Естественные науки

УДК 519.714.2

АНАЛИЗ ЗАДАЧИ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОГО ОЦЕНИВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СЛУЧАЕ НАБЛЮДЕНИЙ С ПАМЯТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ АНОМАЛЬНЫХ ПОМЕХ

Н.С. Демин*, С.В. Рожкова**, О.В. Рожкова**

*Томский государственный университет, **Томский политехнический университет
E-mail: svrhm@mail2000.ru

Исследуются свойства фильтра-интерполятора-экстраполятора, синтез которого осуществлен в [1], касающиеся оптимальности процедуры исключения аномальных компонент вектора наблюдения, зависимости точности оценивания от размерности вектора аномальных помех и структуры воздействия его компонент на компоненты вектора наблюдений.

1. Введение

В [1] на основе анализа научных публикаций была поставлена и решена задача синтеза оптимального в среднеквадратическом смысле несмещенного фильтра-интерполятора-экстраполятора (далее ФИЭ) в случае непрерывно-дискретных каналов наблюдения с памятью произвольной кратности, когда экстраполяция осуществляется одновременно в произвольном числе будущих моментов времени, а в дискретном канале наблюдения действуют аномальные помехи. В результате рассмотрения крайних ситуаций отсутствия аномальных помех, либо их воздействия по всем компонентам вектора наблюдений, а также содержательного примера, была заявлена необходимость исследования вопросов зависимости точности оценивания от количества аномальных каналов наблюдения и структуры воздействия компонент вектора аномальных помех на компоненты вектора наблюдений. Модели процессов $x_t, z_t, \eta(t_m)$, система обозначений те же, что и в [1].

2. Оптимальность процедуры исключения аномальных наблюдений

Пусть вектор дискретных наблюдений $\bar{\eta}(t_m)$ размера $(q-r)$ получается из вектора $\eta(t_m)$ путем исключения компонент с номерами $i_1, i_2, \cdots, i_r$, по которым действуют аномальные помехи. Пусть $\bar{G}_0(t_m)$, $\bar{G}_k(t_m)$, $k=\overline{1;N}$, $\bar{G}_{N+L+1}(t_m)$ – матрицы соответственно размеров $[(q-r)\times n]$, $[(q-r)\times n]$, $[(q-r)\times(N+L+1)n]$, которые получаются из матриц $G_0(t_m)$, $G_k(t_m)$, $G_{N+L+1}(t_m)$ исключением строк с номерами $i_1, i_2, \cdots, i_r$, а матрица $\bar{V}(t_m)$ размера $[(q-r)\times(q-r)]$ получается из матрицы $V(t_m)$ исключением строк и столбцов с указанными номерами. Тогда оптимальный в среднеквадратическом смысле ФИЭ, в котором используется вектор наблюдений $\bar{\eta}(t_m)$, будем называть усеченным.

Утверждение 1. Усеченный ФИЭ на интервалах $t_m \le t < t_{m+1}$ определяется для

$$\bar{\mu}(t),\ \bar{\mu}(\tau_k,t),\ \bar{\mu}(s_l,t),\ \bar{\Gamma}(t),\ \bar{\Gamma}_{kk}(\tau_k,t),$$
$$\bar{\Gamma}_{0k}(\tau_k,t),\ \bar{\Gamma}_{kl}(\tau_l,\tau_k,t),\ \bar{\Gamma}^{ll}(s_l,t),$$
$$\bar{\Gamma}^{jl}(s_j,s_l,t),\ \bar{\Gamma}^{l}_{0,N+1}(s_l,t),\ \bar{\Gamma}^{l}_{k,N+1}(s_l,\tau_k,t)$$

уравнениями (2.1–2.11) теоремы 1 из [1] с начальными условиями, которые определяются следствием 2 из [2], в которых $\eta(t_m)$, $\tilde{\eta}(t_m)$, $G_0(t_m)$, $G_k(t_m)$, $V(t_m)$ заменяются соответственно на $\bar{\eta}(t_m)$, $\bar{\tilde{\eta}}(t_m)$, $\bar{G}_0(t_m)$, $\bar{G}_k(t_m)$, $\bar{V}(t_m)$.

Данное утверждение очевидным образом следует из упомянутых теоремы и следствия.

Теорема 1. ФИЭ, определенный теоремой 1 из [1], и усеченный ФИЭ эквивалентны.

Доказательство. Пусть момент t_m – первый момент появления аномальной помехи. Это означает, что $\tilde{\mu}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0,\tilde{s}_L)$ и $\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0,\tilde{s}_L)$ в усеченном фильтре совпадают с соответствующими величинами в ФИЭ из Теоремы 1 в [1]. Тогда

$$\bar{\tilde{\mu}}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_m,\tilde{s}_L)=\tilde{\mu}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0,\tilde{s}_L)+ +\bar{K}(t_m)\bar{\tilde{\eta}}(t_m), \quad (1)$$

$$\bar{K}(t_m)=\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0,\tilde{s}_L)\times \times\bar{G}^{T}_{N+L+1}(t_m)\bar{W}^{-1}(t_m), \quad (2)$$

$$\bar{\bar{\eta}}(t_m)=\bar{\eta}(t_m)-\bar{G}_{N+L+1}(t_m)\times$$
$$\times\tilde{\mu}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0,\tilde{s}_L).$$

Таким образом, из (П.45) в [1] и (1) следует, что доказательство сформулированной Теоремы сводится к доказательству равенства

$$\bar{K}(t_m)\bar{\bar{\eta}}(t_m)=\tilde{K}(t_m)\bar{\eta}(t_m).$$

Введем в рассмотрение булеву матрицу E размера $\left[(q-r)q\right]$, которая получается из матрицы I_q исключением строк с номерами $i_1,i_2,\dots,i_r$. Очевидно, что $\bar{\eta}(t_m)=E\eta(t_m)$, $\bar{G}_{N+L+1}(t_m)=EG_{N+L+1}(t_m)$, $\bar{\bar{\eta}}(t_m)=E\tilde{\eta}(t_m)$. Следовательно, доказательство упомянутого равенства сводится к доказательству матричного тождества $\bar{K}(t_m)E=\tilde{K}(t_m)$, которое с учетом (2) и (П.46), (П.74) из [1] расписывается в виде:

$$\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0,\tilde{s}_L)\times$$
$$\times\bar{G}^T_{N+L+1}(t_m)\bar{W}^{-1}(t_m)E=$$
$$=\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0,\tilde{s}_L)\times$$
$$\times G^T_{N+L+1}(t_m)\tilde{W}^{-1}(t_m)\tilde{Y}(t_m).$$

Так как $\bar{G}_{N+L+1}(t_m)=EG_{N+L+1}(t_m)$, $\bar{V}(t_m)=$ $=EV(t_m)E^T$, то $\bar{W}(t_m)=EW(t_m)E^T$, и доказательство (4) сводится к доказательству матричного соотношения

$$E^T\left[EW(t_m)E^T\right]^{-1}E=\tilde{W}^{-1}(t_m)\tilde{Y}(t_m).$$

Использование матричного тождества [3]

$$\left[A+BDB^T\right]^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B\times$$
$$\times\left[D^{-1}+B^TA^{-1}B\right]^{-1}B^TA^{-1}$$

с учетом (2.35) из [1] дает, что

$$\tilde{W}^{-1}(t_m)=W^{-1}(t_m)-W^{-1}(t_m)C\times$$
$$\times\left[\Theta^{-1}(t_m)+N(t_m)\right]^{-1}C^TW^{-1}(t_m),$$

где $N(t_m)=C^TW^{-1}(t_m)C$. Умножая обе части (6) слева на C^T и справа на C, а затем сворачивая правую часть по упомянутому матричному тождеству, получаем

$$C^T\tilde{W}^{-1}(t_m)C=\left[\Theta(t_m)+N^{-1}(t_m)\right]^{-1}.$$

Отсюда с учетом (П.70) из [1] следует $\Theta(t_m)=\tilde{N}^{-1}(t_m)-N^{-1}(t_m)$. Умножение обеих частей последнего выражения слева на C и справа на C^T с последующим прибавлением к обеим частям $W(t_m)$ приводит с учетом (2.35) из [1] к соотношению

$$\tilde{W}(t_m)=W(t_m)+C\left[\tilde{N}^{-1}(t_m)-N^{-1}(t_m)\right]C^T,$$

откуда следует матричное тождество

$$\tilde{W}(t_m)\left[\tilde{W}^{-1}(t_m)-\tilde{W}^{-1}(t_m)\times\right.$$
$$\left.\times C\tilde{N}^{-1}(t_m)C^T\tilde{W}^{-1}(t_m)\right]\tilde{W}(t_m)=$$
$$=W(t_m)\left[W^{-1}(t_m)-W^{-1}(t_m)\times\right.$$
$$\left.\times CN^{-1}(t_m)C^TW^{-1}(t_m)\right]W(t_m).$$

Пусть $\tilde{\Psi}(t_m)$ – левая часть (7). Используя для $\tilde{W}(t_m)$, которые стоят в качестве сомножителей при квадратной скобке слева и справа в $\tilde{\Psi}(t_m)$, формулу (2.35), а затем (П.70) из [1], получаем:

$$\tilde{\Psi}(t_m)=W(t_m)\times$$
$$\times\left[\tilde{W}^{-1}(t_m)-\tilde{W}^{-1}(t_m)C\tilde{N}^{-1}(t_m)C^T\times\right.$$
$$\left.\times\tilde{W}^{-1}(t_m)\right]W(t_m).$$

Тогда из (7) следует:

$$\tilde{W}^{-1}(t_m)-\tilde{W}^{-1}(t_m)C\tilde{N}^{-1}(t_m)C^T\tilde{W}^{-1}(t_m)=$$
$$=W^{-1}(t_m)-W^{-1}(t_m)CN^{-1}(t_m)C^TW^{-1}(t_m).$$

Использование (8) в (5) с учетом (П.47), (2.33), (П.70) из [1] приводит к тому, что доказательство (4) сводится к доказательству свойства

$$W(t_m)E^T\left[EW(t_m)E^T\right]^{-1}E+$$
$$+CN^{-1}(t_m)C^TW^{-1}(t_m)=I_q.$$

Введем обозначения:

$$A_1=W(t_m)E^T\left[EW(t_m)E^T\right]^{-1}E,$$
$$A_2=CN^{-1}(t_m)C^TW^{-1}(t_m).$$

Для рангов произвольных матриц A и B имеют место свойства [4]

$$rk[AB]=rk\left[A^+AB\right]=rk\left[ABB^+\right].$$

В результате последовательного применения (10) к A_1 и A_2 и того, что для обратимой матрицы $D^+=D^{-1}$ получаем

$$rk[A_1]=rk\left[E^T\left[EW(t_m)E^T\right]^{-1}EE^+\right],$$
$$rk[A_2]=rk\left[C^+C\left[C^TW^{-1}(t_m)C\right]^{-1}C^T\right].$$

Так как по построению матрицы E и C являются матрицами соответственно с независимыми строками и столбцами, то $EE^+=I_{(q-r)}$, $C^+C=I_r$ [4]. Учитывая (10) и последнее свойство в (11) получаем $rk[A_1]=rk\left[E^T\right]=q-r, rk[A_2]=rk\left[C^T\right]=r.$

Из определения A_1 и A_2 следует, что $A_1^2 = A_1$, $A_2^2 = A_2$, то есть матрицы A_1 и A_2 являются проекционными [5]. По построению матриц C и E имеем $EC = O$. Тогда $A_1 A_2 = O$, $A_2 A_1 = O$ и, кроме того, $rk[A_1] + rk[A_2] = q$. Поскольку проекционные матрицы, удовлетворяющие этим условиям, обладают свойством $A_1 + A_2 = I_q$ [4], то это с учетом вида A_1 и A_2 доказывает (9), а тем самым (4). Произвольность момента t_m следует по индукции. Теорема 1 доказана.

Данная теорема дает объяснение нечувствительности ФИЭ из [1] к неточному знанию матрицы интенсивности аномальной помехи (см. теорема 2 в [1]) и означает, что процедура исключения аномальных компонент вектора наблюдений в случае неизвестного математического ожидания аномальной помехи является оптимальной в смысле минимума среднеквадратической ошибки оценки в классе линейных несмещенных ФИЭ вида (П.45) из [1]. Использование в прикладных задачах ФИЭ из [1], а не усеченного ФИЭ предпочтительнее, так как в нем обрабатывается полный $\eta(t_m)$, а не усеченный $\bar{\eta}(t_m)$ вектор наблюдений. Если часть аномальных компонент $\eta(t_m)$ становятся не аномальными, то в структуре ФИЭ это учитывается через изменение структуры матрицы C.

3. Точность оценивания

Поскольку матрица C характеризует воздействие компонент вектора аномальных помех $f(t_m)$ на компоненты вектора наблюдения $\eta(t_m)$, то различным матрицам C будут соответствовать различные точности ФИЭ (среднеквадратические ошибки оценок).

Пусть $I_{(r)}$ – булев вектор размера q, в котором компоненты с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$ являются нулевыми, а остальные единичными. Под точностью оценивания $J_{(r)}(t_m)$ в момент времени t_m, соответствующей вектору $I_{(r)}$, будем понимать величину

$$J_{(r)}(t_m) = \mathrm{tr}\left[A\tilde{\Gamma}^{(r)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m, \tilde{s}_L)\right]$$

где A – произвольная симметричная неотрицательно определенная матрица, а $\tilde{\Gamma}^{(r)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t, \tilde{s}_L)$ – матрица вторых моментов ошибок ФИЭ, соответствующая вектору $I_{(r)}$. Очевидно, что $J_{(r)}(t_m)$ при $A = I_{(N+L+1)n}$ является среднеквадратической ошибкой ФИЭ, соответствующей $I_{(r)}$.

Замечание 1. Введением матрицы A в $J_{(r)}(t_m)$ задача обобщается в том смысле, что нас может интересовать не только совместная точность ФИЭ, но и раздельные точности фильтра, интерполятора и экстраполятора, то есть

$$J^0_{(r)}(t_m) = \mathrm{tr}\left[A_0 \Gamma^{(r)}(t_m)\right],$$

$$J^N_{(r)}(t_m) = \mathrm{tr}\left[A_N \tilde{\Gamma}^{(r)}_N(\tilde{\tau}_N, t_m)\right],$$

$$J^L_{(r)}(t_m) = \mathrm{tr}\left[A_L \tilde{\Gamma}^L_{(r)}(\tilde{s}_L, t_m)\right],$$

соответствующие вектору $I_{(r)}$. Это обеспечивается соответствующим конструированием матрицы из A неотрицательно определенных матриц A_0, A_N, A_L, соответствующих размеров.

Теорема 2. Пусть $I_{(0)}, I_{(1)}, \cdots, I_{(q)}$ – вектора, последовательно отличающиеся друг от друга значением лишь одной компоненты. Если t_m – первый момент появления аномальной помехи, то имеет место свойство

$$J_{(r+1)}(t_m) \geq J_{(r)}(t_m), r = \overline{0; q-1}. \qquad (12)$$

Доказательство. Рассмотрим два вектора $I_{(r_1)}$ и $I_{(r_2)}$, отличающихся друг от друга значением лишь одной компоненты, т.е. $r_2 = r_1 + 1$. Этим векторам соответствуют матрицы C_i, E_i и, соответственно, $\tilde{\Gamma}^{(r_i)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m, \tilde{s}_L)$, $i = \overline{1; 2}$. Тогда доказательство Теоремы сводится к доказательству неравенства

$$\Delta J(t_m) = J_{(r_2)}(t_m) - J_{(r_1)}(t_m) \geq 0.$$

Расписывая (П.79) из [1] с учетом (П.47), (2.33), (П.70) из [1] и (8) получаем

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^{(r_i)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m, \tilde{s}_L) &= \tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L) - \\ &- \tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L) G^T_{N+L+1}(t_m) \times \\ &\times W^{-1}(t_m)\left[I_q - C_i N_i^{-1}(t_m) C_i^T W^{-1}(t_m)\right] \times \\ &\times G_{N+L+1}(t_m) \tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L), \end{aligned} \qquad (13)$$

где $N_i(t_m) = C_i^T W^{-1}(t_m) C_i$, $i = \overline{1; 2}$. В (13) учтено, что $\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L) = \tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\cdot) = \tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\cdot)$, так как t_m – первый момент появления аномальной помехи. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta J(t_m) = \mathrm{tr}\big[&A\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L) \times \\ &\times G^T_{N+L+1}(t_m) W^{-1}(t_m)\left[C_2 N_2^{-1}(t_m) C_2^T - \right. \\ &\left. - C_1 N_1^{-1}(t_m) C_1^T\right] W^{-1}(t_m) \times \\ &\times G_{N+L+1}(t_m) \tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L)\big]. \end{aligned} \qquad (14)$$

Используя свойство $\mathrm{tr}[B_1 B_2] = \mathrm{tr}[B_2 B_1]$, (14) можно записать в виде

$$\Delta J\left(t_m\right)=\operatorname{tr}\left[L_{1,2}\left(t_m\right)L\left(t_m\right)W^{-1}\left(t_m\right)\right], \quad (15)$$

где $L\left(t_m\right)=G_{N+L+1}\left(t_m\right)\tilde{\Gamma}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_m-0,\tilde{s}_L\right)\times$ $\times A\tilde{\Gamma}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_m-0,\tilde{s}_L\right)G^T_{N+L+1}\left(t_m\right)$, $L_{1,2}\left(t_m\right)=$ $=\left[C_2N_2^{-1}\left(t_m\right)C_2^T-C_1N_1^{-1}\left(t_m\right)C_1^T\right]W^{-1}\left(t_m\right)$.

Так как $A\geq 0$, то $L\left(t_m\right)\geq 0$ [6]. Использование (9) при $C=C_2$ и $E=E_2$ дает, что $L_{1,2}\left(t_m\right)=I_q-\left(A_{12}+A_{21}\right)$, где $A_{12}=W\left(t_m\right)\times$ $\times E_2^T\left[E_2W\left(t_m\right)E_2^T\right]^{-1}E_2$, $A_{21}=C_1N_1^{-1}\left(t_m\right)\times$ $\times C_1^TW^{-1}\left(t_m\right)$. Как и при доказательстве Теоремы 1, получаем $rk\left[A_{12}\right]=q-r_2$, $rk\left[A_{21}\right]=r_1$. Так как $A_{12}^2=A_{12}$, $A_{21}^2=A_{21}$, то A_{12} и A_{21} – проекционные матрицы [5]. По построению матриц C_1 и E_2 имеем, что $E_2C_1=O$. Тогда $A_{12}A_{21}=O$, $A_{21}A_{12}=O$. Для проекционных матриц, которые удовлетворяют этому условию, матрица $\tilde{A}=A_{12}+A_{21}$ также является проекционной [5] и $rk\left[\tilde{A}\right]=rk\left[A_{12}\right]+rk\left[A_{21}\right]=q-1$, так как $r_2=r_1+1$. Матрица $L_{1,2}\left(t_m\right)=I_q-\tilde{A}$ также является проекционной, так как $\left(I_q-\tilde{A}\right)^2=$ $=I_q-\tilde{A}$. Поскольку для проекционной матрицы ранг равен следу [5], то $rk\left[L_{1,2}\left(t_m\right)\right]=$ $=\operatorname{tr}\left[L_{1,2}\left(t_m\right)\right]=\operatorname{tr}\left[I_q\right]-\operatorname{tr}\left[\tilde{A}\right]=\operatorname{tr}\left[I_q\right]-rk\left[\tilde{A}\right]=q-$ $-(q-1)=1$. Пусть здесь и далее $\left\{\lambda_i(\Phi)\right\}$ $(i=1,2,\dots)$ означает спектр матрицы Ф. Поскольку собственные числа проекционной матрицы равны либо 0, либо 1, а

$$rk\left[L_{1,2}\left(t_m\right)\right]=\operatorname{tr}\left[L_{1,2}\left(t_m\right)\right]=\sum_{i=1}^{q}\lambda_i\left(L_{1,2}\left(t_m\right)\right)=1,$$

то $\left\{\lambda_i\left(L_{1,2}\left(t_m\right)\right)\right\}=\left\{0,0,\dots,1,0,\dots 0\right\}$ $i=\overline{1;q}$, то есть $L_{1,2}\left(t_m\right)\geq 0$. Так как $L\left(t_m\right)\geq 0$, $L_{1,2}\left(t_m\right)\geq 0$ и $W^{-1}\left(t_m\right)\geq 0$, то [6] $L_{1,2}\left(t_m\right)L\left(t_m\right)$ $W^{-1}\left(t_m\right)\geq 0$, то есть

$$\lambda_i\left(L_{1,2}\left(t_m\right)L\left(t_m\right)W^{-1}\left(t_m\right)\right)\geq 0,\ i=\overline{1;q}$$

Таким образом,

$$\Delta J\left(t_m\right)=\sum_{i=1}^{q}\lambda_i\left(L_{1,2}\left(t_m\right)L\left(t_m\right)W^{-1}\left(t_m\right)\right)\geq 0.$$

Теорема 2 доказана.

Поскольку теорема 2 предполагает, что t_m – первый момент появления аномальной помехи, то возникает вопрос о том, при каких условиях неравенство (12) будет справедливо, если снять данное ограничение.

Теорема 3. Пусть

$$\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_m-0,\tilde{s}_L\right)\geq$$
$$\geq\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_m-0,\tilde{s}_L\right),$$
$$r_2=r_1+1. \quad (16)$$

Тогда неравенство (12) справедливо для произвольного момента времени t_m.

Доказательство. Для доказательства данной теоремы достаточно показать, что из неравенства $\Delta J\left(t_m\right)\geq 0$, следующего из Теоремы 2, с учетом условия (16), записанного для момента времени t_{m+1}, будет следовать неравенство $\Delta J\left(t_{m+1}\right)\geq 0$.

Матрица $\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L\right)$ с учетом (16) может быть представлена в виде $\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,\right.$ $\left.t_{m+1}-0,\tilde{s}_L\right)=\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L\right)+\tilde{\Gamma}$, где $\tilde{\Gamma}\geq 0$ [3]. Тогда из (2.37) в [1] следует

$$W_{(r_2)}\left(t_{m+1}\right)=W_{(r_1)}\left(t_{m+1}\right)+$$
$$+G_{N+L+1}\left(t_{m+1}\right)\tilde{\Gamma}G^T_{N+L+1}\left(t_{m+1}\right). \quad (17)$$

Из (П.79) и (П.47) в [1], получаем

$$\tilde{\Gamma}^{(r_i)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L\right)=\tilde{\Gamma}^{(r_i)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L\right)-$$
$$-\tilde{\Gamma}^{(r_i)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L\right)\times$$
$$\times G^T_{N+L+1}\left(t_{m+1}\right)W^{-1}_{(r_i)}\left(t_{m+1}\right)\left[I_q-C_iY\left(t_{m+1}\right)\right]\times$$
$$\times G_{N+L+1}\left(t_{m+1}\right)\tilde{\Gamma}^{(r_i)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L\right). \quad (18)$$

Записывая (8), (9) для C_i и соответствующей ей E_i и используя эти соотношения в (18) с учетом (2.33), (П.70) из [1] и представления $N\left(t_m\right)$ из (6), получаем

$$\tilde{\Gamma}^{(r_i)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L\right)=\left[I_{(N+L+1)n}-\right.$$
$$-\tilde{\Gamma}^{(r_i)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L\right)G^T_{N+L+1}\left(t_{m+1}\right)\times$$
$$\left.\times E_i^T\left[E_iW_{(r_i)}\left(t_{m+1}\right)E_i^T\right]^{-1}E_iG_{N+L+1}\left(t_{m+1}\right)\right]\times$$
$$\times\tilde{\Gamma}^{(r_i)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L\right). \quad (19)$$

Полагая $r_i = r_2$ в (19) с учетом (17) получаем окончательное выражение для $\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}, \tilde{s}_L)$ в виде

$$\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}, \tilde{s}_L) = \Big[I_{(N+L+1)n} - \left(\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}-0, \tilde{s}_L) + \tilde{\Gamma}\right) G^T_{N+L+1}(t_{m+1}) \times E_2^T\big[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1})E_2^T + E_2 G_{N+L+1}(t_{m+1}) \times \tilde{\Gamma} G^T_{N+L+1}(t_{m+1})E_2^T\big]^{-1} E_2 G(t_{m+1})\Big] \times \left(\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}-0, \tilde{s}_L) + \tilde{\Gamma}\right). \quad (20)$$

Введем матричную функцию

$$\Phi(\alpha) = \tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}-0, \tilde{s}_L) + \tilde{\Gamma}\alpha$$

скалярного переменного $\alpha \geq 0$. Рассматривая матрицу $\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}, \tilde{s}_L)$ как функцию α, из (20) получаем

$$\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}, \tilde{s}_L; \alpha) = \Big[I_{(N+L+1)n} - \Phi(\alpha) G^T_{N+L+1}(t_{m+1})E_2^T \times \big[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1})E_2^T + \alpha E_2 G_{N+L+1}(t_{m+1})\tilde{\Gamma} G^T_{N+L+1}(t_{m+1})E_2^T\big]^{-1} \times E_2 G_{N+L+1}(t_{m+1})\Big]\Phi(\alpha). \quad (21)$$

Использование формулы дифференцирования обратной матрицы в (21) дает

$$d\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}, \tilde{s}_L; \alpha)/d\alpha = B\tilde{\Gamma}B^T, \quad (22)$$

где

$$B = I_{(N+1)n} - \Phi(\alpha) G^T_{N+L+1}(t_{m+1})E_2^T \times \big[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1})E_2^T + \alpha E_2 G_{N+L+1}(t_{m+1})\tilde{\Gamma} G^T_{N+L+1}(t_{m+1})E_2^T\big]^{-1} \times E_2 G_{N+L+1}(t_{m+1}).$$

Так как $\tilde{\Gamma} \geq 0$, то из (22) следует, что [6],

$$d\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\cdot;\alpha)/d\alpha \geq 0,$$

то есть $\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\cdot;\alpha)$ – монотонно неубывающая по α в смысле определенности матрица. Тогда

$$\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}, \tilde{s}_L; \alpha)\big|_{\alpha=1} \geq \tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}, \tilde{s}_L; \alpha)\big|_{\alpha=0}. \quad (23)$$

Согласно (20), (21), $\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}, \tilde{s}_L) = \tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}, \tilde{s}_L; \alpha)\big|_{\alpha=1}$, отсюда, из (21), (23) следует

$$\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}, \tilde{s}_L) \geq \Psi, \quad (24)$$

где

$$\Psi = \Big[I_{(N+L+1)n} - \tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}-0, \tilde{s}_L) \times G^T_{N+L+1}(t_{m+1})E_2^T\big[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1})E_2^T\big]^{-1} \times E_2 G_{N+L+1}(t_{m+1})\Big]\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_{m+1}-0, \tilde{s}_L).$$

Из (9) для C_1, E_1, $W_{(r_1)}$ в момент времени t_{m+1} следует

$$E_1^T\big[E_1 W_{(r_1)}(t_{m+1})E_1^T\big]^{-1} E_1 = W^{-1}_{(r_1)}(t_{m+1}) \times \big[I_q - C_1 N_1^{-1}(t_{m+1})C_1^T W^{-1}_{(r_1)}(t_{m+1})\big].$$

Отсюда получаем

$$E_1^T\big[E_1 W_{(r_1)}(t_{m+1})E_1^T\big]^{-1} E_1 - E_2^T\big[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1})E_2^T\big]^{-1} E_2 = W^{-1}_{(r_1)}(t_{m+1})\Big[I_q - \big[W_{(r_1)}(t_{m+1})E_2^T \times \big[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1})E_2^T\big]^{-1} E_2 + C_1 N_1^{-1}(t_{m+1})C_1^T W^{-1}_{(r_1)}(t_{m+1})\big]\Big]. \quad (25)$$

Аналогично доказательству свойств $L_{1,2}(t_m) \geq 0$ и $L_{1,2}(t_m)L(t_m)W^{-1}(t_m) \geq 0$ в предыдущей теореме может быть доказано, что

$$\tilde{L}_{1,2}(t_{m+1}) = I_q - \big[W_{(r_1)}(t_{m+1})E_2^T \times \big[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1})E_2^T\big]^{-1} E_2 + C_1 N_1^{-1}(t_{m+1})C_1^T W^{-1}_{(r_1)}(t_{m+1})\big] \geq 0.$$

Тем самым, согласно (25)

$$E_1^T\big[E_1 W_{(r_1)}(t_{m+1})E_1^T\big]^{-1} E_1 - E_2^T\big[E_2 W_{(r_1)}(t_{m+1})E_2^T\big]^{-1} E_2 \geq 0. \quad (26)$$

Полагая $r_i = r_1$, получаем из (19), (26) с учетом вида для Ψ, что

$$\Psi-\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L\right)=$$

$$=\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L\right)G^T_{N+L+1}\left(t_{m+1}\right)\times$$

$$\times\left[E_1^T\left[E_1W_{(r_1)}\left(t_{m+1}\right)E_1^T\right]^{-1}E_1-\right.$$

$$\left.-E_2^T\left[E_2W_{(r_1)}\left(t_{m+1}\right)E_2^T\right]^{-1}E_2\right]\times$$

$$\times G_{N+L+1}\left(t_{m+1}\right)\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}\left(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L\right)\geq 0. \quad (27)$$

Тогда из (24), (27) следует $\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\cdot)\geq$ $\geq\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}(\cdot)$. Поскольку $A\geq 0$, то [6]

$$\lambda_j\left(A\left[\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\cdot)-\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}(\cdot)\right]\right)\geq 0,$$

$$j=\overline{1;(N+L+1)n}.$$

Из определения $J_{(r)}\left(t_{m+1}\right)$ имеем, что

$$\Delta J\left(t_{m+1}\right)=\operatorname{tr}\left[A\left[\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\cdot)-\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}(\cdot)\right]\right].$$

Тогда

$$\Delta J\left(t_{m+1}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{(N+L+1)n}\lambda_j\left(A\left[\tilde{\Gamma}^{(r_2)}_{N+L+1}(\cdot)-\tilde{\Gamma}^{(r_1)}_{N+L+1}(\cdot)\right]\right)\geq 0.$$

Теорема 3 доказана.

Смысл приведенных результатов состоит в том, что добавление аномальных компонент вектора наблюдения к уже имеющимся аномальным компонентам может лишь ухудшить точность оценивания. В общем случае для двух векторов $I_{(r_1)}$ и $I_{(r_2)}$ таких, что $r_2>r_1$, но набор нулевых компонент вектора $I_{(r_2)}$ не поглощает набор нулевых компонент вектора $I_{(r_1)}$, ничего определенного о соотношении между $J_{(r_1)}\left(t_m\right)$ и $J_{(r_2)}\left(t_m\right)$ сказать нельзя.

Замечание 2. В соответствие с Замечанием 1 Теоремы 2 и 3 справедливы также и для раздельных задач фильтрации, интерполяции и экстраполяции.

4. Заключение

Для ФИЭ, синтез которого осуществлен в [1], доказаны следующие свойства:

- процедура исключения аномальных компонент вектора наблюдения является оптимальной;
- добавление аномальных компонент вектора наблюдения к уже имеющимся аномальным компонентам не улучшает качество оценивания;
- свойства ФИЭ, отмеченные выше, справедливы также и для раздельных задач фильтрации, интерполяции и экстраполяции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демин Н.С., Рожкова С.В. Непрерывно-дискретное оценивание стохастических процессов в случае наблюдений с памятью при наличии аномальных помех. Синтез // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2000. – № 3. – С. 5–16.
2. Демин Н.С., Сушко Т.В., Яковлева А.В. Обобщенная обратная экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1997. – № 4. – С. 48–59.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 576 с.
4. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977. – 224 с.
5. Абгарян К.А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. – М.: Наука, 1973. – 432 с.
6. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. – М.: Наука, 1972. –232 с.