Математика и механика. Физика

УДК 519.224

МОДЕРНИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПИРСОНА ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ДВУХСТОРОННИХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Карпов Иван Георгиевич,
д-р техн. наук, профессор кафедры «Информационные системы и защита информации» Тамбовского государственного технического университета, Россия, 392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106. E-mail: zeratul68@mail.ru

Грибков Алексей Николаевич,
канд. техн. наук, доцент кафедры «Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем» Тамбовского государственного технического университета, Россия, 392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106.
E-mail: GribkovAlexey@yandex.ru

Актуальность работы обусловлена необходимостью повышения точности и упрощения процедуры аппроксимации двухсторонних законов распределения экспериментальных данных.

***Цель работы**: модернизация метода Пирсона, которая позволяет устранить ряд его недостатков и упростить процедуру аппроксимации двухсторонних законов распределения экспериментальных данных, принимающих как положительные, так и отрицательные значения.*

***Методы исследования:** расчеты с использованием методов теории вероятностей и математической статистики, а также программного продукта MathCAD; методы интегрального и дифференциального исчисления.*

***Результаты:** Предложена модернизация распределений Пирсона для аппроксимации законов распределения экспериментальных данных, принимающих положительные и отрицательные значения, которая позволяет значительно упростить процедуру аппроксимации. Разработана топографическая классификация модернизированных распределений Пирсона с использованием совместного коэффициента асимметрии и эксцесса вместо коэффициента эксцесса. Приведены формулы для расчета числовых характеристик модернизированных распределений Пирсона.*

Ключевые слова:
Распределения Пирсона, аппроксимация законов распределения, плотность распределения вероятностей, классификация распределений, совместный коэффициент асимметрии и эксцесса.

Постановка задачи

Одной из актуальных задач, возникающих в процессе обработки экспериментальных данных, является установление закона распределения и оценка значений его параметров. При этом непосредственная обработка результатов наблюдений во многих случаях не позволяет точно установить истинный закон распределения, а только его аппроксимировать, т. е. получить приближенное описание в виде некоторого известного закона, похожего на неизвестный истинный закон распределения.

При отсутствии априорных данных о виде закона распределения выбор той или иной статистической модели для адекватного описания экспериментальных данных, принимающих как отрицательные, так и положительные значения, может быть основан на известных эмпирических методах, таких как применение распределений Джонсона и Пирсона, разложения в ряд Эджворта и т. д. [1–4].

Известная система распределений Пирсона удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{x-a}{b_2 x^2 + b_1 x + b_0} p(x), \qquad (1)$$

где a, b_0, b_1, b_2 – параметры распределений Пирсона.

С помощью распределений Пирсона можно осуществлять аппроксимацию экспериментальных распределений с J-образной, U-образной либо унимодальной формой, имеющих, по крайней мере, хотя бы первые четыре момента.

Основные недостатки метода Пирсона заключаются в следующем:

1) семейство распределений Пирсона наряду с основными типами распределений содержит также частные случаи некоторых из этих распределений, что затрудняет их практическое использование;
2) определение параметров искомого распределения из семейства распределений Пирсона связано с решением различных систем уравнений;
3) затруднительно пояснить физический смысл параметров распределений Пирсона;
4) дифференциальное уравнение (1) содержит в себе неточность, так как его правая часть не обращается в нуль в случае равномерного распределения, которое принадлежит к семейству распределений Пирсона;
5) предложенная Пирсоном классификация распределений с помощью диаграммы в плоскости переменных β_1 и β_2 обладает малой наглядностью.

Величины β_1 и β_2 определяются равенствами

$$\beta_1 = \eta_a^2 = \mu_3^2 / \mu_2^3; \quad \beta_2 = \eta_э + 3 = \mu_4 / \mu_2^2, \qquad (2)$$

где η_a – коэффициент асимметрии; $\eta_э$ – коэффициент эксцесса; μ_2, μ_3 и μ_4 – соответственно центральные моменты 2-го, 3-го и 4-го порядков.

Целью данной работы является модернизация метода Пирсона, которая позволит устранить отмеченные выше недостатки и упростить процедуру аппроксимации двухсторонних законов распределения экспериментальных данных. При этом вместо дифференциального уравнения (1) предлагается использовать уравнение

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{a_1(x-m_1)-a_0}{b_2(x-m_1)^2 + b_1(x-m_1)+b_0}\ p(x), \qquad (3)$$

где m_1 – математическое ожидание.

Основные результаты

Используя общие свойства плотностей распределения вероятностей (ПРВ), установим правила определения параметров a_1, a_0, b_2, b_1 и b_0, входящих в уравнение (3). Для этого запишем уравнение (3) в следующем виде:

$$(x-m_1)^n [b_0 + b_1(x-m_1) + b_2(x-m_1)^2]\, p(x)/dx =$$
$$= (x-m_1)^n [a_1(x-m_1) - a_0]\, p(x)$$

либо

$$y^n (b_0 + b_1 y + b_2 y^2)\, dp(y)/dy = y^n (a_1 y - a_0)\, p(y), \quad (4)$$

где $y=x-m_1$.

Пусть допустимые значения случайной величины (СВ) η с ПРВ $p(y)$ заключены в интервале (l_1,l_2). Проинтегрируем левую часть равенства (4) по частям. Считая, что интегралы существуют, получим

$$\{y^n [b_0 + b_1 y + b_2 y^2]\, p(y)\}_{l_1}^{l_2} -$$
$$-\int_{l_1}^{l_2} [n b_0 y^{n-1} + (n+1) b_1 y^n + (n+2) b_2 y^{n+1}] p(y) =$$
$$= \int_{l_1}^{l_2} y^n (a_1 y - a_0)\, p(y) dy.$$

Предположим, что выражение в фигурных скобках обращается в нуль на верхней и нижней границах интервала интегрирования или же

$$\lim_{y \to \pm\infty} y^{n+2} p(y) \to 0,$$

если распределение имеет бесконечный размах. Тогда, используя определение центральных моментов для непрерывной СВ, получим

$$n b_0 \mu_{n-1} + [(n+1) b_1 - a_0] \mu_n =$$
$$= -[a_1 + (n+2) b_2]\ \mu_{n+1}. \qquad (5)$$

Уравнение (5) позволяет получить рекуррентные соотношения для определения центральных моментов более высокого порядка по моментам более низкого порядка. Последовательно полагая в (5) n=0,1,2,3 и учитывая, что μ_{-1}=0, μ_0=1, μ_1=1, имеем:

$$b_1 - a_0 = 0;$$
$$b_0 = -(a_1 + 3b_2)\, \mu_2;$$
$$(3b_1 - a_0)\, \mu_2 = -(a_1 + 4b_2)\ \mu_3;$$
$$3b_0 \mu_2 + (4b_1 - a_0)\, \mu_3 = -(a_1 + 5b_2)\ \mu_4. \qquad (6)$$

Из второго уравнения системы (6) следует, что параметр $b_0 \neq 0$. Поэтому, решив систему уравнений (6) относительно интересующих нас параметров распределения a_1, a_0, b_2, b_1, получим

$$a_1 = b_0 \frac{(18\mu_2^3 + 12\mu_3^2 - 10\mu_2\mu_4)}{\mu_2(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2)} = b_0 \frac{4\eta_{12} - 5}{(2-\eta_{12})\mu_2};$$

$$a_0 = b_1 = b_0 \frac{\mu_3(\mu_4 - 3\mu_2^2)}{\mu_2(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2)} = b_0 \frac{\eta_a}{2(2-\eta_{12})\sqrt{\mu_2}};$$

$$b_2 = b_0 \frac{2\mu_2\mu_4 - 6\mu_2^3 - 3\mu_3^2}{\mu_2(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2)} = b_0 \frac{1-\eta_{12}}{(2-\eta_{12})\mu_2}. \qquad (7)$$

С учетом формулы (2), коэффициент η_{12} можно записать в виде

$$\eta_{12} = \frac{1{,}5\beta_1 + 6}{\beta_2 + 3} = \frac{1{,}5\,\mu_3^2 + 6\,\mu_2^3}{\mu_2(\mu_4 + 3\,\mu_2^2)} = \frac{1{,}5\,\eta_a^2 + 6}{\eta_э + 6},$$
$$0 \le \eta_{12} \le 1{,}5. \qquad (8)$$

Коэффициент η_{12}, определяемый по формуле (8), назовем нормированным совместным коэффициентом асимметрии и эксцесса. Можно показать [5], что верхней границе области возможных значений коэффициента соответствуют распределения в виде совокупности двух дельта-функций, а нижней границе – распределения, имеющие менее четырех моментов. Для симметричных распределений, когда η_a=0, коэффициент η_{12} представляет собой нормированный коэффициент эксцесса.

Положим параметр $b_0=\mu_2(2-\eta_{12})$, тогда выражения (7) для параметров a_0, a_1, b_1 и b_2 существенно упрощаются:

$$a_1 = 4\eta_{12} - 5; \quad a_0 = b_1 = 0{,}5\,\eta_a\sqrt{\mu_2};$$
$$b_0 = (2-\eta_{12})\mu_2; \quad b_2 = 1-\eta_{12}. \tag{9}$$

Из анализа соотношений (9) следует, что параметры a_1, a_0, b_2, b_0 и b_1 определяются коэффициентами η_a и η_{12}, а также центральным моментом μ_2.

Дифференциальное уравнение (3) с учетом соотношений (9) принимает вид

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{(4\eta_{12}-5)(x-m_1) - 0{,}5\,\eta_a\sqrt{\mu_2}}{\left((1-\eta_{12})(x-m_1)^2 + 0{,}5\,\eta_a\sqrt{\mu_2}\,(x-m_1) + (2-\eta_{12})\,\mu_2\right)}\,p(x). \tag{10}$$

Решение уравнения (10) можно записать следующим образом:

$$p(x) = K_{\text{н}}\,\exp[\varphi(x)], \quad \varphi(x) = \int \frac{(4\eta_{12}-5)(x-m_1) - 0{,}5\,\eta_a\sqrt{\mu_2}}{\left((1-\eta_{12})(x-m_1)^2 + 0{,}5\,\eta_a\sqrt{\mu_2}\,(x-m_1) + (2-\eta_{12})\,\mu_2\right)}\,dx, \tag{11}$$

где $K_{\text{н}}$ – коэффициент нормировки. Очевидно, что характер кривой $\varphi(x)$, а следовательно и ПРВ $p(x)$, может быть различным в зависимости от величин коэффициентов η_a и η_{12}, которыми с учетом соотношений (9) в конечном итоге определяются корни уравнения

$$b_0 + b_1 y + b_2 y^2 = 0. \tag{12}$$

Значения корней уравнения (12) зависят также от дополнительного коэффициента

$$\eta_{21} = \frac{b_1}{2\sqrt{|b_2|\,b_0}} = \frac{\eta_a}{4\sqrt{|1-\eta_{12}|\,(2-\eta_{12})}}.$$

При этом возможны шесть основных типов распределений, соответствующих двенадцати типам распределений по классификации Пирсона. Их топографическую классификацию удобно производить с помощью диаграммы в плоскости переменных η_a и η_{12}, приведенной на рисунке. Рассмотрим подробнее указанные шесть типов распределений.

Распределение 1. В данном случае $-\infty<\eta_a<\infty$, $1<\eta_{12}<1{,}5$. Выражение для ПРВ с учетом (11) имеет вид [6]

$$p(x) = \frac{(x+\chi-\mu)^{\alpha-1}(\chi-x+\mu)^{\nu-1}}{(2\chi)^{\alpha+\nu-1}B(\alpha,\nu)}, \tag{13}$$
$$-\chi+\mu < x < \chi+\mu,$$

где $B(\alpha,\nu)$ – бета-функция; $\alpha>0$, $\nu>0$ – параметры формы; $\chi>0$ – параметр масштаба; $-\infty<\mu<\infty$ – параметр сдвига.

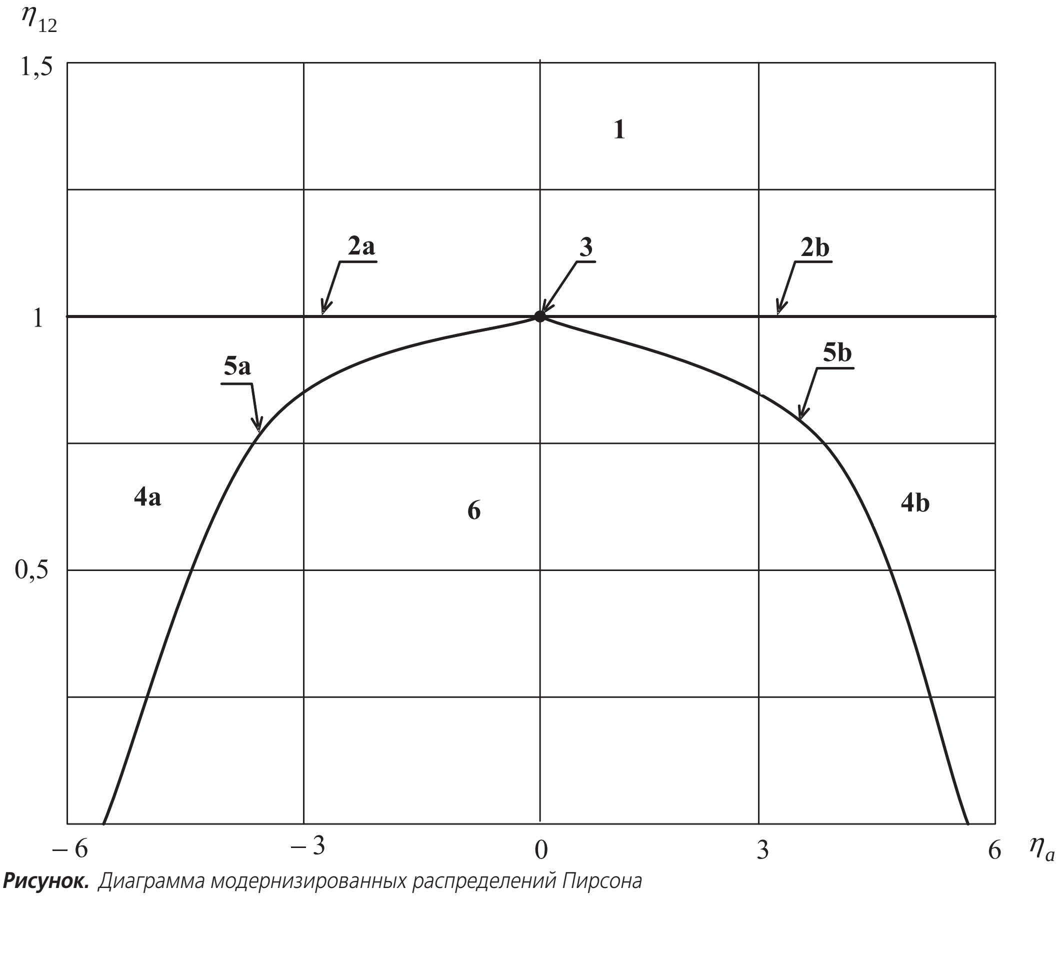

Рисунок. *Диаграмма модернизированных распределений Пирсона*

Параметры распределения (13) связаны с η_a, η_{12}, μ_2 и m_1 следующими соотношениями:

$$\alpha = \left(\frac{0,5}{\eta_{12}-1} - 1\right)\left(1 - \frac{\eta_{21}}{\sqrt{\eta_{21}^2+1}}\right);$$

$$\nu = \left(\frac{0,5}{\eta_{12}-1} - 1\right)\left(1 + \frac{\eta_{21}}{\sqrt{\eta_{21}^2+1}}\right);$$

$$\chi = \sqrt{\frac{2-\eta_{12}}{\eta_{12}-1}\mu_2(\eta_{21}^2+1)};\;\; \mu = \sqrt{\frac{2-\eta_{12}}{\eta_{12}-1}\mu_2}\,\eta_{21} + m_1.$$

Распределению (13) по классификации Пирсона соответствует I тип распределения, а также частные случаи – распределения II, VIII, IX и XII. Например, при η_a=0 ПРВ (13) сводится к распределению Пирсона II типа (α=ν). При η_{12}=1,25 и $\eta_a \neq 0$ ПРВ (13) сводится к распределению Пирсона XII типа. В этом случае $\alpha+\nu=2$. Если $\mu=\chi$, то ПРВ (13) преобразуется в бета-распределение. На рисунке представлена область существования распределения (13) в координатах η_a и η_{12}. Для нее справедливы неравенства $-\infty<\eta_a<\infty$, $1<\eta_{12}<1,5$.

Распределение 2a. При этом $\eta_a<0$, $\eta_{12}=1$ и выражение для ПРВ с учетом (11) имеет вид [6]

$$p(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(\mu - x)^{\alpha-1}\exp[-\lambda(\mu - x)],$$
$$-\infty < x < \mu, \qquad (14)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция; $\alpha>0$, $\lambda>0$, $-\infty<\mu<\infty$ – параметры, связанные с η_a, μ_2 и m_1 соотношениями:

$$\alpha = \frac{4}{\eta_a^2};\quad \lambda = -\frac{2}{\eta_a\sqrt{\mu_2}};\quad \mu = -\frac{2\sqrt{\mu_2}}{\eta_a} + m_1.$$

Распределению (14) по классификации Пирсона соответствует III тип распределения (гамма-распределение) с отрицательным коэффициентом асимметрии. На рисунке представлена область существования распределения (14). Ей соответствует отрезок прямой 2a.

Распределение 2b. Для этого распределения $\eta_{12}=1$, $\eta_a>0$ и выражение для ПРВ имеет вид

$$p(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(x-\mu)^{\alpha-1}\exp[-\lambda(x-\mu)],$$
$$\mu < x < \infty. \qquad (15)$$

Значения параметров α, λ и μ распределения (15) определяются теми же соотношениями, что и для ПРВ (14), с той разницей, что $\lambda=2/\eta_a\sqrt{\mu_2}$.

Распределению (15) по классификации Пирсона соответствует III тип распределения (гамма-распределение) с положительным коэффициентом асимметрии. При α=1 получаем экспоненциальное распределение (X тип распределения Пирсона). На рисунке представлена область существования распределения (15). Ей соответствует отрезок прямой 2b.

Распределение 3. В этом случае $\eta_{12}=1$, $\eta_a=0$, и в результате с учетом (1) получаем распределение VII типа по классификации Пирсона (гауссовский закон) с параметрами $\sigma=\sqrt{\mu_2}$, $\mu=m_1$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],\quad -\infty < x < \infty. \qquad (16)$$

На рисунке области существования распределения (16) соответствует точка с координатами $\eta_a=0$, $\eta_{12}=1$.

Распределение 4a. Для этого распределения $\eta_a<0$, $\eta_{12}<1$, $\eta_{21}<-1$ и выражение для ПРВ с учетом (11) имеет вид [6]

$$p(x) = \frac{\lambda^{\nu}(\mu - x)^{\alpha-1}}{\mathrm{B}(\alpha,\nu)(\lambda+\mu-x)^{\alpha+\nu}},\quad -\infty < x < \mu, \qquad (17)$$

где $\alpha>0$, $\nu>0$, $\lambda>0$, $-\infty<\mu<\infty$ – параметры, связанные с η_a, η_{12}, μ_2 и m_1 соотношениями:

$$\alpha = \left(1 + \frac{0,5}{1-\eta_{12}}\right)\left(\frac{-\eta_{21}}{\sqrt{\eta_{21}^2-1}} - 1\right);\quad \nu = 3 + \frac{1}{1-\eta_{12}};$$

$$\lambda = 2\sqrt{\left(1+\frac{1}{1-\eta_{12}}\right)(\eta_{21}^2-1)\,\mu_2};$$

$$\mu = 0,5\left(2m_1 - \lambda - \frac{\eta_a\sqrt{\mu_2}}{2(1-\eta_{12})}\right).$$

По классификации Пирсона ПРВ (17) соответствует VI тип распределения (бета-распределение) с отрицательным коэффициентом асимметрии. При α=1 ПРВ (17) трансформируется в XI тип распределения Пирсона.

На рисунке представлена область существования распределения (17). Для нее справедливы неравенства $\eta_a<0$, $\eta_{12}<1$, $\eta_{21}<-1$. Справа она ограничена кривой 5a, для точек которой выполняется условие $\eta_{21}=-1$.

Распределение 4b имеет место для $\eta_{12}<1$, $\eta_a>0$ и $\eta_{21}>1$. При этом

$$p(x) = \frac{\lambda^{\nu}(x-\mu)^{\alpha-1}}{\mathrm{B}(\alpha,\nu)(\lambda-\mu+x)^{\alpha+\nu}},\quad \mu < x < \infty. \qquad (18)$$

Значения параметров α, ν, λ и μ распределения (18) определяются теми же соотношениями, что и для ПРВ (17), с той разницей, что

$$\alpha = \left(1 + \frac{0,5}{1-\eta_{12}}\right)\left(\frac{\eta_{21}}{\sqrt{\eta_{21}^2-1}} - 1\right),$$

$$\mu = 0,5\left(2m_1 + \lambda - \frac{\eta_a\sqrt{\mu_2}}{2(1-\eta_{12})}\right).$$

По классификации Пирсона ПРВ (18) так же, как и ПРВ (17), соответствует VI тип распределения (бета-распределение), но с положительным коэффициентом асимметрии. При α=1 ПРВ (18) трансформируется в XI тип распределения Пирсона.

На рисунке представлена область существования распределения (18). Для нее справедливы неравенства $\eta_{12}<1$, $\eta_a>0$ и $\eta_{21}>1$. Слева она ограничена кривой 5b, для точек которой выполняется условие $\eta_{21}=1$.

Распределение 5a является предельным случаем распределения (17) при $\alpha\to\infty$ и $\eta_{12}<1$; $-5{,}65<\eta_a<0$; $\eta_{21}=-1$. ПРВ с учетом (11) имеет вид

$$p(x)=\frac{\lambda^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\frac{1}{(\mu-x)^{\nu+1}}\exp\left(-\frac{\lambda}{\mu-x}\right),$$
$$-\infty<x<\mu, \qquad (19)$$

где $\nu>0$, $\lambda>0$, $-\infty<\mu<\infty$ – параметры, связанные с η_a, η_{12}, μ_2 и m_1 соотношениями:

$$\nu=3+\frac{1}{1-\eta_{12}};\ \lambda=\left(2+\frac{1}{1-\eta_{12}}\right)\sqrt{\left(1+\frac{1}{1-\eta_{12}}\right)\mu_2};$$
$$\mu=m_1-\frac{\eta_a\sqrt{\mu_2}}{4(1-\eta_{12})}.$$

На рисунке представлена область существования распределения (19). Ей соответствует кривая 5a.

Распределение 5b является предельным случаем распределения (18) при $\alpha\to\infty$ и $\eta_{12}<1$; $0<\eta_a<5{,}65$; $\eta_{21}=1$. Выражение для ПРВ имеет вид

$$p(x)=\frac{\lambda^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\frac{1}{(x-\mu)^{\nu+1}}\exp\left(-\frac{\lambda}{x-\mu}\right),$$
$$\mu<x<\infty. \qquad (20)$$

Параметры распределения (20) определяются теми же соотношениями, что и для распределения (19). По классификации Пирсона распределения (19) и (20) соответствуют V типу, причем в первом случае $\eta_a<0$, а во втором случае $\eta_a>0$. На рисунке представлена область существования распределения (20). Ей соответствует кривая 5b.

Распределение 6 получаем при $\eta_{12}<1$ и $-1<\eta_{21}<1$. В этом случае ПРВ с учетом (11) имеет вид [6]

$$p(x)=\frac{\lambda^{\nu}\exp[b\,\mathrm{arctg}((x-\mu)/\lambda)]}{C[\lambda^2+(x-\mu)^2]^{0,5(\nu+1)}},\quad -\infty<x<\infty, \qquad (21)$$

где $\nu>0$, $-\infty<b<\infty$ – параметры формы; $\lambda>0$ – параметр масштаба;

$$C=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\exp(bx)(\cos x)^{\nu-1}dx=$$
$$=2^{\nu-1}\left|\Gamma(0{,}5(\nu+1+jb))\right|^2\big/\pi\Gamma(\nu)$$

– коэффициент нормировки. Если $b=0$, то $C=B(0{,}5;0{,}5\nu)$.

Параметры распределения (21) связаны с η_a, η_{12}, μ_2 и m_1 соотношениями:

$$\nu=3+\frac{1}{1-\eta_{12}};\ b=\left(2+\frac{1}{1-\eta_{12}}\right)\frac{\eta_{21}}{\sqrt{1-\eta_{21}^2}};$$
$$\lambda=\sqrt{\left(1+\frac{1}{1-\eta_{12}}\right)(1-\eta_{21}^2)\,\mu_2};\quad \mu=m_1-\frac{\eta_a\sqrt{\mu_2}}{4(1-\eta_{12})}.$$

ПРВ (21) соответствует IV тип распределения Пирсона. На рисунке представлена область существования распределения (21). Для нее справедливы неравенства $\eta_{12}<1$; $-5{,}65<\eta_a<5{,}65$ и $-1<\eta_{21}<1$. Слева она ограничена кривой 5a, а справа – кривой 5b.

В таблице приведены формулы, выражающие коэффициенты η_a, η_{12} и η_{21} через параметры распределений (13)–(21).

Таблица. *Числовые характеристики модернизированных распределений Пирсона*

Тип	η_a	η_{12}	η_{21}
1	$\eta_a=\frac{2(\nu-\alpha)\sqrt{\nu+\alpha+1}}{\sqrt{\nu\alpha}(\nu+\alpha+2)}$, $-\infty<\eta_a<\infty$	$\eta_{12}=\frac{\nu+\alpha+3}{\nu+\alpha+2}$, $1<\eta_{12}<1{,}5$	$\eta_{21}=\frac{\nu-\alpha}{2\sqrt{\alpha\nu}}$, $-\infty<\eta_{21}<\infty$
2a	$\eta_a=-2/\sqrt{\alpha}$	$\eta_{12}=1$	$\eta_{21}\to-\infty$
2b	$\eta_a=2/\sqrt{\alpha}$	$\eta_{12}=1$	$\eta_{21}\to\infty$
3	$\eta_a=0$	$\eta_{12}=1$	$\eta_{21}=0$
4a	$\eta_a=\frac{-2(2\alpha+\nu-1)\sqrt{\nu-2}}{(\nu-3)\sqrt{\alpha(\alpha+\nu-1)}}$, $\eta_a<0$	$\eta_{12}=\frac{\nu-4}{\nu-3}$, $0<\eta_{12}<1$	$\eta_{21}=\frac{1-\nu-2\alpha}{2\sqrt{\alpha(\alpha+\nu-1)}}$, $\eta_{21}<-1$
4b	$\eta_a=\frac{2(2\alpha+\nu-1)\sqrt{\nu-2}}{(\nu-3)\sqrt{\alpha(\alpha+\nu-1)}}$, $\eta_a>0$	$\eta_{12}=\frac{\nu-4}{\nu-3}$, $0<\eta_{12}<1$	$\eta_{21}=\frac{2\alpha+\nu-1}{2\sqrt{\alpha(\alpha+\nu-1)}}$, $\eta_{21}>1$
5a	$\eta_a=\frac{-4\sqrt{\nu-2}}{(\nu-3)}$, $-5{,}65<\eta_a<0$	$\eta_{12}=\frac{\nu-4}{\nu-3}$, $0<\eta_{12}<1$	$\eta_{21}=-1$
5b	$\eta_a=\frac{4\sqrt{\nu-2}}{(\nu-3)}$, $0<\eta_a<5{,}65$	$\eta_{12}=\frac{\nu-4}{\nu-3}$, $0<\eta_{12}<1$	$\eta_{21}=1$
6	$\eta_a=\frac{4b\sqrt{\nu-2}}{(\nu-3)\sqrt{(\nu-1)^2+b^2}}$, $-5{,}65<\eta_a<5{,}65$	$\eta_{12}=\frac{\nu-4}{\nu-3}$, $0<\eta_{12}<1$	$\eta_{21}=\frac{b}{\sqrt{(\nu-1)^2+b^2}}$, $-1<\eta_{21}<1$

Выводы

Таким образом, модернизация метода Пирсона с использованием коэффициентов η_a, η_{12} и η_{21} позволяет существенно упростить процедуру аппроксимации экспериментальных распределений, так как при этом не требуется определять параметры дифференциального уравнения (1) и решать систему уравнений (7) для нахождения параметров аппроксимируемого распределения. Использование в качестве числовой характеристики совместного коэффициента асимметрии и эксцесса вместо коэффициента эксцесса позволяет также разделить области существования распределений Пирсона и представить их на диаграмме более наглядно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. – М.: Наука, 1966. – 566 с.
2. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: Физматлит, 2006. – 813 с.
3. Бостанджиян В.А. Распределение Пирсона, Джонсона, Вейбулла и обратное нормальное. Оценивание их параметров. – Черноголовка: Редакционно-издательский отдел ИПХФ РАН, 2009. – 240 с.
4. Карпов И.Г., Зырянов Ю.Т., Грибков А.Н. Модифицированные распределения Джонсона и их применение для аппроксимации законов распределения экспериментальных данных // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322. – № 2. – С. 46–50.
5. Карпов И.Г., Карпов М.Г., Проскурин Д.К. Методы обобщенного вероятностного описания и идентификации негауссовских случайных величин и процессов. – Воронеж: ВГУ, 2010. – 172 с.
6. Прудников А.П., Брычков Ю. А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1984. – 800 с.

Поступила 02.07.2013 г.

UDC 519.224

MODERNIZATION OF PEARSON DISTRIBUTION FOR APPROXIMATION OF THE BILATERAL DISTRIBUTION LAWS OF EXPERIMENTAL DATA

Ivan G. Karpov,
Dr. Sc., Tambov state technical university,
Russia, 392000, Tambov, Sovetskaya street, 106. E-mail: zeratul68@mail.ru

Aleksey N. Gribkov,
Cand. Sc., Tambov state technical university, Russia, 392000,
Tambov, Sovetskaya street, 106. E-mail: GribkovAlexey@yandex.ru

The urgency of the issue is caused by needs of improving the accuracy and simplifying the approximation of experimental data laws for bilateral distribution.
The main aim of the study: *modernization of the Pearson method, which eliminates some of its disadvantages and simplifies the procedure for approximation of bilateral distribution laws of experimental data, taking both positive and negative values.*
The methods used in the study: *calculations using the methods of probability theory and statistics, as well as the software MathCAD; methods of integral and differential calculus.*
The results: *The authors have proposed the modernized Pearson distributions to approximate distribution laws of experimental data, taking positive and negative values, which can significantly simplify the procedure of approximation. Topographic classification of modernized Pearson distributions with use of coefficient of joint asymmetry and excess kurtosis instead of coefficient of excess is designed. The paper introduces the formulas for calculating numerical characteristics of the modernized Pearson distributions.*

Key words:
Pearson distribution, approximation of distribution laws, density of probabilities distribution, classification of distributions, coefficient of joint asymmetry and excess.

REFERENCES

1. Kendall M., Styuart A. *Teoriya raspredeleniy* [Theory of distributions]. Moscow, Nauka, 1966. 566 p.
2. Kobzar A.I. *Prikladnaya matematicheskaya statistika. Dlya inzhenerov i nauchnykh rabotnikov* [Applied mathematical statistics. For engineers and scientists]. Moscow, Fizmatlit, 2006. 813 p.
3. Bostandzhiyan V.A. *Raspredelenie Pirsona, Dzhonsona, Veybulla i obratnoe normalnoe. Otsenivanie ikh parametrov* [Distribution of Pearson, Johnson, Weibull and inverse normal distribution. Parameter Estimation]. Chernogolovka, IPCP Publ. department, 2009. 240 p.
4. Karpov I.G., Zyryanov Yu.T., Gribkov A.N. Modifitsirovannye raspredeleniya Dzhonsona i ikh primenenie dlya approksimatsii zakonov raspredeleniya eksperimentalnykh dannykh [Johnson's modified distributions and their application for approximation of distributions laws of the experimental data]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 322, no. 2, pp. 46–50.
5. Karpov I.G., Karpov M.G., Proskurin D.K. *Metody obobshchennogo veroyatnostnogo opisaniya i identifikatsii negaussovskikh sluchaynykh velichin i protsessov* [Methods of generalized probabilistic description and identification of non-Gaussian random variables and processes]. Voronezh, VSU Publ., 2010. 172 p.
6. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. *Integraly i ryady. Elementarnye funktsii* [Integrals and series. Elementary functions]. Moscow, Nauka, 1984. 800 p.