точку B.

С учетом (57) введем в рассмотрение величины $p_a^{a_1b_1}$ по формулам

$$p^{a_1b_1}p_{b_1c_1} = \delta^{c_1}_{a_1}, \quad (a_1, b_1, c_1 = \overline{2,m}). \quad (58)$$

В силу (55) величины удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dp^{a_1b_1} + p^{c_1b_1}\theta^{a_1}_{c_1} + p^{a_1c_1}\theta^{b_1}_{c_1} = p_a^{a_1b_1}\theta^a. \quad (59)$$

Здесь явный вид величин $p_a^{a_1b_1}$ для нас не существенный.

Определение 4.1. Точка $X\in L_1$, отвечающая точке $B\in Q_m$, называется центром прямой L_1, если конусы $K^2_{m-2}(x^0, x^1)$ и K^2_{m-2} аполярны.

Из (54) и (56) в силу (58) следует в соответствии с определением 4.1, что точка T будет центром прямой L_1 тогда и только тогда, когда

$$(m-2)x^0 + q_{a_1b_1}p^{a_1b_1}x^1 = 0. \quad (60)$$

Проводится такая канонизация проективного репера, при которой

$$q_{a_1b_1}p^{a_1b_1} = 0. \quad (61)$$

Из дифференциальных уравнений (55) и (59) с учетом (2) получаются следующие дифференциальные уравнения

$$\omega^0_1 = A_{1a}\theta^a, \ dA_{1a} - (\omega^1_1 - \omega^0_0)A_{1a} - A_{1b}\theta^b_a = A_{1ab}\theta^b.$$

В соответствии с [11] эти дифференциальные уравнения свидетельствуют о существовании канонизации проективного репера типа (61).

Геометрически в силу (60) эта канонизация означает, что точка A_1 является центром прямой L_1. Из (52) следует, что каждой точке $B\in Q_m$ отвечает гиперплоскость

$$\overset{*}{L}_{n-1} = (\bar{A}_1, \bar{A}_2, ..., \bar{A}_n) = A_1 \cup L_{n-2} \subset P_n, \ A_0 \notin \overset{*}{L}_{n-1}. \quad (62)$$

Таким образом, с учетом (62) доказана теорема.

Теорема 3.1. С отображением f_m^{2n-1}: $Q_m\to M_{2n-1}$ инвариантным образом ассоциируется отображение f_m^{2n}: $Q_m\to M_{2n}$, где каждая невырожденная нуль-пара $\{A_0;\overset{*}{L}_{n-1}\}$ состоит из точки A_0 и гиперплоскости $\overset{*}{L}_{n-1}$, не проходящей через точку A_0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геом. – 1979. – Т. 9. – С. 3–246.
2. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Итоги науки. Геометрия. – 1963. – С. 65–107.
3. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. – 1971. – С. 153–174.
4. Лаптев Г.Ф. К инвариантной теории дифференцируемых отображений // Тр. Геом. Сем. – 1974. – № 16. – С. 37–42.
5. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. О дифференцируемом отображении евклидова пространства $E[m]$ в аффинное $A[n](m<n)$ // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 314. – № 2. – С. 5–9.
6. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. О дифференцируемом отображении евклидова пространства $E[m]$ в аффинное $A[n](m\geq n)$ // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 315. – № 2. – С. 6–9.
7. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. Отображение аффинного пространства в многообразие гиперконусов другого пространства // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317. – № 2. – С. 5–8.
8. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. Отображения аффинных и евклидовых пространств // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317. – № 2. – С. 8–14.
9. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды московского математического общества. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
10. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТП, 1948. – 432 с.
11. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.
12. Акивис М.А. Фокальные образы поверхности ранга *r* // Известия вузов. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.

Поступила 03.12.2012 г.