7. Стативко, Р.У., Некоторые подходы при оценке эффективности нечетких систем принятия решений / Р.У. Стативко // Математические методы и информационные технологии в экономике, социологии и образовании : отв. ред. В.И. Левин – Пенза, 2013. – с. 23 – 25.
8. Стативко, Р.У. Оценка показателя – «использование» нечетких информационных систем на основе нечеткой квалиметрии/ Р.У. Стативко // Приборы и Системы. Управление, Контроль, Диагностика – Москва, – 2014, с. 18-23.
9. Стативко, Р.У Использование аппарата нечетких множеств в теоретико-информационном анализе Интернет-портала образовательной организации/ Р.У. Стативко // XXI ВЕК: Итоги прошлого и проблемы настоящего плюс – Пенза, - том 7, №3(43). 2018, с.31-35

ПРОБЛЕМА ИЗМЕНЧИВОСТИ ВОЛАТИЛЬНОСТИ АКТИВОВ В ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ МАРКОВИЦА

А.Е. Барышева, аспирант, А.С. Марков, к.ф.м.н.
Томский политехнический университет
634050, г. Томск пр. Ленина 30, тел. (3822)-900-601
E-mail: melnikae@tpu.ru

Аннотация. Задача оптимального управления инвестиционным портфелем остается одной из основных задач финансового менеджмента на протяжении долгих лет. Ключевым подходом к решению данной задачи является классическая теория управления портфелем, предложенная Гарри Марковицем [1]. В рамках данной теории большое внимание уделяется поиску такого соотношения активов в портфеле, которое минимизирует его риск (дисперсию изменения цены портфеля) при условии, что ожидаемая доходность (ожидаемое среднее значение изменения цены портфеля) остается на уровне не ниже заданного. В настоящее время существует множество моделей оптимального управления инвестиционным портфелем, которые являются дополнением или расширением классического подхода. Большинство из них продолжают опираться на предположении о неизменности дисперсии активов во времени, которое не согласуется со свойством рыночных данных. В рамках настоящего исследования решается проблема изменчивости волатильности базовых активов в задаче динамического управления портфелем Марковица.

Постановка задачи

Пусть в момент времени t есть портфель V_t, состоящий из n рисковых активов с ценами $p_{i,t}, i = 1, \dots n$, доходностями $x_{i,t}$ и стандартным отклонением $\sigma_{i,t}$. Пусть корреляционная структура активов стационарна и задана матрицей Σ. Необходимо получить прогнозные значения на момент времени $t+1$ для доходности и волатильности активов, включенных в инвестиционный портфель, и сформировать оптимальный портфель на промежуток времени $(t, t+1]$.

Для решения поставленной задачи необходимо:

- Построить модель, описывающую изменение доходности и волатильности активов;
- При построении прогноза сохранить наблюдаемую корреляционную структуру;
- С помощью полученных прогнозных значений сформировать оптимальный портфель Марковица на промежуток времени $(t, t+1]$.

Модель для прогноза среднего и дисперсии ряда доходностей

Модель предполагает, что временной ряд $\{x_t\}_{t\geq 0}$ может быть описан следующим уравнением общего вида:

$$\begin{gathered} x_t = f(y_t, \theta) + g(z_t, \beta) v_t = f(y_t, \theta) + \varepsilon_t, \\ y_t = \left(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-p}\right), \\ z_t = \left(\hat{\sigma}_{t-1}, \hat{\sigma}_{t-2}, \dots, \hat{\sigma}_0, \hat{\varepsilon}_{t-1}, \hat{\varepsilon}_{t-2}, \dots, \hat{\varepsilon}_0\right)^T, \end{gathered} \tag{1}$$

где $g(\cdot), f(\cdot)$ функции, описывающие волатильность и среднее на каждый момент t, определенные с точностью до параметров θ, β, $v_t -$ независимые одинаково распределённые случайные величины $\sim N(0,1)$, ε_t −случайная составляющая ряда.

Следовательно, для использования модели необходимо определить:

- Вид функций $g(\cdot), f(\cdot)$;
- Векторы параметров θ, β.

Выбор функции $\boldsymbol{f}(\cdot)$

Для описания динамики доходности активов будем использовать традиционную авторегрессионную схему:

$$f(y_t,\theta) = a_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i \cdot x_{t-i} \tag{2}$$

Выбор функции $g(\cdot)$

Модель изменения волатильности необходима для анализа временных рядов, у которых условная дисперсия зависит от прошлых значений ряда, прошлых значений этих дисперсий и иных факторов. Для описания динамики волатильности активов широко используются модели авторегрессионной условной гетероскедастичности. Примерами таких моделей являются $ARGH$ (авторегрессионная условная гетероскедастичность), $GARCH$ (обобщенная авторегрессионная условная гетероскедастичность) [2], $EGARCH$ (экспоненциальная обобщенная авторегрессионная условная гетероскедастичность), $GARCH - M$ ($GARCH$-в-среднем), $AGARCH$ (ассиметричная $GARCH$) [3].

Среди перечисленных моделей $GARCH(p,q)$ представляет наибольший интерес в силу широкого практического применения для решения финансовых задач. Уравнение (3) описывает модель $GARCH\ (p,q)$, где $p -$ порядок $GARCH$ членов σ^2, $q -$ порядок $ARCH$ членов ε:

$$g^2(z_t,\beta) = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i\, \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j\, \sigma_{t-j}^2 \tag{3}$$

Частный случай AR(1) + GARCH(1,1)

Рассмотрим частный случай модели (1). В качестве функции $f(\cdot)$ возьмем авторегрессионную модель первого порядка, а в качестве функции $g(\cdot)$ модель $GARCH(1,1)$. В этом случае уравнение (1) может быть записано в следующем виде:

$$x_t = \theta_0 + \sum_{i=1}^{h} \theta_i\, x_{t-i} + \nu_t \cdot \sqrt{\beta_{0,0} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j,0} \cdot \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_{0,i} \cdot \varepsilon_{t-i}^2} \tag{4}$$

Для оценки параметров модели $GARCH$ используется метод максимального правдоподобия (ММП) [4], [5]. В условиях одномерной задачи, ММП дает точные несмещенные оценки, при дополнительном предположении о нормальности распределения ν_t. Однако, при численной реализации ММП на практике, возникает ряд проблем:

- Нестабильность оценок из-за неярко выраженного минимума целевой функции [6], [7];
- Распределение доходностей активов далеко от нормального;
- Портфель может состоять из множества активов, имеющих высокую корреляцию, что требует
- применения многомерной модели, учитывающей корреляционную структуру активов.

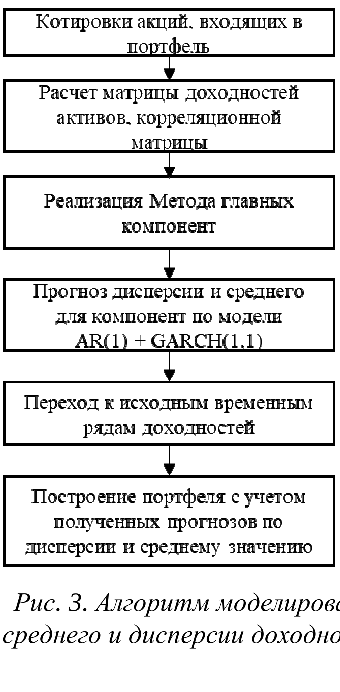

Рис. 3. Алгоритм моделирования среднего и дисперсии доходностей

Первая проблема частично решается алгоритмически.

ММП позволяет использовать распределение, отличное от нормального для оценки параметров модели GARCH, поэтому вторая проблема решается поиском подходящего распределения и изменением функции правдоподобия в оптимизационной задаче [8].

Третья проблема достаточно сильно усложняет задачу оценки параметров, так как необходимо использовать многомерную модель, учитывающую корреляционную структуру активов. Использование многомерной модели GARCH на практике зачастую оказывается проблематичной, в силу численной неустойчивости решения [9], [10]. В настоящем исследовании предлагается решить данную проблему, используя метод главных компонент.

Метод главных компонент (МГК)

МГК позволяет сократить размерность задачи, переходя к новому ортогональному базису, сохраняя определенную долю объясненной дисперсии исходных временных рядов [11]. Компоненты, полученные после применения МГК являются независимыми и могут быть моделированы по отдельности. Другими словами, перейдя к ортогональному базису, можно применить одномерный GARCH, который является более простым в реализации, к каждой из компонент, и после получения прогноза по компонентам необходимо лишь вернуться к исходным временным рядам. Для расчёта главных компонент воспользуемся уравнением (5):

$$P = X \cdot W, \tag{5}$$

где X – матрица входных данных, W – матрица собственных векторов корреляционной матрицы.

Для обратного преобразования необходимо воспользоваться следующим уравнением:

$$X = P \cdot W^{-1}, \tag{6}$$

Алгоритм, предлагаемый в рамках данного исследования для моделирования среднего и дисперсии доходностей активов портфеля, представлен на рисунке 1.

Практические результаты

Для проведения анализа использовались данные дневных котировок акций компаний Газпром, Лукойл, Норильский Никель, Роснефть и Сбербанк, за период с 2006 по 2018 год. Были рассчитаны логарифмические доходности по формуле:

$$x_t = ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right), \tag{7}$$

где p_t – матрица цен активов в момент времени t. Матрица корреляций представлена на Рисунке (2). Распределение доходностей акций является более остроконечным в сравнении с нормальным распределением. Это можно увидеть на Рисунке (3) на примере доходностей акций Газпром.

	Газпром	Лукойл	Нор. Никель	Роснефть	Сбербанк
Газпром	100%	79%	62%	78%	73%
Лукойл	79%	100%	61%	76%	66%
Нор.Никель	62%	61%	100%	60%	57%
Роснефть	78%	76%	60%	100%	69%
Сбербанк	73%	66%	57%	69%	100%

Рисунок 4. Матрица корреляций доходностей

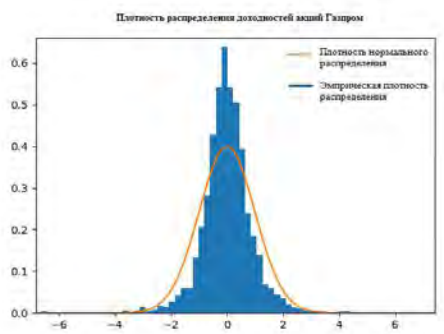

Рис. 5. Плотность распределения доходностей акций Газпром

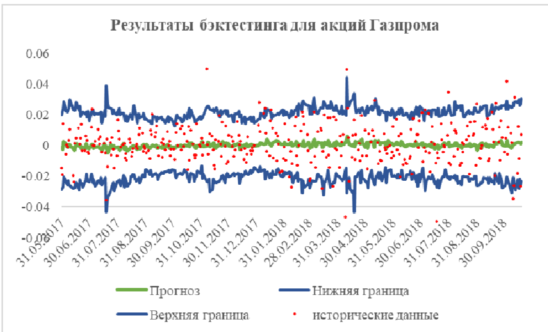

Рис. 6. Результаты бэктестинга для доходностей акций Газпрома

Для оценки адекватности модели была проведена процедура бэктестинга по историческим данным, заключающаяся в подсчете частоты случаев выхода исторически наблюдаемого значения за рамки доверительного интервала на протяжении последних 250 дней. Дополнительно к процедуре бэктестинга была рассчитана метрика, показывающая насколько близки модельные данные к исторически наблюдаемым, по следующей формуле:

$$R_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{m}(Y_{ij} - X_{ij})^2}{\sum_{j=1}^{m}(Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}, \tag{8}$$

где Y_{ij} – исторически наблюдаемое значение доходности актива i, $\bar{Y}_i$ – историческое среднее значение доходности актива i, X_{ij} – модельное значение доходности актива i, интервал для j – интервал калибровки модели.

Результаты процедуры бэктестинга для доходностей акций Газпрома представлены на Рисунке (4). Исторически наблюдаемые значения доходностей пробивают доверительный интервал прогноза модели в 5% случаев. Метрика R^2, посчитанная на калибровочном окне в 150 дней равна 0,56. Невысокое значение метрики обусловлено невыполнением предположения о нормальности распределения доходностей акций. Для доходностей акций других компаний получены аналогичные результаты.

Заключение

В рамках настоящего исследования был предложен подход прогнозирования доходности и волатильности высоко коррелированных активов при помощи применения метода главных компонент и модели $AR(1) + GARCH\ (1{,}1)$. МГК позволяет прогнозировать параметры распределения активов независимо друг от друга, при этом сохраняя известную корреляционную структуру. Полученная невысокая (0,56) метрика качества модели обусловлена невыполнением предположения о нормальности распределения доходностей акций. Для улучшения качества предлагаемой модели необходимо реализовать подбор распределения для доходностей акций и изменить функцию правдоподобия при оценке параметров модели. После повышения качества модели, полученные прогнозные значения могут быть использованы для решения задачи оптимального динамического управления портфелем ценных бумаг.

Список литературы:
1. H. Markowitz, "Portfolio Selection," *The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1.*, pp. 77-91, Mar., 1952.
2. B. T., " Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics,*, no. 31, pp. 307-327, 1986.
3. Э. Росси, «Одномерные Garch модели: обзор,» *Квантиль №8,* pp. 1-67, 2010.
4. CHRISTIAN FRANCQ, JEAN-MICHEL ZAKOIAN, "Maximum likelihood estimation of pure GARCH and ARMA-GARCH processes," *Bernoulli,* no. 10, p. 605–637, 2004.
5. L. Gazola, C. Fernandes, A. Pizzinga, and R. Riera, "The log-periodic-AR(1)-GARCH(1,1) model for financial crashes".
6. El˙zbieta Ferenstein, Mirosław Gasowski, "Modelling Stock Returns with AR-GARCH Processes," *SORT,* pp. 55-68, 2004.
7. E. Zivot, «Practical Issues in the Analysis of Univariate GARCH,» 2008.
8. Н.Н. ТРУШ, ЧЭНЬ ХАЙЛУН (КНР), «ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ GARCH(1,1) С ОСТАТКАМИ, ИМЕЮЩИМИ РЕГУЛЯРНО МЕНЯЮЩЕЕСЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ».
9. Gita Persand, Chris Brooks, Simon P Burke, "Multivariate GARCH models: Software choice and estimation issues," *Journal of Applied Econometrics,* vol. 6, no. 18, pp. 725-734, 2003.
10. Engle R.F. and Kroner K, «Econometric Theory,» *Multivariate Simultaneous Generalised,* т. 11, pp. 122-150, 1995.
11. С.А. Айвазян, B.C. Мхитарян, Прикладная статистика и основы эконометрики, Москва: Издательство "ЮНИТИ", 1998.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛАЗЕРНОГО ДВУМЕРНОГО СКАНЕРА В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОРИЕНТАЦИИ РОБОТА

П.М. Момот студент гр. 5А74 Инженерная школа энергетики НИ ТПУ, Момот М.В., к.т.н.
Юргинский технологический институт (филиал) Национального исследовательского Томского политехнического университета
652055, Кемеровская обл., г. Юрга, ул. Ленинградская, 26
E-mail: momotmvu@yandex.ru

Решение задачи пространственной ориентации мобильного робота в ряде случаев является основополагающей при организации систем движения. Современные домашние роботы уборщики, сельскохозяйственные роботы, роботы такси обязаны иметь у себя на «борту» развитые алгоритмы успешно решающие данную задачу. Но важным фактором, способствующим её решению, является использование качественных сенсоров. Одним из подобных сенсоров является датчик, основанный на отражении слабого монотонного луча от объектов, и анализ полученного угла отражения. К более продвинутым лазерным датчикам относятся лазерные лидары, которые сканируют пространство и передают результаты сканирования в систему обработки, которая строит модель пространства на основе полученных данных.