УДК 517.928

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ ПОВОРОТА В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович,
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры алгебры и геометрии
Ошского государственного университета, Республика Кыргызстан, 714000,
г. Ош, ул. Ленина, 331. E-mail: d_osh@rambler.ru

При исследовании любой динамической системы особый интерес представляют критические значения ее параметров, при которых происходят качественные изменения свойств стационарных или квазистационарных режимов, т. е. наблюдаются бифуркации. Один из видов бифуркации, при которой нарушается условие асимптотической устойчивости и выполняется предельный переход, появляется в системах, встречающихся в физике лазеров, химической кинетике, пластической деформации, биофизике, в модифицированной системе Циглера, и при моделировании верховых лесных пожаров, безопасных процессов горения с максимальной температурой. В работе, применяя метод стационарной фазы, построена асимптотика решения системы сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими точками поворота в комплексной плоскости при нарушении условия асимптотической устойчивости. Полученная асимптотическая оценка для решения задачи является неулучшаемой.

***Ключевые слова**:*
Асимптотика решения, точка поворота, сингулярное возмущение, асимптотическая устойчивость, линия Стокса, обыкновенное дифференциальное уравнение.

Введение

При исследовании любой динамической системы особый интерес представляют критические значения ее параметров, при которых происходят качественные изменения свойств стационарных или квазистационарных режимов, т. е. наблюдаются бифуркации. Один из видов бифуркации, при которой нарушается условие асимптотической устойчивости и выполняется предельный переход, появляется в системах, встречающихся в физике лазеров [1], химической кинетике [2], пластической деформации [3], биофизике [4, 5], в модифицированной системе Циглера [6], и при моделировании верховых лесных пожаров [7], безопасных процессов горения с максимальной температурой [8]. В данной работе строится асимптотика решения, в случае нарушения условия асимптотической устойчивости.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon)=A(t)x(t,\varepsilon)+f(t), \qquad (1)$$

$$x(t_0,\varepsilon)=x^0, \qquad (2)$$

где $A(t)$ – квадратная матрица-функция второго порядка с элементами $a_{jk}(t)$; $f(t)=\{f_1(t)\ f_2(t)\}$, $a_{jk}(t)$, $f_k(t)$ – аналитические функции в области D; $x^0=\{x_1^0,x_2^0\}$ – постоянный вектор, $t\in D$, $t=t_1+it_2$.

Условие $\mathbf{U}_1$. Пусть $A(t)$ – матрица-функция второго порядка, имеет комплексно-сопряженные собственные значения $\lambda_{1,2}(t)=\sin t\pm ia\cos t$, $\mathbf{0<a<1}$, $t_0=-\arccos((1-a)^{1/2})$.

Асимптотику решения задачи (1), (2) при условиях $\mathbf{U}_1$ построим в области D при $\varepsilon\to 0$, которая содержит неустойчивую область.

Систему (1) можно рассматривать как возмущенную по отношению к вырожденной системе

$$A(t)\tilde{x}(t)+f(t)=0. \qquad (3)$$

Вырожденная система (3) имеет единственное решение $\tilde{x}(t)=-A^{-1}(t)f(t)$.

Это решение в области D, а именно в точках $t=\pi k$, $\pm\alpha i$, $k\in\mathbf{Z}$, имеет особенность, так как собственные значения матрицы-функции $A(t)$ в этих точках обращаются в нуль:

$$\lambda_1(\pi k\alpha)\equiv 0,\ \lambda_2(\pi k,-\alpha)\equiv 0,\ \alpha=\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}.$$

Поэтому рассматриваемую задачу можно называть бисингулярной [9].

Для приведения $A(t)$ к диагональному виду выполняем следующее преобразование

$$B_0^{-1}(t)A(t)B_0(t)=D(t),$$

где

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t)\end{pmatrix},$$

$$B_0(t)=\begin{pmatrix} \lambda_1(t)-a_{22}(t) & \lambda_2(t)-a_{22}(t)\\ a_{21}(t) & a_{21}(t)\end{pmatrix},$$

$$D(t)=\mathrm{diag}\,(\lambda_1(t),\lambda_2(t)).$$

Пусть в области D выполняется неравенство $\det B_0(t)\neq 0$.

Задача (1), (2) с заменой $x(t,\varepsilon)=B_0(t)y(t,\varepsilon)$ принимает вид:

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon)=D(t)\,y(t,\varepsilon)+\varepsilon B(t)\,y(t,\varepsilon)+h(t), \qquad (4)$$

$$y(t_0,\varepsilon)=y^0, \qquad (5)$$

где

$$B(t)=-B_0^{-1}(t)B_0'(t),\ \ y^0=B_0^{-1}(t_0)x^0,$$

$$h(t)=B_0^{-1}(t)f(t).$$

Задачу Коши для дифференциальных уравнений (4), (5) заменим интегральным уравнением:

$$y(t,\varepsilon)=E(t,t_0,\varepsilon)y^0+$$
$$+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)\left(B(\tau)y(\tau,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}h(\tau)\right)d\tau, \qquad (6)$$

где $E(t,\tau,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}D(s)ds\right)$.

Если обозначить $y(t,\varepsilon)=z(t,\varepsilon)/\varepsilon$, то (6) примет вид:

$$z(t,\varepsilon)=\varepsilon E(t,t_0,\varepsilon)y^0+$$
$$+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)(B(\tau)z(\tau,\varepsilon)+h(\tau))d\tau. \qquad (7)$$

Теорема 1. Если для интеграла

$$\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)h(\tau)d\tau \qquad (8)$$

в некоторой области D справедлива оценка

$$\left\|\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)h(\tau)d\tau\right\|\le c\delta(\varepsilon),$$
$$\varepsilon\le c\delta(\varepsilon)<1,\ \lim_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon)=0,$$

то для решения систем интегральных уравнений (7) справедлива оценка

$$\|z(t,\varepsilon)\|\le c\delta(\varepsilon).$$

Доказательство. Воспользуемся методом последовательных приближений:

Пусть $z_0(t,\varepsilon)\equiv 0$,

$$z_n(t,\varepsilon)=\varepsilon E(t,t_0,\varepsilon)y^0+$$
$$+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)(B(\tau)z_{n-1}(\tau,\varepsilon)+h(\tau))d\tau.$$

Тогда

$$z_1(t,\varepsilon)=\varepsilon E(t,t_0,\varepsilon)y^0+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)h(\tau)d\tau.$$

$$z_n(t,\varepsilon)=z_1(t,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)B(\tau)z_{n-1}(\tau,\varepsilon)d\tau.$$

По условию теоремы $\left\|\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)h(\tau)d\tau\right\|\le c\delta(\varepsilon)$

и $\varepsilon\le\delta(\sigma)<1$. Тогда для первого приближения имеем:

$$\|z_1(t,\varepsilon)\|\le\left|E(t,t_0,\varepsilon)y^0\right|\varepsilon+\left|\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)h(\tau)d\tau\right|\le c\delta(\varepsilon).$$

Оценим второе приближение

$$\|z_2(t,\varepsilon)\|\le|z_1(t,\varepsilon)|+$$
$$+\left|\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)B(\tau)z_1(\tau,\varepsilon)d\tau\right|\le c\delta(\varepsilon)+(c\delta(\varepsilon))^2.$$

Для n-го приближения справедлива оценка

$$\|z_n(t,\varepsilon)\|\le c\delta(\varepsilon)+(c\delta(\varepsilon))^2+\ldots+(c\delta(\varepsilon))^n.$$

Действительно, применим метод математической индукции. При $n=1$ мы уже доказали верность. Пусть $n=k$:

$$\|z_k(t,\varepsilon)\|\le c\delta(\varepsilon)+(c\delta(\varepsilon))^2+\ldots+(c\delta(\varepsilon))^k.$$

Для $(k+1)$-го приближения имеем:

$$\|z_{k+1}(t,\varepsilon)\|\le|z_1(t,\varepsilon)|+\left|\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)B(\tau)z_k(\tau,\varepsilon)d\tau\right|\le$$
$$\le c\delta(\varepsilon)+c\delta(\varepsilon)(c\delta(\varepsilon)+(c\delta(\varepsilon))^2+\ldots+(c\delta(\varepsilon))^k).$$

Отсюда и получаем

$$\|z_{k+1}(t,\varepsilon)\|\le c\delta(\varepsilon)+(c\delta(\varepsilon))^2+\ldots+(c\delta(\varepsilon))^{k+1}.$$

Последовательные приближения равномерно ограничены

$$\forall n\in\mathrm{N}:\ \|z_n(t,\varepsilon)\|\le c\delta(\varepsilon).$$

Рассмотрим ряд

$$\|z_n(t,\varepsilon)\|=\|z_1(t,\varepsilon)\|+(\|z_2(t,\varepsilon)\|-\|z_1(t,\varepsilon)\|)+(\|z_3(t,\varepsilon)\|-\|z_2(t,\varepsilon)\|)+$$
$$+\ldots+(\|z_n(t,\varepsilon)\|-\|z_{n-1}(t,\varepsilon)\|),$$

так как

$$\|z_1(t,\varepsilon)\|\le c\delta(\varepsilon)<1,\ (\|z_2(t,\varepsilon)\|-\|z_1(t,\varepsilon)\|)\le(c\delta(\varepsilon))^2<1,$$
$$(\|z_3(t,\varepsilon)\|-\|z_2(t,\varepsilon)\|)\le(c\delta(\varepsilon))^3<1,\ldots(\|z_n(t,\varepsilon)\|-\|z_{n-1}(t,\varepsilon)\|)\le$$
$$\le(c\delta(\varepsilon))^n<1,$$

то в рассматриваемой области последовательность $\{z_n(t,\varepsilon)\}$ является сходящейся и имеет предел $z(t,\varepsilon)$:

$$\|z_n(t,\varepsilon)\|\le c\delta(\varepsilon)(1-(c\delta(\varepsilon))^{n+1})/(1-c\delta(\varepsilon)),$$

при $n\to\infty$ получим

$$\|z(t,\varepsilon)\|\le c\delta(\varepsilon).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь собственные значения $\lambda_{1,2}(t)=\sin t\pm ia\cos t$, при $0<a<1$.

Отсюда

$$\mathrm{Re}(\lambda_1(t))=\mathrm{Re}(\lambda_2(t))=\sin t,\ \mathrm{Re}(\lambda_{1,2}(t))<0,$$

при $-\pi+2\pi k<t<2\pi k$,

$\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}(t))>0$, при $2\pi k<t<\pi+2\pi k$, $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}(t))=0$, при $t=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Если $t=t_1+it_2$, то

$$\lambda_1(t_1,t_2)=\sin t_1(\mathrm{ch}t_2+a\mathrm{sh}t_2)+i\cos t_1(\mathrm{sh}t_2+a\mathrm{ch}t_2),$$
$$\lambda_2(t_1,t_2)=\sin t_1(\mathrm{ch}t_2-a\mathrm{sh}t_2)+i\cos t_1(\mathrm{sh}t_2-a\mathrm{ch}t_2).$$

Из систем

$$\begin{cases}\sin t_1(\mathrm{ch}t_2+a\mathrm{sh}t_2)=0,\\ \cos t_1(\mathrm{sh}t_2+a\mathrm{ch}t_2)=0,\end{cases}\quad\begin{cases}\sin t_1(\mathrm{ch}t_2-a\mathrm{sh}t_2)=0,\\ \cos t_1(\mathrm{sh}t_2-a\mathrm{ch}t_2)=0\end{cases}$$

находим нули $\lambda_1(t_1,t_2)$ и $\lambda_2(t_1,t_2)$ в комплексной плоскости:

$$\begin{cases}\sin t_1=0,\\ \mathrm{sh}t_2+a\mathrm{ch}t_2=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_1=\pi k,k\in Z,\\ t_2=-\alpha,\ \alpha=\ln\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}>0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin t_1=0,\\ \mathrm{sh}t_2-a\mathrm{ch}t_2=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_1=\pi k,k\in Z,\\ t_2=\alpha,\end{cases}$$

т. е. $(\pi k,-\alpha)$ и $(\pi k,\alpha)$ $k\in\mathbf{Z}$ являются нулями собственных значений $\lambda_1(t_1,t_2)$ и $\lambda_2(t_1,t_2)$ соответственно. Заметим, что $\mathrm{Im}\lambda_1(t_1,t_2)>0$, $\mathrm{Im}\lambda_2(t_1,t_2)<0$, при $|t_1|<|t_0|$, $|t_2|<\alpha$.

Рассмотрим теперь функции

$$u_1(t)=\int\lambda_1(t)dt,\qquad u_2(t)=\int\lambda_2(t)dt.$$

Если $t=t_1+it_2$, то

$$u_1(t_1,t_2)-u_1(t_0,0)=$$
$$=-\cos t_1(\mathrm{ch}t_2+a\,\mathrm{sh}t_2)+i\sin t_1(\mathrm{sh}t_2+a\,\mathrm{ch}t_2)+\sqrt{1-a^2},$$

$$u_2(t_1,t_2)-u_2(t_0,0)=$$
$$=-\cos t_1(\mathrm{ch}t_2-a\,\mathrm{sh}t_2)+i\sin t_1(a\,\mathrm{ch}t_2-\mathrm{sh}t_2)+\sqrt{1-a^2}.$$

Пусть

$$u_{11}(t_1,t_2)=\mathrm{Re}(u_1(t_1,t_2)-u_1(t_0,0))=$$
$$=-\cos t_1(\mathrm{ch}t_2+a\,\mathrm{sh}t_2)+\sqrt{1-a^2},$$

$$u_{21}(t_1,t_2)=\mathrm{Re}(u_2(t_1,t_2)-u_2(t_0,0))=$$
$$=-\cos t_1(\mathrm{ch}t_2-a\,\mathrm{sh}t_2)+\sqrt{1-a^2}.$$

Приступаем к построению области D:

$$D=\{(t_1,t_2):u_{11}(t_1,t_2)\le 0,\ u_{21}(t_1,t_2)\le 0, |t_2|\le\alpha\}.$$

Из равенств $u_{11}(t_1,t_2)=0$, $u_{21}(t_1,t_2)=0$ имеем:

$$-\cos t_1(\mathrm{ch}t_2+a\,\mathrm{sh}t_2)+\sqrt{1-a^2}=0\Rightarrow t_2=\varphi_1(t_1),\ t_2=\varphi_2(t_1),$$

$$-\cos t_1(\mathrm{ch}t_2-a\,\mathrm{sh}t_2)+\sqrt{1-a^2}=0\Rightarrow t_2=-\varphi_1(t_1),\ t_2=-\varphi_2(t_1),$$

где

$$\varphi_1(t_1)=\ln\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t_1}{2}\right)\right),$$

$$\varphi_2(t_1)=\ln\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t_1}{2}\right)\right).$$

Функция $t_2=\varphi_1(t_1)$ монотонно возрастает, а функция $t_2=\varphi_2(t_1)$ монотонно убывает при $t\in[t_0,-t_0]$. Эти две функций $t_2=\varphi_1(t_1)$, $t_2=\varphi_2(t_1)$ пересекаются в точке $(0,-\alpha)$.

В окрестности точки $(0,-\alpha)$ функция $u_{11}(t_1,t_2)=0$ делит плоскость на четыре равных сектора, в которых знак функций $u_{11}(t_1,t_2)=0$ чередуется. Аналогично в окрестности точки $(0,-\alpha)$ функция $u_{21}(t_1,t_2)=0$ делит плоскость на четыре равных сектора. Обе функции отрицательны в секторе, который содержит действительную ось $0t_1$. Из пересечений секторов мы получаем криволинейный четырехугольник. Следовательно, область D является криволинейным четырехугольником с вершинами $A(t_0,0)$, $B(0,-\alpha)$, $C(-t_0,0)$ и $D(0,\alpha)$.

Перейдем к оценке интеграла (8):

Теорема 2. Для интеграла

$$J_3(t,\varepsilon)=e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}}\int_{t_0}^{t}e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}}h_1(\tau)d\tau=$$
$$=e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}}\int_{L}e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}}h_1(\tau)d\tau,\qquad(9)$$

в области D справедлива оценка

$$|J_3(t,\varepsilon)|\le c\Omega_{131}(t,\varepsilon),$$

где

$$u_1(t)=-\cos t_1(\mathrm{ch}t_2+a\,\mathrm{sh}t_2)+i\sin t_1(\mathrm{sh}t_2+a\,\mathrm{ch}t_2)+\cos t_0,$$
$$\cos t_0=\sqrt{1-a^2},$$

$$\Omega_{31}(t,\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon,\ \text{при}\ t\in H_0,\\ \varepsilon^{1-\gamma},\ \text{при}\ t\in H_1, & \text{при}\ h_1(0,-\alpha)\ne 0,\\ \sqrt{\varepsilon},\ \text{при}\ t\in H_2,\end{cases}$$

$$\Omega_{31}(t,\varepsilon)=\varepsilon,\ \text{при}\ h_1(0,-\alpha)=0,$$

$$H_{00}=\{t:u_{11}(t_1,t_2)\le 0,\ u_{21}(t_1,t_2)\le 0,\ t_1\le-\delta,\ \delta^2\le|t_1+i\,(t_2+\alpha)|\};$$

$$H_{01}=\{t:u_{21}(t_1,t_2)\le 0,\ -\delta\le t_1,\ u_{11}(t_1,t_2)\le(\varepsilon\ln\varepsilon)/2,$$
$$\delta^2\le|t_1+i\,(t_2+\alpha)|\};$$

$$H_{10}=\{t:u_{11}(t_1,t_2)\le 0,\ -\alpha\le t_2,\ |t_1+i(t_2+\alpha)|=\varepsilon^{2\gamma}\delta^2,$$
$$-\varepsilon^{\gamma}c\le t_1\le\delta_1(\varepsilon)\};$$

$$H_{11}=\{t:u_{11}(t_1,t_2)=(1/2-\gamma)\varepsilon\ln\varepsilon,$$
$$\delta_1(\varepsilon)\le t_1\le -t_0+c(1/2-\gamma)\varepsilon\ln\varepsilon\};$$

$$H_{20}=\{t:u_{11}(t_1,t_2)\le 0,\ -\alpha\le t_2,\ |t_1+i(t_2+\alpha)|\le\varepsilon\delta^2\};$$

$$H_{21}=\{t:-c\varepsilon\le u_{11}(t_1,t_2)\le 0,\ u_{21}(t_1,t_2)\le 0,\ c\varepsilon^{1/2}\le t_1,\ t_2>-\alpha\};$$

$$H_0=H_{00}\cup H_{01},\ H_1=H_{10}\cup H_{11},\ H_2=H_{20}\cup H_{21},$$
$$D=H_0\cup H_1\cup H_2.$$

δ – достаточное малое число, $0\le\gamma<1/2$.

Лемма 1. Если $t\in H_{00}$, то для интеграла (9) справедлива оценка

$$|J_3(t,\varepsilon)|\le c\varepsilon.\qquad(10)$$

Доказательство. Путь интегрирование состоит из отрезка прямой, соединяющей точки $(t_0,0)$ и (t_1,t_2), уравнение прямой имеет вид $\tau_2=(\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2$, при этом $t_0\le\tau_1\le t_1$. Так как в области H_{00} интеграл не имеет особенностей, то воспользуемся правилом интегрирования по частям:

$$J_3(t,\varepsilon)=e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}}\int_{t_0}^{t_1}e^{-\frac{u_1(\tau_1,s(\tau_1))}{\varepsilon}}h_1(\tau_1,s(\tau_1))d\tau_1=$$

$$=\varepsilon k e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}}\int_{t_0}^{t_1}\frac{h_1(\tau_1)}{-\lambda_1(\tau_1)}de^{-\frac{u_1(\tau_1)}{\varepsilon}}=$$

$$=\varepsilon k\left(\begin{array}{l}\dfrac{h_1(t_1)}{-\lambda_1(t_1)}+\dfrac{h_1(t_0)}{-\lambda_1(t_0)}e^{\frac{u_1(t)-u_1(t_0)}{\varepsilon}}-\\ -\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{h_1(\tau_1)}{-\lambda_1(\tau_1)}\right)'e^{-\frac{u_1(\tau_1)}{\varepsilon}}d\tau_1\end{array}\right),$$

где

$$k=1+i(t_1-t_0)/t_2,\ u_1(\tau_1)=-\cos\tau_1(\mathrm{ch}((\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2)+$$
$$+a\,\mathrm{sh}((\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2))+i\sin\tau_1(\mathrm{sh}((\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2)+$$
$$+a\,\mathrm{ch}((\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2))+\cos t_0,$$
$$\lambda_1(\tau_1)=\sin\tau_1(\mathrm{ch}((\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2)+$$
$$+a\,\mathrm{sh}((\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2))+i\cos\tau_1(\mathrm{sh}((\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2)+$$
$$+a\,\mathrm{ch}((\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2)).$$

Так как

$$\mathrm{Re}(\lambda_1(\tau_1))=\sin\tau_1(\mathrm{ch}((\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2)+$$
$$+a\,\mathrm{sh}((\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2))<0$$

при $\tau_1<0$ в области D, то функция $\mathrm{Re}\,(u_1(\tau_1))$ убывает при $t_0\le\tau_1\le t_1\le-\delta<0$, и

$$|J_3(t,\varepsilon)|\le\varepsilon c\frac{|h_1(t_1,t_2)|}{|\lambda_1(t_1,t_2)|}\le c\varepsilon.$$

Лемма 2. Если $t\in H_{10}$, то для интеграла (9) справедлива оценка

$$\left|J_3(t,\varepsilon)\right| = \begin{cases} O(\varepsilon^{1-\gamma}), \text{ при } h_1(0,-\alpha)\neq 0, \\ O(\varepsilon), \text{ при } h_1(0,-\alpha)=0, \end{cases}$$

$$0<\gamma\leq 1/2. \qquad (11)$$

Доказательство вытекает из леммы 1, при $\delta=c\varepsilon^{2\gamma}$.

Лемма 3. Если $t\in H_{20}$, то для интеграла (9) справедлива оценка

$$\left|J_3(t,\varepsilon)\right| = \begin{cases} O(\sqrt{\varepsilon}), \text{ при } h_1(0,-\alpha)\neq 0, \\ O()\varepsilon, \text{ при } h_1(0,-\alpha)=0. \end{cases} \qquad (12)$$

Доказательство. Путь интегрирование состоит из двух частей: l_1 – линии Стокса, $\tau_2=\varphi_2(\tau_1)$, $t_0\leq\tau_1\leq 0$, где $\varphi_2(\tau_1)=\ln\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\tau_1}{2}\right)\right)$, при этом

$$u_1(\tau_1,\varphi_2(\tau_1)) = i\sin\tau_1(\mathrm{sh}\varphi_2(\tau_1)+a\mathrm{ch}\varphi_2(\tau_1)) =$$
$$= i\sin\tau_1((1+a)e^{\varphi_2(\tau_1)}+(1+a)e^{-\varphi_2(\tau_1)})/2 =$$
$$= -\frac{i}{2}\sqrt{1-a^2}\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau_1}{2}\right)-\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau_1}{2}\right)\right)\sin\tau_1 =$$
$$= i\sqrt{1-a^2}\,\mathrm{tg}\tau_1\sin\tau_1,$$

$$d\tau_2=\varphi'_2(\tau_1)d\tau_1 = -\frac{1}{2\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t_1}{2}\right)}\frac{d\tau_1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t_1}{2}\right)} =$$

$$= -\frac{d\tau_1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t_1\right)} = -\frac{d\tau_1}{\cos\tau_1},\ \cos\tau_1\neq 0,\ \tau_1\in[t_0,0].$$

l_2 – отрезок, соединяющий точки $(0,-\alpha)$ и (t_1,t_2), уравнение прямой имеет вид $\tau_1=t_1(\tau_2+\alpha)/(t_2+\alpha)$, $\alpha=\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$.

$$J_3(t,\varepsilon)=j_{31}(t,\varepsilon)+j_{32}(t,\varepsilon),$$

где

$$j_{31}(t,\varepsilon)=e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}}\int_{t_0}^{0}e^{-\frac{iS(\tau_1)}{\varepsilon}}h_1(\tau_1,\varphi_2(\tau_1))\left(1-\frac{i}{\cos\tau_1}\right)d\tau_1,$$

$$j_{32}(t,\varepsilon)=$$
$$=e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}}\int_{-\alpha}^{t_2}e^{-\frac{u_1(\psi(\tau_2),\tau_2)}{\varepsilon}}h_1(\psi(\tau_2),\tau_2)(t_1/(t_2+\alpha)+i)d\tau_2,$$

$S(\tau_1)=\sqrt{1-a^2}-a^2\sin\tau_1$, $\psi(\tau_2)=t_1(\tau_2+\alpha)/(t_2+\alpha)$.

Рассмотрим функцию $S(\tau_1)$:

$S(0)=0$, $S(\tau_1)\neq 0$ при $\tau_1\in[t_0,0)$, $|t_0|<\pi/2$;

$$S'(\tau_1)=\sqrt{1-a^2}\sin\tau_1\left(\frac{1}{\cos^2\tau_1}+1\right),\ S'(0)=0.$$

$$S''(\tau_1)=\sqrt{1-a^2}\left(\cos\tau_1\left(\frac{1}{\cos^2\tau_1}+1\right)-\frac{2\sin^2\tau_1}{\cos^3\tau_1}\right),$$

$$S''(0)=2\sqrt{1-a^2}>0.$$

Из леммы 1 имеем

$$j_{311}(t,\varepsilon)=$$
$$=e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}}\int_{t_0}^{-\delta}e^{-\frac{iS(\tau_1)}{\varepsilon}}h_1(\tau_1,\varphi_2(\tau_1))\left(1-\frac{i}{\cos\tau_1}\right)d\tau_1=O(\varepsilon).$$

В окрестности точки перевала $(0,-\alpha)$ применяем метод стационарной фазы.

$$j_{312}(t,\varepsilon)=e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}}\int_{-\delta}^{0}e^{-\frac{iS(\tau_1)}{\varepsilon}}h_1(\tau_1,\varphi_2(\tau_1))\left(1-\frac{i}{\cos\tau_1}\right)d\tau_1=$$
$$\sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2S''(0)}}h_1(0)e^{-\frac{u_1(t)}{\varepsilon}+i\pi/4}+O(\varepsilon).$$

$j_{32}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon)$, при $h_1(0,-\alpha)=0$; $j_{32}(t,\varepsilon)=O(\sqrt{\varepsilon})$, при $h_1(0,-\alpha)\neq 0$.

Объединяя оценки $j_{311}(t\varepsilon)$, $j_{312}(t,\varepsilon)$, получим оценку для интеграла $j_{31}(t,\varepsilon)$:

$$j_{31}(t,\varepsilon)=\begin{cases}O(\varepsilon),\text{при } h_1(0,-\alpha)=0,\\ O(\sqrt{\varepsilon}),\text{при } h_1(0,-\alpha)\neq 0.\end{cases}$$

Для интеграла $j_{32}(t,\varepsilon)$ в окрестности точки перевала $(0,-\alpha)$ функцию $u_1(\psi(\tau_2),\tau_2)$ заменяем функцией $u_1(\psi(\tau_2),\tau_2)\sim -k(\tau_2+\alpha)^2$, $k=u''_1(\psi(-\alpha),-\alpha)/2$, а функцию $h_1(t_2)$ разлагаем в ряд Тейлора в окрестности $t_2=-\alpha$. Получим:

$$j_{32}(t,\varepsilon)=$$
$$=ce^{\frac{-k(t_2+\alpha)^2}{\varepsilon}}\int_{-\alpha}^{t_2}e^{\frac{k(\tau_2+\alpha)^2}{\varepsilon}}\begin{pmatrix}h_{10}+(\tau_2+\alpha)h_{11}+\\+O((\tau_2+\alpha)^2)\end{pmatrix}d\tau_2=$$
$$=c\sqrt{\varepsilon}h_{10}+c\varepsilon h_{11}+O(\varepsilon^{3/2}).$$

Отсюда

$$j_{32}(t,\varepsilon)=\begin{cases}O(\varepsilon),\text{при } h_1(0,-\alpha)=0,\\ O(\sqrt{\varepsilon}),\text{при } h_1(0,-\alpha)\neq 0.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\left|J_3(t,\varepsilon)\right|=\left|j_{31}(t,\varepsilon)\right|+\left|j_{32}(t,\varepsilon)\right|=$$
$$=\begin{cases}O(\varepsilon),\text{при } h_1(0,-\alpha)=0,\\ O(\sqrt{\varepsilon}),\text{при } h_1(0,-\alpha)\neq 0.\end{cases}$$

Лемма 4. Если $t\in H_{00}$, то для интеграла (9) справедлива оценка (10).

Доказательство. Путь интегрирование состоит из двух частей: l_1 – линии Стокса $\tau_2=\varphi_2(\tau_1)$, $t_0\leq\tau_1\leq 0$, где $\varphi_2(\tau_1)=\ln\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\tau_1}{2}\right)\right)$; l_2 – отрезок, соединяющий точки $(0,-\alpha)$ и (t_1,t_2), уравнение прямой имеет вид $\tau_1=t_1(\tau_2+\alpha)/(t_2+\alpha)$, $\alpha=\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$. Из (9) имеем

$$J_3(t,\varepsilon)=$$
$$=e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}}\int_{t_0+i0}^{0-i\alpha}e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}}h_1()\tau d\tau+e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}}\int_{0-i\alpha}^{t}e^{-\frac{u_1()\tau}{\varepsilon}}h_1(\tau)d\tau.$$

Из леммы 3 для первого интеграла имеем оценку,

$$\left| e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}} \int_{t_0+i_0}^{0-i\alpha} e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}} h_1(\tau)d\tau \right| \le c\varepsilon.$$

При $\tau_1=t_1(\tau_2+\alpha)/(t_2+\alpha)$ справедливо неравенство:

$$u_{11}(\tau_2)\ge(\tau_2+\alpha)^2u_{11}(t_2)/(t_2+\alpha)^2\ge u_{11}(t_2),$$

где $u_{11}(\tau)=-\cos\ (t_1(\tau_2+\alpha)/(t_2+\alpha))(\mathrm{ch}\,\tau_2+a\,\mathrm{sh}\,\tau_2)+\cos t_0$, так как функция $0\ge u_{11}(\tau_2)\ge u_{11}(t_2)$ и $1/(\tau_2+\alpha)\ge$ $\ge 1/(t_2+\alpha)$, то отсюда и следует неравенство $u_{11}(\tau_2)\ge(\tau_2+\alpha)^2u_{11}(t_2)/(t_2+\alpha)^2$.

$$\left| e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}} \int_{0-i\alpha}^{t} e^{-\frac{u_1()\tau}{\varepsilon}} h_1(\tau)d\tau \right| \le$$

$$\le ce^{\frac{u_{11}(t_2)}{\varepsilon}} \int_{-\alpha}^{t_2} e^{-\frac{(\tau_2+\alpha)^2u_{11}(t_2)}{(t_2+\alpha)^2\varepsilon}} d\tau_2 \le c\int_{-\alpha}^{t_2} e^{\frac{(t_2-\tau_2)u_{11}(t_2)}{(t_2+\alpha)\varepsilon}} d\tau_2.$$

Отсюда

$$\left| e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}} \int_{0-i\alpha}^{t} e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}} h_1(\tau)d\tau \right| \le c\varepsilon.$$

Следовательно,

$$|J_3(t,\varepsilon)| \le \left| e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}} \int_{t_0+i_0}^{0-i\alpha} e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}} h_1(\tau)d\tau \right| +$$

$$+\left| e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}} \int_{0-i\alpha}^{t} e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}} h_1(\tau)d\tau \right| \le c\varepsilon.$$

Лемма 5. Если $t\in H_{11}$, то для интеграла (9) справедлива оценка (11).

Доказательство вытекает из леммы 4, при $\delta=c\varepsilon^{2\gamma}$.

Лемма 6. Если $t\in H_{21}$, то для интеграла (9) справедлива оценка (12).

Доказательство. Путь интегрирование состоит из двух частей: l_1 – линии Стокса $\tau_2=\varphi_2(\tau_1)$, $t_0\le\tau_1\le 0$, где $\varphi_2(\tau_1)=\ln\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\tau_1}{2}\right)\right)$; l_2 – отрезок, соединяющий точки $(0,-\alpha)$ и (t_1,t_2), уравнение прямой имеет вид $\tau_1=t_1(\tau_2+\alpha)/(t_2+\alpha)$, $\alpha=\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$.

Из (9) имеем

$$J_3(t,\varepsilon)=e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}} \int_{t_0+i0}^{0-i\alpha} e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}} h_1(\tau)d\tau +$$

$$+e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}} \int_{0-i\alpha}^{t} e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}} h_1(\tau)d\tau.$$

Из леммы 3 для первого интеграла имеем оценку

$$\left| e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}} \int_{t_0+i0}^{0-i\alpha} e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}} h_1(\tau)d\tau \right| = \begin{cases} O(\varepsilon), \text{при } h_1(0,-\alpha)=0, \\ O(\sqrt{\varepsilon}), \text{при } h_1(0,-\alpha)\ne 0. \end{cases}$$

Пусть

$$j_{33}(t,\varepsilon)=e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}} \int_{0-i\alpha}^{t} e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}} h_1(\tau)d\tau.$$

Рассмотрим функцию

$u_1(t)=-\cos t_1(\mathrm{ch}\,t_2+a\,\mathrm{sh}\,t_2)+i\sin t_1(\mathrm{sh}\,t_2+a\,\mathrm{ch}\,t_2)+\sqrt{1-a^2}$, в области $t\in H_{21}$, $-c\le\varepsilon-\cos t_1(\mathrm{ch}\,t_2+a\,\mathrm{sh}\,t_2)+\sqrt{1-a^2}\le 0$ т. е. $-\cos t_1(\mathrm{ch}\,t_2+a\,\mathrm{sh}\,t_2)+\sqrt{1-a^2}=O(\varepsilon)$.

Тогда

$$j_{33}(t,\varepsilon)\sim O(1)e^{i\frac{u_{12}(t)}{\varepsilon}} \int_{-\alpha}^{t_2} e^{-i\frac{u_{12}(\tau_2)}{\varepsilon}} h_1(\tau_2)d\tau_2 =$$

$$=O(1)e^{i\frac{u_{12}(t)}{\varepsilon}} \int_{-\alpha}^{-\alpha+\delta} e^{-i\frac{u_{12}(\tau_2)}{\varepsilon}} h_1(\tau_2)d\tau_2 +$$

$$+e^{c+i\frac{u_{12}(t)}{\varepsilon}} \int_{-\alpha+\delta}^{t_2} e^{-c-i\frac{u_{12}(\tau_2)}{\varepsilon}} h_1(\tau_2)d\tau_2.$$

Для первого интеграла применяем метод стационарной фазы, а второй интеграл интегрируем по частям. Получим оценку:

$$|j_{33}(t,\varepsilon)| = O(\sqrt{\varepsilon})(h_{10}+\sqrt{\varepsilon}h_{11}+O(\varepsilon))+O(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$|J_3(t,\varepsilon)| = \begin{cases} O(\sqrt{\varepsilon}), \text{ при } h_1(0,-\alpha)\ne 0, \\ O(\varepsilon), \text{ при } h_1(0,-\alpha)=0. \end{cases}$$

Из лемм 1–6 вытекает доказательство теоремы 2.

Теорема 3. Для интеграла

$$\tilde{J}_3(t,\varepsilon)=e^{\frac{u_2(t)}{\varepsilon}} \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{u_2(\tau)}{\varepsilon}} h_2(\tau)d\tau = e^{\frac{u_2(t)}{\varepsilon}} \int_{\tilde{L}} e^{-\frac{u_2(\tau)}{\varepsilon}} h_2(\tau)$$

в области D справедлива оценка

$$|\tilde{J}_3(t,\varepsilon)| \le c\tilde{\Omega}_{131}(t,\varepsilon),$$

где $u_1(t)=-\cos t_1(\mathrm{ch}\,t_2-a\,\mathrm{sh}\,t_2)+i\sin t_1(\mathrm{sh}\,t_2-a\,\mathrm{ch}\,t_2)+\cos t_0$, $\cos t_0=\sqrt{1-a^2}$, если $h_2(0,\alpha)\ne 0$, то

$$\tilde{\Omega}_{131}(t,\varepsilon)=\begin{cases} \varepsilon, \text{ при } t\in\tilde{H}_0, \\ \varepsilon^{1-\gamma}, \text{ при } t\in\tilde{H}_1, \\ \sqrt{\varepsilon}, \text{при } t\in\tilde{H}_2. \end{cases}$$

Если $h_2(0,\alpha)=0$, то $\tilde{\Omega}_{131}(t,\varepsilon)=\varepsilon$, $0\le\gamma<1/2$, $\alpha=\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$, $\tilde{H}_0$, $\tilde{H}_1$, $\tilde{H}_2$ симметричны относительно действительной оси областям H_0, H_1, H_2 соответственно. $D=\tilde{H}_0\cup\tilde{H}_1\cup\tilde{H}_2$.

При доказательстве теоремы 2 путь интегрирования $\tilde{L}$ берется симметрично L относительно действительной оси. Вычисляются точно такие же интегралы, которые были вычислены при доказательствах лемм 1–6.

Следовательно, при $h_1(0,-\alpha)\ne 0$, $h_2(0,\alpha)\ne 0$ имеем:

$$\left\| \int_{t_0}^{t} diag\left(\int_{t_0}^{t}\lambda_1(s)ds, \int_{t_0}^{t}\lambda_2(s)ds \right) \begin{pmatrix} h_1(\tau) \\ h_2(\tau) \end{pmatrix} \right\| \le c\Omega_{132}(\varepsilon,t),$$

где

$$\Omega_{132}(\varepsilon,t)=$$

$$=\begin{cases} \varepsilon, \text{ при } t\in H_0\cap\tilde{H}_0, \\ \varepsilon^{1-\gamma}, \text{ при } t\in H_1\cup\tilde{H}_1,\ t_1\le -t_0+(1/2-\gamma)\varepsilon\ln\varepsilon, \\ \sqrt{\varepsilon}, \text{при } t\in H_2\cup\tilde{H}_2,\ 0\le\gamma<1/2 \end{cases}$$

а при $h_1(0,-\alpha)=0$ и $h_2(0,\alpha)=0$,

$$\left\|\int_{t_0}^{t} diag\left(\int_{t_0}^{t}\lambda_1(s)ds, \int_{t_0}^{t}\lambda_2(s)ds\right)\begin{pmatrix} h_1(\tau) \\ h_2(\tau)\end{pmatrix}\right\| \le c\varepsilon.$$

Отсюда, учитывая теорему 1, для решения систем интегрального уравнения (7) имеем:

$$\|z(t,\varepsilon)\| \le c\Omega_{132}(\varepsilon,t),$$

при выполнении условий

$$\mathbf{U}_1,\ h_1\left(0,-\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right)\ne 0,\ h_2\left(0,\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right)\ne 0;$$

и $\|z(t,\varepsilon)\|\le c\varepsilon$ при выполнении условий

$$\mathbf{U}_1,\ h_1\left(0,-\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right)= 0,\ h_2\left(0,\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right)= 0.$$

Отсюда мы получаем справедливость следующих теорем.

Теорема 4. Пусть выполняются условия

$$\mathbf{U}_1,\ f\left(0,-\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right)\ne 0,\ f\left(0,\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right)\ne 0.$$

Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение и для него справедлива оценка

$$\|x(t,\varepsilon)\| \le c\Omega_{133}(t,\varepsilon),$$

где

$$\Omega_{133}(t,\varepsilon)=$$

$$=\begin{cases} 1, \text{ при } t\in H_0\cap\tilde{H}_0, \\ \varepsilon^{-\gamma}, \text{ при } t\in H_1\cup\tilde{H}_1,\ t_1\le -t_0+(1/2-\gamma)\varepsilon\ln\varepsilon, \\ \varepsilon^{-1/2}, \text{при } t\in H_2\cup\tilde{H}_2,\ 0\le\gamma<1/2. \end{cases}$$

Теорема 5. Пусть выполняются условия

$$\mathbf{U}_1,\ f\left(0,-\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right)= 0,\ f\left(0,\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right)= 0.$$

Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение и для него справедлива оценка

$$\|x(t,\varepsilon)\| \le c.$$

Заключение

Из теорем 4, 5 следует, что асимптотическое поведение решения задачи (1), (2) существенно зависит от неоднородной части уравнения (1), т. е. от $f(t)$. Построен главный член асимптотики решения сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с четырьмя периодическими точками поворота при нарушении условия асимптотической устойчивости. Полученная асимптотическая оценка для решения рассмотренной задачи является неулучшаемой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Erneux T., Mandel P. Stationary, harmonic and pulsed operations of an optically bistable laser with saturable absorber. II // Phys. Rev. A. – 1984. – V. 30. – № 4. – P. 1902–1909.
2. Tsotsis T.T., Sane R.C. Lindstrom T.H. The bifurcation behavior of a catalytic reaction system due to a slowly-varying control parameter. I // AIChE. – 1987. – V. 34. – P. 383–388.
3. Семенов М.Е., Колупаева С.Н., Рожнов А.И. Математическое моделирование процессов пластической деформации ГЦК материалов в условиях изменяющейся скорости деформирования // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2011. – № 3. – С. 100–117.
4. Baer S.M., Erneux T., Rinzel J. The slow passage through a Hopf bifurcation: delay, memory effects and resonance // SIAM J. Appl. Math. – 1989. – V. 49. – № 1. – P. 55–71.
5. Su J. On delayed oscillation in nonspatially uniform Fitz Hugh Nagumo equation // J. deff. Equations. – 1994. – V. 110. – № 1. – P. 38–52.
6. Neishtadt A.I., Sidorenko V.V. Stability loss delay in a Ziegler system // J. App. MathsMechs. – 1997. – V. 61. – № 1. – P. 15–25.
7. Гришин А.М., Зеленский Е.Е. Апериодическая неустойчивость фронта верхового лесного пожара // Физика горения и взрывов. – 1998. – Т. 34. – № 5. – С. 23–28.
8. Щепакина Е.А. Сингулярные возмущения в задаче моделирования безопасных режимов горения // Математическое моделирование. – 2003. – Т. 15. – № 8. – С. 113–117.
9. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 248 с.

Поступила 16.10.2013 г.

UDC 517.928

ASYMPTOTICS OF SOLUTION OF SINGULARLY PERTURBED PROBLEM WITH PERIODIC TURNING POINTS IN COMPLEX PLANE

Dilmurat A. Tursunov,
Cand. Sc., Osh State University,
Kyrgyz Republic, 723500, Osh, Lenin street, 331. E-mail: d_osh@rambler.ru

When studying any dynamical system the critical values of its parameters are of special interest. Properties of stationary or quasi-stationary regimes change fundamentally, i.e. the bifurcation is observed. One type of bifurcation, when asymptotic stability condition is disturbed and limiting process is carried out, appears in the systems occurring in laser physics, chemical kinetics, plastic deformation, biophysics, in the modified Ziegler system, and when modeling the crown forest fire and safe combustion with maximum temperature. Using the stationary phase method the author has constructed the asymptotic for solving singularly perturbed ordinary differential equations with periodic turning points in the complex plane when the condition of asymptotic stability is disturbed. The obtained asymptotic estimation for solving the problem is not the improved one.

Key words:
Solution asymptotic, turning point, singularly perturbation, asymptotic stability, Stokes line, ordinary differential equation.

REFERENCES

1. Erneux T., Mandel P. Stationary, harmonic and pulsed operations of an optically bistable laser with saturable absorber. II. *Phys. Rev. A.*, 1984, vol. 30, no. 4, pp. 1902–1909.
2. Tsotsis T.T., Sane R.C. Lindstrom T.H. The bifurcation behavior of a catalytic reaction system due to a slowly-varying control parameter. I. *AIChE*, 1987, vol. 34, pp. 383–388.
3. Semenov M.E., Kolupaeva S.N., Rozhnov A.I. Matematicheskoe modelirovanie protsessov plasticheskoy deformatsii GCK materialov v usloviyakh izmenyayushcheysya skorosti deformirovaniya [Mathematical modeling of plastic deformation of GCK materials under varying strain rate]. *Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*, 2011, no. 3, pp. 100–117.
4. Baer S.M., Erneux T., Rinzel J. The slow passage through a Hopf bifurcation: delay, memory effects and resonance. *SIAM J.Appl. Math.*, 1989, vol. 49, no. 1, pp. 55–71.
5. Su J. On delayed oscillation in nonspatially uniform Fitz Hugh Nagumo equation. *J. deff. Equations*, 1994, vol. 110, no. 1, pp. 38–52.
6. Neishtadt A.I., Sidorenko V.V. Stability loss delay in a Ziegler system. *J. App. MathsMechs.*, 1997, vol. 61, no. 1, pp. 15–25.
7. Grishin A.M., Zelenskiy E.E. Aperiodicheskaya neustoychivost fronta verkhovogo lesnogo pozhara [Aperiodic instability in front crown forest fire]. *Physics of combustion and explosions*, 1998, vol. 34, no. 5, pp. 23–28.
8. Shchepakina E.A. Singulyarnye vozmushheniya v zadache modelirovaniya bezopasnykh rezhimov goreniya [Singular perturbations in the problem of safe combustion regimes]. *Mathematical modeling*, 2003, vol. 15, no. 8, pp. 113–117.
9. Ilin A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize* [Asymptotic methods in analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 248 p.