

УДК 530.12:531.51

## АТОМНАЯ МОДЕЛЬ РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

В.В. Ласуков

Томский политехнический университет  
Тел.: (382-2)-415-877

Исследуется квантовая теория ранней плоской Вселенной с отрицательной эффективной космологической постоянной, имитируемой однородным скалярным потенциалом. Показано, что ранняя Вселенная с отрицательной космологической постоянной подобна гравитационному атому, который может служить источником обычного вещества за счет спонтанного излучения массивных частиц.

Ранее в работе [1] на основе гравитационного аналога уравнения Шредингера,

$$i \frac{\partial}{\partial x^0} \Psi = \sqrt{g_{00}} \hat{H} \Psi$$

было рассмотрено квантовое рождение Вселенной, обусловленное эффективной положительной космологической постоянной  $\Lambda = 8\pi G U_0$ . Здесь

$$\hat{H} = \frac{1}{2aM_p^2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{1}{2V} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + VU(\varphi).$$

Очевидно, величину  $\frac{\partial}{\partial x^0} \Psi$  можно умножить на произвольный множитель, так как коэффициент  $\sqrt{g_{00}}$  произволен, и, следовательно, в него можно включить этот множитель. Умножение же  $\frac{\partial}{\partial x^0} \Psi$  на некоторую величину равносильно переходу к другой шкале времени, так что это уравнение обладает репараметризационной инвариантностью относительно замены временной координаты  $x^0$ . Для решения же космологических задач наиболее естественным является собственное время  $dt = \sqrt{g_{00}} dx^0$ . При построении гамильтониана, отличного от нуля, использовалась нетривиальная метрика плоской Вселенной [3]

$$ds^2 = a^6 (dx^0)^2 - a^2 \times \\ \times (dr^2 + \sin^2(\vartheta) r^2 [d\vartheta^2 + \sin^2(\varphi) d\varphi^2]), \\ a = a(x^0),$$

где  $g_{00} = a^6$ , так что метрический коэффициент  $g_{00}$  не является независимой переменной, вследствие чего среди уравнений Лагранжа отсутствует (00)-компонента уравнений Гильберта-Эйнштейна  $\varepsilon_\varphi - \varepsilon_a = 0$ , и гамильтониан отличен от нуля. Поэтому при варьировании действия по  $a$  и  $\varphi$  (по координатам  $a$ ,  $\varphi$  – мини-суперпространства  $(a, \varphi)$ , которое не следует путать с суперпространством, введенным для описания суперсимметричных теорий;  $\varphi$  – функция скалярного поля) получается новая система уравнений Лагранжа (замена переменной  $dt = a^3 dx^0$  осуществлена после проведения процедуры варьирования):

$$\begin{cases} \frac{a''}{a} + 2 \left( \frac{a'}{a} \right)^2 - 8\pi G V(\varphi) = 0, \\ \varphi'' + 3 \left( \frac{a'}{a} \right) \varphi' = - \frac{dV(\varphi)}{d\varphi}, \\ a' \equiv \frac{da}{dt}, \quad \varphi' \equiv \frac{d\varphi}{dt}, \quad dt = a^3 dx^0, \end{cases}$$

более общая, чем уравнения Фридмана плоской Вселенной:

$$\begin{cases} \frac{a''}{a} = - \frac{4\pi G}{3} (\varepsilon_a + 3p), \\ \left( \frac{a'}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \varepsilon_a, \\ \varepsilon_a = \varepsilon_\varphi = \frac{\varphi'^2}{2} + V(\varphi). \end{cases}$$

Первая система имеет такие решения, которые не удовлетворяют уравнениям Фридмана. Всякое же решение системы уравнений Фридмана удовлетворяет и первой системе, так как первое из ее уравнений может быть получено из уравнений Фридмана умножением на 2 первого из них и последующим его сложением со вторым с учетом (00)-компонен-

ты  $\varepsilon_a = \frac{\varphi'^2}{2} + V(\varphi)$ . Второе же уравнение

$$\varphi'' + 3 \frac{a'}{a} \varphi' = - \frac{dV(\varphi)}{d\varphi}$$

первой системы нетрудно получить дифференцированием по  $t$  (00)-компоненты

$$\varepsilon_a = \frac{\varphi'^2}{2} + V(\varphi)$$

с учетом двух других уравнений Фридмана:

$$\begin{cases} \frac{a''}{a} = - \frac{4\pi G}{3} (\varepsilon_a + 3p), \\ \left( \frac{a'}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \varepsilon_a \end{cases}$$

и соотношения  $p = \frac{\phi'^2}{2} - V(\phi)$ , так что уравнения Фридмана являются частным случаем первой системы уравнений. Например, среди решений первой системы есть известное инфляционное решение  $a = a_0 \exp(\omega t)$  и решения фридмановского типа  $a = a_0 t^q$ ,  $q < 1$ , для которых гамильтониан равен нулю, но есть и такие решения, для которых гамильтониан отличен от нуля  $a = a_0 ch^\mu(\omega t)$ ,  $\mu = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$  [3]. Система имеет также нетривиальные решения ньютоновского типа [4].

В данной работе исследуется квантовая теория Вселенной с отрицательной эффективной космологической постоянной ( $U_0 < 0$ ) и гамильтонианом, отличным от нуля, т.е. атомная модель Вселенной.

#### Гравитационный атом

Согласно [1–3], гравитационный аналог стационарного уравнения Шредингера, описывающего раннюю Вселенную как одномерный гравитационный атом, можно представить в привычном виде

$$\left[ \frac{1}{2M_p} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - W(a, E) \right] \Psi(a) = 0, \quad (1)$$

где  $W(a, E) = M_p a [V|U_0| + E]$  – эффективная потенциальная яма, параметрически зависящая от энергии  $E$  так что каждому возможному значению  $E'$  соответствует своя потенциальная яма, содержащая лишь один уровень  $E'$ ;  $E < 0$ ;  $V = \frac{4\pi a^3}{3}$ ;

$M_p^{-2} = G$  – гравитационная постоянная.

Уравнение (1) отличается от традиционного тем, что оператор кинетической энергии имеет вид

$\hat{T} = \frac{-1}{2M_p^2 a} \frac{\partial^2}{\partial a^2}$  вместо  $\frac{1}{2M_p} \frac{\partial^2}{\partial a^2}$ , из-за чего собственные функции не ортогональны. Делая замену переменной  $\xi = \frac{a^3}{6}$ , из (1) найдем

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{2}{3\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \alpha^2 - \frac{4EM_p^2}{3\xi} \right] \Psi = 0, \quad (2)$$

где  $\alpha = \sqrt{\frac{32\pi}{3}|U_0|M_p^2} = \frac{8}{3}\omega M_p^2$ . Нетрудно видеть, что уравнение (1) инвариантно относительно дискретных симметрий пространственного отражения  $a \rightarrow -a$  и обращения времени  $t \rightarrow -t$  или, что, то же самое,  $E \rightarrow -E$ .

Асимптотическое решение при  $a \rightarrow \infty$  можно найти согласно (2) из уравнения

$$\Psi'' - \alpha^2 \Psi = 0,$$

всюду конечное решение которого равно

$$\Psi_\infty = \exp(-\alpha \xi). \quad (3)$$

Поэтому общее решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\Psi = \Psi_\infty \cdot f.$$

В этом случае для определения неизвестной функции  $f$  получаем уравнение

$$x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + [(v+1) - x] \frac{\partial f}{\partial x} + bf = 0, \quad (4)$$

где  $x = 2\alpha \xi$ ;  $v+1 = \frac{2}{3}$ ;  $b = -\left(\frac{1}{3} + \frac{E}{4\omega}\right)$ .

Чтобы характер решения для  $\Psi$  на бесконечности определялся асимптотической формулой (3), необходимо найти условие, при котором функция  $f$  будет представлять собой конечный полином степени  $n$  [5]:

$$f = \sum_{k=0}^n C_k x^k. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4) и группируя члены с одинаковыми степенями  $x$ , будем иметь

$$\sum_{k=0}^n x^k \left\{ C_k [b - k] + C_{k+1} \left[ \frac{k(k+1) + (k+1)(v+1)}{2} \right] \right\} = 0. \quad (6)$$

Отсюда, учитывая, что  $C_{n+1} = 0$ ,  $C_n \neq 0$ , получаем необходимое условие квантования энергии:

$$E_n = \begin{cases} -4\omega \left( n + \frac{1}{3} \right), & a > 0, \\ 4\omega \left( n + \frac{1}{3} \right), & a < 0, \end{cases} \quad (7)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Учитывая (7), для определения коэффициентов  $C_k$  согласно (6) получаем рекуррентное соотношение

$$C_k (n - k) = -C_{k+1} (k + 1)(v + k + 1). \quad (8)$$

С помощью (8) для функции  $f$  находим выражение

$$f = C_0 \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k x^k}{k! (1+v)_k} = C_0 \frac{\Gamma(1+v)}{\Gamma(1+k+v)} \cdot n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(1+k+n)}{k! \Gamma(1+k+v) \Gamma(n+1-k)} x^k.$$

Выберем коэффициент  $C_0$  так, чтобы коэффициент при старшей степени имел вид  $C_n = (-1)^n$ .

Для этого следует выбрать

$$C_0 = \frac{\Gamma(v+1+n)}{\Gamma(v+1)}.$$

Тогда имеем

$$f = n! L_n^{(v)}(x),$$

где  $L_n^{(v)}(x)$  – обобщенный многочлен Лагерра порядка  $n$ . Таким образом, для функции  $\Psi$  окончательно имеем

$$\Psi = \begin{cases} N \exp\left(-\frac{x}{2}\right) n! L_n^{(v)}(x), & a > 0, \\ N \exp\left(\frac{x}{2}\right) n! L_n^{(v)}(-x), & a < 0, \end{cases}$$

где  $x = 2\alpha\xi$ .

Используя известный интеграл [6]

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\beta-1} \exp(-cx) L_m^{(\gamma)}(cx) L_n^{(\lambda)}(cx) dx = \\ = \frac{(1+\gamma)_m (\lambda-\beta+1)_n \Gamma(\beta)}{m! n! c^\beta} \times \\ \times {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} -m, \beta, \beta-\lambda; 1 \\ \gamma+1, \beta-\lambda-n \end{matrix} \right], \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} \beta, \operatorname{Re} c > 0,$$

можно найти нормировочный множитель  $N$  и начальные моменты  $\langle a^n \rangle$  произвольного порядка  $n$ , которые понадобятся при построении теории "излучения" гравитационного атома. Например, если использовать условие нормировки

$$\int_0^\infty \Psi^2 da = 1,$$

то

$$N = \frac{(9\alpha)^{1/6}}{\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}+n\right)}} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}+n\right)}.$$

В соответствии с (1) уравнение, описывающее раннюю Вселенную с отрицательной космологической постоянной  $\Lambda = -8\pi G|U_0|$ , имитируемой постоянной составляющей потенциала скалярного поля, имеет вид

$$\left[ \frac{1}{2M_p} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - M_p a V|U_0| \right] \Psi = M_p a E_n \Psi, \quad (9)$$

$$E_n < 0.$$

При  $\Lambda > 0$  уравнение выглядит следующим образом [1]:

$$\left[ \frac{1}{2M_p} \frac{\partial^2}{\partial a^2} + M_p a V|U_0| \right] \Psi = M_p a E \Psi, \quad (10)$$

$$E > 0.$$

В уравнении (10) осуществим поворот Вика  $a \rightarrow ib$ ,  $E \rightarrow -i\tilde{E}$ . Тогда уравнение (10) примет вид

$$\left[ \frac{1}{2M_p} \frac{\partial^2}{\partial b^2} - M_p b V|U_0| \right] \Psi = M_p b \tilde{E} \Psi, \quad (11)$$

$$\tilde{E} < 0.$$

Нетрудно видеть, что уравнение (11) совпадает с уравнением (9). Поэтому Вселенную с отрицательной космологической постоянной можно рассматривать как Вселенную с положительной космологической постоянной, но с сигнатурой  $(+++)$ . Спин "эффективной частицы" с массой  $M_p$  введем с помощью суперсимметрии. Для этого представим уравнение (1) в суперсимметричном виде [7]:

$$H = \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[ \hat{\pi}_a^2 + \frac{U'^2}{2} \right] I + \frac{U''}{2} S_z, \quad (12)$$

$$\text{где } S_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad U = -2 \ln(\Psi_0);$$

$\Psi_0 = \exp(-\alpha\xi)$  – волновая функция при  $n=0$ , так что

$$\frac{U'^2}{4} = 2M_p^2 V a |U_0|, \quad \frac{U''}{4} = \frac{4}{3} \omega M_p^2 a. \quad (13)$$

Генераторы суперсимметрии имеют вид:

$$Q = \left[ \hat{\pi}_a - i \frac{U'}{2} \right] \sigma^+, \quad \bar{Q} = \left[ \hat{\pi}_a + i \frac{U'}{2} \right] \sigma^-,$$

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и удовлетворяют соотношениям

$$[Q, H]_- = [\bar{Q}, H]_- = 0, \quad \{\bar{Q}, \bar{Q}\}_+ = \{Q, Q\}_+ = 0,$$

$$\{\bar{Q}, Q\} = 2H.$$

Суперсимметричный гамильтониан (12) имеет смысл гамильтониана, объединяющего бозонное поле (кванты возбуждения осциллятора) и фермионы с полуцелым спином  $1/2$  и массой  $M_p$ . Член  $\frac{U'^2}{2}$  характеризует взаимодействие бозонов с бозонами;  $\frac{U''}{2} S_z$  – характеризует взаимодействие фермионов с бозонами.

Представим собственную функцию гамильтониана (12) в виде

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1(a) \\ \Psi_2(a) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$H_+ \Psi_+ = M_p^2 a E_1 \Psi_+; \quad (14)$$

$$H_- \Psi_- = M_p^2 a E_2 \Psi_-, \quad (15)$$

где

$$H_{\pm} = \frac{1}{2} \hat{\pi}_a^2 + \left[ \frac{U'^2}{8} \mp \frac{U''}{4} \right]; \quad \Psi_+ = \Psi_2(a) u_2;$$

$$\Psi_- = \Psi_1(a) u_1,$$

$$S_z u_{1,2} = \pm \frac{1}{2} u_{1,2}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из (14), (15) следует, что

$$H_-(Q\Psi_+) = M_p^2 a E_2(Q\Psi_+),$$

и, следовательно  $E_1 = E_2$  и

$$\Psi_1(a) = \left[ \hat{\pi}_a - i \frac{U'}{2} \right] \Psi_2(a).$$

С учетом (13), составляющие гамильтониана (12) соответствуют энергетическим уровням

$$E_{\pm} = E_n \pm \frac{4}{3} \omega, \quad E_n = -4\omega \left[ n + \frac{1}{3} \right],$$

так что состояние с энергией, равной нулю, существует и принадлежит только составляющей  $H_+$ . Так как  $E_+ - E_- = \frac{8}{3} \omega$  не совпадает с частотой осциллятора  $4\omega$ , то спектр энергетических уровней является невырожденным.

Суперсимметрия нарушена спонтанно, так как существует генератор  $\bar{Q}$ , такой, что

$$[\bar{Q}, H]_- = 0 \text{ и } \bar{Q}\Psi_0 \neq 0.$$

Генераторы суперсимметрии  $Q, \bar{Q}$  действуют на волновые функции следующим образом:

$$Q\Psi_+ = \Psi_-, \quad \bar{Q}\Psi_- = \Psi_+ \quad (16)$$

Из (16) видно, что при преобразовании суперсимметрии эффективная частица с массой  $M_p$  меняет направление спина на противоположное и одновременно переходит с одного уровня  $E_+$  на другой  $E_-$ . При этом ее энергия меняется.

Переворот спина — это дискретное преобразование, а переход с одного уровня на другой обусловлен действием бозонных операторов уничтожения и рождения, построенных из координаты  $a$  и импульса  $\hat{\pi}_a$ .

Импульс является генератором трансляций — непрерывных преобразований, а координата — ге-

нератором трансляций в импульсном пространстве. Генераторы  $Q, \bar{Q}$  объединяют свойства отмеченных непрерывных и дискретных преобразований.

В рассмотренной выше суперсимметричной квантовой механике суперсимметрия не является максимальной, так как суперпреобразования  $Q, \bar{Q}$  не связывают частицу с другими частицами, спины которых отличаются от ее спина на  $1/2$ .

В заключение отметим, что в частом случае, когда уравнение (2) является аналогом уравнения связи Уиллера-ДеВитта  $\hat{H}\Psi = 0$  [8–14], решение которого равно

$$\Psi(a) = z^{1/6} K_{1/6}(z),$$

где  $K_\nu(z)$  — функция Макдональда, которая при  $z \gg 1$  убывает по экспоненциальному закону;

$$z = \alpha \cdot \xi, \quad \xi = \frac{a^3}{6}, \quad \alpha = \frac{8}{3} \omega M_p^2.$$

Аналогично, в случае положительной космологической постоянной, который рассмотрен в работе [1],

$$\Psi(a) = z^{1/6} J_{1/6}(z),$$

где  $J_\nu(z)$  — функция Бесселя первого рода.

Отметим, что в работе [1] найдена вероятность рождения Вселенной однородным скалярным полем  $U_0 > 0$

$$P = \exp \left[ -\frac{\pi E}{2\omega} \right].$$

Показано, что время формирования процесса рождения Вселенной равно  $t_c \approx \omega^{-1}$ , так что вследствие соотношения неопределенности  $E \approx \omega$ . Тогда вероятность рождения Вселенной при

$$E = \gamma \pi \omega, \quad \gamma = 0,997050, \quad e = 2,718282, \\ \pi = 3,141593$$

равна  $P = \exp \left[ -\frac{\gamma \pi^2}{2} \right]$  и совпадает с постоянной

тонкой структуры с точностью до третьего знака после запятой  $\alpha^{-1} = 137,036$ .

Константу  $\gamma$  можно интерпретировать как величину, учитывающую небольшое отличие значения числа  $\pi_i$  в ранней Вселенной от его современного значения  $\pi_f$ .

Относительное отклонение равно

$$\delta_\pi = \frac{\Delta_\pi}{\pi_i} = 1 - \sqrt{\gamma} = 1,476 \cdot 10^{-3}.$$

Проведенное рассмотрение позволяет сделать следующие выводы:

- Вселенная с отрицательной эффективной космологической постоянной эквивалентна одномерному гравитационному атому, который можно считать подобным одномерным протяженным объектам теории струн.

- Вселенную с  $U_0 < 0$  и лоренцевой сигнатурой (+ ---) можно рассматривать как Вселенную с потенциалом  $U_0 > 0$  но с евклидовой сигнатурой (++++).
- Спин эффективной частицы с массой  $M_p$  может быть введен за счет спонтанно нарушенной суперсимметрии. Такая суперчастица может быть реальной.
- Обычное вещество может возникать за счет спонтанного "излучения" массивных частиц исследованным в данной статье гравитационным атомом.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ласуков В.В. Квантовое рождение Вселенной // Изв. вузов. Физика. – 2002. – № 5. – С. 88–92.
2. Ласуков В.В. Вселенная без сингулярности // Изв. вузов. Физика. – 2001. – № 7. – С. 18–21.
3. Ласуков В.В. Вселенная в метрике Логанова // Изв. вузов. Физика. – 2002. – № 2. – С. 39–41.
4. Ласуков В.В. Вселенная в метрике Логанова с неоднородным скалярным полем // Изв. вузов. Физика. – 2002. – № 8. – С. 91–92.
5. Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон. – М.: Наука, 1974. – С. 179–180.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – С. 477–488.
7. Witten E. // Nucl. Phys. – 1981. – V. B188. – P. 513.
8. DeWitt B.S. // Phys. Rev. – 1967. – V. 160. – P. 1113.
9. DeWitt B.S. // Phys. Rev. – 1967. – V. 162. – P. 1195.
10. Barvinsky A.O. // Phys. Report. – 1993. – V. 230. – P. 237.
11. Альтшулер Б.Л., Барвинский А.О. Квантовая космология и физика переходов с изменением сигнатуры пространства-времени // Успехи физических наук. – 1996. – Т. 166. – С. 459–492.
12. Линде А.Д. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. – М.: Наука, 1990. – С. 208–220.
13. Долгов А.Д., Зельдович Я.Б., Сажин М.В. Космология ранней Вселенной. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – С. 139–159.
14. Чернин А.Д. Космический вакуум // Успехи физических наук. – 2001. – Т. 171. – С. 1153–1175.