УДК 519.865.7

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧЕ КВАНТИЛЬНОГО ХЕДЖИРОВАНИЯ ЭКЗОТИЧЕСКОГО ЕВРОПЕЙСКОГО ОПЦИОНА КУПЛИ

Данилюк Елена Юрьевна,
аспирант кафедры высшей математики Физико-технического Института ТПУ, Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30;
ассистент кафедры прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского Государственного университета, Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36. E-mail: daniluc_elena@sibmail.com

Рожкова Светлана Владимировна,
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики Физико-технического Института ТПУ, Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: rozhkova@tpu.ru

Актуальность исследования обусловлена необходимостью разработки математического аппарата, с помощью которого агент финансового рынка сможет анализировать и прогнозировать экономические процессы. В настоящее время деривативы, в том числе опционы, демонстрируют успешность торговли ими с целью получения прибыли и хеджирования связанных с ценными бумагами рисков.
Цель работы*: представить классификацию опционов как вторичных ценных бумаг, обосновать выбор в пользу экзотических опционов, указав на преимущества. Для рассматриваемого опциона рассчитать оптимальную стоимость, необходимый для инвестирования капитал, а также состав формируемого портфеля, обеспечивающего капитал. Сформулировать и дать экономическую интерпретацию свойств решения. Протестировать применяемый метод исследования, рассмотрев предельный случай.*
Методы исследования: *ввиду области применения результатов – диффузионный финансовый рынок – необходимо использовать вероятностные методы для оценивания стоимости опционов как стохастической моделей финансовой математики.*
Результаты: *авторы решили поставленную задачу, получив формулы справедливой стоимости Европейского опциона купли с ограничением выплат по опциону, а также формулы, определяющие оптимальный портфель ценных бумаг и отвечающий этому портфелю капитал. Рассмотрен предельный случай перехода квантильного хеджирования в суперхеджирование. Изучены коэффициенты чувствительности цены опциона к изменению начальной цены акции, оговоренной при заключении контракта цены исполнения и ограничивающей выплаты величины.*

Ключевые слова:
Финансовый рынок, цена опциона, хеджирующая стратегия, Европейский опцион купли с ограничением выплат, дивиденды, вероятность успешного хеджирования.

Введение

Используемые на рынках финансовые инструменты становятся более разнообразными и порождают довольно изощренные потоки платежей [1]. При этом построение математической модели финансового рынка и анализ процессов требуют применения математических методов на достаточно высоком уровне. В связи с этим большую популярность имеет финансовая математика, основным объектом исследования которой являются различные модели рынка ценных бумаг [2–4]. Опцион купли (call option) является вторичной (производной) ценной бумагой и представляет собой контракт, по которому покупатель опциона приобретает право купить некоторый оговоренный в договоре базисный актив по определенной цене в определенный момент времени, а продавец опциона за премию, являющуюся ценой опциона, обязан исполнить требование держателя при предъявлении опциона к исполнению. Рассматриваемый в предлагаемой статье опцион купли Европейского стиля может быть погашен только в дату истечения срока действия опциона.

С развитием рынка стандартные, или *ванильные*, опционы купли (standard call option, plain vanilla call option), выплаты по которым зависят от спотовой цены (spot price) базисного актива в момент исполнения дериватива S_T и цены исполнения контракта K_1 (страйковая цена – striking price) (1)

$$f_T(S_T) = (S_T - K_1)^+ = \max(S_T - K_1, 0), \qquad (1)$$

не могли полностью удовлетворить запросы покупателей, вызванные особенностями риска, который бы они хотели хеджировать деривативами. Поэтому естественным стало появление класса экзотических опционов (exotic options), модифицированных дополнительными требованиями и условиями [5–15]. В информационно емком изложении [7–9], а также аналитическом обзоре [16] отмечается, что в мире экзотических опционов просто запредельное разнообразие этих инструментов, теория которых разработана в незначительной степени, тем не менее, изыскания в этой области активно поддерживаются многочисленными грантами, поскольку в результатах исследований заинтересованы многие сферы (например, индустрии страхования, игр и пр.). Ключевая притягательность экзотических опционов в их очевидном удобстве для кратко- и среднесрочных сделок.

Предметом настоящей статьи является рассматриваемый на основе диффузионной модели (B, S)-финансового рынка с выплатой дивидендов по рисковому активу Европейский опцион купли с ограничением выплаты для продавца опциона с платежной функцией (2)

$$f_T^{call}(S_T) = \min\{(S_T - K_1)^+, K_2\}, \qquad (2)$$

где в условия стандартного контракта включена договорная величина K_2, с одной стороны, ограничивающая выплаты по опциону, что может быть выгодно подписчику опциона (the writer), а с другой стороны, гарантирующая доход держателя (the holder); $a^+=\max\{a;0\}$.

В случае стандартных и экзотических опционов с платежными функциями (1) и (2) соответственно выплата по опционам при совершенном хеджировании (perfect hedging) может быть достаточно высокой, так как совершенное хеджирование предполагает воспроизведение выплат по опциону в полном объёме, а стоимость финансового опциона определяется вне зависимости от предпочтений и характеристик его обладателя. Методы совершенного хеджирования не учитывают ожиданий держателя опциона, его отношение к риску при управлении портфелем, а также особенности его инвестиционной стратегии. Описанная ситуация представляет существенный риск для эмитента и порождает требование ограничения этого риска. В данной работе реализация выдвинутого требования осуществляется на основе одной из трех групп подходов несовершенного хеджирования (imperfect hedging) – квантильного хеджирования (quantile hedging) с заданной (меньше 1) вероятностью выполнения платежного обязательства [4], [17]. При квантильном хеджировании учитывается, что стоимость опциона определяется на основании взаимодействия ряда факторов, непредвиденное изменение которых и обусловливает риск обладателя опциона. Риск обладателя финансового опциона возникает вследствие непредсказуемых рыночных колебаний и движений или внезапных изменений состояния экономической среды, поэтому этот риск классифицируется как рыночный. Стратегия квантильного хеджирования либо максимизирует естественную вероятность успеха хеджирования при условии ограничения стоимости её реализации, либо минимизирует капитал минимального хеджа при заданной вероятности хеджирования.

Используемые обозначения: $P\{\cdot\}$ – вероятность события; $E\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $N\{a;b\}$ – плотность нормального распределения с параметрами a и b; $I[A]$ – индикаторная функция события A; интеграл без указания пределов означает интегрирование на интервале $R=(-\infty,+\infty)$; $\Phi^{-1}(x)$ – функция, обратная к функции распределения Лапласа

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy, \;\; \varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}.$$

Постановка задачи

Рассмотрение задачи проводится на стохастическом базисе $(\Omega, F, \mathbf{F}=(F_t)_{t>0}, \mathbf{P})$ [2, 3]. На финансовом рынке обращаются рисковые (акции) и безрисковые (банковский счет, государственные безрисковые облигации) активы, текущие цены которых S_t и B_t в течение интервала времени $t\in[0,T]$ определяются уравнениями

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \;\; dB_t = rB_t dt, \qquad (3)$$

где W_t – стандартный винеровский процесс, $S_0>0$, $\mu\in R=(-\infty,+\infty)$, $\sigma>0$, $B_0>0$, $r>0$, решения которых имеют вид

$$S_t(\mu) = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\},$$

$$B_t = B_0 \exp\{rt\}. \qquad (4)$$

Считаем, что текущее значение капитала инвестора X_t определяется в виде $X_t=\beta_t B_t+\gamma_t S_t$, где $\pi_t=(\beta_t,\gamma_t)$ – пара F_t-измеримых процессов, составляющая портфель ценных бумаг инвестора. Аналогично [2, 3] предполагается, что за обладание акцией происходят выплаты дивидендов в соответствии с процессом D_t со скоростью $\delta\gamma_t S_t$, пропорциональной рисковой части капитала с коэффициентом $0\le\delta<r$, а именно: $dD_t=\delta\gamma_t S_t dt$. Тогда изменение капитала в задаче с дивидендами происходит в виде $dX_t=\beta_t dB_t+\gamma_t dS_t+dD_t$. Так как $dX_t=\beta_t dB_t+\gamma_t dS_t+B_t d\beta_t+S_t d\gamma_t$, то $B_t d\beta_t+S_t d\gamma_t=dD_t$, что является балансовым соотношением, заменяющим условие самофинансируемости $B_t d\beta_t+S_t d\gamma_t=0$ в стандартной задаче [2–4].

Пусть фиксировано некоторое число ε, $\varepsilon\in(0,1)$. Рассматривается ситуация, когда инвестор соглашается принять на себя некоторый риск по исполнению платежного обязательства, а именно решается задача поиска наименьшего начального капитала, необходимого для исполнения платежного обязательства с вероятностью не меньшей $\mathbf{P}(A)=1-\varepsilon$ [4], [17]. Необходимо определить капитал X_t^{call}, сформировать соответствующий ему портфель (хеджирующую стратегию) $\pi_t^{call}=(\beta_t^{call},\gamma_t^{call})$ и начальное значение капитала $X_t^{call}=C_T$ как стоимость вторичной ценной бумаги – опциона, при которых обеспечивается выполнение платежного обязательства

$$X_T^{call} = f_T^{call}(S_T).$$

Предварительные результаты

Утверждение 1. Рассмотрим риск-нейтральную (мартингальную) меру $\mathbf{P}^*=\mathbf{P}^{\mu-r+\delta}$ – меру, относительно которой процесс $\tilde{S}_t=S_t/B_t$ является мартингалом и существование которой обеспечивает разрешимость задачи на неарбитражных стратегиях хеджирования (стратегиях, не допускающих получения прибыли без риска). Согласно [2–4] процесс плотности мартингальной меры $\mathbf{P}^*$ относительно исходной меры $\mathbf{P}$ задается соотношением

$$d\mathbf{C}_t^{\mu-r+\delta} = Z_t^{\mu-r+\delta} d\mathbf{C}_t, \qquad (5)$$

где

$$Z_t^{\mu-r+\delta}=\exp\left\{-\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}W_t-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2 t\right\}. \quad (6)$$

Тогда относительно меры $\mathbf{P}^{\mu-r+\delta}$ вероятностные свойства процесса $S(\mu,r,\delta)$, определяемого уравнением

$$dS_t(\mu,r,\delta)=S_t(\mu,r,\delta)((r-\delta)dt+\sigma dW_t^{\mu-r+\delta}), \quad (7)$$

совпадают со свойствами процесса $S(r,\delta)$, определяемого уравнением

$$dS_t(r,\delta)=S_t(r,\delta)((r-\delta)dt+\sigma dW_t), \quad (8)$$

относительно меры $\mathbf{P}$, а капитал определяется уравнением $dX_t=rX_tdt+\sigma\gamma_tS_tdW_t^{\mu-r+\delta}$, где процесс

$$W_t^{\mu-r+\delta}=W_t+\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}t \quad (9)$$

является (согласно теореме Гирсанова) винеровским относительно меры $\mathbf{P}^{\mu-r+\delta}=\mathbf{P}^*$.

Доказательство приведено в [11].

Множество совершенного хеджирования. Согласно теореме 6.1 из [4] оптимальная стратегия в задаче квантильного хеджирования совпадает с совершенным хеджем платежного обязательства $f_T^{call}=f_T^{call}I_A$, где множество успешного хеджирования имеет вид

$$A=\left\{\omega:\frac{d\mathbf{C}}{d\mathbf{C}^*}>\text{const}\cdot f_T\right\}. \quad (10)$$

С учетом (2), (4) и (5)–(10) имеем

$$A=\left\{\begin{array}{l}\exp\left\{\dfrac{\mu-r+\delta}{\sigma^2}W_t^*-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2T\right\}>\\ >\text{const}\cdot f_T^{call}\end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}S_T^{\frac{\mu-r+\delta}{\sigma^2}}\exp\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{\mu-r+\delta}{\sigma^2}\times\\ \times\left(\ln S_0+\dfrac{\mu+r+\delta-\sigma^2}{2}\right)T\end{array}\right\}>\\ >\text{const}\cdot\min\{(S_T-K_1)^+,K_2\}\end{array}\right\}. \quad (11)$$

Используя (3), (4) и (7)–(9), получаем

$$S_T=S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T^*\right\}=$$

$$=S_0\exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T\right\}. \quad (12)$$

Множество успешного хеджирования (11) для рассматриваемого опциона купли представимо в виде

$$A=\{S_T<d_1\}\cup\{S_T>d_2\}=\{W_T^*<b_1\}\cup\{W_T^*>b_2\}. \quad (13)$$

Тогда, учитывая (12), (13)

$$\mathbf{C}(A)=\mathbf{C}\left(S_T<S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma b_1\right\}\right)+$$

$$+\mathbf{C}\left\{S_T>S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma b_2\right\}\right\}. \quad (14)$$

Ввиду монотонного возрастания экспоненциальной функции (14) примет вид

$$\mathbf{C}(A)=\mathbf{C}\left(\begin{array}{l}S_0\exp\left\{\left(\mu-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T\right\}<\\ <S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma b_1\right\}\end{array}\right)+$$

$$+\mathbf{C}\left(\begin{array}{l}S_0\exp\left\{\left(\mu-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T\right\}>\\ >S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma b_2\right\}\end{array}\right)=$$

$$=\mathbf{C}\left(\begin{array}{l}\exp\left\{\left(\mu-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T\right\}<\\ <\exp\left\{\left(r-\delta-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma b_1\right\}\end{array}\right)+$$

$$+\mathbf{C}\left(\begin{array}{l}\exp\left\{\left(\mu-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T\right\}>\\ >\exp\left\{\left(r-\delta-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma b_2\right\}\end{array}\right)=$$

$$=\mathbf{C}\left(\sigma W_T<\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}-\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma b_1\right)+$$

$$+\mathbf{C}\left(\sigma W_T>\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}-\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma b_2\right)=$$

$$=\mathbf{C}\left(W_T<b_1-\left(\frac{\mu+\delta-r}{\sigma}\right)T\right)+$$

$$+\mathbf{C}\left(W_T>b_2-\left(\frac{\mu+\delta-r}{\sigma}\right)T\right). \quad (15)$$

Окончательно из (15) записываем выражение (16)

$$\mathbf{C}(A)=\Phi\left(\left(b_1-\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}T\right)\Big/\sqrt{T}\right)+$$

$$+\Phi\left(\left(-b_2+\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}T\right)\Big/\sqrt{T}\right), \quad (16)$$

где $\mathbf{P}(A)=1-\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$ – вероятность успешного хеджирования. Определяемые уравнением (17) константы

$$b_1^T=b_1 \text{ и } b_2^T=b_2 \quad (17)$$

удовлетворяют уравнению (16), но в явном виде не находятся.

Основные результаты

Теорема 1. Пусть определены функции вида

$$y_2(T,S_0)=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{K_1+K_2}{S_0}\right)-\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right], \quad (18)$$

$$y_1(T,S_0)=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{K_1}{S_0}\right)-\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right], \quad (19)$$

$$\tilde{y}_2(T,S_0)=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{K_1+K_2}{S_0}\right)-\left(r-\delta+\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right], \quad (20)$$

$$\tilde{y}_1(T,S_0)=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{K_1}{S_0}\right)-\left(r-\delta+\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right], \quad (21)$$

$$\begin{cases}\tilde{b}_1^T/\sqrt{T}=(b_1^T/\sqrt{T})-\sigma\sqrt{T},\\ \tilde{b}_2^T/\sqrt{T}=(b_2^T/\sqrt{T})-\sigma\sqrt{T}.\end{cases} \quad (22)$$

Тогда справедливая (рациональная) цена опциона продажи в случае выплаты дивидендов в задаче квантильного хеджирования выражается уравнением

$$C_T=\max\{C_T^I,C_T^{II}\}, \quad (23)$$

где

$$C_T^I=S_0e^{-\delta T}[\Phi(\tilde{b}_1^T/\sqrt{T})-\Phi(\tilde{y}_1(T,S_0))]-$$
$$-K_1e^{-rT}[\Phi(b_1^T/\sqrt{T})-\Phi(y_1(T,S_0))]+$$
$$+K_2e^{-rT}\Phi(-b_2^T/\sqrt{T}), \quad (24)$$

$$C_T^{II}=S_0e^{-\delta T}[\Phi(\tilde{y}_2(T,S_0))-\Phi(\tilde{y}_1(T,S_0))]-$$
$$-K_1e^{-rT}[\Phi(y_2(T,S_0))-\Phi(y_1(T,S_0))]+$$
$$+K_2e^{-rT}\Phi(-y_2(T,S_0)). \quad (25)$$

Доказательство: согласно [2–4]

$$C_T=e^{-rT}E^*\{f_T^{call}I_A\}, \quad (26)$$

где E^* – усреднение по мартингальной мере $\mathbf{P}^*$. Используя (2), (5)–(8), (12) в случае $y_1(T,S_0)<(b_1^T/\sqrt{T})<$ $<y_2(T,S_0)<(b_2^T/\sqrt{T})$, имеем

$$C_T^I=e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\begin{array}{l}-\left(\dfrac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)x-\\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2T\end{array}\right\}\times$$
$$\times\min\left\{\left(S_0\exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma x\right\}-K_1\right)^+,K_2\right\}\times$$
$$\times I_A\cdot\varphi(x)dx.$$

Вводя замену $z=x/\sqrt{T}$, запишем

$$C_T^I=\frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{\mu-r+\delta}{\sigma}z\sqrt{T}-\\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2T\end{array}\right\}\times$$
$$\times\min\times$$
$$\times\left\{\left(\begin{array}{l}S_0\exp\left\{\begin{array}{l}\left(r-\delta-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)T+\\ +z\sigma\sqrt{T}+(\mu-r+\delta)T\end{array}\right\}-\\ -K_1\end{array}\right)^+,K_2\right\}\times$$
$$\times I_A\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz. \quad (27)$$

Используя обозначение $y=z+[(\mu-r+\sigma)/\sigma]\sqrt{T}$, рассмотрим функцию минимума в (27)

$$\min\left\{\left(S_0\exp\left\{\begin{array}{l}\left(r-\delta-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)T+\\ +y\sigma\sqrt{T}\end{array}\right\}-K_1\right)^+,K_2\right\}=$$

$$=\begin{cases}0,\ \text{если}\ S_0-K_1\exp\{\cdot\}\le 0,\\ S_0\exp\{\cdot\}-K_1,\ \text{если}\ 0<S_0\exp\{\cdot\}-K_1<K_2,\\ K_2,\ \text{если}\ S_0\exp\{\cdot\}-K_1\ge K_2,\end{cases}$$

Очевидно, что (18), (19) – решения уравнений

$$S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}y\right\}>K_1+K_2,$$

$$S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}y\right\}>K_1,$$

тогда исходный интеграл (27) представим в виде суммы двух интегралов $C_T^I=C_T^1+C_T^2$. Последовательно определим значение каждого слагаемого-интеграла, тем самым показав следование (24) из (27)–(29).

$$C_T^1=(e^{-rT}/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{b_1^T/\sqrt{T}}\{\cdot\}dz=$$
$$=(e^{-rT}/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{y_1(S_0,T)}\{\cdot\}dy+$$
$$+(e^{-rT}/\sqrt{2\pi})\int_{y_1(S_0,T)}^{b_1^T/\sqrt{T}}\{\cdot\}dy=\frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\times$$
$$\times\int_{y_1(S_0,T)}^{b_1^T/\sqrt{T}}\exp\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{\mu-r+\delta}{\sigma}\left(y-\dfrac{\mu-r+\delta}{\sigma}\sqrt{T}\right)\sqrt{T}-\\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2T\end{array}\right\}\times$$
$$\times\left(S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+y\sigma\sqrt{T}\right\}-K_1\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y-\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\sqrt{T}\right)^2\right\}dy=$$
$$=\frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{y_1(S_0,T)}^{b_1^T/\sqrt{T}}S_0\exp\left\{\begin{array}{l}\left(r-\delta-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)T+\\ +y\sigma\sqrt{T}-\dfrac{y^2}{2}\end{array}\right\}dy-$$
$$-\frac{K_1e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{y_1(S_0,T)}^{b_1^T/\sqrt{T}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}dy=$$
$$=\frac{S_0e^{-\delta T}}{\sqrt{2\pi}}\int_{y_1(S_0,T)}^{b_1^T/\sqrt{T}}\exp\left\{-\frac{(y-\sigma\sqrt{T})^2}{2}\right\}dy-$$
$$-\frac{K_1e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{y_1(S_0,T)}^{b_1^T/\sqrt{T}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}dy=$$
$$=S_0e^{-\delta T}[\Phi(\tilde{b}_1^T/\sqrt{T})-\Phi(\tilde{y}_1(S_0,T))]-$$
$$-K_1e^{-rT}[\Phi(b_1^T/\sqrt{T})-\Phi(y_1(S_0,T))]. \quad (28)$$

$$C_T^2 = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{b_2^T/\sqrt{T}}^{+\infty} \{\cdot\} dz =$$

$$= \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{b_2^T/\sqrt{T}}^{+\infty} \exp \times$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{\mu - r + \delta}{\sigma}\left(y - \dfrac{\mu - r+\delta}{\sigma}\sqrt{T}\right)\sqrt{T} - \\ -\dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{\mu - r + \delta}{\sigma}\right)^2 T\right) \end{array} \right\}$$

$$\times K_2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y - \frac{\mu - r + \delta}{\sigma}\sqrt{T}\right)^2\right\} dy =$$

$$= \frac{K_2 e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{b_2^T/\sqrt{T}}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy = K_2 e^{-rT} \Phi\left(-\frac{b_2^T}{\sqrt{T}}\right). \quad (29)$$

Аналогичные рассуждения и процедура преобразования приводят к (25), когда $(b_1^T/\sqrt{T}) = y_2(T,S_0) = (b_1^T/\sqrt{T})$, что видно из (30)

$$C_T^{II} = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{y_2(S_0,T)} \{\cdot\} dy + \int\limits_{y_2(S_0,T)}^{+\infty} \{\cdot\} dy \right) =$$

$$= \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{y_1(S_0,T)} \{\cdot\} dy + \int\limits_{y_1(S_0,T)}^{y_2(S_0,T)} \{\cdot\} dy + \int\limits_{y_2(S_0,T)}^{+\infty} \{\cdot\} dy \right) =$$

$$= \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \times$$

$$\times \int\limits_{y_1(S_0,T)}^{y_2(S_0,T)} \exp \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{\mu - r + \delta}{\sigma}\left(y - \dfrac{\mu - r + \delta}{\sigma}\sqrt{T}\right) \times \\ \times \sqrt{T - \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{\mu - r + \delta}{\sigma}\right)^2 T\right)} \end{array} \right\} \times$$

$$\times \left(S_0 \exp\left\{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + y\sigma\sqrt{T}\right\} - K_1 \right) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y - \frac{\mu - r + \delta}{\sigma}\sqrt{T}\right)^2\right\} dy +$$

$$+ \frac{K_2 e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{y_2(S_0,T)}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy =$$

$$= K_2 e^{-rT} \Phi(-y_2(S_0,T)) +$$

$$+ S_0 e^{-\delta T}[\Phi(\tilde{y}_2(S_0,T)) - \Phi(\tilde{y}_1(S_0,T))] -$$

$$- K_1 e^{-rT}[\Phi(y_2(S_0,T)) - \Phi(y_1(S_0,T))]. \quad (30)$$

Чтобы обеспечить платежное обязательство в условиях неопределенности, возникающей ввиду потенциальной реализации одной из ситуаций: $y_1(T,S_0) < (b_1^T/\sqrt{T}) < y_2(T,S_0) < (b_2^T/\sqrt{T})$ или $(b_1^T/\sqrt{T}) = y_2(T,S_0) = (b_1^T/\sqrt{T})$ стоимость опциона продажи целесообразно определять формулой (23) как максимальную из потенциальных стоимостей (24), (25).

Теорема 2. В случае квантильного хеджирования текущий капитал X_t^{call} и оптимальный портфель $\pi_t^{call} = (\beta_t^{call}, \gamma_t^{call})$ определяются формулами

$$X_t^{call} = \begin{cases} X_t^I, & \text{если } C_T = C_T^I, \\ X_t^{II}, & \text{если } C_T = C_T^{II}, \end{cases} \quad (31)$$

где

$$X_t^I = S_t e^{-\delta(T-t)}[\Phi(\tilde{b}_1^{T-t}/\sqrt{T-t}) - \Phi(\tilde{y}_1(T-t,S_t))] -$$
$$- K_1 e^{-r(T-t)}[\Phi(b_1^{T-t}/\sqrt{T-t}) - \Phi(y_1(T-t,S_t))] +$$
$$+ K_2 e^{-r(T-t)} \Phi(-b_2^{T-t}/\sqrt{T-t}), \quad (32)$$

$$X_t^{II} = S_t e^{-\delta(T-t)} \times$$
$$\times [\Phi(\tilde{y}_2(T-t,S_t)) - \Phi(\tilde{y}_1(T-t,S_t))] -$$
$$- K_1 e^{-r(T-t)}[\Phi(y_2(T-t,S_t)) - \Phi(y_1(T-t,S_t))] +$$
$$+ K_2 e^{-r(T-t)} \Phi(-y_2(T-t,S_t)), \quad (33)$$

$$\pi_t^{call} = (\beta_t^{call}, \gamma_t^{call}) =$$
$$= \begin{cases} \pi_t^I = (\beta_t^I, \gamma_t^I), & \text{если } X_t^{call} = X_t^I, \\ \pi_t^{II} = (\beta_t^{II}, \gamma_t^{II}), & \text{если } X_t^{call} = X_t^{II}, \end{cases} \quad (34)$$

где

$$\gamma_t^I = e^{-\delta(T-t)}[\Phi(\tilde{b}_1^{T-t}/\sqrt{T-t}) - \Phi(\tilde{y}_1(T-t,S_t))], \quad (35)$$

$$\gamma_t^{II} = e^{-\delta(T-t)}[\Phi(\tilde{y}_2(T-t,S_t)) - \Phi(\tilde{y}_1(T-t,S_t))], \quad (36)$$

$$\beta_t^I = \frac{K_2 e^{-r(T-t)}}{B_t} \Phi\left(-\frac{b_2^{T-t}}{\sqrt{T-t}}\right) -$$
$$- \frac{K_1 e^{-r(T-t)}}{B_t}\left[\Phi\left(\frac{b_1^{T-t}}{\sqrt{T-t}}\right) - \Phi(y_1(T-t,S_t))\right], \quad (37)$$

$$\beta_t^{II} = \frac{K_1 e^{-r(T-t)}}{B_t} \times$$
$$\times [\Phi(y_1(T-t,S_t)) - \Phi(y_2(T-t,S_t))] +$$
$$+ \frac{K_2 e^{-r(T-t)}}{B_t} \Phi(-y_2(T-t,S_t)), \quad (38)$$

где b^{T-t}, $\tilde{b}^{T-t}/\sqrt{T-t}$, $y_2(T-t,S_t)$, $y_1(T-t,S_t)$, $\tilde{y}_2(T-t,S_t)$, $\tilde{y}_2(T-t,S_t)$ определяются формулами (18)–(22) с соответствующими заменами $T \to (T-t)$, $S_0 \to S_t$.

Доказательство: согласно [2–4] имеем

$$X_t^{call} = -^{*}\{e^{-r(T-t)} f_T^{call} I_A | S_t\}, \quad (39)$$

$$\gamma_t^{call} = \left.\frac{\partial X_t^{call}(s)}{\partial s}\right|_{s=S_t}, \quad \beta_t^{call} = \frac{X_t^{call} - \gamma_t^{call} S_t}{B_t}. \quad (40)$$

Формулы (31)–(33), (39) получаем из (24)–(26) с соответствующими заменами $T \to (T-t)$, $S_0 \to S_t$.

Учитывая справедливые для функции Лапласа равенства

$$\frac{\partial \Phi(\varphi(s))}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\varphi^2(s)}{2}\right\} \frac{\partial \varphi(s)}{\partial s},$$

$$\frac{\partial\Phi(-\varphi(s))}{\partial s}=-\frac{\partial\Phi(\varphi(s))}{\partial s},$$

а также вид функций $y_2(T-t,S_t)$, $y_1(T-t,S_t)$, $\tilde{y}_2(T-t,S_t)$, $\tilde{y}_2(T-t,S_t)$, имеем

$$\frac{\partial\Phi(y_2(T-t,S_t))}{\partial s}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y_2^2(T-t,S_t)}{2}\right\}\times$$

$$\times\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\frac{S_t}{(K_1+K_2)}\left(-\frac{K_1+K_2}{S_t^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y_2^2(T-t,S_t)}{2}\right\}\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\frac{1}{S_t},$$

или в общем виде

$$\frac{\partial}{\partial S_t}\Phi(y_k(T-t,S_t))=-\frac{\varphi(y_k(T-t,S_t))}{S_t\sigma\sqrt{(T-t)}},\qquad(41)$$

$$\frac{\partial}{\partial S_t}\Phi(\tilde{y}_k(T-t,S_t))=-\frac{\varphi(\tilde{y}_k(T-t,S_t))}{S_t\sigma\sqrt{(T-t)}},\qquad(42)$$

$$\tilde{y}_k(T-t,S_t)=y_k(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t},\qquad(43)$$

$$\frac{\partial\Phi(\tilde{y}_2(T-t,S_t))}{\partial S_t}=$$

$$=-\frac{1}{S_t\sigma\sqrt{T-t}}\exp\left\{-\frac{y_2^2(T-t,S_t)}{2}\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{y_2^2(T-t,S_t)\sigma\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right\}=$$

$$=\frac{\partial\Phi\big(y_2(T-t,S_t)\big)}{\partial S_t}\frac{K_1+K_2}{S_t}\times$$

$$\times\exp\{-(r-\delta)(T-t)\},\qquad(44)$$

$$\frac{\partial\Phi(\tilde{y}_1(T-t,S_t))}{\partial S_t}=$$

$$=\frac{\partial\Phi(y_1(T-t,S_t))}{\partial S_t}\frac{K_1}{S_t}\exp\{-(r-\delta)(T-t)\},\qquad(45)$$

где $k=\{1:2\}$.

Согласно (31)–(33), (40) и с учетом (41)–(45) приходим к (34)–(36). Используя (34)–(36) в (40), получаем (37), (38).

Замечание 1. Теоремы 1, 2 отражают точное решение задачи квантильного хеджирования опциона купли при условии выплаты дивидендов по рисковому активу.

Свойства решения

Утверждение 2. Решение задачи для Европейского опциона купли с ограничением выплат и дивидендами по акции в условиях совершенного хеджирования определяется уравнениями

$$\tilde{C}_T^I=K_1e^{-rT}\Phi(y_1(T,S_0))-S_0e^{-\delta T}\Phi(\tilde{y}_1(T,S_0)),\qquad(46)$$

$$\tilde{C}_T^{II}=S_0e^{-\delta T}[\Phi(\tilde{y}_2(T,S_0))-\Phi(\tilde{y}_1(T,S_0))]-$$
$$-K_1e^{-rT}[\Phi(y_2(T,S_0))-\Phi(y_1(T,S_0))]+$$
$$+K_2e^{-rT}\Phi(-y_2(T,S_0)).\qquad(47)$$

$$\tilde{\gamma}_t^I=-e^{-\delta(T-t)}\Phi(\tilde{y}_1(T-t,S_t)),\qquad(48)$$

$$\tilde{\gamma}_t^{II}=e^{-\delta(T-t)}[\Phi(\tilde{y}_2(T-t,S_t))-\Phi(\tilde{y}_1(T-t,S_t))],\qquad(49)$$

$$\tilde{\beta}_t^I=\frac{K_1e^{-r(T-t)}}{B_t}\Phi(y_1(T-t,S_t)),\qquad(50)$$

$$\tilde{\beta}_t^{II}=\frac{K_1e^{-r(T-t)}}{B_t}\times$$
$$\times[\Phi(y_1(T-t,S_t))-\Phi(y_2(T-t,S_t))]+$$
$$+\frac{K_2e^{-r(T-t)}}{B_t}\Phi(-y_2(T-t,S_t)),\qquad(51)$$

$$\tilde{X}_t^I=K_1e^{-r(T-t)}\Phi(y_1(T-t,S_t))-$$
$$-S_te^{-\delta(T-t)}\Phi(\tilde{y}_1(T-t,S_t)),\qquad(52)$$

$$\tilde{X}_t^{II}=$$
$$=S_te^{-\delta(T-t)}[\Phi(\tilde{y}_2(T-t,S_t))-\Phi(\tilde{y}_1(T-t,S_t))]-$$
$$-K_1e^{-r(T-t)}[\Phi(y_2(T-t,S_t))-\Phi(y_1(T-t,S_t))]+$$
$$+K_2e^{-r(T-t)}\Phi(-y_2(T-t,S_t)).\qquad(53)$$

Данные уравнения представляют собой обобщения соответствующих уравнений, описанных в [18–20]

Следствие 1. Если $\varepsilon=0$, формулы (23)–(25), (31)–(38) переходят в формулы (46)–(53). Это подтверждает переход несовершенного хеджирования в совершенное.

Доказательство: если $\varepsilon=0$, вероятность успешного хеджирования $\mathbf{P}(A)=1-\varepsilon=1$, то есть переходим к совершенному виду хеджирования. Так как $\Phi(x)+\Phi(-x)=1$, а константы из уравнений (16), (17) удовлетворяют равенству (54) при $\varepsilon=0$

$$\Phi\left(\left(b_1^T-\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}T\right)\Big/\sqrt{T}\right)=$$

$$=\Phi\left(\left(b_2^T-\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}T\right)\Big/\sqrt{T}\right),\qquad(54)$$

тогда получаем $\tilde{X}_0^{call}=\lim X_t^{call}$, $\tilde{\gamma}_t^{call}=\lim\gamma_t^{call}$, $\tilde{\beta}_t^{call}=\lim\beta_t^{call}$. Таким образом, пришли к (48)–(53). Если $\tilde{C}_T=\tilde{X}_0^{call}$, то (46), (47) следует из (52), (53).

Представляют интерес зависимости стоимости опциона от параметров S_0, K_1, K_2, определяющих начальную цену рискового актива, страйковую цену и величину, ограничивающую выплаты по опциону. Эти зависимости характеризуются величинами $C_T^{S_0}=\partial C_T/\partial S_0$, $C_T^{K_1}=\partial C_T/\partial K_1$, $C_T^{K_2}=\partial C_T/\partial K_2$, называемыми коэффициентами чувствительности стоимости опциона продажи к соответствующему параметру.

Утверждение 3. Коэффициенты чувствительности $C_T^{S_0}$, $C_T^{K_1}$, $C_T^{K_2}$ задаются формулами

$$C_T^{S_0} = \begin{cases} e^{-\delta T}[\Phi(\tilde{b}_1^T(T,S_0)) - \Phi(\tilde{y}_1(T,S_0))], \\ \text{если } \ C_T = C_T^I, \\ e^{-\delta T}[\Phi(\tilde{y}_2(T,S_0)) - \Phi(\tilde{y}_1(T,S_0))], \\ \text{если } C_T = C_T^{II}, \end{cases} \tag{55}$$

$$C_T^{K_1} = \begin{cases} e^{-rT}[\Phi(y_1(T,S_0)) - \Phi(b_1^T / \sqrt{T})], \\ \text{если } \ C_T = C_T^I, \\ e^{-rT}[\Phi(y_1(T,S_0)) - \Phi(y_2(T,S_0))] - \\ -(e^{-rT}/\sigma\sqrt{T})\varphi(y_2(T,S_0))(K_2 / K_1 + K_2), \\ \text{если } C_T = C_T^{II}, \end{cases} \tag{56}$$

$$C_T^{K_2} = \begin{cases} e^{-rT}\Phi(-(b_2^T / \sqrt{T})), \ \ \text{если } \ C_T = C_T^I, \\ e^{-rT}\Phi(-y_2(T,S_0)) - \\ \quad -(e^{-rT}/\sigma\sqrt{T})\varphi(y_2(T,S_0))\left(\dfrac{K_2}{K_1+K_2}\right), \\ \quad \text{если } C_T = C_T^{II}. \end{cases} \tag{57}$$

Доказательство формул (55)–(57) следует из определения $C_T^{S_0}$, $C_T^{K_1}$, $C_T^{K_2}$ с учетом (23)–(25).

Выводы

Аналитические и графические исследования коэффициентов чувствительности $C_T^{S_0}$, $C_T^{K_1}$, $C_T^{K_2}$ показали, что $C_T^{S_0}>0$, $C_T^{K_1}<0$, $C_T^{K_2}>0$. В данном случае рациональная стоимость Европейского опциона купли с ограничением выплат по опциону в условиях квантильного хеджирования является возрастающей функцией начальной стоимости рискового актива (акции) S_0 и величины K_2, ограничивающей выплаты по опциону, и убывающей функцией цены исполнения опциона (страйковой цены) K_1. Экономическая интерпретация этих свойств заключается в следующем. Увеличение начальной цены S_0 приводит к увеличению в среднем спотовой цены S_T. Это повышает вероятность того, что S_T превзойдет K_1, т. е. вероятность предъявления опциона к исполнению увеличивается. В данной ситуации риск держателя опциона уменьшается, за что следует платить больше. Увеличение страйка K_1 приводит к повышению вероятности того, что S_T не превзойдет K_1. Таким образом, риск для покупателя опциона возрастает, а за возрастающий риск следует платить меньше. Увеличение цены опциона продажи при возрастании K_2 объясняется увеличением потенциального дохода покупателя опциона.

Основные результаты работы при решении задачи методами квантильного хеджирования:

1. Найдена формула справедливой стоимости Европейского опциона купли с ограничением выплат по опциону.
2. Найдены формулы, определяющие оптимальный портфель ценных бумаг и отвечающий этому портфелю капитал.
3. Рассмотрен предельный случай перехода квантильного хеджирования в совершенное.
4. Исследованы некоторые свойства цены опциона, отражающие зависимость стоимости опциона от начальной цены акции, оговоренной при заключении контракта цены исполнения и ограничивающей выплаты величины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Халл Д.К. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. – М.: Вильямс, 2007. – 1052 с.
2. Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. II. Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – Т. 39. – Вып. 1. – С. 80–129.
3. Shiryaev A.N. Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory. – Hackensack (New Jersey): World Scientific Publishing Company, 1999. – 834 p.
4. Melnikov A.V., Volkov S.N., Nechaev M.L. Mathematics of financial obligations // Translations of Mathematical Monographs. – 2002. – V. 212. – 194 p.
5. Rubinstein M. Exotic options // Finance working paper. – 1991. – № 220. – P. 5–43.
6. Zang P.G. An introduction to exotic options // European Financial Management. – 1995. – V. 1. – № 1. – P. 87–95.
7. Кожин К. Все об экзотических опционах // Рынок ценных бумаг. – 2002. – № 1 (15). – С. 53–57.
8. Кожин К. Все об экзотических опционах // Рынок ценных бумаг. – 2002. – № 2 (16). – С. 61–64.
9. Кожин К. Все об экзотических опционах // Рынок ценных бумаг. – 2002. – № 3 (17). – С. 68–73.
10. Инглис-Тейлор Э. Производные финансовые инструменты. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 224 с.
11. Применение вероятностных методов к исследованию экзотических опционов купли Европейского типа на основе экстремальных значений цены рискового актива / У.В. Андреева, Е.Ю. Данилюк, Н.С. Демин, С.В. Рожкова, Е.Г. Пахомова // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 6. – С. 5–12.
12. Европейский опцион купли Лукбэк с плавающим страйком / У.В. Андреева, Е.Ю. Данилюк, Н.С. Демин, С.В. Рожкова, Е.Г. Пахомова // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 6. – С. 13–15.
13. Лоран Ж. Опасные игры с деривативами. Полувековая история провалов от Citibank до Barings, Societe Generale и AIG. – М.: Альпина Паблишер, 2012. – 342 с.
14. Буренин А.Н. Форварды, фьючерсы, опционы, экзотические и погодные производные. – М.: НТО, 2011. – 465 с.
15. Буренин А.Н. Рынок ценных бумаг и производных финансовых инструментов. – М.: НТО, 2011. – 394 с.
16. Чекулаев М. Экзотические опционы или опционная экзотика? URL: http://fortrader.ru/learn/ekzoticheskie-opciony-ili-opcionnaya-ekzotika.html (дата обращения: 11.09.2013).
17. Novikov A.A. Hedging Options with a Given Probability // Probability Theory and Applications. – 1999. – № 43 (1). – P. 135–143.
18. Демин Н.С., Андреева У.В. Экзотические опционы купли с ограничением выплат и гарантированным доходом в модели Блэка–Шоулза // Проблемы управления. – 2011. – № 1. – С. 33–39.

19. Данилюк Е.Ю., Демин Н.С. Квантильное хеджирование опциона купли на диффузионном (B, S)-рынке в случае выплаты дивидендов по рисковому активу // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 4 (13). – С. 61–71.
20. Данилюк Е.Ю., Демин Н.С. Хеджирование опциона купли с заданной вероятностью на диффузионном (B, S)-рынке в случае выплаты дивидендов по рисковому активу // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 1 (14). – С. 22–30.

Поступила 24.12.2013 г.

UDC 519.865.7

MATHEMATICAL METHODS IN THE PROBLEM OF AN EXOTIC EUROPEAN CALL OPTION QUANTILE HEDGING

Elena Yu. Danilyuk,
Tomsk State University, Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 36.
E-mail: daniluc_elena@sibmail.com

Svetlana V. Rozhkova,
Dr. Sc., Tomsk Polytechnic University, Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 30.
E-mail: rozhkova@tpu.ru

The urgency of the discussed issue is caused by the need to provide mathematical tools allowing financial market agent to analyze and to forecast the economic processes. At the present time derivatives, including options, demonstrate a success of options trading to make a profit and hedg the risks associated with risk assets.
The main aim of the study*: to represent options classification as secondary securities, to justify the choice for exotic options, indicating advantages; to find the optimal price, a size of the capital needed for investment and optimal hedging strategy for the option under consideration; to formulate and to give economic interpretation of the solution properties. To test the method used for investigation having considered a limiting case.*
The methods used in the study*: in diffusion financial market it is necessary to use stochastic methods for option pricing as stochastic model of financial mathematics.*
The results*: the authors solved the stated problem, founded formulas for right European call option price with payment limitation and formulas defining optimal securities portfolio and capital meeting this portfolio. The limit case of transition from quantile hedging to superhedging is considered. The authors studied the coefficients of option price sensitivity to initial stock price and to defined strike price.*

Key words:
Financial market, option price, hedging strategy, European call option with payment limitation, dividends, perfect hedging probability.

REFERENCES

1. Khall D.K. *Optsyony, fyuchersy i drugie proizvodnye finansovye instrumenty* [Options, futures and other derivatives]. Moscow, Vilyams Publ., 2007. 1052 p.
2. Shiryaev A.N., Kabanov Y.M., Kramkov O.O., Melnikov A.V. K teorii raschetov optsionov Evropeyskogo i Amerikanskogo tipov. II. Nepreryvnoe vremya [Towards the Theory of Pricing of Options of both European and American types. II. Continuous time] *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya*, 1994, vol. 39, no. 1, pp. 80–129.
3. Shiryaev A.N. Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory. Hackensack (New Jersey), World Scientific Publishing Company, 1999. 834 p.
4. Melnikov A.V., Volkov S.N., Nechaev M.L. Mathematics of financial obligations. *Translations of Mathematical Monographs*, 2002, vol. 212, 194 p.
5. Rubinstein M. Exotic options. *Finance working paper*, 1991, no. 220, pp. 5–43.
6. Zang P.G. An introduction to exotic options. *European Financial Management*, 1995, vol. 1, no. 1, pp. 87–95.
7. Kozhin K. Vse ob ekzoticheskikh optsionakh [All about exotic options]. *Rynok tsennykh bumag*, 2002, no. 1 (15), pp. 53–57.
8. Kozhin K. Vse ob ekzoticheskikh optsionakh [All about exotic options]. *Rynok tsennykh bumag*, 2002, no. 2 (16), pp. 61–64.
9. Kozhin K. Vse ob ekzoticheskikh optsionakh [All about exotic options]. *Rynok tsennykh bumag*, 2002, no. 3 (17), pp. 68–73.
10. Inglis-Taylor A. *Proizvodnye finansovye instrumenty* [Dictionary of Derivatives]. Moscow, INFRA-M Publ., 2001. 224 p.
11. Andreeva U.V., Danilyuk E.Yu., Demin N.S., Rozhkova S.V., Pakhomova E.G. Primenenie veroyatnostnykh metodov k issledovaniyu ekzoticheskikh optsionov kupli Evropeyskogo tipa na osnove ekstremalnykh znacheniy tseny riskovogo aktiva [Applying stochastic methods for European exotic call options research, based on extreme values of the risk asset price]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2012, vol. 321, no. 6, pp. 5–12.
12. Andreeva U.V., Danilyuk E.Yu., Demin N.S., Rozhkova S.V., Pakhomova E.G. Evropeyskiy optsion kupli Lukbek s plavayushchim straykom [European call option Lookback with floating strike]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2012, vol. 321, no. 6, pp. 13–15.
13. Loran G. Opasnye igry s derivativami. Poluvekovaya istoriya provalov ot Citibank do Barings, Societe Generale i AIG. [Global Derivative Debacles: From Theory to Malpractice]. Moscow, Alpina Publisher, 2012. 342 p.

14. Burenin A.N. Forvardy, fyuchersy, optsiony, ekzoticheskie i pogodnye proizvodnye [Forwards, futures, options, exotic and annual derivatives]. Moscow, NTO Publ., 2011. 465 p.
15. Burenin A.N. Rynok tsennykh bumag i proizvodnykh finansovykh instrumentov [Equity market and derivatives market]. Moscow, NTO Publ., 2011. 394 p.
16. Chekulaev M. Ekzoticheskie optsiony ili optsionnaya ekzotika? [Exotic options or option exotic?]. Available at: http://fortrader.ru/learn/ekzoticheskie-opciony-ili-opcionnaya-ekzotika.html (accessed 11 September 2013).
17. Novikov A.A. Hedging Options with a Given Probability. *Probability Theory and Applications*, 1999, no. 43 (1), pp. 135–143.
18. Demin N.S., Andreeva U.V. Ekzoticheskie optsiony kupli s ogranicheniem vyplat i garantirovannym dokhodom v modeli Bleka–Shoulza [Exotic call options with a guaranteed income in Black–Shouls model]. *Problemy upravleniya*, 2011, no. 1, pp. 33–39.
19. Danilyuk E.Yu., Demin N.S. Kvantilnoe khegzhirovanie optsiona kupli na diffuzionnom (B, S)-rynke v sluchae vyplaty dividendov po riskovomu aktivu [Quantile hedging of the call option in diffusion (B, S)-market in case of the dividends payment on risk asset]. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2010, no. 4 (13), pp. 61–71.
20. Danilyuk E.Yu., Demin N.S. Khegzhirovanie optsiona kupli s zadannoy veroyatnostyu na diffuzionnom (B, S)-rynke v sluchae vyplaty dividendov po riskovomu aktivu [Call option hedging with the state probability in diffusion (B, S)-market in case of the dividends payment on risk asset]. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2011, no. 1 (14), pp. 22–30.

УДК 517

КОЭФФИЦИЕНТЫ ВЫРАВНИВАНИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ И МАСШТАБНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИ ДРОБНОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ И ДРОБНОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ НА ФРАКТАЛАХ

Чуриков Виктор Анатольевич,
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики
Физико-технического института ТПУ,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: vachurikov@list.ru

Актуальность работы обусловлена необходимостью проводить преобразования математических моделей, сформулированных в пространствах нецелочисленных размерностей, в пространства с целочисленными размерностями.
***Цель работы**: нахождение преобразований степенных функций, заданных на фракталах при их дробном интегрировании и дробном дифференцировании (дробном интегродифференцировании), в пространствах нецелочисленных размерностей с последующим преобразованием степенных функций в пространства целочисленных размерностей. Ввиду того, что при дробном интегродифференцировании происходят изменения физической размерности и изменение линейных размеров фракталов, эти изменения необходимо корректировать для дальнейшего рассмотрения этих функций в пространствах с целым числом измерений.*
***Методы исследования:** математические преобразования, в основе которых лежит локальный d-оператор дробного дифференцирования и дробного интегрирования, действующий в пространстве степенных функций.*
***Результаты:** для согласования физических размерностей в пространствах с нецелочисленной и целочисленной размерностями вводятся коэффициенты выравнивания размерности. Для согласования изменения линейных размеров фракталов при переходах в пространства с целым числом измерений необходимо вводить коэффициенты, которые были названы масштабными коэффициентами. Приводятся важные частные случаи масштабных коэффициентов.*

Ключевые слова:
d-оператор, коэффициент выравнивания физической размерности, корректирующие функции, эффективная плотность фрактала, сопряжённый фрактал, правило сохранения размерности, масштабный коэффициент фрактала.

Введение

В последнее время широко рассматриваются пространства с размерностью нецелочисленных порядков, которые формально будем называть фракталами [1–3]. Кроме этого часто исследуются различные процессы, проходящие во фракталах.

Адекватным математическим аппаратом для описания фракталов и процессов в них считается дробный анализ. В дробном анализе обобщается понятие производных и интегралов на случай любых конечных вещественных или комплексных порядков [4–15]. В этом случае будем говорить о *дробном интегродифференцировании*.

При построении математических моделей для пространств постоянной дробной размерности α необходимо вводить производные и интегралы порядка α.

Фракталы всегда находятся в пространствах целочисленных порядков, например в евклидовых пространствах. В этом случае будем говорить, что *фрактал погружен в пространство целочисленной размерности*. В рассматриваемом случае речь идёт об одномерном евклидовом пространстве, в которое погружен фрактал размерности $0 \le \alpha \le 1$.

Математические модели процессов, которые проходят во фракталах, т. е. в пространствах с нецелочисленной размерностью, формулируются с использованием дробного интегродифференцирования. Но рассматривать эти процессы удобней не