

УДК 514.76

ОСНАЩЕНИЕ СЕМЕЙСТВА ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПЯТИМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.А. Молдованова

Томский политехнический университет

E-mail: nv@pochta.ru

Статья посвящена инвариантному оснащению семейства S_q двумерных плоскостей в пятимерном эквиаффинном пространстве A_5 при всех допустимых значениях q : $2 \leq q \leq 8$. Это оснащение строится с помощью подвижного максимально канонизированного репера, которому дается полная аналитическая и геометрическая интерпретация. Основные обозначения и терминология соответствуют общепринятым, а все функции, встречающиеся в данной статье, предполагаются аналитическими.

1. Аналитический аппарат

Рассмотрим пятимерное эквиаффинное пространство A_5 , отнесенное к эквиаффинному подвижному реперу $R = \{\bar{A}, \bar{e}_i\}$, ($i = \overline{1,5}$) с деривационными формулами:

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j, \quad (1.1)$$

где ω^i, ω_i^j – формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства

$$D\omega^i = \omega^i \wedge \omega_j^j, \quad D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \quad (i, j, k = \overline{1,5}), \quad (1.2)$$

и соотношению $\omega_1^1 + \omega_2^2 + \dots + \omega_5^5 = 0$ вытекающему из условия эквиаффинности $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_5) = 1$.

В пространстве A_5 рассматривается q -мерное семейство $S_q (2 \leq q \leq 8)$ двумерных плоскостей l_2 . Присоединим к S_q репер R так, что $l_2 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Здесь и в дальнейшем символом $l_s = (\bar{A}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_s)$ обозначается s -плоскость (s – мерная плоскость), проходящая через точку A , параллельно векторам $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_s$. Тогда дифференциальные уравнения многообразия S_q можно записать в следующем параметрическом виде:

$$\omega^a = A_a^\alpha \theta^\alpha, \quad \omega_a^\alpha = A_{aa}^\alpha \theta^\alpha, \quad (\alpha, \beta = \overline{1,2}; \hat{\alpha}, \hat{\beta} = \overline{3,5}), \quad (1.3)$$

где параметрические формы θ^a удовлетворяют структурным уравнениям:

$$D\theta^a = \theta^b \wedge \theta_b^a;$$

$$D\theta_b^a = \theta_b^c \wedge \theta_c^a + \theta^c \wedge \theta_{ca}^b, \dots (a, b, c = \overline{1,q}),$$

а величины A_a^α и A_{aa}^α удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dA_a^\alpha - A_b^\alpha \theta_a^b - A_{aa}^\alpha \omega^\alpha + A_a^\beta \omega_\beta^\alpha = B_{ab}^\alpha \theta^b,$$

$$dA_{aa}^\alpha - A_{ab}^\alpha \theta_a^b - A_{\beta a}^\alpha \omega_a^\beta + A_{aa}^\beta \omega_\beta^\alpha = B_{aab}^\alpha \theta^b,$$

$$(a, b = \overline{1,q}; \hat{\alpha}, \hat{\beta} = \overline{3,5}; \alpha, \beta = \overline{1,2}). \quad (1.4)$$

Параметрические формы θ^a можно считать базовыми формами некоторого дифференцируемого многообразия M_q , каждой точке B которого отвечает вполне определённая 2-плоскость $l_2 \in S_q$. В дальнейшем будем рассматривать пространство L_q , изоморфное касательному пространству T_q к M_q в точке B . При этом в L_q с центром в точке B вводится центроаффинная структура, определяемая локальным центроаффинным репером $\bar{R} = \{\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a\}$, где

$$\delta \bar{\varepsilon}_a = \tilde{\theta}_a^b \bar{\varepsilon}_b, \quad \tilde{\theta}_a^b = \theta_a^b \Big|_{\theta^c = 0}.$$

Каждой плоскости l_2 из A_5 поставим в соответствие однозначным образом 3-плоскость l_3 так, чтобы выполнялись условия:

$$l_3 \cap l_2 = \bar{A}, \quad l_3 \cup l_2 = A_5, \quad l_3 = (\bar{A}, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5) \quad (1.5)$$

Тогда $\omega^\alpha = C_a^\alpha \omega^a + D_\beta^{\alpha\beta} \omega_\beta^b$, $\omega_a^\alpha = C_{a\beta}^\alpha \omega^\beta + D_{a\beta}^{\alpha\beta} \omega_\beta^b$, где $A_a^\alpha = C_a^\alpha A_a^\alpha + D_\beta^{\alpha\beta} A_{\beta a}^\beta$, $A_{aa}^\alpha = C_{a\beta}^\alpha A_a^\beta + D_{a\beta}^{\alpha\beta} A_{\beta a}^\beta$, $(\alpha, \beta = \overline{1,2}; \hat{\alpha}, \hat{\beta} = \overline{3,5}; a, b = \overline{1,q})$.

Эта 3-плоскость l_3 называется нормалью в смысле А.П. Нордена [3] или оснащающей плоскостью, или просто оснащением 2-плоскости l_2 .

В данной статье решается задача об инвариантном определении оснащения q -семейства 2-плоскостей l_2 в A_5 , т.е. выяснения случаев, когда величины A_a^α и A_{aa}^α являются вполне определёнными функциями величин $A_a^\alpha, A_{aa}^\alpha$.

2. Основные направления и гиперплоскости при $2 < q \leq 8$

На многообразии M_q , ($2 < q \leq 8$), рассмотрим некоторую линию, проходящую через точку $B \in M_q$:

$$\begin{aligned} \theta^a &= t^a \theta, \quad D\theta = \theta \wedge \theta_1, \\ dt^a - t^a \theta_1 + t^b \theta_b^a &= t_1^a \theta, \\ (a, b &= \overline{1, q}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Касательную к этой линии в точке B будем обозначать

$$\bar{t} = t^a (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a) \quad (2.2)$$

и называть направлением. Пусть точка $\bar{X} = \bar{A} + x^1 \bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_2$ является фокусом [2] плоскости $l_b = (\bar{A}, \bar{e}_b, \bar{e}_2)$ вдоль (2.2). Тогда выполняется условие $(d\bar{X}, \bar{e}_b, \bar{e}_2) = 0$, из которого с учетом (1.1) и (2.1) получаем:

$$(x^\alpha A_{aa}^\alpha + A_a^\alpha) t^a = 0, \quad (\alpha = 1, 2; \hat{\alpha} = 3, 4, 5; a = \overline{1, q}). \quad (2.3)$$

Обозначим $x^0 = 1$, $A_a^\alpha = A_{0a}^\alpha$, тогда система (2.3) примет вид:

$$x^\alpha A_{aa}^\alpha = 0, \quad (\bar{\alpha} = 0, 1, 2; \hat{\alpha} = 3, 4, 5; a = \overline{1, q}). \quad (2.3')$$

Система (2.3') имеет нетривиальные решения относительно x^0, x^1, x^2 тогда и только тогда, когда $\det[A_{aa}^\alpha] = 0$, т.е., когда

$$B_{abc} t^a t^b t^c = 0, \quad (a, b, c = \overline{1, q}), \quad (2.4)$$

где величины B_{abc} определяются по формулам:

$$B_{abc} = \frac{1}{3} \left| A_{\bar{\alpha}(a)}^3, A_{|\bar{\alpha}|b}^4, A_{|\bar{\alpha}|c}^5 \right| \quad (2.5)$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dB_{abc} - B_{a_1bc} \theta_a^{a_1} - B_{aa_1c} \theta_b^{a_1} - B_{aba_1c} \theta_c^{a_1} = B_{abca_1} \theta^{a_1}, \quad (2.6)$$

($a, b, c, a_1 = \overline{1, q}$; $\bar{\alpha} = 0, 1, 2$), ($\bar{\alpha}$ – номера строк).

Таким образом, множество всех фокальных направлений в L_q образует алгебраический конус Ψ_3^{q-1} третьего порядка и размерности $q-1$ с вершиной в точке B . Уравнение конуса Ψ_3^{q-1} имеет вид (2.4). Рассмотрим в L_q направление $\bar{v} = (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a) v^a$ проходящее через точку B . Этому направлению в L_q отвечает гиперплоскость V_{q-1} : $B_{abc} v^a v^b v^c = 0$ которая является линейной полярой или полярой порядка 2 направления \bar{v} относительно гиперконуса (2.4) в смысле [4, С. 1316]. Каждой точке $B \in M_q$ в L_q поставим в соответствие q направлений

$$v_b = v_b^a (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a), \quad (a, b = \overline{1, q}) \quad (2.7)$$

и соответствующих им q гиперплоскостей

$$w^b = (v_1, v_2, \dots, v_{b-1}, v_{b+1}, \dots, v_q), \quad (2.8)$$

проходящих через $q-1$ направлений v_a , кроме $v_b (a \neq b)$.

Определение 1: Направление $v_b \in L_q$ и соответствующие им гиперплоскости w^b называются *основными относительно гиперконуса Ψ_3^{q-1}* (в смысле [4]

или [5]), если они не принадлежат этому гиперконусу и каждая гиперплоскость w^b является линейной полярой соответствующего ему направления $v_b \notin w^b$ относительно этого гиперконуса.

Теорема 2.1. Каждой точке $B \in M_q$ в L_q в общем случае отвечает конечное число основных направлений v_b и соответствующих им гиперплоскостей w^b относительно Ψ_3^{q-1} ($q > 2$).

Доказательство. Пусть точке $B \in M_q$ в L_q соответствуют направления $v_b = v_b^a (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a)$, ($a, b = \overline{1, q}$). Для этих направлений линейными полярами относительно Ψ_3^{q-1} будут гиперплоскости вида:

$$\begin{aligned} \forall v_b \mapsto w^b &= (v_1, v_2, \dots, v_{b-1}, v_{b+1}, \dots, v_q) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \varphi_{ab} &:= B_{a_1 a_2 a_3} v_a^{a_1} v_a^{a_2} v_b^{a_3} = 0, \quad (a \neq b). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Таким образом, для определения v_a^b получаем систему $q(q-1)$ алгебраических уравнений 3-го порядка с q^2 неизвестными. Кроме того, выполняются следующие соотношения

$$B_{a_1 a_2 a_3} v_a^{a_1} v_a^{a_2} v_a^{a_3} \neq 0. \quad (2.10)$$

Рассмотрим матрицу Якоби системы (2.9):

$$I = \left[\frac{\partial \varphi_{ab}}{\partial v_c^d} \right], \quad (a, b, c, d = \overline{1, q}), \quad (2.11)$$

где частные производные вычисляются по формулам

$$\frac{\partial \varphi_{ab}}{\partial v_a^c} = 2B_{a_1 a_2 a_3} v_a^{a_1} v_b^{a_3}, \quad (a \neq b), \quad \frac{\partial \varphi_{ab}}{\partial v_b^c} = B_{a_1 a_2 a_3} v_a^{a_1} v_a^{a_3},$$

($a \neq b$). Дальнейшие рассуждения с учётом (2.9) – (2.11) аналогичны приведённым в статьях [4] и [5] в соответствии с [6, С. 146–147, теорема III, С. 183–184, теорема I]. В общем случае ранг матрицы (2.11) равен Q . Это означает, что система (2.9) состоит из Q алгебраических независимых уравнений с $Q^* = q^2$ неизвестными. Следовательно, она определяет конечное число основных направлений v_b и гиперплоскостей w^b . Если $\text{Rang } I < Q$, то в этом случае система (2.9) состоит из алгебраически зависимых уравнений и определяет бесчисленное множество основных направлений и гиперплоскостей в L_q . Заметим, что теорема имеет место в предположении, что $2 < q \leq 8$. Кроме того, величины $B_{a_1 a_2 a_3}$ зависят от $\bar{Q} = 9q$ величин A_a^α и A_{aa}^α , на которые накладывается q^2 соотношений. Поэтому должно быть $q^2 < 9q \Rightarrow q < 9$. Проведем в q – плоскости L_q точки $B \in M_q$ ($2 < q \leq 8$) такую канонизацию центроаффинного репера \bar{R} , при которой:

$$B_{aab} = 0, \quad B_{aaa} \neq 0, \quad B \neq 0, \quad (a \neq b), \quad (2.12)$$

Из дифференциальных уравнений (2.6) получаем, что формы θ_a^b , ($a \neq b$), являются главными, т.е. $\theta_a^b = \bar{B}_{ac}^b \theta^c$, ($a \neq b$). Геометрически это означает, что направления $v_i^a = (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a) \in L_q$ и гиперплоскости $w_{q-1a} = (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \dots, \bar{\varepsilon}_{a-1}, \bar{\varepsilon}_{a+1}, \bar{\varepsilon}_q)$ являются основными относительно гиперконуса Ψ_3^{q-1} . При этом из рассмотрения исключается случай $B_{aaa} = 0$, когда $v_i^a \in \Psi_3^{q-1}$, и $B = 0$, когда основные v_i^a и w_{q-1a} определя-

ются бесчисленным числом способов. Заметим, что канонизация центроаффинного репера \bar{R} в L_q типа (2.12) существует в соответствии с [7].

3. Случай $q = 2$

В этом параграфе будет дано построение оснащения 2-семейства S_2 плоскостей l_2 в A_5 . Как отмечено в предыдущем параграфе, гиперконус ψ_1^1 представляет собой совокупность трех основных направлений, проходящих через точку $B \in M_2$, которые в силу (2.4) и (2.5) определяются из алгебраического уравнения третьего порядка:

$$B_{111} + 3B_{112}\lambda + 3B_{221}\lambda^2 + B_{222}\lambda^3 = 0, \quad t^2 = \lambda t^1,$$

$$B_{111} = \begin{vmatrix} A_1^3 & A_1^4 & A_1^5 \\ A_{11}^3 & A_{11}^4 & A_{11}^5 \\ A_{21}^3 & A_{21}^4 & A_{21}^5 \end{vmatrix}, \quad B_{222} = \begin{vmatrix} A_2^3 & A_2^4 & A_2^5 \\ A_{12}^3 & A_{12}^4 & A_{12}^5 \\ A_{22}^3 & A_{22}^4 & A_{22}^5 \end{vmatrix},$$

$$B_{112} = \frac{1}{3} \left\{ \begin{vmatrix} A_1^3 & A_1^4 & A_2^5 \\ A_{11}^3 & A_{11}^4 & A_{12}^5 \\ A_{21}^3 & A_{21}^4 & A_{22}^5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1^3 & A_2^4 & A_1^5 \\ A_{11}^3 & A_{12}^4 & A_{11}^5 \\ A_{21}^3 & A_{22}^4 & A_{21}^5 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} A_2^3 & A_1^4 & A_1^5 \\ A_{12}^3 & A_{11}^4 & A_{11}^5 \\ A_{22}^3 & A_{21}^4 & A_{21}^5 \end{vmatrix} \right\},$$

$$B_{221} = \frac{1}{3} \left\{ \begin{vmatrix} A_1^3 & A_2^4 & A_2^5 \\ A_{11}^3 & A_{12}^4 & A_{12}^5 \\ A_{21}^3 & A_{22}^4 & A_{22}^5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_2^3 & A_1^4 & A_2^5 \\ A_{12}^3 & A_{11}^4 & A_{12}^5 \\ A_{22}^3 & A_{21}^4 & A_{22}^5 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} A_2^3 & A_2^4 & A_1^5 \\ A_{22}^3 & A_{22}^4 & A_{11}^5 \end{vmatrix} \right\}. \quad (3.1)$$

Проведем в L_2 канонизацию центроаффинного репера \bar{R} типа (2.12):

$$B_{112} = 0, \quad B_{221} = 0, \quad B_{111} \neq 0, \\ B_{222} \neq 0 \Rightarrow B = -B_{111}B_{222} \neq 0. \quad (3.2)$$

Из (3.1) следует, что в L_2 каждой точки $B \in M_2$ основными направлениями будут

$$\bar{v}_1 = (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_1), \quad \bar{v}_2 = (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_2), \\ \bar{v}_3 = (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_1 + \varepsilon \bar{\varepsilon}_2), \quad (\varepsilon \neq 0), \quad (3.3)$$

где величина ε определяется из уравнения

$$B_{222}\varepsilon^3 + B_{111} = 0, \quad (\varepsilon \neq 0, \quad \varepsilon \neq \infty). \quad (3.4)$$

Рассмотрим в пространстве A_5 гиперплоскость Γ_4 , отвечающую точке $B \in M_2$ и проходящую через плоскость $l_2 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$:

$$\Gamma_4(x) : x_3x^3 + x_4x^4 + x_5x^5 = 0. \quad (3.5)$$

Найдем $d[\bar{e}_1, \bar{e}_2] = (\omega_1^1 + \omega_2^2)[\bar{e}_1, \bar{e}_2] + \omega_1^2[\bar{e}_1, \bar{e}_2] + \omega_2^1[\bar{e}_1, \bar{e}_2]$. Здесь символом $[\bar{e}_1, \bar{e}_2]$ обозначается бивектор векторов \bar{e}_1, \bar{e}_2 . Следовательно, $\Gamma_4(x)$ содержит l_2 и параллельна $(l_2)'$, смежной l_2 вдоль некоторого направления

$$\theta^1 : \theta^2 = t^1 : t^2 \quad (3.6)$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x_3A_{1a}^3t^a + x_4A_{1a}^4t^a + x_5A_{1a}^5t^a = 0, \\ x_3A_{2a}^3t^a + x_4A_{2a}^4t^a + x_5A_{2a}^5t^a = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

т.е., когда выполняется условие:

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} A_{1a}^3t^a & A_{1a}^4t^a & A_{1a}^5t^a \\ A_{2a}^3t^a & A_{2a}^4t^a & A_{2a}^5t^a \end{bmatrix} = 2.$$

Каждому направлению (3.6) в A_5 отвечает одна гиперплоскость $\Gamma_4(t^1:t^2)$ типа (3.5), которая вдоль этого направления параллельна $(l_2)'$. Тангенциальные координаты x_3, x_4, x_5 такой гиперплоскости при заданных t^1, t^2 определяются из системы (3.7). Рассмотрим гиперплоскости, отвечающие направлениям (3.3) и определяемые соответствующими системами (3.7):

$$l_4^{45} = \Gamma_4(\bar{v}_1) = \Gamma_4(1, 0) : \begin{cases} x_3A_{11}^3 + x_4A_{11}^4 + x_5A_{11}^5 = 0, \\ x_3A_{21}^3 + x_4A_{21}^4 + x_5A_{21}^5 = 0, \end{cases}$$

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} A_{11}^3 & A_{11}^4 & A_{11}^5 \\ A_{21}^3 & A_{21}^4 & A_{21}^5 \end{bmatrix} = 2. \quad (3.8)$$

$$l_4^{35} = \Gamma_4(\bar{v}_2) = \Gamma_4(0, 1) : \begin{cases} x_3A_{12}^3 + x_4A_{12}^4 + x_5A_{12}^5 = 0, \\ x_3A_{22}^3 + x_4A_{22}^4 + x_5A_{22}^5 = 0, \end{cases}$$

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} A_{12}^3 & A_{12}^4 & A_{12}^5 \\ A_{22}^3 & A_{22}^4 & A_{22}^5 \end{bmatrix} = 2. \quad (3.9)$$

$$l_4^{34} = \Gamma_4(\bar{v}_3) =$$

$$= \Gamma_4(0, 1) : \begin{cases} x_3(A_{11}^3 + \varepsilon A_{12}^3) + x_4(A_{11}^4 + \varepsilon A_{12}^4) + \\ + x_5(A_{11}^5 + \varepsilon A_{12}^5) = 0, \\ x_3(A_{21}^3 + \varepsilon A_{22}^3) + x_4(A_{21}^4 + \varepsilon A_{22}^4) + \\ + x_5(A_{21}^5 + \varepsilon A_{22}^5) = 0, \end{cases}$$

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} A_{11}^3 + \varepsilon A_{12}^3 & A_{11}^4 + \varepsilon A_{12}^4 & A_{11}^5 + \varepsilon A_{12}^5 \\ A_{21}^3 + \varepsilon A_{22}^3 & A_{21}^4 + \varepsilon A_{22}^4 & A_{21}^5 + \varepsilon A_{22}^5 \end{bmatrix} = 2. \quad (3.10)$$

Проведем следующую канонизацию аффинного репера R в A_5 в соответствии с [7]:

$$A_{11}^3 = 0, \quad A_{21}^3 = 0, \quad A_{12}^4 = 0, \quad A_{22}^4 = 0, \\ A_{11}^5 + \varepsilon A_{12}^5 = 0, \quad A_{21}^5 + \varepsilon A_{22}^5 = 0,$$

$$A = \begin{vmatrix} A_{11}^4 & A_{11}^5 \\ A_{21}^4 & A_{21}^5 \end{vmatrix} \neq 0; \quad A = \begin{vmatrix} A_{12}^3 & A_{12}^5 \\ A_{22}^3 & A_{22}^5 \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$A = \begin{vmatrix} A_{12}^3 & A_{11}^4 \\ A_{22}^3 & A_{21}^4 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.11)$$

Тогда следующие формы становятся главными: $\omega_{\alpha}^{\beta} = A_{\alpha}^{\beta} \theta^{\alpha}$, ($\hat{\alpha} \neq \hat{\beta}$), величины A_{α}^{β} удовлетворяют дифференциальным уравнениям: $dA_{\alpha}^{\beta} - A_{\alpha}^{\beta} \theta^{\alpha} - A_{\alpha}^{\beta} \omega_{\alpha}^{\alpha} = A_{\alpha}^{\beta} \theta^{\alpha}$, ($\hat{\alpha}, \hat{\beta} = 3, 4, 5$; $a, b = 1, 2$). Фиксация (3.11) геометрически означает, что гиперплоскости (3.8–3.10) имеют вид: $l_4^{45} = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_4, \bar{e}_5)$, $l_3^5 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_5)$, $l_4^4 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4)$. Отсюда вытекает геометрическая характеристика 3-плоскостей, проходящих через l_2 : $l_3^3 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, $l_4^4 \cap l_3^5$, $l_3^3 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_4) = l_4^4 \cap l_3^5$, $l_3^3 = l_4^4 \cap l_3^5$. Заметим, что из (3.11) вытекают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= \lambda_1 \omega_2^3, \quad \omega_1^4 = \lambda_2 \omega_2^4, \\ \omega_1^5 &= \lambda_3 \omega_2^5, \quad \omega_2^5 = A_{22}^5 (-\varepsilon \theta^1 + \theta^2), \\ A_{12}^3 &= \lambda_1 A_{22}^3, \quad A_{11}^4 = \lambda_2 A_{21}^4, \\ A_{12}^5 &= \lambda_3 A_{22}^5, \quad A_{11}^5 = \lambda_3 A_{21}^5. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Причем величины $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} 3B_{112} &= A_1^3 A_{21}^4 A_{22}^5 (\lambda_2 - \lambda_3) + A_2^3 A_{21}^4 A_{21}^5 (\lambda_2 - \lambda_3) + \\ &+ A_1^4 A_{22}^3 A_{21}^5 (\lambda_3 - \lambda_1) + A_1^5 A_{22}^3 A_{21}^4 (\lambda_1 - \lambda_2) = 0, \\ 3B_{221} &= A_2^3 A_{21}^4 A_{22}^5 (\lambda_2 - \lambda_3) + A_1^4 A_{22}^3 A_{22}^5 (\lambda_3 - \lambda_1) + \\ &+ A_2^5 A_{22}^3 A_{21}^4 (\lambda_1 - \lambda_2) + A_1^4 A_{22}^3 A_{21}^5 (\lambda_3 - \lambda_1) = 0, \\ B_{111} &= A_1^3 A_{21}^4 A_{21}^5 (\lambda_2 - \lambda_3) \neq 0, \\ B_{222} &= A_2^3 A_{22}^4 A_{22}^5 (\lambda_3 - \lambda_1) \neq 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} (1) \quad A &= A_{21}^4 A_{21}^5 (\lambda_2 - \lambda_3) \neq 0, \\ (2) \quad A &= A_{22}^3 A_{22}^5 (\lambda_1 - \lambda_3) \neq 0, \\ (3) \quad A &= A_{22}^3 A_{21}^4 (\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Пусть точка с радиус – вектором $\bar{X} = \bar{A} + x^1 \bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_2 + x^3 \bar{e}_3$ описывает характеристику [2] Γ_3^{45} гиперплоскости l_3^{45} вдоль основного направления $\bar{v}_2 = (\bar{B}, \bar{e}_2)$, ($\theta^1=0, \theta^2 \neq 0$). Тогда из $(d\bar{X}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_4, \bar{e}_5) = 0$ получаем следующую систему, определяющую указанную характеристику:

$$\Gamma_3^{45} : A_2^3 + x^1 A_{12}^3 + x^2 A_{22}^3 + x^4 A_{42}^3 + x^5 A_{52}^3 = 0, \quad x^3 = 0. \quad (3.15)$$

Здесь $(d\bar{X}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_4, \bar{e}_5) = 0$ означает линейное выражение вектора $d\bar{X}$ через векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_4$ и \bar{e}_5 . Аналогично получаем уравнения характеристики Γ_3^{35} гиперплоскости l_3^{35} вдоль основного направления $\bar{v}_1 = (\bar{B}, \bar{e}_1)$, ($\theta^1 \neq 0, \theta^2=0$):

$$\Gamma_3^{35} : \begin{cases} A_1^4 + x^1 A_{11}^4 + x^2 A_{21}^4 + x^3 A_{31}^4 + x^5 A_{51}^4 = 0, \\ x^4 = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Рассмотрим точку

$$\bar{C} = \bar{A} + c^1 \bar{e}_1 + c^2 \bar{e}_2 = l_2 \cap \Gamma_3^{45} \cap \Gamma_3^{35}. \quad (3.17)$$

Тогда из (3.15–3.17) получаем следующую систему для определения c^1 и c^2 :

$$\begin{cases} x^3 = 0, \quad x^4 = 0, \quad x^5 = 0, \\ A_2^3 + c^1 A_{12}^3 + c^2 A_{22}^3 = 0, \\ A_1^4 + c^1 A_{11}^4 + c^2 A_{21}^4 = 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Определитель системы (3.18) отличен от нуля в силу (3.11). Поэтому в плоскости l_2 , отвечающей точке $B \in M_2$, в общем случае существует одна точка \bar{C} .

Проведем такую канонизацию аффинного репера R в A_3 , при которой:

$$A_2^3 = 0, \quad A_1^4 = 0 \Rightarrow \omega^3 = A_1^3 \theta^1, \quad \omega^4 = A_2^4 \theta^2. \quad (3.19)$$

Она приведет к следующим дифференциальным уравнениям: $\omega^{\alpha} = A_{\alpha}^{\alpha} \theta^{\alpha}$, $dA_{\alpha}^{\alpha} - A_{\alpha}^{\alpha} \theta^{\alpha} + A_{\alpha}^{\beta} \omega_{\beta}^{\alpha} + A_{\alpha}^{\beta} \omega_{\alpha}^{\beta} = B_{\alpha}^{\alpha} \theta^{\alpha}$, ($a, b = 1, 2$; $\alpha = 1, 2$; $\hat{\alpha} = 3, 4, 5$). Заметим, что с учётом [7] фиксация типа (3.19) существует. Из (3.18) следует, что после фиксации (3.19) точка $\bar{C} = \bar{A}$. Кроме того, из (3.13) и (3.14), используя (3.4) и (3.19), получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A_1^3 (A_{11}^4 A_{22}^5 - A_{21}^4 A_{12}^5) + \varepsilon A_2^4 (A_{11}^5 A_{22}^3 - A_{21}^5 A_{12}^3) &= 0, \\ A_1^3 A_{21}^4 A_{22}^5 (\lambda_2 - \lambda_3) + \varepsilon A_2^4 A_{22}^3 A_{21}^5 (\lambda_3 - \lambda_1) &= 0, \\ A_1^5 + \varepsilon A_2^5 &= 0. \end{aligned}$$

Обычным путем находятся следующие уравнения:

1) характеристика Γ_1^3 плоскости $l_3^3 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ вдоль направления $\bar{v}_1 = (\bar{B}, \bar{e}_1)$, ($\theta^1 \neq 0, \theta^2 = 0$) определяется линейными уравнениями:

$$\Gamma_1^3 : \begin{cases} A_{11}^4 x^1 + A_{21}^4 x^2 + A_{31}^4 x^3 = 0, \\ A_1^5 + A_{11}^5 x^1 + A_{21}^5 x^2 + A_{31}^5 x^3 = 0, \\ x^4 = 0, \quad x^5 = 0, \end{cases}$$

2) характеристика Γ_1^4 плоскости $l_3^4 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_4)$ вдоль направления $\bar{v}_2 = (\bar{B}, \bar{e}_2)$, ($\theta^2 \neq 0, \theta^1 = 0$) определяется линейными уравнениями:

$$\Gamma_1^4 : \begin{cases} A_{12}^3 x^1 + A_{22}^3 x^2 + A_{42}^3 x^4 = 0, \\ A_2^5 + A_{12}^5 x^1 + A_{22}^5 x^2 + A_{42}^5 x^4 = 0, \\ x^3 = 0, \quad x^5 = 0, \end{cases}$$

3) характеристика Γ_1^5 плоскости $l_3^5 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_5)$ вдоль направления $\bar{v}_3 = (\bar{B}, \bar{e}_1 + \varepsilon \bar{e}_2)$, ($\theta^2 = \varepsilon \theta^1$) определяется линейными уравнениями:

$$\Gamma_1^5 : \begin{cases} A_1^3 + \varepsilon A_{12}^3 x^1 + \varepsilon A_{22}^3 x^2 + \\ + (A_{51}^3 + \varepsilon A_{52}^3) x^5 = 0, \\ \varepsilon A_2^4 + A_{11}^4 x^1 + A_{21}^4 x^2 + \\ + (A_{51}^4 + \varepsilon A_{52}^4) x^5 = 0, \\ x^3 = 0, \quad x^4 = 0. \end{cases}$$

Проведем заключительную канонизацию аффинного репера R в соответствии с [7]:

$$\begin{aligned} A_{31}^4 &= 0, \quad A_{31}^5 = 0, \quad A_{42}^3 = 0, \quad A_{42}^5 = 0, \\ A_{51}^3 + \varepsilon A_{52}^3 &= 0, \quad A_{51}^4 + \varepsilon A_{52}^4 = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Отсюда в силу (1.3) следует, что

$$\begin{aligned} \omega_3^4 &= A_{32}^4 \theta^2, \quad \omega_4^3 = A_{41}^3 \theta^1, \quad \omega_3^5 = A_{32}^5 \theta^2, \quad \omega_4^5 = A_{41}^5 \theta^1, \\ \omega_5^3 &= A_{52}^3 (-\varepsilon \theta^1 + \theta^2), \quad \omega_5^4 = A_{52}^4 (-\varepsilon \theta^1 + \theta^2), \end{aligned}$$

$$\omega_a^\alpha = A_{aa}^\alpha \theta^a, \quad dA_{aa}^\alpha - A_{ab}^\alpha \theta_a^b + A_{aa}^\beta \omega_\beta^a + A_{aa}^\beta \omega_\beta^a = B_{aab}^\alpha \theta^b.$$

Таким образом, при фиксации (3.20) прямые $l_1^\alpha = (\bar{A}, \bar{e}_\alpha)$, ($\hat{\alpha} = 3, 4, 5$), выбираются следующим образом: $l_1^\alpha \uparrow \Gamma_1^\alpha$. Поэтому заключаем, что оснащение l_3 геометрически характеризуется тем, что оно содержит прямые l_1^α :

$$l_3 = (\bar{A}, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5) = l_1^3 \cup l_1^4 \cup l_1^5. \quad (3.21)$$

4. Оснащение семейства S_q при $2 < q \leq 8$

В этом параграфе будет дано построение инвариантного оснащения при $2 < q \leq 8$. При этом будем предполагать, что в пространстве L_q , соответствующем каждой точке $B \in M_q$, проведена фиксация центрораффинного репера R , осуществленная по формулам (2.12) при любых q ($2 < q \leq 8$). Рассмотрим в плоскости $l_2 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ точку $\bar{X} = \bar{A} + x^1 \bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_2$, отвечающую точке $B \in M_q$. Пусть эта точка является фокусом плоскости l_2 вдоль (фокальной) интегральной линии, принадлежащей распределению $\Delta_3^{l_2}$: $\theta^4 = \theta^5 = \dots = \theta^q = 0$ в смысле [8]. Это распределение каждой точке $B \in M_q$ ставит в соответствие 3-плоскость $\Gamma_3^{l_2} = (\bar{B}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \subset L_q$, натянутую на направления $v_1^1 = (\bar{B}, \bar{e}_1)$, $v_1^2 = (\bar{B}, \bar{e}_2)$ и $v_1^3 = (\bar{B}, \bar{e}_3)$. Тогда $(d\bar{X}, \bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0$, $\theta^4 = \theta^5 = \dots = \theta^q = 0$. Отсюда получаем следующую систему, определяющую фокусы и фокальные направления:

$$x^{\hat{\alpha}} A_{aa}^{\hat{\alpha}} \theta^{\hat{\alpha}} = 0, \quad x^{\hat{\alpha}} = 0, \quad \theta^4 = \theta^5 = \dots = \theta^q = 0. \quad (4.1)$$

$$x^0 = 1, \quad \omega_0^{\hat{\alpha}} = \bar{\omega}^{\hat{\alpha}}, \quad (\bar{\alpha} = 0, 1, 2; \hat{\alpha} = 3, 4, 5; \bar{a} = 1, 2, 3).$$

Система (4.1) имеет нетривиальные решения относительно $\theta^{\hat{\alpha}}$ тогда и только тогда, когда

$$\det[x^{\hat{\alpha}} A_{aa}^{\hat{\alpha}}] = 0, \quad (4.2)$$

или, когда

$$\begin{aligned} \Phi_1^3 : A_{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3} x^{\bar{\alpha}_1} x^{\bar{\alpha}_2} x^{\bar{\alpha}_3} &= 0, \quad x^{\hat{\alpha}} = 0, \\ (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3 &= 0, 1, 2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь симметрические величины $A_{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3}$ определяются по формулам: $A_{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3} = 1/3 |A_{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3}^1 A_{\bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3 \bar{\alpha}_1}^4 A_{\bar{\alpha}_3 \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2}^5|$, ($\bar{\alpha}$ – номера строк), и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} dA_{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3} - A_{\alpha \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3} \omega_{\bar{\alpha}_1}^\alpha - A_{\bar{\alpha}_1 \alpha \bar{\alpha}_3} \omega_{\bar{\alpha}_2}^\alpha - \\ - A_{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \alpha} \omega_{\bar{\alpha}_3}^\alpha &= A_{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3 a} \theta^a. \end{aligned}$$

Таким образом, множество всех фокусов плоскости l_2 образует фокусную алгебраическую кривую Φ_1^3 третьего порядка, определяемую уравнениями (4.3). Каждой точке этой кривой отвечает фокальное направление, определяемое из системы (4.1) при условии (4.2). Из (4.3) замечаем, что линейным полюсом несобственной прямой плоскости l_2 относительно Φ_1^3 (т.е. центром фокусной кривой Φ_1^3) является точка $\bar{C} = \bar{A} + c^1 \bar{e}_1 + c^2 \bar{e}_2$, где c^1, c^2 определяются из системы $A_{0a\beta} c^\alpha + A_{00\beta} = 0$, ($\alpha, \beta = 1, 2$). Эта система будет иметь единственное решение относительно c^α (т.е. существует единственный центр \bar{C}) тогда и только тогда, когда $\bar{A} = \det[A_{0a\beta}] \neq 0$, ($\alpha, \beta = 1, 2$). В противном случае она будет иметь бесчисленное множество решений (т.е. существует прямая центров) или вовсе не будет иметь решений (т.е. кривая Φ_1^3 не имеет центра).

Проведем в A_5 такую канонизацию аффинного репера R , при которой

$$A_{00\alpha} = 0, \quad \tilde{A} \neq 0, \quad (4.4)$$

что приводит к дифференциальным уравнениям: $\omega^\alpha = A_a^\alpha \theta^a$, $dA_a^\alpha - A_b^\alpha \theta_a^b + A_a^\beta \omega_\beta^a + A_a^{\hat{\alpha}} \omega_{\hat{\alpha}}^a = A_{ab}^\alpha \theta^b$. Откуда следует, что эта канонизация репера R существует в соответствии с [7]. Теперь центром фокусной кривой Φ_1^3 является точка $\bar{C} = \bar{A}$. Из (4.3) с учетом (4.4) замечаем, что кривая второго порядка K_1^3 : $A_{0a\beta} x^\alpha x^\beta + A_{00\beta} = 0$ является квадратичной полярой точки \bar{C} относительно Φ_1^3 , а прямые Γ_1 : $A_{0a\beta} x^\alpha x^\beta = 0$, $x^{\hat{\alpha}} = 0$ образуют в l_2 асимптотические направления относительно фокусной кривой Φ_1^3 . Заметим, что в силу (4.4) кривая K_1^3 не вырождается. Будем иметь вдоль $\Delta_3^{l_2}$: $d\bar{A} = \omega^\alpha \bar{e}_\alpha + \omega^{\hat{\alpha}} \bar{e}_{\hat{\alpha}} | \theta^4 = \dots = \theta^q = 0 = \bar{E}_\alpha \theta^{\hat{\alpha}}$: где

$$\bar{E}_\alpha = A_a^\alpha \bar{e}_a + A_a^{\hat{\alpha}} \bar{e}_{\hat{\alpha}}, \quad (\bar{a} = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2; \hat{\alpha} = 3, 4, 5). \quad (4.5)$$

Заметим, что векторы (4.5) линейно независимы, когда $\text{Rang}[A_a^\alpha; A_a^{\hat{\alpha}}] = 3$. В этом случае все касательные к линиям (\bar{A}) , описываемым точкой \bar{A} вдоль интегральных кривых распределения $\Delta_3^{l_2}$, лежат в одной и той же 3-плоскости $l_3 = (\bar{A}, \bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3)$.

Проведем в соответствии с [7] заключительную канонизацию аффинного репера R в A_5 :

$$A_a^\alpha = 0, \quad \bar{A} = \det[A_a^{\hat{\alpha}}] \neq 0, \quad (4.6)$$

что приводит к дифференциальным уравнениям: $\omega_a^\alpha = A_{aa}^\alpha \theta^a$, $dA_{aa}^\alpha - A_{ab}^\alpha \theta_a^b + A_{aa}^\beta \omega_\beta^a - A_{\beta a}^\alpha \omega_a^\beta = A_{aab}^\alpha \theta^b$.

Геометрически канонизация (4.6) означает, что

$$l_3 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3). \quad (4.7)$$

Из (1.5) следует, что 3-плоскость (4.7) является оснащением. Это оснащение будем называть основным оснащением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кругляков Л.З. Основы проективно-дифференциальной геометрии семейств многомерных плоскостей. Учебное пособие. — Томск: Изд-во Томского ун-та, 1980. — С. 110.
2. Аквис М.А. Фокальные образы поверхностей ранга r // Изв. вузов. Сер. Математика. — 1957. — № 1. — С. 9—19.
3. Остиану Н.М. Об инвариантном оснащении семейств многомерных плоскостей в проективном пространстве: Труды геометрического семинара. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1969. — Т. 2. — С. 247—262.
4. Ивлев Е.Т. О многообразии $E(L, L_m, L_{m+1}^{\infty})$ в n -мерном проективном пространстве $P_n(m>2)$ // Сибирский математический журнал. — 1967. — Т. 8. — № 6. — С. 1307—1320.
5. Ивлев Е.Т. О многообразии $T(0, n-m, m)$ в n -мерном проективном пространстве $P_n(m>2, n<m(m+1))$ // Сибирский математический журнал. — 1967. — Т. 8. — № 5. — С. 1143—1156.
6. Ходж В., Пидо Д. Методы алгебраической геометрии. Т. I. — М.: ИЛ, 1954.
7. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl (RNR). — 1962. — V. 2. — P. 231—240.
8. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Непроков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1979. — С. 7—246.

УДК 681.518:519.68

НЕЧЕТКОЛОГИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ВЕЛИЧИН

И.А. Ходашинский

Томский университет систем управления и радиоэлектроники
E-mail: ila@tes.tomsk.elektra.ru

Рассмотрена система оценивания величин, выраженных в виде нечетких множеств. Основой для оценивания является нечеткая логика. Определены способы задания основных логических операций. Приведены результаты анализа оценивания величин при различных функциях принадлежности и различных функциях, задающих операторы t -норм и t -ко-норм.

Введение

Под величиной будем понимать сущность, в которой проявляются измеряемые, вычисляемые или оцениваемые свойства, свойства эти являются частью описания объекта, явления, процесса и определяют аспекты их поведения. Характерным признаком величины является изменчивость, причем пределы возможных изменений могут быть достаточно точно определены априори.

В теории оценивания можно выделить несколько подходов:

- *логико-философский (аксиологический)* подход, здесь оценка — это субъективное сравнение или отношение, касающееся объектов, событий, явлений и выраженное в положительной или отрицательной форме, в форме согласия или критики, в предпочтении или неприятии, одобрении или осуждении [1];
- *когнитивно-лингвистический* подход предполагает переход от ценностной ориентации оценок к расширенному их толкованию [2], здесь различают четыре типа оценок: 1) количественные оценки, выраженные через описание размерности оцениваемых объектов; 2) прототипические оценки — это сравнение со свойствами, присущими большинству рассматриваемых предметов оценивания; шкала прототипических оценок содержит значения нормы, минимум и максимум; 3) гомеостатические или целевые оценки харак-

теризуют имеющиеся у оценивающего субъекта ресурсы, требующиеся для достижения некоторой цели; шкала данного типа оценок упорядочивает затраты ресурсов от минимального до максимального; 4) общие оценки — это по сути оценки в их логико-философском толковании;

- *статистическая теория оценок* нацелена на определение количественных характеристик случайных величин в условиях ограниченного числа испытаний, основана она на методах теории вероятностей; основой этих методов является положение о том, что усредненные случайные характеристики изучаемых объектов, событий и явлений приближаются к детерминированным при возрастании числа измерений, испытаний или наблюдений;
- *оценивание в интервальном анализе* имеет своей целью получение приближенного ответа при решении задач и получение оценки возможной погрешности, полученного результата. Природа неопределенности величин, с которой имеет дело интервальный анализ, принципиально отличается от той, с которой оперирует статистический анализ. Последний имеет дело со случайными величинами, в то время как интервальный анализ с ненадежными данными. Основным понятием в интервальном анализе является интервальное число, которое задается двумя вещественными числами, являющимися нижней и верхней оценками [3].