УДК 621.52+511.52

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАДРАТНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ МУРА–ПЕНРОУЗА ПРИМЕНЕНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПУХОВА

С.О. Симонян

Государственный инженерный университет Армении (Политехник), г. Ереван
E-mail: ssimonyan@seua.am

Предложен достаточно простой численно-аналитический метод определения квадратных параметрических обобщенных обратных матриц Мура–Пенроуза. Рассмотрена известная тестовая задача.

Ключевые слова:
Квадратная параметрическая матрица, обобщенная обратная матрица, дифференциальные преобразования.
Key words:
Square parametric matrix, generalized inverse matrix, differential transformations.

Введение

Пусть $A(t)\in R^{m\times n}$ – параметрическая матрица (параметр t может быть временем, оператором Лапласа $\left(s \sim \dfrac{d}{dt}\right)$ или другим параметром), а $X(t)=A^{+}(t)\in R^{m\times n}$ – соответствующая ей обобщенная обратная, подлежащая определению. По аналогии с известными соотношениями для числовых матриц [1] введем следующие условия Мура–Пенроуза для матриц $A(t)$ и $X(t)$:

$$A(t)\cdot X(t)\cdot A(t) = A(t), \tag{1}$$

$$X(t)\cdot A(t)\cdot X(t) = X(t), \tag{2}$$

$$(A(t)\cdot X(t))^T = A(t)\cdot X(t), \tag{3}$$

$$(X(t)\cdot A(t))^T = X(t)\cdot A(t). \tag{4}$$

Тогда параметрическая обобщенная обратная матрица $X(t)$ единственным образом будет определяться условиями (1)–(4). Далее, используя обозначения, приведенные в [2], можно определить ряд других обратных матриц: если выполняется условие (1), то $X(t)=A^{(1)}(t)$; если условия (1) и (2) выполняются одновременно, то $X(t)=A^{(1,2)}(t)$; если одновременно выполняются условия (1) и (3), то $X(t)=A^{(1,3)}(t)$; если одновременно выполняются условия (1) и (4), то $X(t)=A^{(1,4)}(t)$; если одновременно выполняются все условия (1)–(4), то $X(t)=A^{(1-4)}(t)$.

С учетом этих обозначений по аналогии с числовыми матрицами $A^{(1)}(t)$ назовем $g(t)$ обратной; $A^{(1,2)}(t)$ рефлексивной $g(t)$ обратной ($A^{R}(t)$); $A^{(1,3)}(t)$–$g(t)$ обратной со свойством наименьших квадратов ($A^{L}(t)$); $A^{(1,4)}(t)$–$g(t)$ обратной со свойством минимальной нормы ($A^{M}(t)$); $A^{(1-4)}(t)$–$g(t)$ обратной (обобщенной обратной) Мура–Пенроуза ($A^{+}(t)$).

Как показывают исследования [3–6], для определения матриц $X(t)$ весьма эффективными оказываются дифференциальные преобразования [7, 8]. Так, при применении этих преобразований метод определения $X(t)$ на основе раздельного использования условия (1) был предложен в работе [3], метод определения $X(t)$ на основе раздельного использования условия (2) – в работе [4], метод определения $X(t)$ на основе совместного использования условий (1) и (2) – в работе [5], метод определения $X(t)$ на основе раздельного использования простейших соотношений (см. далее) – в работе [6]. В настоящей работе предлагается новый метод определения $X(t)$ на основе совместного использования этих простейших соотношений также с применением дифференциальных преобразований.

Математический аппарат

Рассмотрим произведение соотношений (1) и (2). При этом имеем:

$$[A(t)]\cdot X(t)\cdot A(t)]\cdot[X(t)\cdot A(t)\cdot X(t)] = A(t)\cdot X(t) \tag{5}$$

или

$$[A(t)\cdot X(t)]^3 = A(t)\cdot X(t)$$

или

$$[[A(t)\cdot X(t)]^2 - E]\cdot A(t)\cdot X(t) = [0], \qquad (6)$$

где E – единичная матрица порядка m.

Из соотношения (6) имеем

$$A(t)\cdot X(t) = [0], \qquad (7а)$$

либо

$$A(t)\cdot X(t) = -E, \qquad (7б)$$

либо

$$A(t)\cdot X(t) = E_{m\times m}. \qquad (7в)$$

Теперь рассмотрим произведение соотношений (2) и (1). При этом имеем:

$$[X(t)\cdot A(t)\cdot X(t)]\cdot[A(t)\cdot X(t)\cdot A(t)] = X(t)\cdot A(t) \quad (8)$$

или

$$[X(t)\cdot A(t)]^3 = X(t)\cdot A(t),$$

или

$$[[X(t)\cdot A(t)]^2 - E]\cdot X(t)\cdot A(t) = [0], \qquad (9)$$

где E – единичная матрица порядка n.

Из соотношения (9) имеем

$$X(t)\cdot A(t) = [0], \qquad (10а)$$

либо

$$X(t)\cdot A(t) = -E, \qquad (10б)$$

либо

$$X(t)\cdot A(t) = E_{n\times n}. \qquad (10в)$$

Очевидно, при условиях (7а), (7б) и (10а), (10б) соотношения (1) и (2) не выполняются. Следовательно в итоге образования сверток (5) и (8) условия (1) и (2) трансформируются в условия (7в) и (10в), при которых как условия (1) и (2), так и условия симметричности (3) и (4) выполняются автоматически. Таким образом, условия (7в) и (10в) полностью эквивалентны условиям (1)–(4), ввиду чего для определения матрицы $X(t)$ в дальнейшем будем оперировать простейшими соотношениями (7в) и (10в), о которых шла речь выше [6].

Вариант 1.

Рассмотрим произведение соотношений (7в) и (10в), что, очевидно, может иметь место лишь при условии $m=n$. При этом

$$[A(t)\cdot X(t)]\cdot[X(t)\cdot A(t)] = E$$

или

$$A(t)\cdot X^2(t)\cdot A(t) = E. \qquad (11)$$

Матричное уравнение (11) представим в виде системы

$$\begin{cases} A(t)\cdot Y_1(t)\cdot A(t) = E, & (12)\\ Y_1(t) - X^2(t) = 0 & (13)\end{cases}$$

и переведем ее из области оригиналов в область Д-изображений [7, 8], допустив при этом, что все матрицы $X(t)$, $Y_1(t)$ и $A(t)$ обладают элементами, аналитическими в центре аппроксимации. При этом получим:

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{m}\sum_{m=0}^{K} A(l)\cdot Y_1(m-l)\cdot A(K-m) = E\cdot\delta(K), & (14)\\ Y_1(K) - \sum_{l=0}^{K} X(l)\cdot X(K-l) = 0, & (15)\end{cases}$$

где

$$\delta(K) = \begin{cases} 1, & \text{если } K=0,\\ 0, & \text{если } K\ge 1\end{cases} \qquad (16)$$

– тейлоровская единица, а матричные дискреты

$$X(K) = \frac{H^K}{K!}\cdot\left.\frac{d^K X(t)}{dt^K}\right|_{t=t_\nu},$$

$$K=\overline{0,\infty} \risingdotseq X(t) = \aleph_1(t,t_\nu,H,X(K)), \qquad (17)$$

$$Y_1(K) = \frac{H^K}{K!}\cdot\left.\frac{d^K Y_1(t)}{dt^K}\right|_{t=t_\nu},$$

$$K=\overline{0,\infty} \risingdotseq Y_1(t) = \aleph_2(t,t_\nu,H,Y(K)), \qquad (18)$$

$$A(K) = \frac{H^K}{K!}\cdot\left.\frac{d^K A(t)}{dt^K}\right|_{t=t_\nu},$$

$$K=\overline{0,\infty} \risingdotseq A(t) = \aleph_3(t,t_\nu,H,A(K)), \qquad (19)$$

где H – масштабный коэффициент; t_ν – центр аппроксимации; $\aleph_1(\cdot),\aleph_2(\cdot)$ и $\aleph_3(\cdot)$ – обратные Д-преобразования, восстанавливающие оригиналы-матрицы $X(t)$, $Y_1(t)$ и $A(t)$ соответственно; символ $\risingdotseq$ – знак перехода из области оригиналов в область Д-изображений и наоборот [7].

Рассмотрим, к чему приводят соотношения (14)–(16) с учетом (17)–(19) при изменении целочисленного аргумента $K=\overline{0,\infty}$. Итак,

при $\underline{K=0}$:

$$\begin{cases} A(0)\cdot Y_1(0)\cdot A(0) = E,\\ Y_1(0) = X(0)\cdot X(0) = [A^+(0)]^2,\end{cases}$$

откуда

$$A(0)\cdot X^2(0)\cdot A(0) = E; \qquad (20)$$

при $\underline{K=1}$:

$$\begin{cases} A(0)\cdot Y_1(0)\cdot A(1) + A(0)\cdot Y_1(1)\cdot A(0) +\\ +A(1)\cdot Y_1(0)\cdot A(0) = 0,\\ Y_1(1) = X(0)\cdot X(1) + X(1)\cdot X(0),\end{cases}$$

откуда

$$X(0)\cdot X(1) - X(1)\cdot[-X(0)] =$$

$$= -X(0)\cdot\begin{bmatrix} A(0)\cdot Y_1(0)\cdot A(1) +\\ +A(1)\cdot Y_1(0)\cdot A(0)\end{bmatrix}\cdot X(0); \qquad (21)$$

при $\underline{K=2}$:

$$\begin{cases} A(0)\cdot Y_1(0)\cdot A(2) + A(0)\cdot Y_1(1)\cdot A(1) +\\ +A(0)\cdot Y_1(2)\cdot A(0) + A(1)\cdot Y_1(1)\cdot A(0) +\\ +A(2)\cdot Y_1(0)\cdot A(0) + A(1)\cdot Y_1(0)\cdot A(1) = 0,\\ Y_1(2) = X(0)\cdot X(2) + X(1)\cdot X(1) + X(2)\cdot X(0),\end{cases}$$

откуда

$$X(0)\cdot X(2)-X(2)\cdot[-X(0)]=$$

$$=-X(0)\cdot\begin{bmatrix}A(0)\cdot Y_1(0)\cdot A(2)+\\+A(0)\cdot Y_1(1)\cdot A(1)+\\+A(1)\cdot Y_1(1)\cdot A(0)+\\+A(2)\cdot Y_1(0)\cdot A(0)+\\+A(1)\cdot Y_1(0)A(1)\end{bmatrix}\cdot X(0)-X^2(1); \quad (22)$$

$$\vdots$$

при $\underline{K=K}$:

$$\begin{cases}A(0)\cdot Y_1(K)\cdot A(0)+\\+\sum\limits_{\substack{l=0\\m-l\neq K}}^{m}\sum\limits_{m=0}^{K}A(l)\cdot Y_1(m-l)\cdot A(K-m),\\Y_1(K)=X(0)\cdot X(K)+\\+\sum\limits_{l=1}^{K-1}X(l)\cdot X(K-l)+X(K)\cdot X(0),\end{cases}$$

откуда

$$X(0)\cdot X(K)-X(K)\cdot[-X(0)]=$$

$$-X(0)\cdot[\sum_{\substack{l=0\\m-l\neq K}}^{m}\sum_{m=0}^{K}A(l)\cdot Y_1(m-l)\cdot A(K-m)]\cdot X(0)-$$

$$-\sum_{l=1}^{K-1}X(l)\cdot X(K-l). \quad (23)$$

Таким образом, получена рекуррентная цепочка линейных матричных уравнений (21)–(23) типа уравнений Сильвестра [1] с инвариантными, по отношению к номерам неизвестных матричных дискрет $X(1),X(2),...,X(K)$, левыми частями (везде фигурируют матрицы $X(0)$ и $-X(0)$). Вычислив начальные матричные дискреты $X(0)=A^{+}(0)$ [1] и $Y_1(0)=X^2(0)$, далее некоторым численным алгоритмом [9] можно рекуррентно определить матричные дискреты $X(1),X(2),...,X(K)$, а затем и восстановить аппроксимирующее решение $X(t)$ в соответствии с (17).

Вариант 2.

Теперь рассмотрим произведение соотношений (10в) и (7в), что также может иметь место лишь при условии $m=n$. При этом

$$[X(t)\cdot A(t)]\cdot[A(t)\cdot X(t)]=E$$

или

$$X(t)\cdot A^2(t)\cdot X(t)=E. \quad (24)$$

Матричное уравнение (24) представим в виде системы

$$\begin{cases}X(t)\cdot Y_2(t)\cdot X(t)=E, & (25)\\Y_2(t)-A^2(t)=0. & (26)\end{cases}$$

Здесь обратим внимание на то, что системы (12), (13) и (25), (26), несмотря на то, что по виду вполне идентичны, по содержанию отличны друг от друга ввиду отличия матриц $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$. С учетом этого обстоятельства и соотношений (16)–(19), систему (25), (26) переведем из области оригиналов в область Д-изображений, имея ввиду, что (аналогично (18)) вместо матричных дискрет $Y_1(K)$ будут фигурировать матричные дискреты $Y_2(K)$. Следовательно получим:

$$\begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{m}\sum\limits_{m=0}^{K}X(l)\cdot Y_2(m-l)\cdot X(K-m)=E\cdot\delta(K), & (27)\\Y_2(K)-\sum\limits_{l=0}^{K}A(l)\cdot A(K-l)=0. & (28)\end{cases}$$

Теперь рассмотрим, к чему приводят соотношения (27), (28), (16) с учетом (17)–(19) при изменении целочисленного аргумента $K=\overline{0,\infty}$. Итак,

при $\underline{K=0}$:

$$\begin{cases}X(0)\cdot Y_2(0)\cdot X(0)=E,\\Y_2(0)=A^2(0),\end{cases}$$

откуда

$$X(0)\cdot A^2(0)\cdot X(0)=E; \quad (29)$$

при $\underline{K=1}$:

$$\begin{cases}X(0)\cdot Y_2(0)\cdot X(1)+X(0)\cdot Y_2(1)\cdot X(0)+\\+X(1)\cdot Y_2(0)\cdot X(0)=0,\\Y_2(1)=A(0)\cdot A(1)+A(1)\cdot A(0),\end{cases}$$

откуда

$$X(0)\cdot Y_2(0)\cdot X(1)-X(1)\cdot[-Y_2(0)\cdot X(0)]=$$

$$=-X(0)\cdot[A(0)\cdot A(1)+A(1)\cdot A(0)]\cdot X(0); \quad (30)$$

при $\underline{K=2}$:

$$\begin{cases}X(0)\cdot Y_2(0)\cdot X(2)+X(0)\cdot Y_2(1)\cdot X(1)+\\+X(0)\cdot Y_2(2)\cdot X(0)+X(1)\cdot Y_2(1)\cdot X(0)+\\+X(2)\cdot Y_2(0)\cdot X(0)+X(1)\cdot Y_2(0)\cdot X(1)=0,\\Y_2(2)=A(0)\cdot A(2)+A(1)\cdot A(1)+A(2)\cdot A(0),\end{cases}$$

откуда

$$X(0)\cdot Y_2(0)\cdot X(2)-X(2)\cdot[-Y_2(0)\cdot X(0)]=$$

$$-\begin{bmatrix}X(0)\cdot[A(0)\cdot A(1)+A(1)\cdot A(0)]\cdot X(1)-\\-X(0)\cdot\begin{bmatrix}A(0)\cdot A(2)+\\+A(1)\cdot A(1)+\\+A(2)\cdot A(0)\end{bmatrix}\cdot X(0)-\\-X(1)\cdot[A(0)\cdot A(1)+A(1)\cdot A(0)]\cdot X(0)-\\-X(1)\cdot Y_2(0)\cdot X(1)\end{bmatrix}; \quad (31)$$

$$\vdots$$

при $\underline{K=K}$:

$$X(0)\cdot Y_2(0)\cdot X(K)-X(K)\cdot[-Y_2(0)\cdot X(0)]=$$

$$=-\sum_{l=0}^{m}\sum_{m=1}^{K}X(l)\cdot Y_2(m-l)\cdot X(K-m), \quad (32)$$

где

$$Y_2(K)=\sum_{l=0}^{m}A(l)\cdot A(K-l). \quad (33)$$

Таким образом, получается другая рекуррентная цепочка линейных матричных уравнений

(30)–(32) также типа уравнений Сильвестра [1] с инвариантными, по отношению к номерам неизвестных матричных дискрет $X(1),X(2),\ldots,X(K)$, левыми частями (здесь везде фигурируют матрицы $X(0)\cdot Y_2(0)$ и $-\,Y_2(0)\cdot(0)$). Вычислив начальные дискреты $X(0)=A^+(0)$ [1] и $X_2(0)=A^2(0)$, далее некоторым численным алгоритмом и здесь можно рекуррентно определить матричные дискреты $X(1),X(2),\ldots,X(K)$, а затем и восстановить аппроксимирующее решение $X\,(t)$ в соответствии с (17).

Тестовая задача [10].

Пусть дана матрица

$$A(t)=\begin{bmatrix}(t+1) & t & (t+1)\\ t & (t-1) & t\\ (t+1) & t & (t+1)\end{bmatrix},\quad \det A(t)\equiv 0.$$

Тогда при маклореновском центре аппроксимации (t_v=0) имеем:

$$A(0)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix};\ A(1)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix};$$

$$A(K)=[0],\ \forall K\ge 2;\ X(0)=\begin{bmatrix}0.25 & 0 & 0.25\\ 0 & -1 & 0\\ 0,25 & 0 & 0,25\end{bmatrix}.$$

а) При применении варианта 1 получаем:

$$Y_1(0)=\begin{bmatrix}0,125 & 0 & 0,125\\ 0 & 1 & 0\\ 0,125 & 0 & 0,125\end{bmatrix},$$

$$Y_1(1)=\begin{bmatrix}-0,25 & -0,25 & -0,25\\ -0,25 & 2 & -0,25\\ -0,25 & -0,25 & -0,25\end{bmatrix},$$

$$Y_1(2)=\begin{bmatrix}0,375 & -0,75 & 0,375\\ -0,75 & 1,5 & -0,375\\ 0,375 & -0,75 & 0,375\end{bmatrix}.$$

Далее, в соответствии с (21), имеем матричное уравнение

$$\begin{bmatrix}0,25 & 0 & 0,25\\ 0 & -1 & 0\\ 0,25 & 0 & 0,25\end{bmatrix}\cdot X(1)+X(1)\cdot\begin{bmatrix}0,25 & 0 & 0,25\\ 0 & -1 & 0\\ 0,25 & 0 & 0,25\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-0,25 & -0,25 & -0,25\\ -0,25 & 2 & -0,25\\ -0,25 & -0,25 & -0,25\end{bmatrix},$$

обладающее решением

$$X(1)=\begin{bmatrix}-0,25 & 0,5 & -0,25\\ 0,5 & -1 & 0,5\\ -0,25 & 0,5 & -0,25\end{bmatrix}.$$

В соответствии с (22), имеем матричное уравнение

$$\begin{bmatrix}0,25 & 0 & 0,25\\ 0 & -1 & 0\\ 0,25 & 0 & 0,25\end{bmatrix}\cdot X(2)+$$

$$+X(2)\cdot\begin{bmatrix}0,25 & 0 & 0,25\\ 0 & -1 & 0\\ 0,25 & 0 & 0,25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

обладающее решением

$$X(2)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Такая же картина имеет место и для последующих матричных дискрет $X(K)=[0]$, $\forall K\ge 3$. Следовательно, обратные дифференциально-маклореновские преобразования [7] приводят к решению

$$X(t)=\begin{bmatrix}(0,25-0,25\cdot t) & 0,5\cdot t & (0,25-0,25\cdot t)\\ 0,5\cdot t & (-1-t) & 0,5\cdot t\\ (0,25-0,25\cdot t) & 0,5\cdot t & (0,25-0,25\cdot t)\end{bmatrix}=$$

$$=A^{(1-4)}(t)=A^+(t),$$

точно совпадающему с известным решением, полученным в [10].

б) При применении варианта 2 получаем:

$$Y_2(0)=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix},\ Y_2(1)=\begin{bmatrix}4 & 1 & 4\\ 1 & -2 & 1\\ 4 & 1 & 4\end{bmatrix},$$

$$Y_2(2)=\begin{bmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{bmatrix},$$

а матрицы

$$X(0)\cdot Y_2(0)=Y_2(0)\cdot X(0)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Тогда, в соответствии с (30), имеем матричное уравнение

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot X(1)+X(1)\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 0,5 & -1\\ 0,5 & 2 & 0,5\\ -1 & 0,5 & -1\end{bmatrix},$$

обладающее решением, совпадающим с решением, полученным выше при применении варианта 1.

Далее, в соответствии с (31), имеем матричное уравнение

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot X(2)+X(2)\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

обладающее решением, полученным выше при применении варианта 1. Такая же картина имеет место и для последующих матричных дискрет $X(K)=[0]$, $\forall K\geq 3$. Следовательно, и при этом обратные дифференциально-маклореновские преобразования [7] приводят к решению, полученному выше при применении варианта 1 и точно совпадающему с известным решением, полученным в [10].

Наконец, сделаем несколько замечаний.

Замечание 1. Использование соотношений (7в) и (10в), из-за известных свойств обобщенных обратных матриц, не гарантирует их точное выполнение при найденном $X(t)$. Обычно имеет место одно из следующих четырех возможных двойных условий:

1) $A(t)\cdot X(t)=E$, $A(t)\cdot X(t)=E$;
2) $A(t)\cdot X(t)\neq E$, $A(t)\cdot X(t)=E$;
3) $A(t)\cdot X(t)=E$, $A(t)\cdot X(t)\neq E$;
4) $A(t)\cdot X(t)\neq E$, $A(t)\cdot X(t)\neq E$.

Естественно, эти условия остаются в силе с точностью до начальных матричных дискрет $A(0)=A(t_v)$ и $X(0)=X(t_v)$. Следовательно, нелинейные матричные уравнения (20) при варианте 1 и (29) при варианте 2 в общем случае также не будут выполняться точно.

Замечание 2. При переходах от (1), (2) к (11) и от (2), (1) к (24) порождаются квадратичные матричные уравнения по отношению к неизвестной матрице $X(t)$, ввиду чего, наряду с единственным решением исходной задачи, могут появляться также «побочные решения» [5]. С целью выделения этого единственного решения из полученного множества решений, естественно, необходимо провести дополнительные вычисления, в частности, убедиться в одновременном выполнении условий (1)–(4).

Замечание 3. Для решения систем рекуррентных матричных уравнений типа уравнений Сильвестра (21)–(23) или (30)–(32) может быть использован известный алгоритм Бартельса–Стюарта [9].

Замечание 4. В рассмотренном примере матрицы $X(0)$ и $-X(0)$ (вариант 1), а также матрицы $X(0)\cdot Y_2(0)$ и $-Y_2(0)\cdot X(0)$ (вариант 2) имеют общие нулевые собственные значения. Ввиду этого, матричные уравнения Сильвестра для определения матричных дискрет $X(1)$ и $X(2)$ в обоих вариантах, в зависимости от свободных членов, либо противоречивы (что в данном случае, естественно, не могут иметь место), либо могут иметь бесчисленное множество решений [1. С. 207; 11. С. 240].

В частности, при применении обоих вариантов получаются также следующие «побочные» матричные дискреты:

$$X(0)=\begin{bmatrix}0,25 & 0 & 0,25\\ 0 & -1 & 0\\ 0,25 & 0 & 0,25\end{bmatrix},$$

$$X(1)=\begin{bmatrix}0 & 0,5 & -0,5\\ 0,5 & -1 & 0,5\\ -0,5 & 0,5 & 0\end{bmatrix},$$

$$X(K)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \forall K\geq 2.$$

Очевидно, при этом первые приближения – начальные матричные дискреты $X(0)$ и матричные дискреты $X(K)$, $\forall K\geq 2$ точного решения и «побочного решения», полностью совпадают. Следовательно, «побочное решение» выглядит так:

$$X(t)=\begin{bmatrix}0,25 & 0,5\cdot t & (0,25-0,5\cdot t)\\ 0,5\cdot t & (-1-t) & 0,5\cdot t\\ (0,25-0,5\cdot t) & 0,5\cdot t & 0,25\end{bmatrix},$$

при котором, как нетрудно убедиться, условия (1)–(4) также выполняются точно.

Таким образом, в общем случае с учетом отмеченных обстоятельств вопрос об определении окончательного решения – матричного оригинала $X(t)=A^{(1-4)}(t)=A^{+}(t)$ (обобщенной обратной матрицы) ввиду ее существования и единственности, требует дополнительного изучения.

Замечание 5. Теоретические исследования решения уравнений Сильвестра–Ляпунова при невыполнении условий однозначной разрешимости рассмотрены, в частности, в работах М.Г. Крейна [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Физматлит, 2010. – 560 с.
2. Грегори Р., Кришнамурти Е. Безошибочные вычисления. Методы и приложения. – М.: Мир, 1998. – 208 с.
3. Симонян С.О., Аветисян А.Г., Симонян А.С. Метод определения параметрических обобщенно-обратных матриц (I) // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. – 2008. – Т. LXI. – № 3. – С. 452–464.
4. Симонян С.О., Аветисян А.Г., Симонян А.С. Метод определения параметрических обобщенно-обратных матриц (II) // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. – 2008. – Т. LXI. – № 4. – С. 584–591.
5. Аветисян А.Г. Способ определения параметрических обобщенных обратных матриц Мура–Пенроуза решением матричных уравнений // Известия НАН РА и ГИУА. Серия ТН. – 2011. – Т. LXIV. – № 1. – С. 76–82.
6. Симонян С.О., Аветисян А.Г., Симонян А.С. Метод определения параметрических обобщенно-обратных матриц, основанный на дифференциальных преобразованиях // Вестник ГИУА. Сер. «Моделирование, оптимизация, управление». – 2008. – Вып. 11. – Т. 1. – С. 78–85.
7. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. – Киев: Наукова думка, 1990. – 184 с.
8. Симонян С.О., Аветисян А.Г. Прикладная теория дифференциальных преобразований. – Ереван: Чартарагет, 2010. – 361 с.
9. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. – М.: Наука, 1984. – 190 с.
10. Stanimirovic P.S., Tasic M.B., Krtolica P.V., Karampetakis N.P. Generalized Inversion by Interpolation // Filomat. – 2007. – V. 21. – № 1. – P. 67–86.
11. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
12. Демиденко Г.В. Матричные уравнения. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2009. – 203 с.

Поступила 11.04.2013 г.