

**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

---

Инженерная школа ядерных технологий

Направление подготовки 01.04.02. «Прикладная математика и информатика»

Отделение экспериментальной физики

**МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ**

Тема работы
Решения дифференциальных уравнений методом коллокации в программной среде MATLAB

УДК 517.9:004.42:004.942

Студент

Группа	ФИО	Подпись	Дата
0вм82	Шаймарданова Айжан Алтайханкызы		

Руководитель ВКР

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Доцент	Семенов Михаил Евгеньевич	к.ф.-м.н., доцент		

**КОНСУЛЬТАНТЫ:**

По разделу «Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение»

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Доцент	Рыжакина Татьяна Гавриловна	к.э.н., доцент		

По разделу «Социальная ответственность»

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Старший преподаватель	Романова Светлана Владимировна			

**ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ:**

Руководитель ООП	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Доцент	Семенов Михаил Евгеньевич	к.ф.-м.н., доцент		

Томск – 2020 г.

## Планируемые результаты освоения по ООП

Код результата	Результаты обучения
	Общепрофессиональные компетенции
P1	Самостоятельно приобретать, развивать и применять математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте.
P2	Владеть и применять методы и средства получения, хранения, переработки и трансляции информации посредством современных компьютерных технологий, в том числе в глобальных компьютерных сетях.
P3	Демонстрировать культуру мышления, способность выстраивать логику рассуждений и высказываний, основанных на интерпретации данных, интегрированных из разных областей науки и техники, выносить суждения на основании неполных данных, анализировать профессиональную информацию, выделять в ней главное, структурировать, оформлять и представлять в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями.
P4	Анализировать и оценивать уровни своих компетенций в сочетании со способностью и готовностью к саморегулированию дальнейшего образования и профессиональной мобильности. Владеть, по крайней мере, одним из иностранных языков на уровне социального и профессионального общения, применять специальную лексику и профессиональную терминологию языка.
	Демонстрировать способность к самостоятельному обучению новым методам исследования, способность самостоятельно приобретать с помощью информационных технологий и использовать в практической деятельности новые знания и умения.
P5	Использовать на практике умения и навыки в организации исследовательских работ по использованию математических методов и моделирования для решения задач, способность организовывать и руководить работой команды.
P6	Совершенствовать и развивать свой интеллектуальный и общекультурный уровень. Проявлять инициативу, в том числе в ситуациях риска, брать на себя всю полноту ответственности.
	Профессиональные компетенции
P7	Разрабатывать стратегии и цели проектирования, критерии эффективности и ограничения применимости, новые методы, средства и технологии использования математических методов в экономике, науке и технике
P8	Планировать и проводить теоретические исследования и компьютерные эксперименты при использовании математических методов в экономике, науке и технике

**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

---

Инженерная школа ядерных технологий

Направление подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

Отделение экспериментальной физики

УТВЕРЖДАЮ:

Руководитель ООП

\_\_\_\_\_  
Семенов М.Е.

(Подпись)      (Дата)      (Ф.И.О.)

**ЗАДАНИЕ**

**на выполнение выпускной квалификационной работы**

В форме:

Магистерской диссертации
--------------------------

Студенту:

Группа	ФИО
0BM82	Шаймардановой Айжан Алтайханкызы

Тема работы:

Решения дифференциальных уравнений методом коллокации в программной среде MATLAB	
Утверждена приказом директора (дата, номер)	

Срок сдачи студентом выполненной работы:	31.05.2020
--	------------

**ТЕХНИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ:**

<b>Исходные данные к работе</b> <i>(наименование объекта исследования или проектирования; производительность или нагрузка; режим работы (непрерывный, периодический, циклический и т. д.);</i>	Объект исследования - численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Разрабатываемые методы должны быть сопоставимы по значению погрешности решения и иметь меньший порядок сложности алгоритма по сравнению с существующими встроенными в программную среду MATLAB аналогами. Численный метод должен быть применим для основных типов обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.
<b>Перечень подлежащих исследованию, проектированию и разработке вопросов</b> <i>(аналитический обзор по литературным источникам с целью выяснения достижений мировой науки техники в рассматриваемой области; постановка задачи исследования, проектирования, конструирования; содержание процедуры исследования, проектирования, конструирования; обсуждение результатов выполненной работы; наименование дополнительных разделов, подлежащих разработке; заключение по работе).</i>	1. Провести сравнительный анализ литературы и определить последовательность решения поставленных задач. 2. Разработать алгоритм численного решения дифференциальных уравнений второго порядка методом коллокации в программной среде MATLAB. 3. Проанализировать влияние количества узлов коллокаций (больше/меньше базисных функций) и их выбор (равномерная, неравномерная сетка) на точность решения. 4. Вычислить значение погрешности численного решения, построить графики в сравнении с аналитическим и встроенным численным решениями. 5. Провести численные эксперименты разработанного алгоритма, сделать выводы и рекомендации по проделанной работе.
<b>Перечень графического материала</b> <i>(с точным указанием обязательных чертежей)</i>	1. Согласованная сетка и точки коллокации 2. Графики поведения погрешности при различном количестве узлов коллокаций и сетке
<b>Консультанты по разделам выпускной квалификационной работы</b> <i>(если необходимо, с указанием разделов)</i>	
Раздел	Консультант
Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение	Рыжакина Татьяна Гавриловна rigakina@tpu.ru
Социальная ответственность	Романова Светлана Владимировна romanova@tpu.ru

<b>Дата выдачи задания на выполнение выпускной квалификационной работы по линейному графику</b>	
---	--

**Задание выдал руководитель:**

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Доцент	Семенов М.Е.	к.ф.-м.н., доцент		

**Задание принял к исполнению студент:**

Группа	ФИО	Подпись	Дата
0BM82	Шаймарданова Айжан Алтайханкызы		

## ЗАДАНИЕ ДЛЯ РАЗДЕЛА «СОЦИАЛЬНАЯ ОТВЕТСТВЕННОСТЬ»

Студенту:

Группа	ФИО
0BM82	Шаймарданова Айжан Алтайханкызы

Школа	ИЯТШ	Отделение (НОЦ)	ОЭФ
Уровень образования	Магистратура	Направление/специальность	01.04.02 Прикладная математика и информатика

Тема ВКР:

<b>Решения дифференциальных уравнений методом коллокации в программной среде MATLAB</b>	
<b>Исходные данные к разделу «Социальная ответственность»:</b>	
1. Характеристика объекта исследования (вещество, материал, прибор, алгоритм, методика, рабочая зона) и области его применения	Объект исследования - численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Область применения: применяются для математического описания природных явлений.
<b>Перечень вопросов, подлежащих исследованию, проектированию и разработке:</b>	
<b>1. Правовые и организационные вопросы обеспечения безопасности:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– «Гигиенические требования к персональным электронно-вычислительным машинам и организации работы» (СанПиН 2.2.2/2.4.1340-03);</li> <li>– ГОСТ 12.2.032-78 «ССБТ. Рабочее место при выполнении работ сидя. Общие эргономические требования»;</li> <li>– «Трудовой кодекс Российской Федерации» от 30.12.2001 N 197-ФЗ (ред. от 16.12.2018)</li> </ul>
<b>2. Производственная безопасность:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Отклонение показателей микроклимата;</li> <li>– Превышение уровня шума;</li> <li>– Недостаточная освещенность рабочей зоны;</li> <li>– Повышенное значение напряжения в электрической цепи, замыкание которой может произойти через тело человека;</li> </ul>

	– Повышенный уровень электромагнитных излучений.
<b>3. Экологическая безопасность:</b>	Влияние объекта исследования на окружающую среду. – Утилизация компьютерной техники; – Утилизация бумаги, использованной в процессе разработки.
<b>4. Безопасность в чрезвычайных ситуациях:</b>	Чрезвычайная ситуация техногенного характера для данного помещения – пожар. Установка общих правил поведения и рекомендаций во время пожара, план эвакуации.

Дата выдачи задания для раздела по линейному графику	23.03.2020г.
--	--------------

**Задание выдал консультант:**

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Старший преподаватель	Романова С.В.			

**Задание принял к исполнению студент:**

Группа	ФИО	Подпись	Дата
0BM82	Шаймарданова А.А.		

## ЗАДАНИЕ ДЛЯ РАЗДЕЛА «ФИНАНСОВЫЙ МЕНЕДЖМЕНТ, РЕСУРСОЭФФЕКТИВНОСТЬ И РЕСУРСОСБЕРЕЖЕНИЕ»

Студенту:

<b>Группа</b>	<b>ФИО</b>
0BM82	Шаймарданова Айжан Алтайханкызы

<b>Школа</b>	<b>ИЯТШ</b>	<b>Отделение школы (НОЦ)</b>	<b>ОЭФ</b>
<b>Уровень образования</b>	Магистратура	<b>Направление/специальность</b>	01.04.02 Прикладная математика и информатика

### Исходные данные к разделу «Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение»:

1. Стоимость ресурсов научного исследования (НИ): материально-технических, энергетических, финансовых, информационных и человеческих	1. Стоимость расходных материалов; 2. Норматив заработной платы.
2. Нормы и нормативы расходования ресурсов	1. Коэффициенты для расчета заработной платы.
3. Используемая система налогообложения, ставки налогов, отчислений, дисконтирования и кредитования	1. Отчисления во внебюджетные фонды (27,1%); 2. Расчет дополнительной заработной платы.

### Перечень вопросов, подлежащих исследованию, проектированию и разработке:

1. Оценка коммерческого и инновационного потенциала НТИ	1. Потенциальные потребители; результатов исследования; 2. Анализ конкурентных технических решений; 3. SWOT – анализ.
2. Разработка устава научно-технического проекта	1. Цели и результат проекта; 2. Организационная структура проекта; 3. Ограничения и допущения проекта.
3. Планирование процесса управления НТИ: структура и график проведения, бюджет, риски и организация закупок	1. Разработка календарного плана проекта; 2. Бюджет научно – технического исследования (НТИ); 3. Реестр рисков проекта.
4. Определение ресурсной, финансовой, экономической эффективности	1. Определение интегрального финансового показателя разработки, ресурсоэффективности разработки, эффективности

### Перечень графического материала(с точным указанием обязательных чертежей):

1. «Портрет» потребителя результатов НТИ
2. Сегментирование рынка

3. Оценка конкурентоспособности технических решений
4. Матрица SWOT
5. График проведения и бюджет НТИ
6. Оценка ресурсной, финансовой и экономической эффективности НТИ
7. Потенциальные риски

Дата выдачи задания для раздела по линейному графику	31.01.2020г.
--	--------------

**Задание выдал консультант:**

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Доцент	Рыжакина Татьяна Гавриловна	Кандидат экономических наук		

**Задание принял к исполнению студент:**

Группа	ФИО	Подпись	Дата
0BM82	Шаймарданова Айжан Алтайханкызы		



## **Реферат**

Выпускная квалификационная работа содержит 115 страниц, 23 рисунков, 10 таблиц, 2 приложения, 26 использованных источников.

Ключевые слова: метод коллокаций, обыкновенные дифференциальные уравнения, базисные функции, краевая задача, полиномы.

Объект исследования является численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Цель данной работы заключается в разработке алгоритма решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом коллокации в программной среде MATLAB.

В результате работы был разработан алгоритм, который является эффективным средством решения сложных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Область применения: физика, биология, химия, экономика и в других науках и сферах деятельности человека.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

---

Введение .....	12
1. Объект и метод исследования.....	14
1.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения.....	14
1.2 Теоретические основы численных методов .....	17
1.3 Базисные функции .....	21
1.4 Метод коллокаций .....	22
2 ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ .....	28
2.1 Метод полиномиальной коллокации .....	28
2.2 Метод коллокации Фурье .....	38
2.3 Анализ устойчивости метода .....	49
3 СОЦИАЛЬНАЯ ОТВЕТСТВЕННОСТЬ.....	54
3.1 ПРАВОВЫЕ И ОРГАНИЗАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ БЕЗОПАСНОСТИ.....	54
3.1.1 Правовые нормы трудового законодательства для рабочей зоны.....	54
3.1.2 ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ .....	55
3.2 АНАЛИЗ ВРЕДНЫХ И ОПАСНЫХ ФАКТОРОВ, КОТОРЫЕ МОЖЕТ СОЗДАТЬ ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ. ....	56
3.2.1 Отклонение показателей микроклимата .....	56
3.2.2 Повышенный уровень шума .....	58
3.2.3 Недостаточная освещенность рабочей зоны.....	59
3.2.4 Повышенное значение напряжения в электрической цепи, замыкание которой может произойти через тело человека.....	61
3.2.4 Повышенный уровень электромагнитных излучений .....	64
3.3 ЭКОЛОГИЧЕСКАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ .....	65
3.4 БЕЗОПАСНОСТЬ ПРИ ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЯХ .....	66
4 ФИНАНСОВЫЙ МЕНЕДЖМЕНТ, РЕСУРСОЭФФЕКТИВНОСТЬ И РЕСУРСОСБРЕЖЕНИЕ .....	70
4.1 Предпроектный анализ .....	70
4.1.1 Потенциальные потребители результатов исследования .....	70

4.1.2 Анализ конкурентных технических решений с позиции ресурсоэффективности и ресурсосбережения .....	71
4.1.3 <i>SWOT</i> -анализ.....	72
4.1.4 Оценка готовности проекта к коммерциализации.....	74
4.1.5 Методы коммерциализации результатов научно-технического исследования .....	76
4.2 Инициализация проекта.....	76
4.2.1 Цели и результат проекта.....	77
4.2.2 Организационная структура проекта.....	78
4.2.3 Ограничения и допущения проекта.....	79
4.3 Планирование процесса управления НТИ: структура и график проведения, бюджет, риски и организация закупок .....	79
4.3.1 Разработка календарного плана проекта .....	79
4.3.2 Бюджет научного исследования .....	81
4.3.3 специальное оборудование для научных (специальных) работ...	81
4.4 Реестр рисков проекта .....	87
4.5 Определение ресурсной (ресурсосберегающей), финансовой, бюджетной, социальной и экономической эффективности исследования	88
4.5.1 Оценка абсолютной эффективности исследования .....	88
Оценка сравнительной эффективности исследования .....	94
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	98
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	99
Приложение А Разработанный алгоритм.....	103
Приложение Б Раздел ВКР, выполненный на иностранном языке .....	107

## ВВЕДЕНИЕ

---

Развитие вычислительной техники позволило численным методам стать одними из самых эффективных средств для решения сложных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Применение вычислительной техники позволяет автоматизировать процесс нахождения решения либо же упростить наиболее трудоемкие процедуры вычисления, а также уменьшить количество итераций, которые необходимы для поиска точного или приближенного решения.

Численные методы решения различных видов уравнений представляют собой алгоритмы нахождения приближенных (в некоторых случаях - точных) значений искомого решения. Стоит отметить, что численные методы возможно использовать только в случае корректно поставленной задачи. Для того, чтобы решить дифференциальное уравнение численными методами, нужны два известных параметра: начальное условие и заданный интервал. В случае наличия данных факторов решение дифференциального уравнения представляет собой несложную задачу. В то же время аналитическое решение краевых задач является источником больших затруднений, что закономерно стало причиной развития множества приближенных методов решения задач. По типу представления результатов приближенного решения методы подразделяются на две группы:

- приближенно-аналитические, которые дают приближенное решение краевой задачи на отрезке  $[a, b]$  как некоторую конкретную функцию;
- собственно численные и сеточные методы, которые дают каркас приближенного решения на заданной  $[a, b]$  сетке.

В данной выпускной квалификационной работе мы будем рассматривать *метод коллокаций*. Суть данного метода заключается в том, что процесс поиска приближенного решения проводится в конечномерном линейном пространстве функций, при этом неизвестные коэффициенты его

разложения по базису пространства находят из уравнений коллокаций и краевых условий. В данном случае уравнения коллокаций являются требованиями удовлетворения приближенного решения дифференциальным уравнениям задачи в конечном множестве точек области постановки задачи, которые называются узлами коллокаций. Получение краевых условий осуществляется из соответствующих условий исходной постановки задачи, которые записаны в нескольких точках на границе области. В данном методе количество уравнений равно количеству неизвестных.

В последнее время развитие информационных технологий привело к тому, что решение дифференциальных уравнения вручную стало длительным и нерациональным ввиду наличия возможности написания отдельного алгоритма, который найдет решение поставленной задачи, затратив минимум времени. Также не исключается возможность самостоятельного ввода необходимых данных, а также изменения дифференциального уравнения в целых решения уже другой поставленной задачи.

В качестве программной среды реализации выбран пакет MATLAB. MATLAB является средой и языком технических расчетов, который предназначен для решения широкого спектра инженерных и научных задач любой сложности во всех отраслях.

## 1. ОБЪЕКТ И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

---

### 1.1 ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*Дифференциальным* называется уравнения, связывающее независимую переменную (переменные), неизвестную функцию и её производные:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.a)$$

где  $x$  – независимая переменная, по которой производится дифференцирование;  $y = f(x)$  – неизвестная функция;  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  – производные от  $y$  по  $x$ .

Если неизвестная функция зависит от одной независимой переменной, то (1.a) *обыкновенные дифференциальные уравнения* (ОДУ) [1, 9]. Порядок уравнения определяется порядком его старшей производной, входящей в уравнение (1.a). Объектом исследования в данной работе выбраны численные методы решения дифференциального уравнения второго порядка, поэтому далее приведем определения применительно к этому классу уравнений.

В дифференциальном уравнении второго порядка  $F(x, y, y', y'') = 0$  выразим явно вторую производную [1]:

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (2.a)$$

*Решением* дифференциального уравнения называется функция  $y = \varphi(x)$ , которая, будучи подставленной в уравнение (2.a), превращает его в тождество.

Дифференциальное уравнение имеет бесконечное число различных решений. Каждое из таких решений называется *частным решением*. Совокупность всех частных решений называется *общим решением* дифференциального уравнения.

*Общим решением* уравнения (2.a) будем называть функцию  $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ , зависящую от произвольных постоянных  $C_1, C_2$  и удовлетворяющую следующим условиям [9].

1. При любых значениях постоянных  $C_1 = C_1^*$ ,  $C_2 = C_2^*$  функция  $y = \varphi(x, C_1^*, C_2^*, )$ , является решением уравнения (2.а).

2. Для любой точки  $M_0(x_0, y_0, y_0')$   $\in D$  существуют значения постоянных  $C_1 = C_1^*$ ,  $C_2 = C_2^*$ , что  $y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2)$ ,  $y_0' = \varphi'(x_0, C_1, C_2)$ .

Для выделения единственного решения необходимо задать  $n$  дополнительных условий. В зависимости от способа задания дополнительных условий существуют два различных типа задач:

- задача Коши;
- краевая задача.

Если дополнительные условия задаются в одной точке, то такая задача называется *задачей Коши*. Дополнительные условия в задаче Коши называются *начальными условиями*. Если же дополнительные условия задаются в более чем одной точке, т.е. при различных значениях независимой переменной, то такая задача называется *краевой*.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее вид:

$$f(x) = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y, \quad (3.a)$$
$$x_0 \leq x \leq x_1.$$

Уравнение такого вида могут иметь бесконечное множество решений. Но на практике необходимо из множества решений выделить только одно. Для этого задаются дополнительные условия на концах некоторого отрезка и получают задачу, которую называют *краевой задачей* [10].

Условия, которые задаются на концах отрезка называются *краевыми условиями*. Если краевыми условиями указано, что функция равна нулю, то это *однородные краевые условие*. А если функция равна константе или какой – то заданной функции, то это *неоднородные краевые условие*.

*Решением краевой задачи* называется такое решение дифференциального уравнения, которое удовлетворяет заданным краевым условиям.

Для использования численных методов решения дифференциального уравнения необходимо дополнительные условия. Если искомая функция является функцией времени  $u = u(t)$ , то требуются начальные условия, которые являются значением этой функции в момент времени, принятый за начальный:

$$u(t = 0) = u^0$$

Если начальная функция также зависит и от пространственных координат  $u = u(t, x)$ , то начальное условие характеризует ее распределение в пространстве в начальный момент времени:

$$u(t = 0, x) = u^0(x)$$

В последнем случае кроме исходных условий потребуются еще и граничные условия, которые имеют значения функции  $u(t, x)$  на границе изучаемой системы для любого момента времени. Причем, если искомая функция зависит от нескольких пространственных координат, то необходимо задавать граничные условия по каждой из них.

Для лучшего понимания рассмотрим классификацию на примере уравнения:

$$u = u(t, x)$$

$x$  будет изменяться от 0 до  $l$ , соответственно при  $x = 0$ , будет левая граница, а при  $x = l$ , будет правая.

– Граничные условия 1-ого рода записываются следующим образом:

$$u(t, x = 0) = \varphi_1(t) \text{ – левое}$$

$$u(t, x = l) = \varphi_2(t) \text{ – правое}$$

$\varphi_1, \varphi_2$  – функции, зависящие от  $t$ .

– Граничные условия 2-ого рода

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x = 0) = \varphi_1(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x = l) = \varphi_2(t)$$



Здесь вместо самих функций используются их первые производные.

– *Граничные условия 3-ого рода*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x = 0) = \varphi_1(t)u(t, x = 0) + \psi_1(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x = l) = \varphi_2(t)u(t, x = l) + \psi_2(t)$$

– *Смешанные граничные условия*

В этом случае левое и правое граничные условия могут быть разных родов:

$$u(t, x = 0) = \varphi_1(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x = l) = \varphi_2(t).$$

*Линейным дифференциальным* [9] *уравнением второго порядка* называется уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

где  $y=y(x)$  – искомая функция, а  $p(x)$ ,  $q(x)$  и  $f(x)$  – непрерывные на некотором отрезке  $(a, b)$  функции.

Если  $f(x) = 0$ , уравнение называется *линейным однородным*, в противном случае ( $f(x) \neq 0$ ) *линейным неоднородным* уравнением.

## 1.2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Численные методы – это метод решения математических задач, при которых рассматриваемая функция заменяется (аппроксимируется) алгебраическими уравнениями, а исходная условия и искомые решения данной функции представляются в виде чисел, которые в свою очередь отличаются от истинных значений на некоторую погрешность  $\varepsilon$ .

Численное решение дифференциального уравнения заключается в вычислении функции  $y(x)$  и ее производных в некоторых заданных точках  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , лежащих на определенном отрезке. Множество значений

абсцисс  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  в которых определяется значение функции, называется *сеткой*, на которой определена функция  $y(x)$ . Сами координаты при этом называют *узлами сетки*. Функция, определенная в узлах сетки, называется *сеточной функцией*. Чаще всего, для удобства, используются *равномерные сетки*, в которых разница между соседними узлами постоянна и называется *шагом сетки*  $h$ .

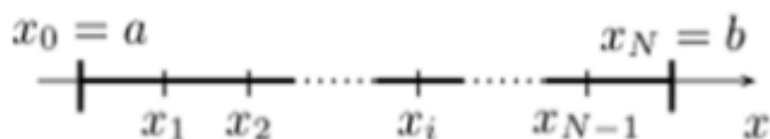


Рисунок 1. Равномерная сетка на отрезке  $a < x < b$

Правильность получаемого решения полностью зависит от характеристик численных методов, таких как:

- точность аппроксимации;
- сходимость;
- устойчивость.

Существует множество численных методов. Выделим два основных: метод конечных разностей и метод конечных элементов. У каждого из них свои преимущества и недостатки.

При выборе численного метода для достоверного решения задачи возникает необходимость анализа и оценивания таких его основных характеристик, как точность, устойчивость и сходимость.

*Точность (точность аппроксимации)* – это мера близости численного решения к точному, или истинному решению. Точность (погрешность), с которой конечная разностная схема заменяет исходные дифференциальные уравнения, зависит от порядка аппроксимации.

*Абсолютная погрешность* – это разность между точными решениями задачи и разностных схем. В виде формулы данное определение может быть представлено в виде:

$$\bar{\Delta} = |\bar{x} - x| \quad (4.a)$$

*Относительная погрешность* – это отношение абсолютной погрешности к приближенному решению

$$\delta = \frac{\bar{\Delta}}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (5.a)$$

*Сходимость* – это характеристика, показывающая, насколько постепенное приближение последовательно вычисляемых приближенных решений стремится к точному (аналитическому) решению.

$$\lim \bar{x} \rightarrow x \quad (6.a)$$

*Корректность* – это, когда решение задачи существует, оно единственно и устойчиво относительно исходных данных из некоторого класса ее решений.

*Устойчивость* – характеристика, показывающая, как реагирует численный метод на погрешности исходных данных и насколько чувствительными могут оказаться сами задачи и их решения к таким погрешностям.

Выделяют следующие типы устойчивости методов и способов их определения:

1. Метод имеет нулевую устойчивость для фиксированного  $t$  при условии, что корни  $(R_j, j = 1(1)k)$  первого характеристического многочлена  $\rho(R, t)$ , определяемого как

$$\rho(R, t) = R^k - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j R^j \quad (7.a)$$

удовлетворяют  $|R_j| \leq 1$  с простыми корнями  $|R_j| = 1$ .

2. Метод считается абсолютно устойчивым при  $z$ , если абсолютное значение корней  $\{R_j\}_{j=0}^k$  меньше или равно единице.

3. Метод считается  $A$ -устойчивым, если область абсолютной устойчивости численного интегратора лежит в открытой левой половине  $z$ -плоскости области абсолютной устойчивости.

4. Метод считается L-устойчивым, если он является A-устойчивым и если имеет абсолютные исчезающие корни при  $z \rightarrow -\infty$ .

5. Метод считается  $A(\alpha)$ -устойчивым для некоторого  $\alpha \in [0, \pi/2)$ , если клин

$$S_\alpha = \{z: |Arg(-z)| < \alpha, z \neq 0\}$$

содержится в ее области абсолютной устойчивости. Самое большое значение  $\alpha$  считается углом абсолютной устойчивости метода, а жестко устойчивый метод также является  $A(\alpha)$ -устойчивым [13].

6. Метод считается  $L(\alpha)$ -устойчивым для некоторого  $\alpha \in [0, \pi/2)$ , если он является  $A(\alpha)$ -устойчивым и если (14) имеет абсолютные исчезающие корни при стремится к минус бесконечности. Отметим, собственно что  $A(\alpha)$ -устойчивость влечет A-устойчивость и  $L(\alpha)$ -устойчивость влечет L-устойчивость.

Качество работы численного метода может быть проанализировано на примере решения тестового уравнения [14], [15]:

$$y' = \lambda y, y(0) = y_0 \quad (8.a)$$

где  $\lambda$  - любое собственное число исходной задачи.

Точные значения неизвестных в моменты времени  $t_{n+1}$  и  $t_n$  связаны соотношением:

$$y(t_{n+1}) = \tilde{\rho}(h\lambda)y(t_n),$$

где  $h$  - шаг интегрирования,  $\tilde{\rho}(h\lambda) = e^{h\lambda}$  - переходный множитель.

Переходный множитель определяется следующим образом:

$$\rho(h\lambda) = \frac{\det(E - h\lambda A + h\lambda e b^T)}{\det(E - h\lambda A)}.$$

Если решение существует, то возможны два варианта:

– решение задачи непрерывно зависит от входных параметров, т.е. малым изменениям входных параметров соответствует малое изменения получаемого решения, соответствующее нашим требованиям по точности

решения; такое решения называется устойчивым, а сами задачи – корректными;

– если же небольшие возмущения исходных данных приводят к большим изменениям в решении, не соответствующим нашим требованиям к точности решения, то это решение называется неустойчивым, а сама задача – некорректной.

Таким образом, чтобы получить решение задачи с необходимой точностью, её постановка должна быть корректной, а применяемый численный метод должен обладать устойчивостью и сходимостью.

### 1.3 БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ

Рассматриваемые ниже методы коллокации основаны на выборе *системы базисных* (координатных) *функций*. Системы базисных функций обладают тем свойством, что все остальные функции (с учетом некоторых ограничений) могут быть разложены на их сумму.

Система базисных функций

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots, \quad (1.b)$$

заданная на отрезке  $[a, b]$ , удовлетворяет следующим условиям [7].

1) Система (1.b) является *ортogonalной*, т.е.

$$\int_a^b u_i(x)u_j(x)dx = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j,$$
$$\int_a^b u_i^2(x)dx \neq 0.$$

2) Система (1.b) является *полной*, т.е. не существует никакой другой отличной от нуля функции, ортогональной ко всем функциям  $\varphi_i(x)$ ,  $i=0, 1, 2, \dots$

3) Конечная система базисных функций  $\varphi_i(x)$  ( $i = \overline{0, n}$ ) выбирается так, что функция  $\varphi_0(x)$  удовлетворяет неоднородным (заданным) краевым условиям:

$$\begin{aligned} r_a[\varphi_0] &= A, \\ r_b[\varphi_0] &= B, \end{aligned} \quad (2.b)$$

а остальные функции  $\varphi_i(x)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) удовлетворяют однородным (нулевым) краевым условиям:

$$\left. \begin{aligned} r_a[\varphi_i] &= 0, \\ r_b[\varphi_i] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \forall i \in \{i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (3.a)$$

Отметим, что при выборе базисных функций условие ортогональности не является обязательным. Например, взяв за основу полную систему функций, ортогональных на отрезке  $[a, b]$ , можно выбрать в качестве базисных функций линейные комбинации функций из этой системы. Достаточно лишь, чтобы выбранные функции (1.b) были линейно независимы на отрезке  $[a, b]$ .

#### 1.4 МЕТОД КОЛЛОКАЦИЙ

*Метод коллокации* – проекционный метод решения интегральных и дифференциальных уравнений, в котором приближенное решение определяется из условия удовлетворения уравнению в некоторых заданных точках (*точках коллокации*).

Метод коллокаций успешно применяется для численного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, эллиптических и параболических уравнений.

При использовании метода коллокации количество точек коллокации  $n$  соответствует количеству использованных базисных функций в решении. От выбора точек зависит сходимость метода. От неудачного выбора точек коллокации может возникнуть неустойчивость вычислительного процесса [2].

Будем искать приближенное решение линейной краевой задачи (3.a) в виде функции

$$y_n(x) := \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x), \quad (1.1)$$

где определяемые на отрезке  $[a, b]$  базисные функции  $\varphi_i(x)$  ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ ) и дополнительная функция  $\varphi_0(x)$  должны быть дважды дифференцируемыми и попарно линейно независимыми [4]. Кроме того, функция  $\varphi_0(x)$  должна удовлетворять краевым условиям вида

$$\begin{aligned} k_a[y] &:= \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ k_b[y] &:= \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{aligned} \quad (\text{a.2})$$

а функции  $\varphi_i(x)$  при  $i=1, 2, 3, \dots, n$  – соответствующим однородным краевым условиям, т.е. должны выполняться равенства

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 \varphi_i(a) + \alpha_1 \varphi'_i(a) &= 0, \\ \beta_0 \varphi_i(b) + \beta_1 \varphi'_i(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \forall i \in \{i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (1.2)$$

В таком случае функция  $y_n(x)$ , определяемая выражением (1.1), при любых значениях коэффициентов  $c_i$  гарантированно удовлетворяет краевым условиям (a.2).

Действительно, например, в точке  $x=a$  имеем [5]

$$\begin{aligned} &\alpha_0 y_n(a) + \alpha_1 y'_n(a) = \\ &= \alpha_0 \varphi_0(a) + \alpha_1 \varphi'_0(a) + \alpha_0 \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(a) + \alpha_1 \sum_{i=1}^n c_i \varphi'_i(a) = \\ &= A + \sum_{i=1}^n c_i [\alpha_0 \varphi_i(a) + \alpha_1 \varphi'_i(a)] = A. \end{aligned}$$

Аналогично при  $x=b$  с помощью выражений (a.2), (1.1) и (1.2) проверяется справедливость равенства

$$\beta_0 y_n(b) + \beta_1 y'_n(b) = B.$$

Представление приближенного решения  $y_n(x)$ , аналогичное (1.1), свойственно для множества приближенно-аналитических методов решения краевых задач (возможны вариации требований к базисным функциям); главное их различие состоит в том, на какой основе ищутся коэффициенты  $c_i$  в линейной комбинации базисных функций  $\varphi_i(x)$  выражения (1.1).

В методе коллокации коэффициенты  $c_i$  в представлении (1.1) приближенного решения  $y_n(x)$  подбираются так, чтобы в узлах коллокации  $x_i$  таких, что

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$$

значения  $y_n(x_i)$  приближенного решения были согласованы с точными значениями  $y(x_i)$ . Заметим, что точки  $x_i$  не обязательно равноотстоящие, но строго внутренние точки отрезка  $[a, b]$ .

Поскольку точное решение  $y(x)$  задачи

$$K[y] := y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (\text{a.1})$$

$$\begin{aligned} k_a[y] &:= \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ k_b[y] &:= \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{aligned} \quad (\text{a.2})$$

неизвестно, согласование  $y_n(x)$  и  $y(x)$  в узлах коллокации  $x_i$  проводим подстановкой  $y_n(x)$  в уравнение (a.1). Имеем равенство

$$y_n''(x_i) + p(x_i)y_n'(x_i) + q(x_i)y_n(x_i) = f(x_i), \quad (1.3)$$

которое, в силу требования согласования  $y_n(x_i)$  и  $y(x_i)$ , считаем точным при каждом  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Продифференцировав два раза функцию  $y_n(x)$  в представлении (1.1), от равенства (1.3) переходим к равенству

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j''(x_i) + p_i \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j'(x_i) + q_i \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(x_i) = \\ = f_i - \varphi_0''(x_i) - p_i \varphi_0'(x_i) - q_i \varphi_0(x_i), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $p_i, q_i, f_i$  соответствуют обозначения

$$p_i := p(x_i), \quad q_i := q(x_i), \quad f_i := f(x_i), \quad (\text{a.3})$$

*сеточных функций.*

Положим

$$a_{ij} := \varphi_j''(x_i) + p_i \varphi_j'(x_i) + q_i \varphi_j(x_i) \text{ и} \quad (1.5)$$

$$b_i := f_i - \varphi_0''(x_i) - p_i \varphi_0'(x_i) - q_i \varphi_0(x_i), \quad (1.6)$$

тогда (1.4) приобретает стандартный вид линейной алгебраической системы

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.7)$$



относительно коэффициентов  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ . Решив эту систему каким-нибудь стандартным методом (например, методом Гауссом или через обратную матрицу) и подставив найденные коэффициенты  $c_i$  в выражение (1.1), получаем приближенное решение  $y_n(x)$ .

Успех использования метода коллокации к задаче (а.1) - (а.2), впрочем, как и иных приближенно-аналитических методов, сильно зависит от удачного выбора базисных функций  $\varphi_i(x)$  в представлении приближенного решения (1.1).

В конкретных задачах выбор таких функций, по возможности, должен опираться на априорные или эмпирические сведения о решении. В отсутствие таковых, т.е. в рассматриваемом общем случае, для смешанной краевой задачи (а.1) - (а.2) возможно предложить, к примеру, следующий выбор базисных функций.

В качестве  $\varphi_0$  возьмем линейную функцию

$$\varphi_0(x) = \delta + \gamma x, \quad (1.8)$$

коэффициенты которой подберем так, чтобы она удовлетворяла неоднородным краевым условиям (а.2), т.е. из линейной алгебраической системы

$$\begin{cases} \alpha_0 \delta + (\alpha_0 a + \alpha_1) \gamma = A, \\ \beta_0 \delta + (\beta_0 b + \beta_1) \gamma = B \end{cases} \quad (1.9)$$

функции  $\varphi_i(x)$  при  $i = 1, 2, \dots, n$  можно взять однопараметрическими, вида

$$\varphi_i(x) = \gamma_i (x - a)^i + (x - a)^{i+1} \quad (1.10)$$

если в выражении (а.2)  $\alpha_1 = 0$ , или вида

$$\varphi_i(x) = \gamma_i (x - a)^{i+1} + (x - a)^{i+2} \quad (1.11)$$

в самом общем случае. Очевидно, что при любых  $\gamma_i$  эти функции удовлетворяют первому из требуемых равенств (1.2), а если зафиксировать

$$\gamma_i = - \frac{\beta_0(b-a)^2 + (i+1)\beta_1(b-a)}{\beta_0(b-a) + i\beta_1} \quad (1.12)$$

в выражении (1.10) и

$$\gamma_i = -\frac{\beta_0(b-a)^2 + (i+2)\beta_1(b-a)}{\beta_0(b-a) + (i+1)\beta_1} \quad (1.13)$$

в выражении (1.11), то они будут подчиняться и второму из этих равенств. Следовательно, можно рассчитывать, что с такими базисными функциями при найденных методом коллокации (или каким-либо другим методом) коэффициентах  $c_i$  определенная посредством (1.1) функция  $y_n(x)$  будет удовлетворять краевым условиям и может служить приближенным решением данной краевой задачи (а.1)-(а.2).

Проблема формального выбора базисных функций  $\varphi_i$  значительно упрощается в случае, когда в задаче (а.1)-(а.2) фигурируют *однородные краевые условия первого рода*, т.е. когда

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (1.14)$$

В такой ситуации в выражении (1.1) не нужна функция  $\varphi_0$ , а в роли  $\varphi_i (i = 1, 2, \dots, n)$  могут выступить, например, функции

$$\varphi_i(x) = (x-a)^i(b-x) \quad (1.15)$$

или

$$\varphi_i(x) = \sin \frac{i(x-a)}{b-a} \pi. \quad (1.16)$$

В методе коллокации, если базисные функции являются синусоидальными функциями, мы будем называть этот метод *методом коллокации Фурье*. Если базисные функции имеют полиномиальный вид, будем называть метод как *метод полиномиальной коллокации* [6].

К однородным краевым условиям первого рода (1.14) можно свести более общий случай *неоднородных краевых условий первого рода*

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \quad (1.17)$$

С этой целью достаточно сделать линейную замену (линейный сдвиг)

$$y = u + v,$$

где

$$v := A + \frac{B - A}{b - a}(x - a).$$

Два раза дифференцируя данную функцию  $y(x)$  и подставляя итог в уравнение (a.1), от задачи (a.1) с условиями (1.17) приходим к краевой задаче с однородными краевыми условиями относительно новой искомой функции  $u$ :

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x) - \frac{B - A}{b - a}p(x) - vq(x), \quad x \in [a, b],$$

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0.$$

Таким образом, на основании проведенного литературного обзора сформулируем цель и задачи данной работы.

**Целью** данной работы является разработка алгоритма решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом коллокации в программной среде MATLAB. Для реализации этой цели поставлены **следующие задачи**:

1. Разработать алгоритм численного решения дифференциальных уравнений второго порядка методом коллокации в программной среде MATLAB.

2. Проанализировать влияние количества узлов коллокаций и их выбор на точность решения.

3. Вычислить значение погрешности численного решения, построить графики в сравнении с аналитическим и встроенным численным решениями.

4. Провести численные эксперименты разработанного алгоритма, сделать выводы и рекомендации по проделанной работе.

## 2 ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

В данной части работы рассмотрим решение следующих типов уравнений линейные однородные и неоднородные уравнения

Программный код приведен в приложение А.

### 2.1 МЕТОД ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ КОЛЛОКАЦИИ

Общая формула для решения задачи *методом полиномиальной коллокации*

$$\begin{aligned} F_1(x)y'' + F_2(x)y' + F_3(x)y &= F_4(x) \\ y(a) &= A, \quad y(b) = B \end{aligned} \quad (\text{p.1})$$

делаем линейную замену

$$y = u + v \quad (\text{p.2})$$

где

$$v = A + \frac{B - A}{b - a}(x - a)$$

$$u = \sum_1^{\infty} C_n \omega_n(x)$$

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0$$

Так как граничные условия  $u$  однородны, то (1.15)

$$\omega_n = (x - a)^n(b - x) \quad (\text{p.3})$$

Подстановка в (p.2), получим общую формулу нахождения базисных функции

$$y = A + \frac{B - A}{b - a}(x - a) + \sum_1^{\infty} C_n (x - a)^n(b - x)$$

$$y' = \frac{B - A}{b - a} + \sum_1^{\infty} C_n (n(b - x)(x - a)^{n-1} - (x - a)^n)$$

$$y'' = \sum_1^{\infty} C_n (n(n - 1)(b - x)(x - a)^{n-2} - 2n(x - a)^{n-1})$$

Подстановка в исходное уравнение (p.1), дает

$$\begin{aligned}
& \sum_1^{\infty} C_n((n(n-1)(b-x)(x-a)^{n-2} - 2n(x-a)^{n-1})F_1(x) \\
& + ((n(b-x)(x-a)^{n-1} - (x-a)^n))F_2(x) + (x-a)^n(b-x)F_3(x) = \\
& = F_4(x) - \frac{B-A}{b-a}F_2(x) - (A + \frac{B-A}{b-a}(x-a))F_1(x)
\end{aligned}$$

### Задача 1.1.

Найти решение линейного неоднородного уравнения второго порядка, удовлетворяющее указанным краевым условиям [12]

$$y'' - 2y = 2x \quad (\text{p.4})$$

$$y(-1) = 0, y(1) = 0$$

Аналитическое решение (p.4) имеет вид:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2x$$

Решение задачи (p.4). методом коллокаций

$$F_1(x) = 1; \quad F_2(x) = 0; \quad F_3(x) = -2; \quad F_4(x) = 2x$$

В качестве базисных функций выберем полиномы (p.3), получим

$$\begin{aligned}
y &= \sum_1^{\infty} C_n (x+1)^n (1-x) \\
y' &= \sum_1^{\infty} C_n (n(1-x)(x+1)^{n-1} - (x+1)^n) \\
y'' &= \sum_1^{\infty} C_n (n(n-1)(1-x)(x+1)^{n-2} - 2n(x+1)^{n-1})
\end{aligned}$$

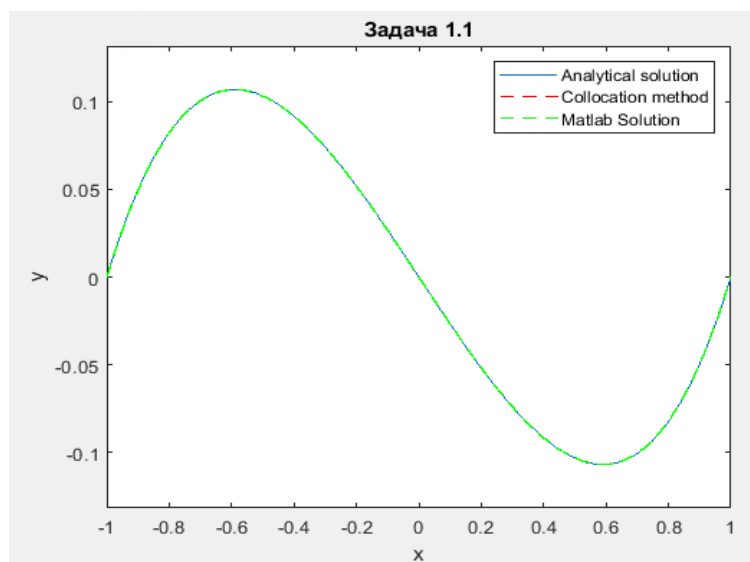
Подстановка в исходное уравнение (p.4), дает

$$\begin{aligned}
& \sum_1^{\infty} C_n (n(n-1)(1-x)(x+1)^{n-2} - 2n(x+1)^{n-1}) - \\
& 2 \sum_1^{\infty} C_n (x+1)^n (1-x) = 2x
\end{aligned} \quad (\text{p.5})$$

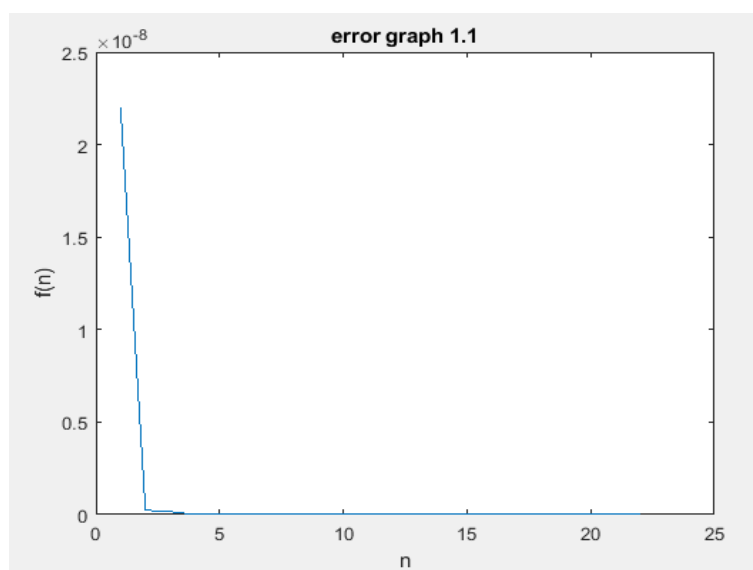
Подставив точки коллокации в уравнение (p.5) получаем систему уравнений для определения коэффициентов  $C_n$

Таблица 1. Погрешность для разного количества точек коллокаций

Точки коллокации	$n = 10$	$n = 20$	$n = 50$
Абсолютная погрешность	$2,2 \cdot 10^{-8}$	$7,2 \cdot 10^{-15}$	$5,4 \cdot 10^{-15}$
Относительная погрешность	$2,05 \cdot 10^{-5}$	$6.7 \cdot 10^{-12}$	$5,06 \cdot 10^{-12}$



*Рисунок 1 – Графики решения задачи 1.1*



*Рисунок 2 – График зависимости погрешности от количества точек коллокации*

### **Задача 1.2.**

Найти решение линейного неоднородного уравнения второго порядка, удовлетворяющее указанным краевым условиям [11]

$$x^2 y'' - 2y = 2x \quad (\text{p.6})$$

$$y(1) = 1 \quad \text{и} \quad y(2) = 1.$$

Аналитическое решение задачи (p.6) имеет вид:

$$y = \frac{4 - x^2}{7} - \frac{x^2 - \frac{10}{7}}{x}$$

Решение задачи (p.6) методом коллокаций

$$F_1(x) = x^2; \quad F_2(x) = 0; \quad F_3(x) = -2; \quad F_4(x) = 2x$$

Так как в задаче (p.6) краевые условия являются неоднородными путем замена (p.2) приводим к однородному. В качестве базисных функций выберем полиномы (p.3), получим

$$y = \sum_1^{\infty} C_n (x+1)^n (1-x)$$

$$y' = \sum_1^{\infty} C_n (n(1-x)(x+1)^{n-1} - (x+1)^n)$$

$$y'' = \sum_1^{\infty} C_n (n(n-1)(1-x)(x+1)^{n-2} - 2n(x+1)^{n-1})$$

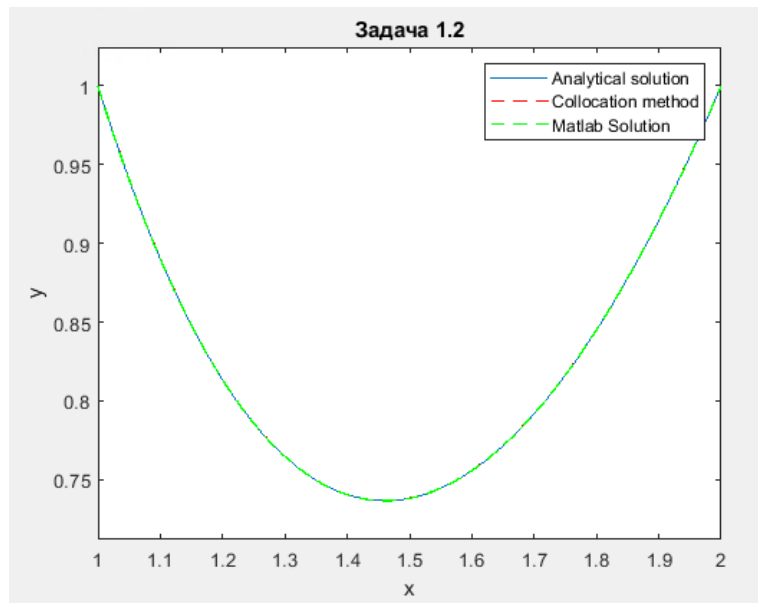
Подстановка в исходное уравнение (p.6), дает

$$\sum_1^{\infty} C_n (n(n-1)(1-x)(x+1)^{n-2} - 2n(x+1)^{n-1}) - 2 \sum_1^{\infty} C_n (x+1)^n (1-x) = 2x \quad (\text{p.7})$$

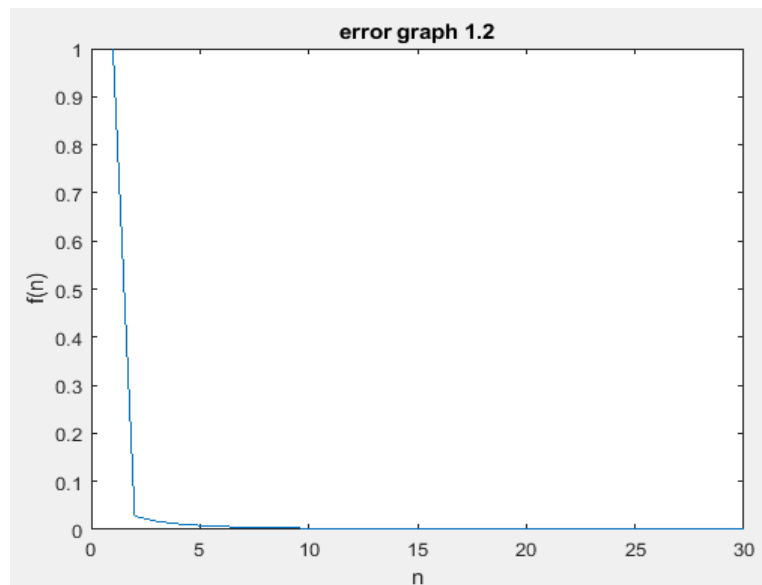
Подставив точки коллокации в уравнение (p.7) получаем систему уравнений для определения коэффициентов  $C_n$

Таблица 2. Погрешность для разного количества точек коллокаций

Точки коллокации	$n = 10$	$n = 20$	$n = 50$
Абсолютная погрешность	0,0032	$8,5 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$
Относительная погрешность	0,3	0,85	0,01



*Рисунок 1 – Графики решения задачи 1.2*



*Рисунок 4 – График зависимости погрешности от количества точек коллокаций*

### **Задача 1.3.**

Найти решение линейного неоднородного уравнения второго порядка, удовлетворяющее указанным краевым условиям [11]

$$x^3 y'' - x^2 y' + xy = \ln^3 x \quad (\text{p.8})$$



$$y(2) = 0 \quad \text{и} \quad y(3) = 0,01.$$

Аналитическое решение задачи (р.8) имеет вид:

$$y = C_1 x + C_2 x \ln x + \frac{1}{8x} (6 + 9 \ln x + 6 \ln^2 x + 2 \ln^3 x)$$

Решение задачи (р.8) методом коллокаций

$$F_1(x) = x^3; \quad F_2(x) = -x^2; \quad F_3(x) = x; \quad F_4(x) = \ln^3 x$$

Так как в задаче (р.8) краевые условия являются неоднородными путем замена (р.2) приводим к однородному. В качестве базисных функций выберем полиномы (р.3), получим

$$\begin{aligned} y &= 0,01(x-2) + \sum_1^{\infty} C_n (x-2)^n (3-x) \\ y' &= 0,01 + \sum_1^{\infty} C_n (n(3-x)(x-2)^{n-1} - (x-2)^n) \\ y'' &= \sum_1^{\infty} C_n (n(n-1)(3-x)(x-2)^{n-2} - 2n(x-2)^{n-1}) \end{aligned}$$

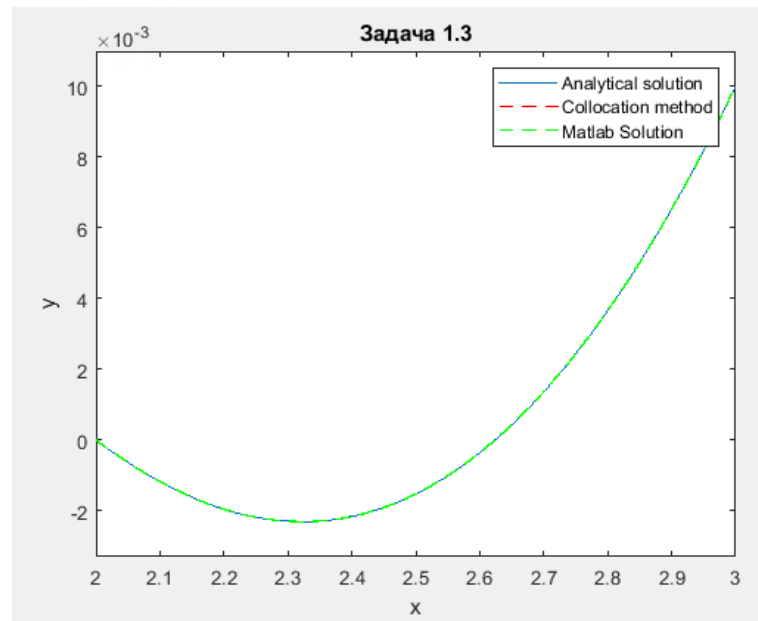
Подстановка в исходное уравнение (р.8), дает

$$\begin{aligned} &x^3 \sum_1^{\infty} C_n (n(n-1)(3-x)(x-2)^{n-2} - 2n(x-2)^{n-1}) \\ &- x^2 \left( 0,01 + \sum_1^{\infty} C_n (n(3-x)(x-2)^{n-1} - (x-2)^n) \right) + \\ &+ x(0,01(x-2) + \sum_1^{\infty} C_n (x-2)^n (3-x)) = \ln^3 x \end{aligned} \quad (\text{р.9})$$

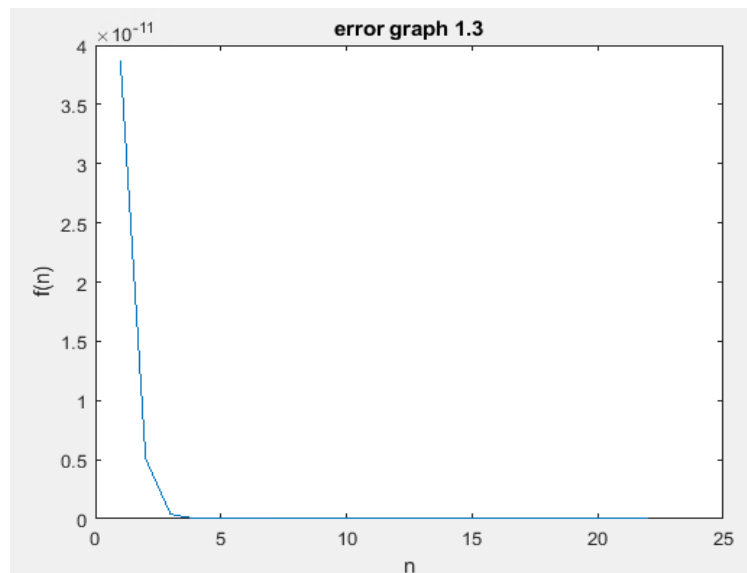
Подставив точки коллокации в уравнение (р.9) получаем систему уравнений для определения коэффициентов  $C_n$

Таблица 3. Погрешность для разного количества точек коллокаций

Точки коллокации	$n = 10$	$n = 20$	$n = 50$
Абсолютная погрешность	$3,87 \cdot 10^{-11}$	$8,5 \cdot 10^{-16}$	$4,4 \cdot 10^{-16}$
Относительная погрешность	$3,87 \cdot 10^{-7}$	$8,5 \cdot 10^{-14}$	$4,4 \cdot 10^{-12}$



*Рисунок 5 – Графики решения задачи 1.3.*



*Рисунок 6 – График зависимости погрешности от количества точек коллокаций*

#### **Задача 1.4.**

Найти решение линейного однородного уравнения второго порядка, удовлетворяющее указанным краевым условиям [11]

$$x^4 y'' - (2x^2 - 1)y = 0 \quad (\text{p.10})$$

$$y(1) = 1 \quad \text{и} \quad y(\pi) = 10.$$

Аналитическое решение задачи (р.10) имеет вид:

$$y = C_1(x^2 \cos \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{x}) + C_2(x^2 \sin \frac{1}{x} + x \cos \frac{1}{x})$$

Решение задачи (р.10) методом коллокаций

$$F_1(x) = x^4; \quad F_2(x) = 0; \quad F_3(x) = 2x^2 - 1; \quad F_4(x) = 0.$$

Так как в задаче (р.10) краевые условия являются неоднородными путем замена (р.2) приводим к однородному. В качестве базисных функций выберем полиномы (р.3), получим

$$y = 1 + \frac{9}{\pi - 1}(x - 1) + \sum_1^{\infty} C_n(x - 1)^n(\pi - x)$$

$$y' = \frac{9}{\pi - 1} + \sum_1^{\infty} C_n(n(\pi - x)(x - 1)^{n-1} - (x - 1)^n)$$

$$y'' = \sum_1^{\infty} C_n(n(n - 1)(\pi - x)(x - 1)^{n-2} - 2n(x - 1)^{n-1})$$

Подстановка в исходное уравнение (р.10), дает

$$x^4 \sum_1^{\infty} C_n(n(n - 1)(\pi - x)(x - 1)^{n-2} - 2n(x - 1)^{n-1}) -$$

$$(2x^2 - 1)(1 + \frac{9}{\pi - 1}(x - 1) + \sum_1^{\infty} C_n(x - 1)^n(\pi - x)) = 0 \quad (\text{р.11})$$

Подставив точки коллокации в уравнение (р.11) получаем систему уравнений для определения коэффициентов  $C_n$

Таблица 4. Погрешность для разного количества точек коллокаций

Точки коллокации	$n = 10$	$n = 20$	$n = 50$
Абсолютная погрешность	$2,5 \cdot 10^{-6}$	$9,3 \cdot 10^{-9}$	$2,4 \cdot 10^{-10}$
Относительная погрешность	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$9,3 \cdot 10^{-8}$	$2,4 \cdot 10^{-9}$

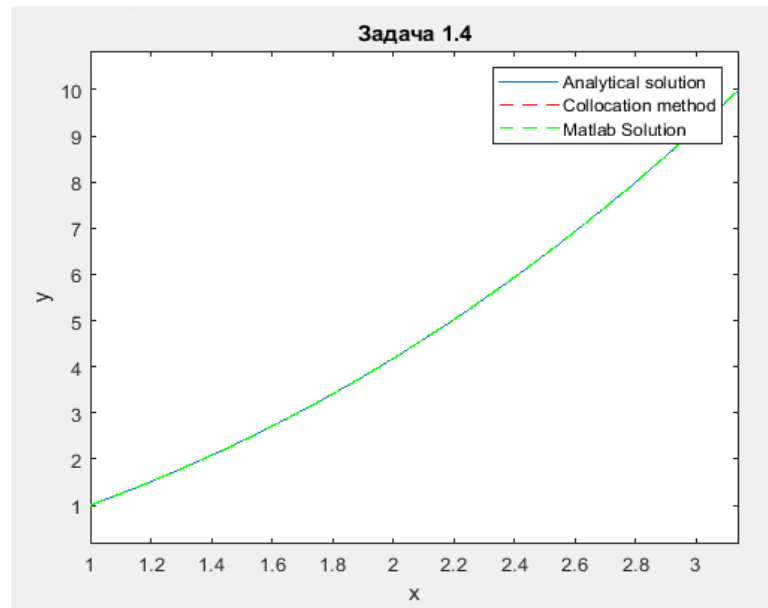


Рисунок 7 – Графики решения задачи 1.4.

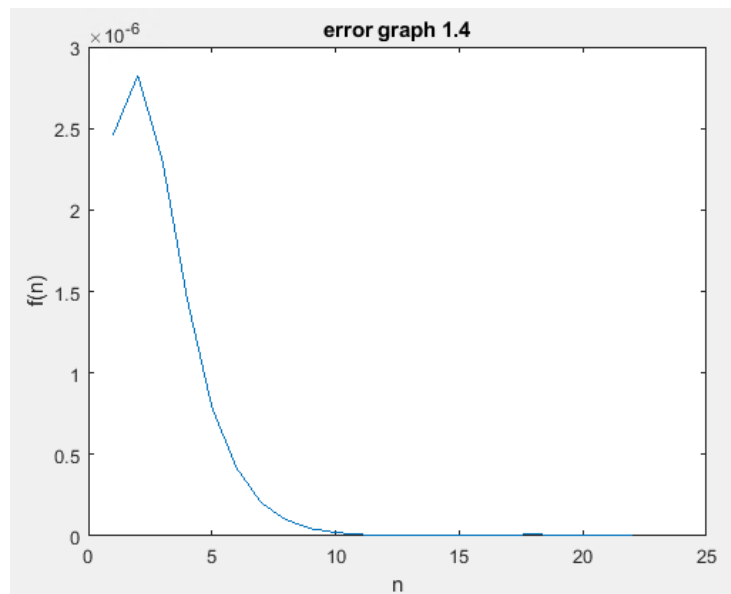


Рисунок 8 – График зависимости погрешности от количества точек коллокаций

### Задача 1.5.

Найти решение линейного однородного уравнения второго порядка, удовлетворяющее указанным краевым условиям [11]

$$4x^6 y'' - 4x^3(2x^2 + 1)y' + (8x^4 + 10x^2 + 1)y = 0 \quad (\text{p.12})$$

$$y(1) = 1 \quad \text{и} \quad y(2) = 0.$$

Аналитическое решение задачи (p.12) имеет вид:

$$y = (C_1 + C_2 x) x \exp\left(-\frac{1}{4x^2}\right)$$

Решение задачи (р.12) методом коллокаций

$$F_1(x) = 4x^6; \quad F_2(x) = -4x^3(2x^2 + 1); \quad F_3(x) = (8x^4 + 10x^2 + 1); \\ F_4(x) = 0.$$

Так как в задаче (р.12) краевые условия являются неоднородными путем замена (р.2) приводим к однородному. В качестве базисных функций выберем полиномы (р.3), получим

$$y = 1 - (x - 1) + \sum_1^{\infty} C_n (x - 1)^n (2 - x) \\ y' = \sum_1^{\infty} C_n (n(2 - x)(x - 1)^{n-1} - (x - 1)^n) \\ y'' = \sum_1^{\infty} C_n (n(n - 1)(2 - x)(x - 1)^{n-2} - 2n(x - 1)^{n-1})$$

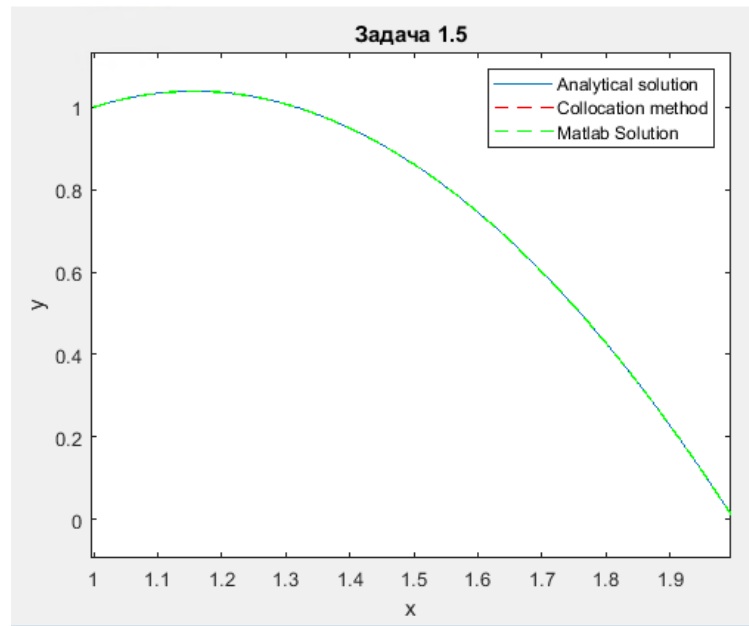
Подстановка в исходное уравнение (р.12), дает

$$4x^6 \sum_1^{\infty} C_n (n(n - 1)(2 - x)(x - 1)^{n-2} - 2n(x - 1)^{n-1}) - 4x^3(2x^2 + 1) \sum_1^{\infty} C_n (n(2 - x)(x - 1)^{n-1} - (x - 1)^n) + (8x^4 + 10x^2 + 1) 1 - (x - 1) + \sum_1^{\infty} C_n (x - 1)^n (2 - x) = 0 \quad (\text{р.13})$$

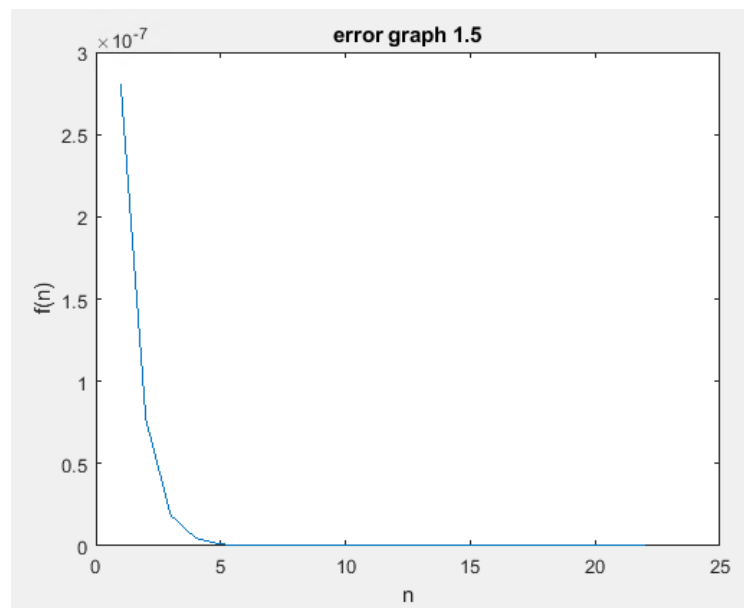
Подставив точки коллокации в уравнение (р.13) получаем систему уравнений для определения коэффициентов  $C_n$

Таблица 5. Погрешность для разного количества точек коллокаций

Точки коллокации	$n = 10$	$n = 20$	$n = 50$
Абсолютная погрешность	$2,8 \cdot 10^{-7}$	$1,9 \cdot 10^{-13}$	$1,8 \cdot 10^{-15}$
Относительная погрешность	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-11}$	$1,8 \cdot 10^{-13}$



*Рисунок 9 – Графики решения задачи 1.5.*



*Рисунок 10 – График зависимости погрешности от количества точек коллокаций*

## 2.2 МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ ФУРЬЕ

Общая формула для решения задачи *методом коллокации Фурье*

$$F_1(x)y'' + F_2(x)y' + F_3(x)y = F_4(x) \quad (\text{f.1})$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

делаем линейную замену

$$y = u + v \quad (\text{f.2})$$

где

$$v = A + \frac{B - A}{b - a}(x - a)$$

$$u = \sum_1^{\infty} C_n \omega_n(x)$$

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0$$

Так как граничные условия  $u$  однородны, то (1.15)

$$\omega_n = \sum_1^{\infty} C_n \sin \frac{n(x-a)}{b-a} \pi \quad (\text{f.3})$$

Подстановка в (f.2), получим общую формулу нахождения базисных функции

$$y = A + \frac{B - A}{b - a}(x - a) + \sum_1^{\infty} C_n \sin \frac{n(x - a)}{b - a} \pi$$

$$y' = \frac{B - A}{b - a} + \sum_1^{\infty} C_n \left( \left( \frac{n\pi}{b - a} \right) \cos \frac{n(x - a)}{b - a} \pi \right)$$

$$y'' = \sum_1^{\infty} C_n \left( - \left( \frac{n\pi}{b - a} \right)^2 \sin \frac{n(x - a)}{b - a} \pi \right)$$

Подстановка в исходное уравнение (f.1), дает

$$\begin{aligned} & \sum_1^{\infty} C_n \left( - \left( \frac{n\pi}{b - a} \right)^2 \sin \frac{n(x - a)}{b - a} \pi \right) F_1(x) + \left( \left( \frac{n\pi}{b - a} \right) \cos \frac{n(x - a)}{b - a} \pi \right) F_2(x) \\ & + \sin \frac{n(x - a)}{b - a} \pi F_3(x) \\ & = F_4(x) - \frac{B - A}{b - a} F_2(x) - \left( A + \frac{B - A}{b - a}(x - a) \right) F_1(x) \end{aligned}$$

**Задача 2.1.**

Найти решение линейного неоднородного уравнения второго порядка, удовлетворяющее указанным краевым условиям [12]

$$y'' + y = 1 \quad (f.4)$$

$$y(0) = 0 \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Аналитическое решение(f.4) имеет вид:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1$$

Решение задачи (f.4) методом коллокаций

$$F_1(x) = 1; \quad F_2(x) = 0; \quad F_3(x) = 1; \quad F_4(x) = 1$$

Так как в задаче (f.4) краевые условия являются однородными, качестве базисной функции мы можем взять функцию (f.3).

$$y = \sum_1^{\infty} C_n \sin 2nx$$

$$y' = \sum_1^{\infty} C_n ((2n) \cos 2nx)$$

$$y'' = \sum_1^{\infty} C_n (-(2n)^2 \sin 2nx)$$

Подстановка в исходное уравнение (f.4) дает

$$\sum_1^{\infty} C_n (-(2n)^2 \sin 2nx) + \sum_1^{\infty} C_n \sin 2nx = 0 \quad (f.5)$$

Подставив точки коллокации в уравнение (f.5) получаем систему уравнений для определения коэффициентов  $C_n$ .

Таблица 6. Погрешность для разного количества точек коллокаций

Точки коллокации	$n = 10$	$n = 20$	$n = 50$
Абсолютная погрешность	$2,9 \cdot 10^{-3}$	$7,3 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$
Относительная погрешность	0,709	0,1758	0,0281



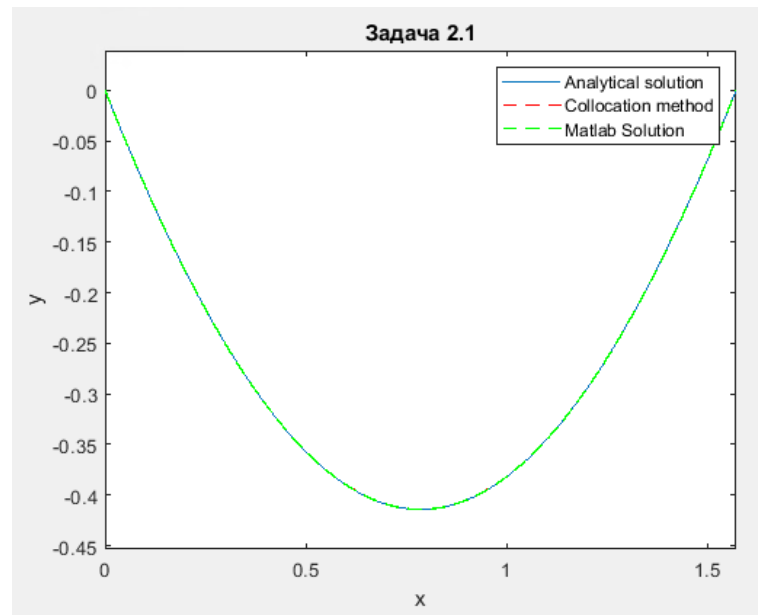


Рисунок 11 – Графики решения задачи 2.1.

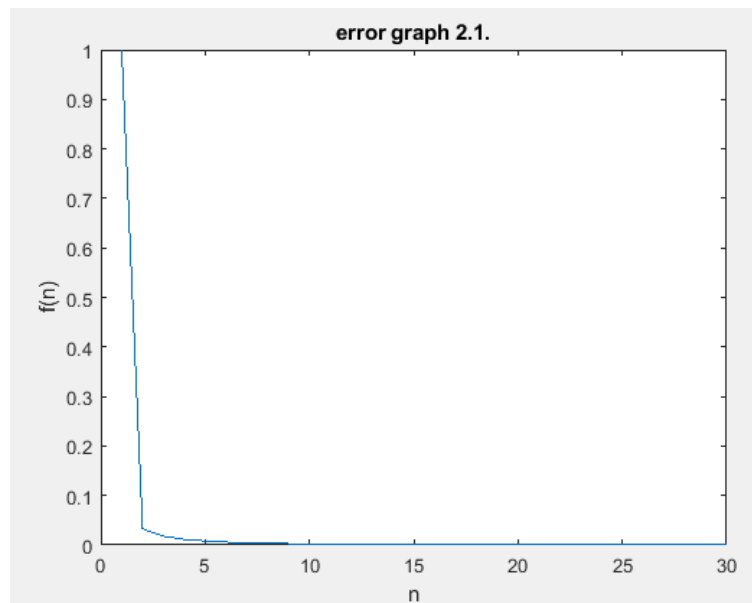


Рисунок 12 – График зависимости погрешности от количества точек коллокаций

### Задача 2.2.

Найти решение линейного однородного уравнения второго порядка, удовлетворяющее указанным краевым условиям [11]

$$(x^2 + 1)y'' + xy' - 9y = 0 \quad (\text{f.6})$$

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad y(\pi) = 1$$

Аналитическое решение (f.4) имеет вид:

$$y = C_1(4x^2 + 3)x + C_2(4x^2 + 1)\sqrt{(x^2 + 1)}$$

Решение задачи (f.4) методом коллокаций

$$F_1(x) = (x^2 + 1); \quad F_2(x) = x; \quad F_3(x) = -9; \quad F_4(x) = 0$$

Так как в задаче (f.6) краевые условия являются неоднородными путем замена (f.2) приводим к однородному.

Таким образом, качестве базисной функции мы можем взять функцию (f.3). Подставив в (f.2) получим базисную функцию

$$y = 1 + \sum_1^{\infty} C_n \sin \frac{n(2x - \pi)}{3}$$

$$y' = \sum_1^{\infty} C_n \left( \left( \frac{2n}{3} \right) \cos \frac{n(2x - \pi)}{3} \right)$$

$$y'' = \sum_1^{\infty} C_n \left( - \left( \frac{2n}{3} \right)^2 \sin \frac{n(2x - \pi)}{3} \right)$$

Подстановка в исходное уравнение (f.6) дает

$$(x^2 + 1)y'' = \sum_1^{\infty} C_n \left( - \left( \frac{2n}{3} \right)^2 \sin \frac{n(2x - \pi)}{3} \right)$$

$$+ x \sum_1^{\infty} C_n \left( \left( \frac{2n}{3} \right) \cos \frac{n(2x - \pi)}{3} \right) - 9 + 9 \sum_1^{\infty} C_n \sin \frac{n(2x - \pi)}{3} = 0 \quad (f.7)$$

Подставив точки коллокации в уравнение (f.7) получаем систему уравнений для определения коэффициентов  $C_n$

Таблица 7. Погрешность для разного количества точек коллокаций

Точки коллокации	$n = 10$	$n = 20$	$n = 50$
Абсолютная погрешность	0,01	$6,6 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$
Относительная погрешность	1.8	0,6	0,13

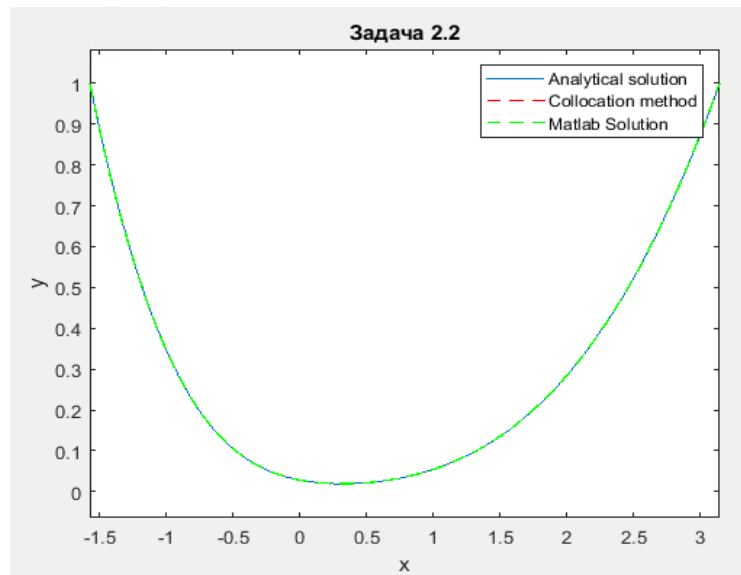


Рисунок 13 – Графики решения задачи 2.2

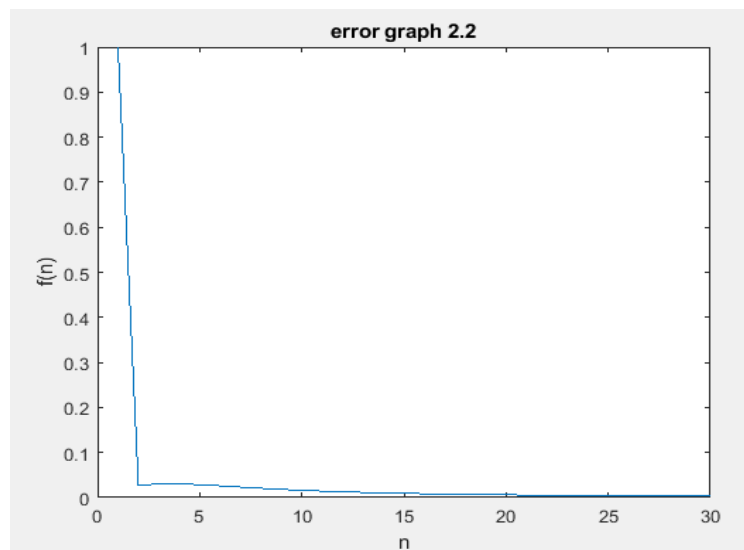


Рисунок 14 – График зависимости погрешности от количества точек коллокаций

### Задача 2.3.

Найти решение линейного неоднородного уравнения второго порядка, удовлетворяющее указанным краевым условиям [11]

$$x^3 y'' - 2xy = 6 \ln x \quad (\text{f.8})$$

$$y(2) = \sqrt{2} \quad y(3) = \sqrt{3}$$

Аналитическое решение(f.8) имеет вид:

$$y = C_2 x^2 + \frac{1}{x} \left( C_1 + \frac{2}{3} \ln x - \ln^2 x \right)$$

Решение задачи (f.8) методом коллокаций

$$F_1(x) = x^3; \quad F_2(x) = 0; \quad F_3(x) = 2x; \quad F_4(x) = 6 \ln x.$$

Так как в задаче (f.8) краевые условия являются неоднородными путем замена (f.2) приводим к однородному.

Таким образом, качестве базисной функции мы можем взять функцию (f.3). Подставив в (f.2) получим базисную функцию:

$$y = A + \frac{B - A}{b - a} (x - a) + \sum_1^{\infty} C_n \sin \frac{n(x - a)}{b - a} \pi$$

$$(a = 2, A = \sqrt{2}, b = 3, B = \sqrt{3})$$

$$y = \sqrt{2} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})(x - 2) + \sum_1^{\infty} C_n \sin(x - 2)\pi n$$

$$y'' = \sum_1^{\infty} C_n (-(\pi n)^2 \sin \pi n (x - 2))$$

Подстановка в исходное уравнение (f.8) дает

$$\begin{aligned} x^2 \left( \sum_1^{\infty} C_n (-(\pi n)^2 \sin \pi n (x - 2)) \right) - 2x(\sqrt{2} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})(x - 2)) \\ + \sum_1^{\infty} C_n \sin \pi n (x - 2) = 6 \ln x \end{aligned} \quad (f.9)$$

Подставив точки коллокации в уравнение (f.9) получаем систему уравнений для определения коэффициентов  $C_n$

Таблица 8. Погрешность для разного количества точек коллокаций

Точки коллокации	$n = 10$	$n = 20$	$n = 50$
Абсолютная погрешность	0,03	$3,2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$
Относительная погрешность	1,81	1,87	1,88

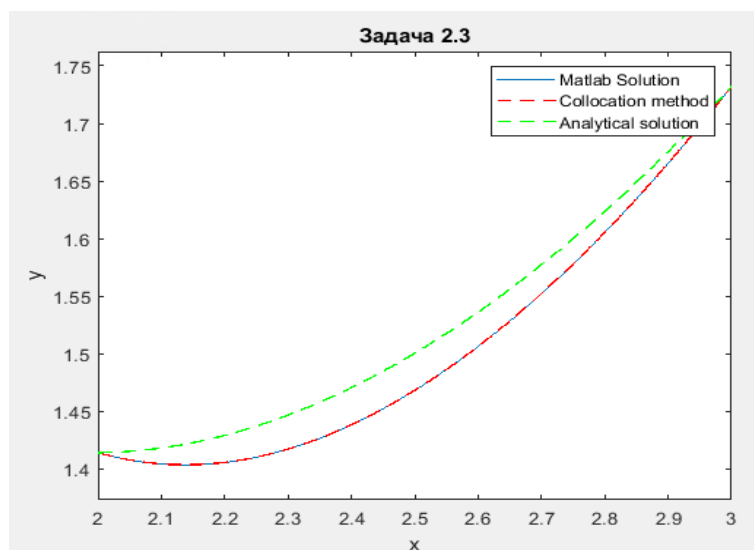


Рисунок 15 – Графики решения задачи 2.3

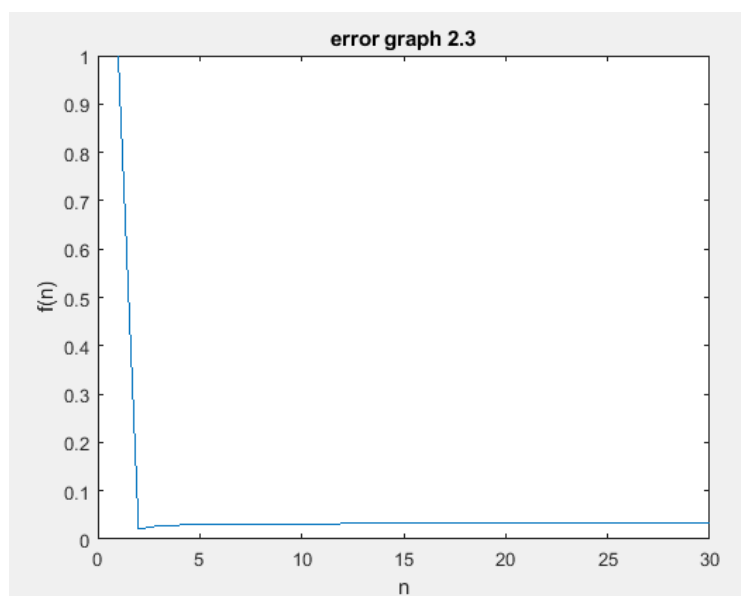


Рисунок 16 – График зависимости погрешности от количества точек коллокаций

#### Задача 2.4.

Найти решение линейного однородного уравнения второго порядка, удовлетворяющее указанным краевым условиям [11]

$$x^4 y'' + (x^2 - 1)xy' - (x^2 - 1)y = 0 \quad (\text{f.10})$$

$$y(1) = 1 \quad y(2) = 0$$

Аналитическое решение задачи (f.10) имеет вид:

$$y = x(C_1 + C_2 \exp(-\frac{1}{2x^2}))$$

Решение задачи (f.10) методом коллокаций

$$F_1(x) = x^4; \quad F_2(x) = x(x^2 - 1); \quad F_3(x) = 1 - x^2; \quad F_4(x) = 0.$$

Решение задачу (f.10) методом коллокаций. Базисная функция имеет вид:

$$y = 1 - (x - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \pi n (x - 1)$$

$$y' = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n ((n\pi) \cos \pi n (x - 1))$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} C_n (-(n\pi)^2 \sin \pi n (x - 1))$$

Подстановка в исходное уравнение (f.10), дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n (-(n\pi)^2 \sin \pi n (x - a)) F_1(x) + ((n\pi) \cos \pi n (x - a)) F_2(x) + \sin \pi n (x - a) F_3(x) = F_4(x) + F_2(x) - (1 - (x - 1)) F_1(x) \quad (\text{f.11})$$

Подставив точки коллокации в уравнение (f.11) получаем систему уравнений для определения коэффициентов  $C_n$

Таблица 9. Погрешность для разного количества точек коллокаций

Точки коллокации	$n = 10$	$n = 20$	$n = 50$
Абсолютная погрешность	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$6,5 \cdot 10^{-5}$	$1,06 \cdot 10^{-5}$
Относительная погрешность	$2,49 \cdot 10^{-2}$	$6,5 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$

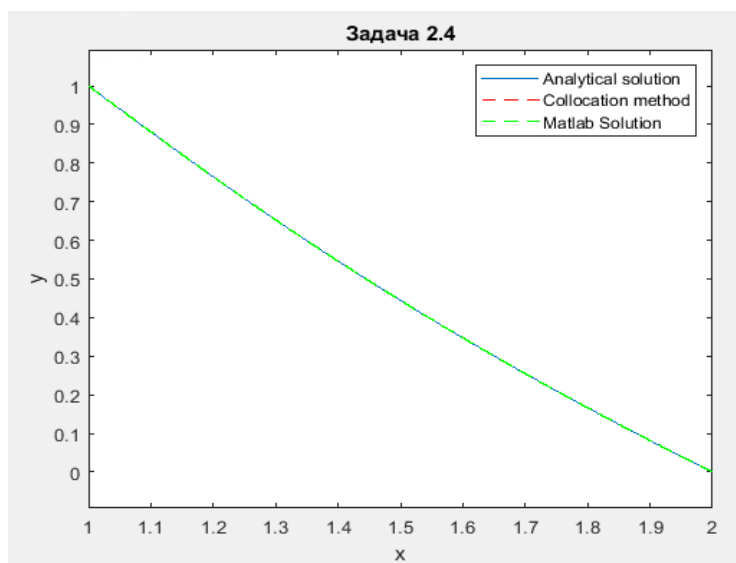


Рисунок 17 – Графики решения задачи 2.4

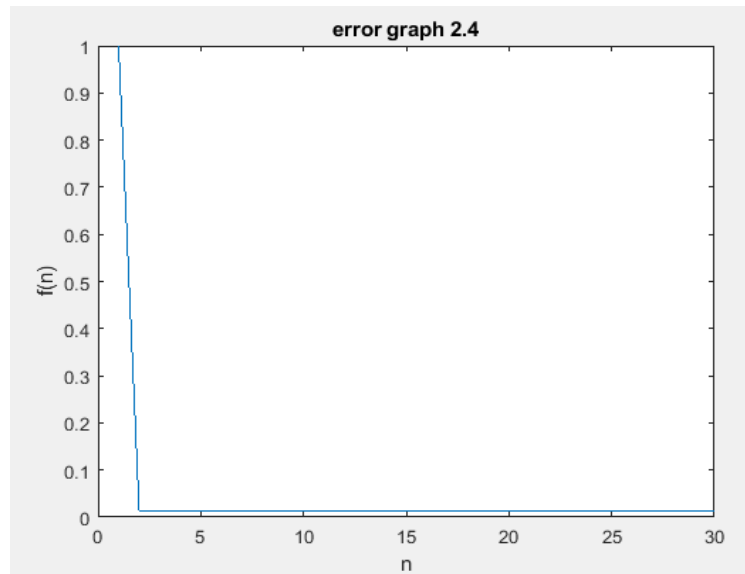


Рисунок 18 – График зависимости погрешности от количества точек коллокаций

### Задача 2.5.

Найти решение линейного однородного уравнения второго порядка, удовлетворяющее указанным краевым условиям [11]

$$4x^6y'' + 4x^3(2x^2 + 1)y' - (2x^2 - 1)y = 0 \quad (\text{f.12})$$

$$y(7) = 4 \quad y(8) = 4.1$$

Аналитическое решение задачи (f.12) имеет вид:

$$y = \left( C_1 + \frac{C_2}{x} \right) \exp\left(\frac{1}{4x^2}\right)$$

Решение задачу (f.12) методом коллокаций

$$F_1(x) = 4x^6; \quad F_2(x) = 4x^3(2x^2 + 1); \quad F_3(x) = -(2x^2 - 1); \quad F_4(x) = 0.$$

Так как в задаче (f.12) краевые условия являются неоднородными путем замена (f.2) приводим к однородному.

Таким образом, качестве базисной функции мы можем взять функцию (f.3). Подставив в (f.2) получим базисную функцию:

$$y = 4 + 0.1(x - 7) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \pi n (x - 7)$$

$$y' = \frac{1}{10} + \sum_1^{\infty} C_n((n\pi)\cos\pi n(x - 7))$$

$$y'' = \sum_1^{\infty} C_n(-(n\pi)^2\sin\pi n(x - 7))$$

Подстановка в исходное уравнение (f.12), дает

$$\sum_1^{\infty} C_n(-(n\pi)^2\sin\pi n(x - 7))F_1(x) + ((n\pi)\cos\pi n(x - 7))F_2(x) + \sin\pi n(x - 7)F_3(x) = F_4(x) - \frac{1}{10}F_2(x) - (A + \frac{1}{10}(x - 7))F_1(x) \quad (f.13)$$

Подставив точки коллокации в уравнение (f.13) получаем систему уравнений для определения коэффициентов  $C_n$

Таблица 10. Погрешность для разного количества точек коллокаций

Точки коллокации	$n = 10$	$n = 20$	$n = 50$
Абсолютная погрешность	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$
Относительная погрешность	$6,7 \cdot 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{-5}$

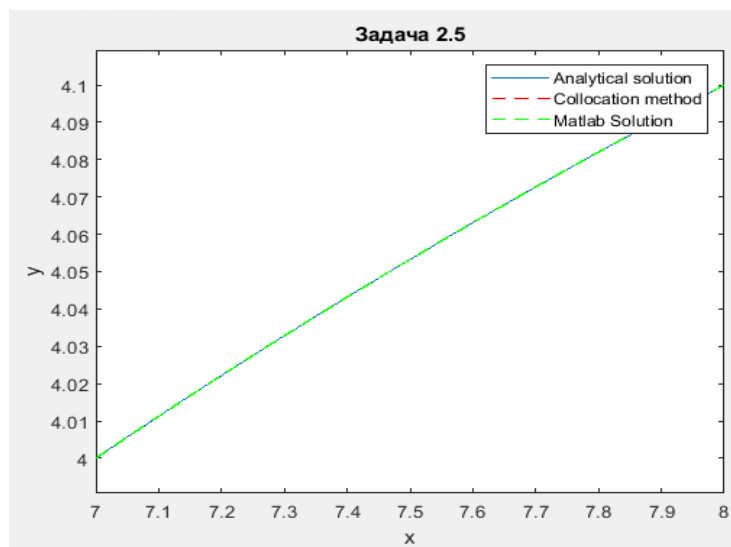


Рисунок 19 – Графики решения задачи 2.5



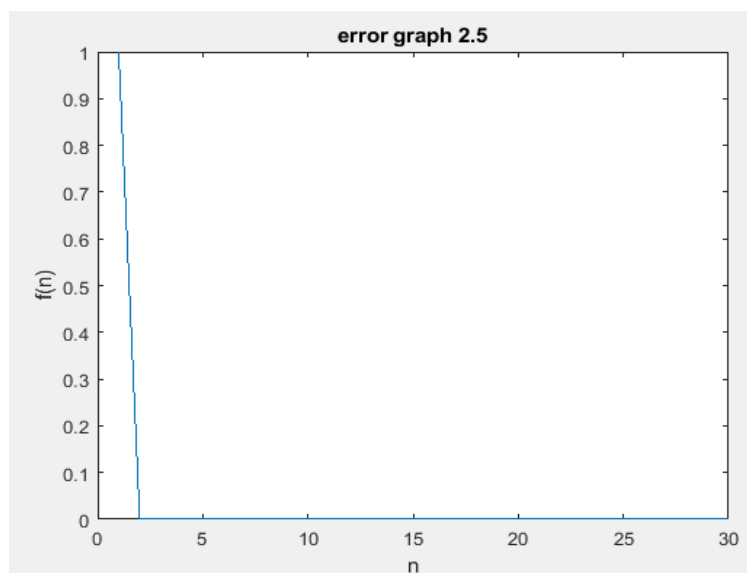


Рисунок 20 – График зависимости погрешности от количества точек коллокаций

## 2.3 АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА

Особенности конструкции коллокационных методов позволяют легко (в отличие от методов Рунге-Кутты общего вида) исследовать их порядок для произвольного числа стадий  $s$ .

*Теорема.* Рассмотрим многочлен:

$$\omega(t) = \prod_{i=1}^s (t - c_i).$$

Если  $\omega$  ортогонален всем многочленам степени не выше  $r - 1$ , то есть

$$\int_0^1 \omega(t) t^{q-1} dt, \forall q = \overline{1, r},$$

то соответствующий коллокационный метод имеет порядок  $s + r$ .

*Следствие.* Порядок коллокационного метода с узлами  $\{c_n\}$  равен  $\sigma + 1$ , где  $\sigma$  — алгебраическая степень точности интерполяционной квадратурной формулы с теми же узлами.

Согласно [16] рассматриваемые в работе коллокационные методы являются одношаговыми многоточечным разностным методом решения

ДУ. Согласно данной работе для оценки устойчивости метода коллокационные формулы необходимо представить в разностной форме:

$$u_{n+j} = u_n + \int_{t_n}^{t_{n+j}} P_s(t) dt, \quad j = \overline{1, s}, \quad (\text{u.1})$$

где  $P_s(t) = f(t, y(t))$  - полином на основании функции ДУ, представленного в форме Коши.

Например, варианту метода со следующими точками коллокации -  $\left\{t_n, t_n + \frac{\tau}{4}, t_n + \frac{\tau}{2}, t_n + \frac{3\tau}{4}, t_n + \tau\right\}$  соответствует следующая система уравнений:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1/4} \\ u_{n+1/2} \\ u_{n+3/4} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = u_{n,0} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} \frac{251}{2880} & \frac{323}{1440} & -\frac{11}{120} & \frac{53}{1440} & -\frac{19}{28880} \\ \frac{29}{360} & \frac{31}{90} & \frac{1}{15} & \frac{1}{90} & -\frac{1}{360} \\ \frac{27}{320} & \frac{51}{160} & \frac{9}{40} & \frac{21}{160} & -\frac{3}{320} \\ \frac{7}{90} & \frac{16}{45} & \frac{2}{15} & \frac{16}{45} & \frac{7}{90} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1/4} \\ F_{n+1/2} \\ F_{n+3/4} \\ F_{n+1} \end{pmatrix}. \quad (\text{u.2})$$

Матрица коэффициентов системы уравнений (u.2) совпадает с таблицей коэффициентов  $a_{ij}$  таблицы Бутчера, поскольку они получены по одному и приближенного решения на очередном шаге по тому же интерполяционному многочлену.

Поскольку коллокационный разностный метод эквивалентен  $s$  – стадийному неявному методу Рунге-Кутты, то условия устойчивости и области устойчивости для них совпадают.

Для неявного метода Рунге-Кутта [17] первого-десятого порядка область абсолютной устойчивости представлена на рисунке 21.

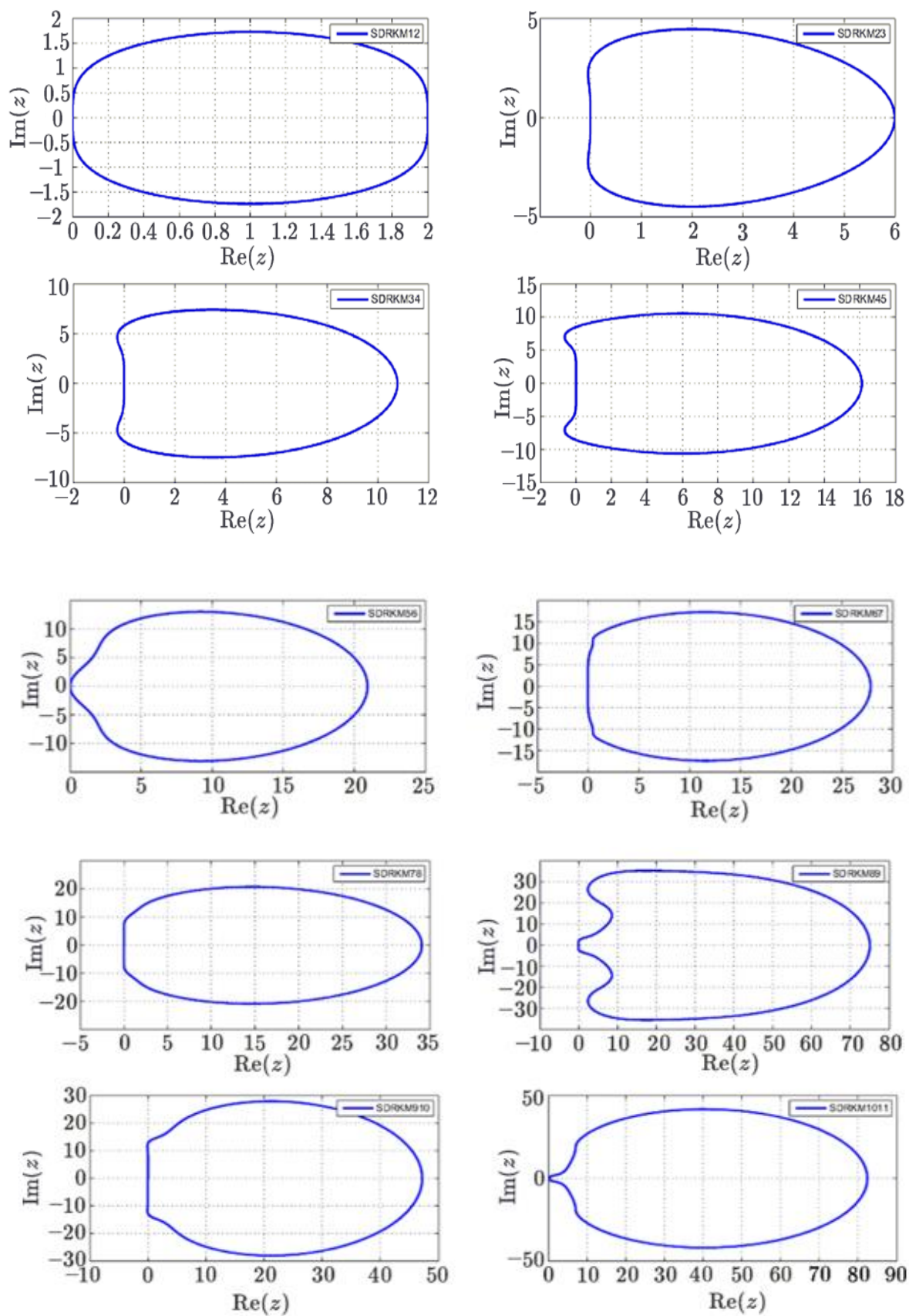


Рисунок 21. – Область абсолютной устойчивости  
MPKBP разных порядков

Как видим, при увеличении числа узлов – меняется характер устойчивости. Он переходит от А – к L(α)-устойчивости.

Расчет данных областей связан с построением полиномов соответствующих порядков, что является трудоемкой задачей. Как было показано ранее 5 точечный коллокационный метод требуется построения и последующего анализа полинома 5 степени. Поэтому в рамках работы оценка устойчивости метода будет проведена по характеру изменения функции ошибки при решении.

Для оценки устойчивости будет анализирован поведение функции ошибок при  $N \rightarrow \infty$ .

Переходим к однородности в системе

$$\begin{aligned} y' &= \lambda y, & y(0) &= y_0 \\ u(x) &= y(x) - y_0, \\ u' &= \lambda u + \lambda y_0, & u(0) &= 0. \end{aligned} \quad (u.3)$$

В качестве базисных функций выберем полиномы (p1.3), получим

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^N C_n x^n \\ u' &= \sum_{n=1}^N C_n (n x^{n-1}) \end{aligned}$$

Решение задачи (u.3) методом коллокаций:

$$F_1(x) = 0; \quad F_2(x) = 1; \quad F_3(x) = -\lambda; \quad F_4(x) = \lambda y_0.$$

Подстановка в исходное уравнение (u.3), дает

$$\begin{aligned} \sum_1^N C_n (n(x)^{n-1}) - \lambda \sum_1^N C_n (x)^n - \lambda y_0 &= 0. \\ \sum_{n=1}^N C_n \cdot x^{n-1} \cdot (n - \lambda x) &= \lambda y_0. \end{aligned} \quad (u.4)$$

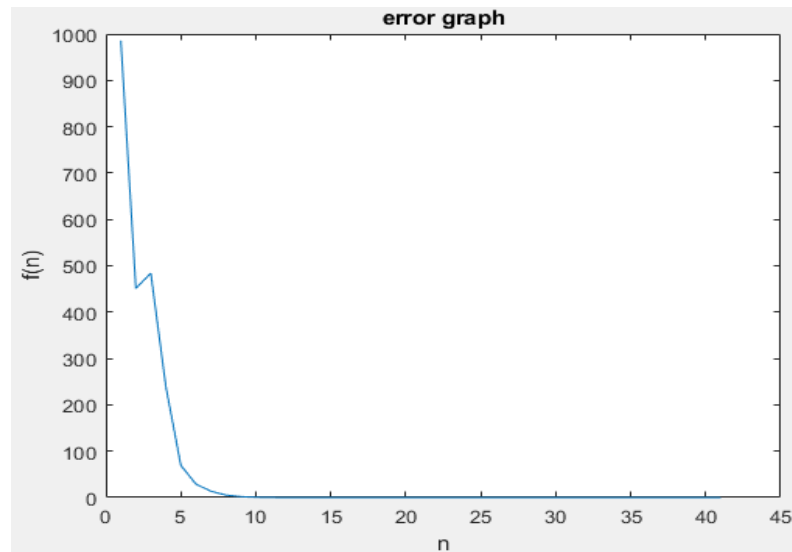
Подставив N точек коллокации в уравнение (p.3) получаем систему уравнений для определения коэффициентов  $C_n$ .

В результате решение будет в виде:

$$y_0 = y0;$$

$$y_{n+1} = y_n + C_n \cdot x^n.$$

Функция ошибок для данной системы представлена на рисунке:



*Рисунок 22. – Зависимость невязки от числа точек коллокации*

## Вывод

По итогам проведенных вычислительных экспериментов на различных типах уравнений второго порядка можно сделать следующий вывод. Был разработан алгоритм, который включает себе 3 различных решения задач: аналитическое решение, решение методом коллокаций, решение MatLab. Проведена численные эксперименты разработанного алгоритма на различных типах уравнений второго порядка.

Был посчитан погрешность и построен график зависимости погрешности от количества точек коллокаций. Точность численного решения зависит от правильного выбора базисных функций. Количество узлов коллокации влияет на погрешность. По увеличению точек коллокаций, погрешность стремиться к нулю. Также проведен анализ устойчивости метода и приведен иллюстративный рисунок области абсолютной устойчивости метода.

### **3 СОЦИАЛЬНАЯ ОТВЕТСТВЕННОСТЬ**

---

Поддержание комфортных условий труда и отдыха ведет к повышению производительности труда. Анатомические и физиологические особенности человека должны приниматься во внимание при выборе оптимальных параметров среды. Поддерживание безопасности на работе и отдыхе способствует сохранению жизни и здоровья человека в результате уменьшения, как числа несчастных случаев, так и темпов роста болезней под воздействием природы и экологическими катастрофами, и чрезвычайными обстоятельствами.

Раздел, посвященный социальной ответственности организации, включает в себя следующие составляющие: правовые и организационные вопросы обеспечения безопасности; производственная безопасность; экологическая безопасность и безопасность в чрезвычайных ситуациях.

Научно-исследовательский проект представляет собой разработку программного продукта и предполагает большой объем работы с ПК, поэтому важным критерием безопасности является организация рабочего места и режима трудовой деятельности.

#### **3.1 ПРАВОВЫЕ И ОРГАНИЗАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ БЕЗОПАСНОСТИ**

##### **3.1.1 Правовые нормы трудового законодательства для рабочей зоны**

Законодательство РФ об охране труда основывается на Конституции РФ и состоит из федерального закона, других федеральных законов и иных нормативных правовых актов субъектов РФ. Среди них можно выделить федеральный закон “Об обязательном социальном страховании от несчастных случаев на производстве и профессиональных заболеваний”. Для реализации этих законов приняты Постановления Правительства РФ

“О государственном надзоре и контроле за соблюдением законодательства РФ о труде и охране труда”, “О службе охраны труда”, “О Федеральной инспекции труда” и др. [19]

Продолжительность рабочего дня не должна быть меньше указанного времени в договоре, но не больше 40 часов в неделю. Для работников до 16 лет – не более 24 часов в неделю, от 16 до 18 лет и инвалидов I и II группы – не более 35 часов.

Выпускная квалификационная работа студента выполнялась в десятом корпусе ТПУ на кафедре информационных систем и технологий. Рабочее место находится на четвертом этаже здания и представляет собой комнату длиной – 9 м., шириной – 5 м. и высотой – 3 м. Естественное освещение кабинета осуществляется посредством двумя окнами размерами 2,2 м. х 1,5 м. Дверь – деревянная одностворчатая, белого цвета. Высота двери – 2 м., ширина – 1 м. Стены комнаты окрашены водоэмульсионной краской бежевого цвета. Потолок подвесной, плиточный. Пол покрыт линолеумом. Площадь кабинета составляет 45 м<sup>2</sup>, объем – 135 м<sup>3</sup>. Согласно СанПиН 2.2.2/2.4.1340-03 [18], норма площади рабочего места с персональным компьютером составляет 4,5 м<sup>2</sup>. В рассматриваемой аудитории установлено 10 рабочих мест с персональными компьютерами и жидкокристаллическими экранами. Соответственно, на одного человека приходится 4,5 м<sup>2</sup>, что соответствует вышеуказанным требованиям.

### **3.1.2 ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ**

Для обеспечения производственной безопасности необходимо проанализировать воздействия на человека вредных и опасных производственных факторов, которые могут возникать при разработке или эксплуатации проекта.

Все производственные факторы классифицируются по группам элементов: физические, химические, биологические и психофизические. Для данной работы целесообразно рассмотреть физические и психофизические вредные и опасные факторы производства, характерные как для рабочей зоны программиста, как разработчика рассматриваемой в данной работе системы, так и для рабочей зоны пользователя готового продукта – аналитика-оператора ПЭВМ. Выявленные факторы представлены в таблице 1.1.

Таблица 3.1 - Возможные опасные и вредные факторы

№	Факторы (ГОСТ 12.0.003-2015)	Этапы работы			Нормативные документы
		Разработ ка	Изготовл ение	эксплуата ция	
1	Отклонение показателей микроклимата	+	+	+	СанПиН 2.2.4.548-96. Гигиенические требования к микроклимату производственных помещений; СП 52.13330.2011 Защита от шума.
2	Превышение уровня шума	+	+	+	
3	Недостаточная освещенность рабочей зоны	+	+	+	
4	Повышенное значение напряжения в электрической цепи, замыкание которой может произойти через тело человека		+	+	СП 52.13330.2016 Естественное и искусственное освещение. СанПиН 2.2.4.3359-16. Санитарно-эпидемиологические
5	Повышенный уровень электромагнитных излучений	+	+	+	требования к физическим факторам на рабочих местах.

## 3.2 АНАЛИЗ ВРЕДНЫХ И ОПАСНЫХ ФАКТОРОВ, КОТОРЫЕ МОЖЕТ СОЗДАТЬ ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ.

### 3.2.1 Отклонение показателей микроклимата

Одним из необходимых условий здорового и высокопроизводительного труда является обеспечение нормальных микроклиматических условий,



являющих важной характеристикой санитарно-гигиенических условий труда. К микроклиматическим условиям на рабочем месте относятся температура воздуха, относительная влажность, скорость движения воздуха. Микроклиматические условия в помещении очень часто изменчивы и зависят от метеорологических условий наружной атмосферы, мощности источников тепловыделений в помещении, расположения рабочего места, воздухообмена и т.д. Вызываемое метеорологическими условиями тепловое воздействие или воздействие холода может привести к значительным изменениям жизнедеятельности организма человека и вследствие этого к снижению производительности труда, повышению общей заболеваемости работающих. Для исключения вредного влияния микроклиматических факторов на организм человека и создания нормальных условий труда в рабочей зоне параметры воздушной среды должны соответствовать СанПин 2.2.4.548-96. [22]

В производственных помещениях для работы с ПЭВМ происходит постоянное выделение тепла самой вычислительной техникой, вспомогательными приборами и средствами освещения. Поскольку оператор расположен в непосредственной близости с источниками выделения тепла, то данный фактор является одним из важнейших вредных факторов производственной среды оператора ПЭВМ, а высокая температура воздуха способствует быстрому перегреву организма и быстрой утомляемости.

Санитарные нормы устанавливают оптимальные и допустимые значения величин показателей микроклимата рабочих мест для различных категорий работ в теплый и холодный периоды года. Для программиста или оператора

ПЭВМ категория работ является лёгкой (1а), т.к. работа проводится сидя, без систематических физических нагрузок. Оптимальные параметры микроклимата в офисных помещениях приведены в таблице 1.2.

**Таблица 3.2 – Оптимальные параметры микроклимата  
производственных помещений оператора ПЭВМ.**

Период года	Температура воздуха, °С	Температура поверхностей, °С	Относительная влажность, %	Скорость движения воздуха, м/с
Холодный	22-24	21-25	60-40	0,1
Теплый	23-25	22-26	60-40	0,1

Для обеспечения нормальных метеорологических условий и поддержания теплового равновесия между телом человека и окружающей средой в лаборатории проводится ряд мероприятий, основными из которых являются: обеспечение приточно-вытяжной вентиляцией, системой водяного отопления, которые всегда должны находиться в рабочем состоянии. В нашем помещении существуют действующие вентиляция и водяное отопление, которые позволяют поддерживать необходимую температуру, соответствующую СанПин 2.2.4.548-96. [22]

### **3.2.2 Повышенный уровень шума**

Шум в большей или меньшей степени может временно активизировать или постоянно подавлять определенные психические процессы организма человека. Физиопатологические последствия могут проявиться в форме нарушения слуха и других анализаторов.

Шум не только ухудшает самочувствие человека и снижают производительность труда в среднем на 10-15%, но и очень часто приводят к профессиональным заболеваниям.

Шум создаются работающими приборами, вентиляторами. В большинстве случаев технически трудно снизить шум до очень малых уровней, поэтому при нормировании исходят не из оптимальных, а из терпимых условий, т.е. таких, когда вредное действие шума на человека не проявляется или проявляется незначительно.

Нормирование допустимых уровней звукового давления производится в соответствии с ГОСТ 12.1.003.-2014 [21]. По данному ГОСТу уровень звука в производственных помещениях не должен превышать 85 дБА [21].

Так как, выполнение выпускная квалификационная работа происходило в аудитории 427а 10-го корпуса НИИ ТПУ, то можно рассмотреть такие источники шума, как:

- шум работающих в помещении приборов (персональный компьютер, принтер, вентиляторы);
- посторонние звуки за пределами помещения (но в пределах 10-го корпуса НИИ ТПУ);
- звуки улицы (транспорт, различные производственные шумы).

Работающие люди в таких зонах должны быть снабжены предметами индивидуальной защиты. Согласно ГОСТу к средствам индивидуальной защиты от повышенного уровня шума относятся:

- противошумные шлемы;
- противошумные вкладыши (беруши);
- противошумные наушники.

### **3.2.3 Недостаточная освещенность рабочей зоны**

Освещение оказывает большое влияние на зрительную работоспособность, физическое и моральное состояние людей, производительность и качество труда. Следовательно, для сохранения работоспособности в течение рабочей смены необходимым условием является рациональное освещение помещений и рабочих мест, которое обеспечивается естественным и искусственным освещением согласно СП 52.13330.2016 [20].

Искусственное освещение в помещениях эксплуатации компьютеров должно осуществляться системой общего равномерного освещения.

Для обеспечения нормативных значений освещенности в помещениях следует проводить чистку стекол оконных проемов и светильников не реже двух раз в год и проводить своевременную замену перегоревших ламп.

В качестве искусственного освещения выбираем люминесцентные открытые двухламповые светильники типа ОДО-2-40. Расчёт общего равномерного искусственного освещения горизонтальной рабочей поверхности выполняется методом коэффициента светового потока, учитывающим световой поток, отражённый от потолка и стен. Длина помещения  $B=9$  м, ширина  $A=5$  м; высота  $H=3$  м.

Минимальное освещение  $E_t=150$  лк, в соответствии с разрядом зрительной работы.

Коэффициент запаса для помещения с малым выделением пыли при люминесцентных лампах:  $k=1,5$ .

Расчетная освещенность:

$$E_p = E_t * k = 150 * 1,5 = 225 \text{ лк.}$$

Свес светильников с потолка:  $h_c=0,2$  м.

Высота рабочей поверхности над полом:  $h_p=0,8$  м.

Высота подвеса светильников над рабочим местом:

$$h = H - h_c - h_p = 3 - 0,2 - 0,8 = 2 \text{ м.}$$

Площадь помещения, где  $A$  – длина, м;  $B$  – ширина, м.

$$S = A * B = 9 * 5 = 40 \text{ м}^2.$$

Удельная мощность:  $w=16$  Вт/м<sup>2</sup>.

Суммарная установленная мощность:

$$P = S * w = 40 * 16 = 640 \text{ Вт.}$$

Мощность одного светильника:  $P_i=80$  Вт.

Количество светильников:

$$n = P / P_i = 640 / 80 = 8 \text{ шт.}$$

Для равномерного общего освещения светильники располагаются в коридорном порядке.

Размеры светильника типа ОДОР-2-40: Этот светильник имеет две лампы мощностью 40 Вт каждая, длина светильника равна 1227 мм, ширина – 265 мм.

Величина светового потока лампы:

$$F_{\Pi} = (E \cdot k \cdot S \cdot z) / (n \cdot p),$$

где  $E=150 \text{лк}$  - минимальная освещенность,  $k=1,5$  - коэффициент запаса для люминесцентных ламп,  $S=40 \text{м}^2$  - площадь помещения  $z=0,9$  - коэффициент неравномерности освещения.

Индекс помещения:

$$i = S / (h(A+B)) = 40 / (3(9+5)) = 0,95$$

Коэффициент использования светового потока, показывающий какая часть светового потока ламп попадает на рабочую поверхность, для светильников типа ОДОР с люминесцентными лампами при  $r_{\Pi}=70\%$ ,  $r_c=50\%$  и индексе помещения  $i=0,95$ , коэффициент использования светового потока равен  $\rho=0,48$ .

$$F_{\Pi} = (150 \cdot 1,5 \cdot 40 \cdot 0,9) / (8 \cdot 0,48) = 8100 / 3,84 = 2109 \text{лм}$$

Согласно вычислениям, потребный световой поток равен 2109лм.

Делаем проверку выполнения условия:

$$\begin{aligned} -10\% &\leq \frac{F_{\text{Лб}} - F_{\Pi}}{F_{\text{Лб}}} \cdot 100\% \leq 20\% \\ \frac{F_{\text{Лб}} - F_{\Pi}}{F_{\text{Лб}}} \cdot 100\% &= \frac{2600 - 2109}{2109} \cdot 100\% = 18,9\% \end{aligned}$$

Таким образом:  $-10\% \leq 18,9\% \leq 20\%$ , необходимый световой поток светильника не выходит за пределы требуемого диапазона.

3.2.4 Повышенное значение напряжения в электрической цепи, замыкание которой может произойти через тело человека

Электрический ток представляет собой опасность, которая не предупреждает о своем присутствии (нет видимых движущихся частей,

свечения, запаха, шума), а в случае повреждения электроустановок (принтер, персональный компьютер, проектор, сканер), вокруг места повреждения возникает опасное электрическое поле. Особенно опасно прикосновение человека к токоведущим частям находящимся под напряжением. Вследствие теплового воздействия электрического тока при непосредственном прикосновении человека к токоведущим частям и при воздействии электрической дуги возникают внешние местные поражения (ожоги). Ожоги могут быть поверхностные или глубокие, сопровождающиеся поражением не только кожных покровов, но и подкожной ткани, жира, глуболежащих мышц и кости. Различают три степени электрических ожогов:

1. Покраснение кожи.
2. Образование пузырей.
3. Обугливание и омертвление кожи.

Раны от ожогов заживают очень долго, а поражение 2/3 поверхности тела может привести к смертельному исходу. Возникают также механические повреждения — разрыв тканей и некоторых внутренних органов, это может быть следствием динамических перенапряжений при прохождении через тело человека электрического тока (практически — тока короткого замыкания). Наибольшую, опасность при всех видах поражения представляет электроудар, когда при прохождении тока через тело человека поражается весь организм в целом, возникают судороги, расстройство дыхания, аритмия работы сердца. Степень опасности силы тока зависит от силы тока, проходящего через организм. Если сила тока, проходящего через организм 1,5 мА (при постоянном напряжении), то в месте контакта с токоведущими частями ощущается зуд и нагрев. Такую силу тока называют порогом ощущения. Увеличение силы тока до 10 мА при переменном и до 50 мА при постоянном напряжении вызывает у человека сильные боли в пальцах и кистях рук. При такой силе тока

человек еще может самостоятельно оторваться от токоведущих частей. Такую силу тока называют условно безопасной. Дальнейшее увеличение от 10 мА до 100 мА при переменном и от 50 мА до 100 мА при постоянном напряжении вызывает очень сильные боли, руки парализуются, наступает паралич дыхания, самостоятельно оторваться от токоведущих частей невозможно. Сила тока при снижении сопротивления человеческого тела постоянно возрастает и при достижении 100 мА, как при переменном, так и при постоянном напряжении наступает клиническая смерть (отсутствие внешних признаков жизни).

Опасное и вредное воздействие на людей электрического тока, электрической дуги и электромагнитных полей проявляются в виде электротравм и профессиональных заболеваний. Для предотвращения этих и других несчастных случаев необходимо разработать электробезопасность конструкций. Согласно ПЭУ, данная помещения без повышенной электроопасности, которое характеризуется отсутствием условий, создающих повышенную и или особую опасность. Основные способы и средства электрозащиты:

- изоляция токопроводящих частей и ее непрерывный контроль;
- установка оградительных устройств;
- предупредительная сигнализация и блокировки;
- использование знаков безопасности и предупреждающих плакатов;
- использование малых напряжений;
- электрическое разделение сетей;
- защитное заземление;
- выравнивание потенциалов;
- зануление;
- защитное отключение;
- средства индивидуальной электрозащиты.

### 3.2.4 Повышенный уровень электромагнитных излучений

Уровень электромагнитных излучений на рабочем месте оператора ПЭВМ является вредным фактором производственной среды, величины параметров которого определяются СанПиН 2.2.2/2.4.1340-03 [18]. Основными источниками электромагнитных излучений в помещениях для работы операторов ПЭВМ являются дисплеи компьютеров и мобильных устройств, сеть электропроводки, системный блок, устройства бесперебойного питания, блоки питания.

Излучения, применительно к дисплеям современных ПЭВМ, можно разделить на следующие классы:

- переменные электрические поля (5 Гц – 400 кГц);
- переменные магнитные поля (5 Гц – 400 кГц).

Воздействие данных излучений на организм человека носит необратимый характер и зависит от напряженности полей, потока энергии, частоты колебаний, размера облучаемого тела. При воздействии полей, имеющих напряженность выше предельно допустимого уровня, развиваются нарушения нервной системы, кровеносной сердечно-сосудистой системы, органов пищеварения и половой системы. [23] В таблице 1.3 приведены допустимые уровни параметров электромагнитных полей.

Таблица 3.3 – Временные допустимые уровни электромагнитных полей, создаваемых ПЭВМ на рабочих местах.

	Наименование параметров	Допустимые значения
Напряженность электрического поля	В диапазоне частот 5 Гц – 2 кГц	25 В/м
	В диапазоне частот 2 кГц – 400 кГц	2,5 В/м
Плотность магнитного потока	В диапазоне частот 5 Гц – 2 кГц	250 нТл
	В диапазоне частот 2 кГц – 400 кГц	25 нТл



Электростатический потенциал экрана видеомонитора	15 кВ/м
---	---------

Для уменьшения уровня электромагнитного поля от персонального компьютера рекомендуется включать в одну розетку не более двух компьютеров, сделать защитное заземление, подключить компьютер к розетке через нейтрализатор электрического поля.

К средствам индивидуальной защиты при работе на компьютере относят спектральные компьютерные очки для улучшения качества изображения, защиты от избыточных энергетических потоков видимого света и для профилактики «компьютерного зрительного синдрома». Очки уменьшают утомляемость глаз на 25-30 %. Их рекомендуется применять всем операторам при работе более 2 ч в день, а при нарушении зрения на 2 диоптрии и более – независимо от продолжительности работы.

### **3.3 ЭКОЛОГИЧЕСКАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ**

В данном разделе рассматривается воздействие на окружающую среду деятельности по разработке проекта, а также самого продукта в результате его реализации на производстве.

Разработка программного обеспечения и работа за ПЭВМ не являются экологически опасными работами, потому объект, на котором производилась разработка продукта, а также объекты, на которых будет производиться его использование операторами ПЭВМ относятся к предприятиям пятого класса, размер селитебной зоны для которых равен 50 м. [22]

Программный продукт, разработанный непосредственно в ходе выполнения магистерской диссертации, не наносит вреда окружающей среде.

Средства, необходимые для разработки и эксплуатации программного комплекса могут наносить вред окружающей среде. При рассмотрении влияния процесса утилизации персонального компьютера были выявлены

особо вредные выбросы согласно ГОСТ Р 51768-2001.[25] В случае выхода из строя компьютеров, они списываются и отправляются на специальный склад, который при необходимости принимает меры по утилизации списанной техники и комплектующих. Люминесцентные лампы, применяющиеся для искусственного освещения рабочих мест, также требуют особой утилизации, т.к. в них присутствует от 10 до 70 мг ртути, которая относится к чрезвычайно-опасным химическим веществам и может стать причиной отравления живых существ, а также загрязнения атмосферы, гидросферы и литосферы. Сроки службы таких ламп составляют около 5-ти лет, после чего их необходимо сдавать на переработку в специальных пунктах приема. Юридические лица обязаны сдавать лампы на переработку и вести паспорт для данного вида отходов. В настоящее время в Томской области утилизацией занимаются две компании: городской полигон и ООО НПП «Экотом». Утилизацией опасных бытовых отходов занимаются компании: ООО «Торем», ООО «СибМеталлГрупп».

### **3.4 БЕЗОПАСНОСТЬ ПРИ ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЯХ**

Чрезвычайные ситуации (ЧС) – совокупность таких обстоятельств, которые сопровождаются разрушениями, поражениями людей, изменением экологической обстановки. К чрезвычайным ситуациям относятся: производственные аварии, стихийные бедствия, военные конфликты.

В условиях ЧС необходимо знать правила поведения во избежание паники и несчастных случаев.

Одними из наиболее вероятных и разрушительных видов чрезвычайных ситуаций являются пожар или взрыв на рабочем месте.

В рабочей среде оператора ПЭВМ возможно возникновение следующих чрезвычайных ситуаций техногенного характера:

- пожары и взрывы в зданиях и на коммуникациях;
- внезапное обрушение зданий.

Наиболее характерной для объекта, где размещаются рабочие помещения, оборудованные ПЭВМ, чрезвычайной ситуацией является пожар.

Помещение для работы операторов ПЭВМ по системе классификации категорий помещений по взрывопожарной и пожарной опасности относится к категории Д (из 5-ти категорий А, Б, В1-В4, Г, Д), т.к. относится к помещениям с негорючими веществами и материалами в холодном состоянии.

Каждый сотрудник организации должен быть ознакомлен с инструкцией по пожарной безопасности, пройти инструктаж по технике безопасности и строго соблюдать его.

Запрещается использовать электроприборы в условиях, не соответствующих требованиям инструкций изготовителей, или имеющие неисправности, которые в соответствии с инструкцией по эксплуатации могут привести к пожару, а также эксплуатировать электропровода и кабели с поврежденной или потерявшей защитные свойства изоляцией.

Электроустановки и бытовые электроприборы в помещениях по окончании рабочего времени должны быть обесточены (вилки должны быть вынуты из розеток). Под напряжением должны оставаться дежурное освещение и пожарная сигнализация. Недопустимо хранение легковоспламеняющихся, горючих и взрывчатых веществ, использование открытого огня в помещениях офиса.

Перед уходом из служебного помещения работник обязан провести его осмотр, закрыть окна, и убедиться в том, что в помещении отсутствуют источники возможного возгорания, все электроприборы отключены и

выключено освещение. С периодичностью не реже одного раза в три года необходимо проводить замеры сопротивления изоляции токоведущих частей силового и осветительного оборудования.

Повышение устойчивости достигается за счет проведения соответствующих организационно-технических мероприятий, подготовки персонала к работе в ЧС

Работник при обнаружении пожара или признаков горения (задымление, запах гари, повышение температуры и т.п.) должен:

- немедленно прекратить работу и вызвать пожарную охрану по телефону «01», сообщив при этом адрес, место возникновения пожара и свою фамилию;
- принять по возможности меры по эвакуации людей и материальных ценностей;
- отключить от сети закрепленное за ним электрооборудование;
- приступить к тушению пожара имеющимися средствами пожаротушения;
- сообщить непосредственному или вышестоящему начальнику и оповестить окружающих сотрудников;
- при общем сигнале опасности покинуть здание согласно «Плану эвакуации людей при пожаре и других ЧС».

Для тушения пожара применять ручные углекислотные огнетушители (типа ОУ-2, ОУ-5), находящиеся в помещениях офиса, и пожарный кран внутреннего противопожарного водопровода. Они предназначены для тушения начальных возгораний различных веществ и материалов, за исключением веществ, горение которых происходит без доступа воздуха. Огнетушители должны постоянно содержаться в исправном состоянии и быть готовыми к действию. Категорически запрещается тушить возгорания в помещениях офиса при помощи химических пенных огнетушителей (типа ОХП-10).

Самое главное – при любой чрезвычайной ситуации сохранять спокойствие и не забывать отключить электроэнергию и электроприборы. Иначе, это приведет к еще большим разрушениям.

## ВЫВОДЫ ПО РАЗДЕЛУ

Данный раздел включает в себя комплекс мер и мероприятий по обеспечению безопасных условий труда и жизни для людей, находящихся на рабочих местах в офисном помещении. Проанализированы законодательные и нормативные документы, затрагивающие данную сферу исследования. Был проведен анализ влияния вредных факторов на процесс работы сотрудников и на окружающую среду. Разработаны организационные мероприятия по обеспечению организационной безопасности и безопасности в чрезвычайных ситуациях, что позволит свести к минимуму вероятность возникновения чрезвычайных и опасных ситуаций, а также вероятность возникновения профессиональных заболеваний.

## **4 ФИНАНСОВЫЙ МЕНЕДЖМЕНТ, РЕСУРСОЭФФЕКТИВНОСТЬ И РЕСУРСОСБЕРЕЖЕНИЕ**

---

Целью раздела «Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение» является проектирование и создание конкурентоспособных разработок, технологий, отвечающих современным требованиям в области ресурсоэффективности и ресурсосбережения.

Для достижения описанных выше целей необходимо решить следующие задачи:

- определить потенциальных потребителей путем рассмотрения целевого рынка и проведения его сегментирования;
- провести SWOT-анализ для комплексной оценки угроз, возможностей, сильных и слабых сторон научно-исследовательского проекта, а также для анализа внешней и внутренней среды проекта;
- рассчитать затраты на реализацию проекта;
- ....

### **4.1 ПРЕДПРОЕКТНЫЙ АНАЛИЗ**

#### **4.1.1 Потенциальные потребители результатов исследования**

Для анализа потребителей результатов исследования необходимо рассмотреть целевой рынок.

Целевой рынок – сегменты рынка, на котором будет продаваться в будущем разработка. В свою очередь, сегмент рынка – это особым образом выделенная часть рынка, группы потребителей, обладающих определенными общими признаками.

Выполненная работа направлена для разработки алгоритма решения обыкновенных дифференциальных уравнении второго порядка методом коллокации в программной среде MATLAB.

Потенциальными потребителями результатов НИР являются отрасли (экономика, строительство и т.д.), применяемые дифференциальные уравнения в решение своих задач.

#### 4.1.2 Анализ конкурентных технических решений с позиции ресурсоэффективности и ресурсосбережения

Анализ конкурентных технических решений позволяет провести оценку сравнительной эффективности научной разработки и определить направления для ее будущего повышения. Основным методом, используемым в данной работе, является метод коллокаций(ф). Конкурентные методы: это метод конечных разностей(к1), метод пристрелки(к2).

Анализ конкурентных технических решений определяется по формуле:

$$K_i = \sum_{i=1}^n B_i B_i \quad (1)$$

где  $K$  – конкурентоспособность разработки или конкурента;  $B_i$  – вес  $i$ -го показателя (в долях единицы);  $B_i$  – балл  $i$ -го показателя.

Таблица 4.1 – Оценочная карта для сравнения конкурентных технических решений

Критерии оценки	Вес критерия	Баллы			Конкурентоспособность		
		Бф	Бк1	Бк2	Кф	Кк1	Кк2
Технические критерии оценки ресурсоэффективности							
1. Способствует увеличению скорости выполнения рутинных задач	0,15	5	4	4	0,75	0,6	0,6
2. Простота внедрения	0,13	5	5	5	0,65	0,65	0,65
3. Простота эксплуатации	0,10	4	4	4	0,4	0,4	0,4
4. Надежность	0,10	4	3	3	0,4	0,3	0,3
5. Результативность	0,09	5	4	4	0,45	0,36	0,36
Экономические критерии оценки эффективности							
1. Конкурентоспособность продукта	0,09	4	4	4	0,36	0,36	0,36
2. Цена	0,10	5	3	4	0,5	0,3	0,4
3. Предполагаемый срок эксплуатации	0,09	5	5	5	0,45	0,45	0,45

4. Послепродажное обслуживание	0,07	5	3	3	0,35	0,21	0,21
5. Срок выхода на рынок	0,08	4	5	5	0,32	0,4	0,4
<b>Итого</b>	<b>1</b>	<b>46</b>	<b>40</b>	<b>41</b>	<b>4,63</b>	<b>4,03</b>	<b>4,13</b>

Таким образом, конкурентоспособность данной разработки составила 4,63, в то время как у конкурентных методов этот показатель составил 4,03 и 4,13 соответственно. Результаты показывают, что данная разработка является конкурентоспособной и имеет преимущества по некоторым критериям.

#### 4.1.3 *SWOT*-анализ

SWOT – Strengths (сильные стороны), Weaknesses (слабые стороны), Opportunities (возможности) и Threats (угрозы) – представляет собой комплексный анализ научно-исследовательского проекта. SWOT-анализ применяют для исследования внешней и внутренней среды проекта.

Он проводится в несколько этапов.

Первый этап заключается в описании сильных и слабых сторон проекта, в выявлении возможностей и угроз для реализации проекта, которые проявились или могут появиться в его внешней среде.

Второй этап состоит в выявлении соответствия сильных и слабых сторон научно-исследовательского проекта внешним условиям окружающей среды. Это соответствие или несоответствие должны помочь выявить степень необходимости проведения стратегических изменений. В рамках второго этапа были составлены таблицы 2-5.

В рамках третьего этапа составляется итоговая матрица SWOT- анализа представленная в таблице 6.

Таблица 4.2 - Интерактивная матрица сильных сторон и возможностей

Сильные стороны проекта				
Возможности проекта		C1	C2	C3
	B1	+	+	+
	B2	+	-	+
	B3	+	+	-

Таблица 4.3 - Интерактивная матрица слабых сторон и возможностей



Слабые стороны проекта					
Возможности проекта		Сл1	Сл2	Сл3	Сл4
	B1	+	+	-	+
	B2	+	+	-	-
	B3	+	+	+	-

Таблица 4.4 - Интерактивная матрица сильных сторон и угроз

Сильные стороны проекта				
Угрозы проекта		C1	C2	C3
	У1	-	+	+
	У2	-	+	-

Таблица 4.5 - Интерактивная матрица слабых сторон и угроз

Слабые стороны проекта					
Угрозы проекта		Сл1	Сл2	Сл3	Сл4
	У1	-	-	+	-
	У2	+	+	-	+

Таблица 4.6 - Матрица SWOT

	<p><b>Сильные стороны научно-исследовательского проекта:</b>  С1. Наличие опытного научного руководителя и консультанта в продвижении продукта  1. С2. Алгоритм, реализован в программной среде MatLab, который имеет четкий интерфейс и доступен большинству пользователей;  С3. Повышение эффективности и результативности проекта</p>	<p><b>Слабые стороны научно-исследовательского проекта:</b>  Сл1. Малый опыт работы разработчика на реальных проектах;  Сл2. Трудоемкость процесс разработки и тестирования продукта;  Сл3. Малое количество потребителей.  Сл4. Необходимость индивидуальной разработки алгоритма для каждого типа граничных условий.</p>
<p><b>Возможности:</b>  В1. Актуальность разработки;  В2. Ориентация на крупных потенциальных покупателей;  В3. Повышения конкурентоспособности потенциальных потребителей разработанного проекта.</p>	<p>С1В1В2 – позволит оптимизировать продвижение продукта.  С2С3В1В2 – позволяет удовлетворить потребности крупных предприятий одним алгоритмом.</p>	<p>В1Сл1Сл2Сл3 – разработка ведется на достаточно известном языке программирования MatLab, то на большинство вопросов уже имеются ответы в документациях библиотек, а также примеры использования.</p>

<b>Угрозы:</b> У1. Отсутствие спроса на конечный продукт. У2. возможная уязвимость алгоритма	У2С1С3 – опытный научный руководитель сможет помочь в продвижении продукта. У2С1 – алгоритм может быть проверено на наличие уязвимостей научным руководителем.	У1Сл1Сл2Сл3 – вышеуказанные сложности могут способствовать изменению поведения данных У2Сл1Сл2Сл3 – перечисленные сложности могут способствовать появлению уязвимостей в ПО.
--	---	---

#### 4.1.4 Оценка готовности проекта к коммерциализации

Далее необходимо оценить степень готовности научного – проекта к коммерциализации и определить уровень собственных знаний для проведения (завершения). В таблице 3 представлена специальная форма, содержащая показатели о степени проработанности проекта с позиции коммерциализации и компетенциям разработчика проекта.

Таблица 4.7 - Оценка степени готовности научного проекта к коммерциализации

№ п/п	Наименование	Степень проработанности научного проекта	Уровень имеющихся знаний у разработчика
1.	Определен имеющийся научно-технический задел	4	4
2.	Определены перспективные направления коммерциализации научно-технического задела	5	4
3.	Определены отрасли и технологии (товары, услуги) для предложения на рынке	4	4
4.	Определена товарная форма научно-технического задела для представления на рынок	4	2
5.	Определены авторы и осуществлена охрана их прав	4	2
6.	Проведена оценка стоимости интеллектуальной собственности	4	3
7.	Проведены маркетинговые исследования рынков сбыта	4	4

8.	Разработан бизнес-план коммерциализации научной разработки	4	2
9.	Определены пути продвижения научной разработки на рынок	3	2
10.	Разработана стратегия (форма) реализации научной разработки	3	2
11.	Проработаны вопросы международного сотрудничества и выхода на зарубежный рынок	1	1
12.	Проработаны вопросы использования услуг инфраструктуры поддержки, получения льгот	4	3
13.	Проработаны вопросы финансирования коммерциализации научной разработки	3	2
14.	Имеется команда для коммерциализации научной разработки	3	3
15.	Проработан механизм реализации научного проекта	4	3
	<b>ИТОГО БАЛЛОВ</b>	<b>54</b>	<b>41</b>

При проведении анализа по таблице 3, производится оценка по двум направлениям: степень проработанности научного – проекта и уровень имеющихся знаний у разработчика, по пятибалльной шкале.

Оценка готовности научного проекта к коммерциализации (или уровень имеющихся знаний у разработчика) определяется по формуле:

$$B_{\text{сум}} = \sum B_i, \quad (1)$$

где  $B_{\text{сум}}$  – суммарное количество баллов по каждому направлению;

$B_i$  – балл по  $i$ -му показателю.

Значение  $B_{\text{сум}}$  позволяет определить готовность научной разработки и ее разработчика к коммерциализации. Степень  $B_{\text{сум}}$  в данной научной разработке считается перспективной (средняя), следовательно, необходимо увеличивать объемы инвестирования и улучшить направление проведение оценки стоимости интеллектуальной стоимости, повысить уровень компетенций недостающих разработчику в данном вопросе и предусмотреть возможности привлечения требуемых специалистов в команду проекта.

#### **4.1.5 Методы коммерциализации результатов научно-технического исследования**

При коммерциализации научно-технических разработок продавец (а это, как правило, владелец соответствующих объектов интеллектуальной собственности), преследует вполне определенную цель, которая во многом зависит от того, куда в последующем он намерен направить (использовать, вложить) полученный коммерческий эффект. Это может быть получение средств для продолжения своих научных исследований и разработок (получение финансирования, оборудования, уникальных материалов, других научно-технических разработок и т. д.), одноразовое получение финансовых ресурсов для каких-либо целей или для накопления, обеспечение постоянного притока финансовых средств, а также их различные сочетания. При этом время продвижения товара на рынок во многом зависит от правильности выбора метода коммерциализации. Для разработанного проекта инжиниринг является самым оптимальным методом коммерциализации. Инжиниринг – самостоятельный вид коммерческих операций предполагает предоставление на основе договора инжиниринга одной стороной, именуемой консультантом, другой стороне, именуемой заказчиком, комплекса или отдельных видов инженерно-технических услуг, связанных с проектированием, строительством и вводом объекта в эксплуатацию, с разработкой новых технологических процессов на предприятии заказчика, усовершенствованием имеющихся производственных процессов вплоть до внедрения изделия в производство и даже сбыта продукции.

#### **4.2 ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ ПРОЕКТА**

На этом этапе принято выполнить определенные работы для успешного запуска проекта. Здесь следует определить цели и результаты проекта,

определить рабочую группу, определить ограничения и допущения. Вся эта информация заноситься в документ, называемый уставом проекта.

Уставом проекта называется документ, который определяет бизнес-потребности и текущее понимание потребностей заказчика, а также новый продукт, услугу или результат, который планируется создать.

#### 4.2.1 Цели и результат проекта

Инициация проекта определяют изначальные цели проекта или содержание работы. Также, в данном разделе определяются изначальные экономические – финансовые затраты. По данной работе также надо определить внутренние и внешние заинтересованные стороны проекта, которые влияют на общий результат научного проекта.

Таблица 4.8 – Заинтересованные стороны проекта

Заинтересованные стороны проекта	Ожидания заинтересованных сторон
НИ ТПУ	Проведение исследований по данной теме с целью использования настоящей разработки в образовательных целях, а также использование данной разработки в качестве основы под иные проекты, выполняемые на базе ОЭФ.
В экономике	Использование данной разработки, которая позволит при решении задач, связанных с оптимальным управлением, экономической деятельностью фирмы или предприятия, организацией производственного процесса и т.д. В виде дифференциальных уравнений записываются соотношения между экономическими переменными, такими как цены, заработная плата, капитал, процентная ставка и др.

Таблица 4.9 – Цели и результат проекта

Цели проекта:	Разработать алгоритм для решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом коллокации в программной среде MATLAB.
Ожидаемые результаты проекта:	Разработанный алгоритм для решения краевых задач

<b>Критерии приемки результата проекта:</b>	Автоматизировать процесс нахождения решения или упростить особенно трудоемкие процедуры вычисления, уменьшить количество итераций, необходимых для нахождения точного или приближенного решения.
<b>Требования к результату проекта:</b>	<b>Требование:</b>
	Пользователь самостоятельно мог ввести необходимые параметры, а также изменить дифференциальное уравнение для выполнения уже другой поставленной задачи

#### 4.2.2 Организационная структура проекта

На данном этапе работы необходимо решить следующие вопросы: кто будет входить в рабочую группу данного проекта, определить роль каждого участника в данном проекте, а также прописать функции, выполняемые каждым из участников и их трудозатраты в проекте.

Таблица 4.10 – Рабочая группа проекта

№ п/п	ФИО, основное место работы, должность	Роль в проекте	Функции	Трудо- затраты, час.
1	Доцент ОЭФ ИЯТШ НИТПУ Семёнов М.Е.	Руководитель проекта	– составление и утверждение научного задания; – календарное планирование работ; – оценка эффективности полученных результатов.	25
2	Магистр ОЭФ ИЯТШ НИТПУ Шаймарданова А.А.	Исполнитель проекта	исполнение всех работ по проекту	558

В ходе реализации научного проекта, помимо магистранта задействован руководитель проекта:

*Руководитель проекта* – отвечает за реализацию проекта в пределах заданных ограничений по ресурсам, координирует деятельность

участников проекта. В рамках данного проекта эту роль выполняет руководитель магистерской диссертации.

*Исполнитель по проекту* – специалист, выполняющий отдельные работы по проекту. В рамках этого проекта исполнителем является магистрант.

#### 4.2.3 Ограничения и допущения проекта

Ограничения проекта – это все факторы, которые могут послужить ограничением степени свободы участников команды проекта, а также «границы проекта» - параметры проекта или его продукта, которые не будут реализованных в рамках данного проекта. Данная информация отображена в таблице ниже:

Таблица 4.11 – Ограничения проекта

Фактор	Ограничения / допущения
Бюджет проекта	223 960,44
Источник финансирования	НИ ТПУ
Сроки проекта:	27.01.2020 – 03.06.2020
Дата утверждения плана управления проектом	27.01.2020
Дата завершения проекта	03.06.2020
Прочие ограничения и допущения	Ограниченный рабочий график научного руководителя и магистранта.

### 4.3 ПЛАНИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ НТИ: СТРУКТУРА И ГРАФИК ПРОВЕДЕНИЯ, БЮДЖЕТ, РИСКИ И ОРГАНИЗАЦИЯ ЗАКУПОК

#### 4.3.1 Разработка календарного плана проекта

В рамках планирования научного проекта построен календарный график проекта, представленный в таблице 12.

Приняты следующие сокращения:

НР – научный руководитель, Семёнов М.Е.

И – исполнитель, Шаймарданова А.А.

Таблица 4.12 – Календарный план проекта в рабочих днях

Код работы (ИСП)	Название	Длительность, раб. дни	Дата начала работ	Дата окончания работ	Состав участников
1	Определение целей и задач	4	27.01.2020	30.01.2020	НР, М
2	Составление и утверждение технического задания	8	31.01.2020	11.02.2020	НР, М
3	Разработка календарного плана	6	12.02.2020	19.02.2020	НР, М
4	Подбор и изучение материалов по теме	21	20.02.2020	20.03.2020	М
5	Обсуждение литературы	1	23.03.2020	23.03.2020	НР, М
6	Процесс реализации модели	32	24.03.2020	08.05.2020	М
7	Оформление расчетно-пояснительной записки	14	11.05.2020	28.05.2020	М
8	Оформление графического материала	2	29.05.2020	01.06.2020	НР, М
9	Подведение итогов	2	02.06.2020	03.06.2020	НР, М
ИТОГ		90	27.01.2020	03.06.2020	-

Диаграмма Ганта – это, по сути, гистограмма, которая визуализирует календарный план проекта, на котором работы по теме отображаются в виде шкалы времени.


Таблица 4.13 – Календарный план-график выполнения работ (И - исполнитель)

Календарный план-график выполнения работ																	
№ п/ п	Наименование работы	И	Дни	Продолжительность выполнения работы													
				февраль			март			апрель			май			июнь	
				1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
1	Составление и утверждение технического задания	НР	7														
2	Подбор и изучение	М	18														



	материалов по теме																	
3	Исследование полученных исходных данных	М	14															
4	Календарное планирование работ по теме	НР М	6															
5	Проведение разработки алгоритмов решения задачи	М	20															
6	Тестирование и анализ результатов	М	12															
7	Обсуждение результатов и оценка их эффективности	НР, М	10															
8	Составление пояснительной записки к магистерской диссертации	М	6															

Научный руководитель (НР 

Магистрант (М) 

#### 4.3.2 Бюджет научного исследования

При планировании бюджета научных исследований должны быть обеспечены полным и точным отражением всех запланированных затрат, необходимых для ее реализации

#### 4.3.3 Специальное оборудование для научных (специальных) работ

В данную статью включены все затраты, связанные с приобретением специального оборудования, необходимого для проведения работ по теме «Применение сетевого анализа к фондовому рынку». Определение стоимости спецоборудования производилось по действующим прейскурантам.

Таблица 4.14 – Расчет затрат по статье «Спецоборудование для научных работ»

№ п/п	Наименование	Количество	Цена за ед., руб.	Затраты на материалы, руб.
1	Ноутбук MacBook Air13	1	65990	65990
2	Microsoft Windows 10 Professional RU x32/x64	1	8290	8290
3	Пакет Microsoft Office 2019 Home and Student RU x32/x64	1	4600	4600
4	Пакет MatLab Home R2020a	1	7030	7030
5	Канцелярские принадлежности	1	300	300
Итого				86210

Таким образом, для разработки модели рыночного графа и проведения исследования потребуется 86210 рублей.

#### 4.3.3.1 Основная заработная плата

Статья включает основную заработную плату работников, непосредственно занятых выполнением проекта, (включая премии, доплаты) и дополнительную заработную плату.

$$C_{зп} = Z_{осн} + Z_{доп}, \quad (2)$$

где  $Z_{осн}$  – основная заработная плата;

$Z_{доп}$  – дополнительная заработная плата.

Основная заработная плата ( $Z_{осн}$ ) руководителя от университета:

$$Z_{осн} = Z_{дн} \cdot T_{раб}, \quad (3)$$

где  $Z_{осн}$  – основная заработная плата одного работника;  $T_p$  – продолжительность работ, выполняемых научно-техническим работником, раб. дн.;  $Z_{дн}$  – среднедневная заработная плата работника, руб.

Среднедневная заработная плата рассчитывается по формуле:

$$З_{\text{дн}} = \frac{З_{\text{м}} \cdot М}{F_{\text{д}}}, \quad (4)$$

где  $З_{\text{м}}$  – месячный должностной оклад работника, руб.;

$М$  – количество месяцев работы без отпуска в течение года:

при отпуске в 24 раб. дня  $М = 11,2$  месяца, 5-дневная неделя;

при отпуске в 48 раб. дней  $М = 10,4$  месяца, 6-дневная неделя;

$F_{\text{д}}$  – действительный годовой фонд рабочего времени научно-технического персонала, раб. дн.

Таблица 4.15 – Баланс времени

Показатели рабочего времени	Руководитель	Магистрант
Календарное число дней	366	366
Количество нерабочих дней (выходные дни и праздничные дни)	51 и 14	51 и 14
Потери рабочего времени (отпуск, больничные)	52	52
Действительный годовой фонд рабочего времени	249	249

Месячный должностной оклад работника:

$$З_{\text{м}} = З_{\text{б}} \cdot (k_{\text{пр}} + k_{\text{д}}) \cdot k_{\text{р}}, \quad (5)$$

где  $З_{\text{б}}$  – базовый оклад, руб.;

$k_{\text{пр}}$  – премиальный коэффициент, (определяется Положением об оплате труда);

$k_{\text{д}}$  – коэффициент доплат и надбавок (в НИИ и на промышленных предприятиях – за расширение сфер обслуживания, за профессиональное мастерство, за вредные условия: определяется Положением об оплате труда);

$k_{\text{р}}$  – районный коэффициент, равный 1,3 (для Томска).

Месячный должностной оклад работника:

$$З_{\text{м}} = З_{\text{б}} \cdot k_{\text{р}} \quad (6)$$

где  $Z_6$  – базовый оклад, руб.;  $k_p$  – районный коэффициент, равный 1,3 (для Томска).

Таблица 4.16 – Расчёт основной заработной платы

Исполнители	$Z_6$ , руб.	$k_{пр}$	$k_d$	$k_p$	$Z_m$ , руб.	$Z_{дн}$ , руб.	$T_p$ , раб. дн.	$Z_{осн}$ , руб.
Руководитель	33664	0,3	0,2	1,3	65644,8	2741,8	5,5	15079,9
Магистрант	12663	-	-	1,3	16463,2	682,14	90	61392,6

#### 4.3.3.2 Дополнительная заработная плата научно-производственного персонала

Дополнительная заработная плата включает оплату за непроработанное время (очередной и учебный отпуск, выполнение государственных обязанностей, выплата вознаграждений за выслугу лет и т.п.) и рассчитывается исходя из 10-15% от основной заработной платы, работников, непосредственно участвующих в выполнении темы:

$$Z_{доп} = k_{доп} \cdot Z_{осн}, \quad (7)$$

где  $Z_{доп}$  – дополнительная заработная плата, руб.;

$k_{доп}$  – коэффициент дополнительной зарплаты;

$Z_{осн}$  – основная заработная плата, руб.

В табл. 11 приведена форма расчёта основной и дополнительной заработной платы.

Таблица 4.17 – Расчёт дополнительной заработной платы

Заработная плата	Руководитель	Магистрант
Основная заработная плата	15079,9	61392,6
Дополнительная заработная плата	1809,6	7367,1
Итого по статье $C_{зп}$	9176,7	

Общая сумма дополнительной заработной платы исполнителей проекта составила 9176,7 рубля.

#### 4.3.3.3 Отчисления на социальные нужды

В данной статье расходов отражаются обязательные отчисления по установленным законодательством Российской Федерации нормам органам государственного социального страхования (ФСС), пенсионного фонда (ПФ) и медицинского страхования (ФФОМС) от затрат на оплату труда работников.

Величина отчислений во внебюджетные фонды определяется исходя из следующей формулы:

$$C_{\text{внеб}} = k_{\text{внеб}} \cdot (З_{\text{осн}} + З_{\text{доп}}), \quad (8)$$

где  $k_{\text{внеб}}$  – коэффициент отчислений на уплату во внебюджетные фонды (пенсионный фонд, фонд обязательного медицинского страхования и пр.).

Таблица 4.18 – Отчисления во внебюджетные фонды

Исполнители	Основная ЗП, руб	Доп. ЗП, руб	Сумма отчисления, руб
Руководитель	15079,9	1809,6	4577,1
Магистрант	61392,6	7367,1	18633,9
Итого			23211

#### 4.3.3.4 Прочие прямые затраты

В данном пункте рассчитываются затраты на электричество за время работы над проектом. Вычисление производится по следующей формуле:

$$C_{\text{эл.об}} = P_{\text{об}} \cdot t_{\text{об}} \cdot Ц_{\text{э}} \quad (9)$$

где  $P_{\text{об}}$  – мощность, потребляемая оборудованием, кВт, равно приблизительно 700 Вт;

$t_{\text{об}}$  – время работы оборудования, час;

$Ц_{\text{э}}$  – тариф на 1 кВт\*час.

Затраты на электроэнергию, потребляемую оборудованием (ноутбук), при среднем времени работы 6 часов в день, т.е. 558 часов за 93 дня, а также (для ТПУ) тариф одного кВт\*час равен 5,8 рублей, получим:

$$C_{\text{накл}} = 0,7 \cdot 558 \cdot 5,8 = 2265,48 \text{ руб.}$$

#### 4.3.3.5 Накладные расходы

В эту статью включаются затраты на управление и хозяйственное обслуживание, которые могут быть отнесены непосредственно на конкретную тему. Кроме того, сюда относятся расходы по содержанию, эксплуатации и ремонту оборудования, производственного инструмента и инвентаря, зданий, сооружений и др. В расчетах эти расходы принимаются в размере 70 - 90 % от суммы основной заработной платы научно-производственного персонала данной научно-технической организации.

Накладные расходы составляют 80-100 % от суммы основной и дополнительной заработной платы, работников, непосредственно участвующих в выполнении темы.

Расчет накладных расходов ведется по следующей формуле:

$$C_{\text{накл}} = k_{\text{накл}} \cdot (З_{\text{осн}} + З_{\text{доп}}), \quad (10)$$

где  $k_{\text{накл}}$  – коэффициент накладных расходов.

$$C_{\text{накл}} = 0,3 \cdot (15079,9 + 1809,6 + 61392,6 + 7367,1) = 25694,76 \text{ руб.}$$

#### 4.3.3.6 Формирование бюджета затрат НТИ

Рассчитанная величина затрат научно-исследовательской работы является основой для формирования бюджета затрат проекта, который при формировании договора с заказчиком защищается научной организацией в качестве нижнего предела затрат на разработку научно-технической продукции.

На основании полученных данных по отдельным статьям затрат составляется калькуляция плановой себестоимости проекта. Определение бюджета затрат на научно-исследовательский проект приведен в таблице ниже:

Таблица 4.19 – Калькуляция затрат по статьям

Наименование статьи	Сумма, руб
1. Затраты на специальное оборудование	86 210
2. Затраты на основную ЗП	76 472,5
3. Затраты на дополнительную ЗП	9 176,7
4. Отчисления на социальные нужды	23 211
5. Оплата работ, выполняемых сторонними организациями	930
6. Накладные расходы	25 694,76
7. Прочие прямые затраты	2 265,48
Итого	223 960,44

#### 4.4 РЕЕСТР РИСКОВ ПРОЕКТА

Идентифицированные риски проекта включают в себя возможные неопределенные события, которые могут возникнуть в проекте и вызвать последствия, которые повлекут за собой нежелательные эффекты.

Таблица 4.20 – Реестр рисков

№	Риск	Потенциальное воздействие	Вероятность наступления (1-5)	Влияние риска (1-5)	Уровень риска*	Способы смягчения риска	Условия наступления
1	Отсутствие спроса со стороны ключевых потребителей для приобретения продукта	Отсутствие возможности продаж продукции	2	4	Средний	- Разработка политик и по продвижению продукции на рынке - подготовка к смене ориентации продукта	Отсутствие заинтересованности в конкретном продукте
2	Технологические риски, связанные с использованием ПО, сторонних	Незавершенность продукта	1	2	Низкий	Рассмотрение аналогичных, ПО используемых в	Изменение политики распространения используемого ПО

	разработчик ов					разработ ке	
3	Сбои в разработке готовой продукции	Проблемы с внедрение алгоритма	2	2	Низкий	Проводить полное модульное тестирование	Отсутствие полноценного тестирования
4	Конкуренция на рынке	Снижение спроса на разработанное алгоритм	2	4	Средний	Подготовка к снижению стоимости продукции. Поиск дополнительных клиентов из других категорий	Высокая цена продукта. Отсутствие необходимого функционала

Уровень риска может быть: высокий, средний или низкий в зависимости от вероятности наступления и степени влияния риска.

#### **4.5 ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСНОЙ (РЕСУРСОСБЕРЕГАЮЩЕЙ), ФИНАНСОВОЙ, БЮДЖЕТНОЙ, СОЦИАЛЬНОЙ И ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ**

##### **4.5.1 Оценка абсолютной эффективности исследования**

В основе проектного подхода к инвестиционной деятельности предприятия лежит принцип денежных потоков (cashflow). Особенностью является его прогнозный и долгосрочный характер, поэтому в применяемом подходе к анализу учитываются фактор времени и фактор риска. Для оценки общей экономической эффективности используются следующие основные показатели:

- чистая текущая стоимость (NPV);



- индекс доходности (PI);
- внутренняя ставка доходности (IRR);
- срок окупаемости (DPP).

Чистая текущая стоимость (NPV) – это показатель экономической эффективности инвестиционного проекта, который рассчитывается путём дисконтирования (приведения к текущей стоимости, т.е. на момент инвестирования) ожидаемых денежных потоков (как доходов, так и расходов).

Расчёт NPV осуществляется по следующей формуле:

$$NPV = \sum_{t=1}^n \frac{ЧДП_{опt}}{(1+i)^t} - I_0$$

где: ЧДП<sub>опt</sub> – чистые денежные поступления от операционной деятельности;

$I_0$ – разовые инвестиции, осуществляемые в нулевом году;

$t$  – номер шага расчета ( $t= 0, 1, 2 \dots n$ )

$n$  – горизонт расчета;

$i$  – ставка дисконтирования (желаемый уровень доходности инвестируемых средств).

Расчёт NPV позволяет судить о целесообразности инвестирования денежных средств. Если  $NPV > 0$ , то проект оказывается эффективным.

Расчет чистой текущей стоимости представлен в таблице 6.22. При расчете рентабельность проекта составляла 20 %, амортизационные отчисления 10 %. Бюджет проекта = 223 960,44

Таблица 4.21 – Расчет чистой текущей стоимости по проекту в целом

№	Наименование показателей	Шаг расчета				
		0	1	2	3	4
1	Выручка от реализации, руб.	0	268752,6	268752,6	268752,6	268752,6
2	Итого приток, руб.	0	268752,6	268752,6	268752,6	268752,6
3	Инвестиционные издержки, руб.	-223 960,44	0	0	0	0

4	Операционные затраты, руб.	0	0	0	0	0
5	Налогооблагаемая прибыль	0	268752,6	268752,6	268752,6	268752,6
6	Налоги 20 %, руб.	0	53750,52	53750,52	53750,52	53750,52
7	Итого отток, руб.	-223 960,44	53750,52	53750,52	53750,52	53750,52
8	Чистая прибыль, руб.	0	215002,08	215002,08	215002,08	215002,08
9	Чистый денежный поток (ЧДП), руб.	-223 960,44	237398,124	237398,124	237398,124	237398,124
10	Коэффициент дисконтирования (КД)	1	0,833333	0,694444	0,578704	0,482253
11	Чистый дисконтированный доход (ЧДД), руб.	-223 960,44	197831,69	164859,7	137383,24	114485,96
12	$\sum \text{ЧДД}$	614561,59				
12	Итого NPV, руб.	390601,15				

Коэффициент дисконтирования рассчитан по формуле:

$$КД = \frac{1}{(1 + i)^t}$$

где:  $i$  – ставка дисконтирования, 20 %;

Таким образом, чистая текущая стоимость по проекту в целом составляет 390601,15 рублей, что позволяет судить о его эффективности

Индекс доходности (PI) – показатель эффективности инвестиции, представляющий собой отношение дисконтированных доходов к размеру инвестиционного капитала. Данный показатель позволяет определить инвестиционную эффективность вложений в данный проект. Индекс доходности рассчитывается по формуле:

$$PI = \sum_{t=1}^n \frac{\text{ЧДП}_t}{(1 + i)^t} / I_0$$

где: ЧДП - чистый денежный поток, млн. руб.;

$I_0$  – начальный инвестиционный капитал, млн. руб.

$$PI = \frac{614561,59}{223\,960,44} = 2,744$$

Таким образом  $PI > 1$ , то проект является эффективным.

Значение ставки, при которой обращается в нуль, носит название «внутренней ставки доходности» или IRR. Формальное определение «внутренней ставки доходности» заключается в том, что это та ставка дисконтирования, при которой суммы дисконтированных притоков денежных средств равны сумме дисконтированных оттоков или =0. По разности между IRR и ставкой дисконтирования  $i$  можно судить о запасе экономической прочности инвестиционного проекта. Чем ближе IRR к ставке дисконтирования  $i$ , тем больше риск от инвестирования в данный проект.

$$\sum_{t=1}^n \frac{ЧДП_{опt}}{(1 + IRR)^t} = \sum_{t=0}^n \frac{I_t}{(1 + IRR)^t}$$

Между чистой текущей стоимостью (NPV) и ставкой дисконтирования (i) существует обратная зависимость. Эта зависимость представлена в таблице 22 и на рисунке 4.

Таблица 4.22 – Зависимость NPV от ставки дисконтирования

№	Наименование показателя	0	1	2	3	4	NPV, руб
1	Чистые денежные потоки, руб	-223 960,44	268752,6	268752,6	268752,6	268752,6	
2	Коэффициент дисконтирования						
	0,1	1	0,90909	0,82645	0,75131	0,68301	
	0,2	1	0,83333	0,69444	0,5787	0,48225	
	0,3	1	0,76923	0,59172	0,45517	0,35013	
	0,4	1	0,71429	0,5102	0,36443	0,26031	
	0,5	1	0,66667	0,44444	0,2963	0,19753	
	0,6	1	0,625	0,39063	0,24414	0,15259	
	0,7	1	0,58824	0,34602	0,20354	0,11973	
	0,8	1	0,55556	0,30864	0,17147	0,09526	
	0,9	1	0,52632	0,27701	0,14579	0,07673	
	1	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	
	1,1	1	0,47619	0,226757	0,10798	0,051419	

	1,2	1	0,45455	0,20661	0,09391	0,04269	
	1,3	1	0,43478	0,18904	0,08219	0,03573	
3	Дисконтированный денежный доход, руб.						
	0,1	-223 960,44	244320.3	222110.6	201916.5	183560.1	627947
	0,2	-223 960,44	223959.6	186632.6	155527.1	129605.9	471764.8
	0,3	-223 960,44	206732.6	159026.3	122328.1	94098.3	358224.86
	0,4	-223 960,44	191967.3	137117.6	97941.5	69959	273024.96
	0,5	-223 960,44	179169.3	119444.4	79631.4	53086.7	207371.36
	0,6	-223 960,44	167970.4	104982.8	65613.3	41009	155615.06
	0,7	-223 960,44	158091	92993.8	54701.9	32177.7	114003.95
	0,8	-223 960,44	149308.2	82947.8	46083	25601.4	79979.96
	0,9	-223 960,44	141449.9	74447.2	39181.4	20621.4	51739.46
	1	-223 960,44	135376.3	67188.2	33594.1	16797	28995.16
	1,1	-223 960,44	127977.3	60941.5	29019.9	13819	7797.26
	1,2	-223 960,44	122161.5	55527	25238.6	11473	-9560
	1,3	-223 960,44	116848.3	50805	22088.8	9602.5	-24616

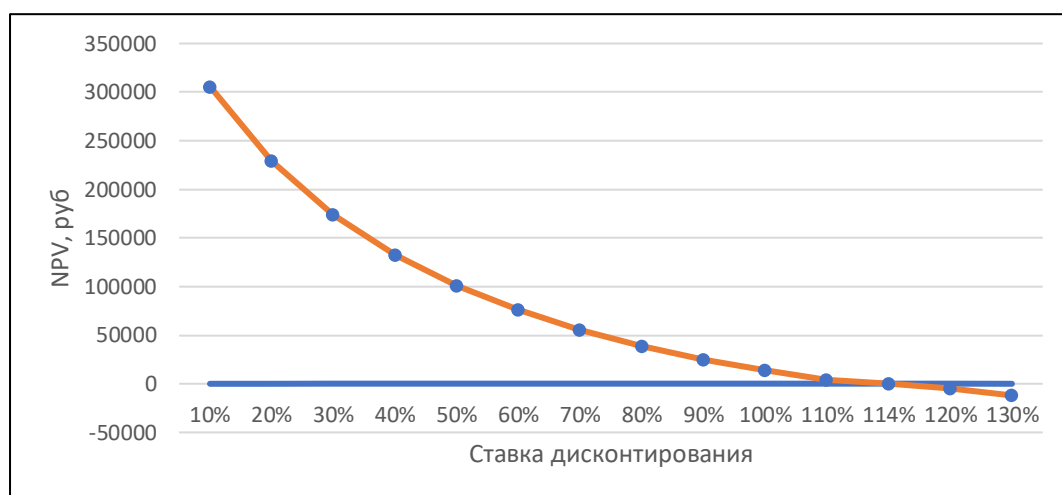


Рисунок 4.1 – Зависимость NPV от ставки дисконтирования

Из таблицы и графика следует, что по мере роста ставки дисконтирования чистая текущая стоимость уменьшается, становясь отрицательной. Значение ставки, при которой NPV обращается в нуль, носит название «внутренней ставки доходности» или «внутренней нормы прибыли». Из графика получаем, что IRR составляет 1,14.

Запас экономической прочности проекта:  $114\% - 20\% = 94\%$

Как отмечалось ранее, одним из недостатков показателя простого срока окупаемости является игнорирование в процессе его расчета разной ценности денег во времени.

Этот недостаток устраняется путем определения дисконтированного срока окупаемости. То есть это время, за которое денежные средства должны совершить оборот.

Наиболее приемлемым методом установления дисконтированного срока окупаемости является расчет кумулятивного (нарастающим итогом) денежного потока (таблица 23).

Таблица 4.23 – Дисконтированный срок окупаемости

№	Наименование показателя	Шаг расчета				
		0	1	2	3	4
1	Дисконтированный денежный доход ( $i = 0,20$ ), руб.	-223 960,44	197831,69	164859,7	137383,24	114485,96
2	То же нарастающим	-223	-26128,75	138731	276114,24	390600,2

	итогом, руб.	960,44				
3	Дисконтированный срок окупаемости	$PP_{\text{дск}} = 1 + (26128,75 / 164859,7) = 1,16 \text{ года}$				

Социальная эффективность научного проекта (таблица 24) учитывает социально-экономические последствия осуществления научного проекта для общества в целом или отдельных категорий населения или групп лиц, в том числе как непосредственные результаты проекта, так и «внешние» результаты в смежных секторах экономики: социальные, экологические и иные внеэкономические эффекты.

Таблица 4.24 – Критерий социальной эффективности

ДО	ПОСЛЕ
Трата большого количества времени для выполнения рутинных задач, что ведет к избыточной трате электроэнергии	Экономия электроэнергии за счет использования чат-бота для рутинных задач, так как тратится меньше времени за компьютером для решения тех же задач.

#### Оценка сравнительной эффективности исследования

Определение эффективности происходит путем расчета интегрального показателя эффективности научного исследования. Он рассчитывается на основе двух средневзвешенных величин: финансовой эффективности и ресурсоэффективности.

Интегральный показатель финансовой эффективности научного исследования получают в ходе оценки бюджета затрат трех (или более) вариантов исполнения научного исследования. Для этого наибольший интегральный показатель реализации технической задачи принимается за базу расчета (как знаменатель), с которым соотносятся финансовые значения по всем вариантам исполнения.

Интегральный финансовый показатель разработки определяется как:

$$I_{\Phi}^p = \frac{\Phi_{pi}}{\Phi_{\max}}, \quad (11)$$

где  $I_{\Phi}^p$  – интегральный финансовый показатель разработки;

$\Phi_{pi}$  – стоимость  $i$  – го варианта исполнения;

$\Phi_{max}$  – максимальная стоимость исполнения научно-исследовательского

проекта (в т.ч. аналоги). За максимально возможную стоимость исполнения следует принять 320000 рублей.

Полученная величина интегрального финансового показателя разработки показывает численное увеличение/уменьшение бюджета затрат разработки в размах. Интегральный показатель ресурсоэффективности вариантов исполнения объекта определяется следующим образом:

$$I_T^p = \sum a_i \cdot b_i \quad (12)$$

где  $I_T^p$  – интегральный показатель ресурсоэффективности вариантов;

$a_i$  – весовой коэффициент  $i$  – го варианта исполнения разработки;

$b_i$ , – балльная оценка  $i$  – го варианта исполнения разработки; устанавливается экспертным путем по выбранной шкале оценивания;

Расчет интегрального показателя ресурсоэффективности представлен ниже:

Таблица 4.25 – Расчет интегрального показателя ресурсоэффективности

Критерии	Весовой коэффициент параметра	Исп.1: магистрант	Исп.2: конкурент
Способствует росту производительности труда пользователя	0,2	4	3
Возможность применения любым предприятием	0,15	4	4
Требует наличия исторических данных	0,3	5	5
Простота применения	0,1	4	5
Конкурентоспособность (с другими системами)	0,25	5	2
<b>ИТОГО</b>	<b>1</b>	<b>4,55</b>	<b>3,7</b>

$$I_{\text{Рисп.1}} = 4 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,22 = 4,55;$$

$$I_{\text{Рисп.2}} = 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,22 = 3,7;$$

$$I_{max} = 4,55.$$

Интегральный показатель эффективности вариантов исполнения разработки определяется на основании интегрального показателя ресурсоэффективности и интегрального финансового показателя по формуле:

$$I_{финр}^p = \frac{I_{т}^p}{I_{ф}^p} \quad (13)$$

Сравнение интегрального показателя эффективности вариантов исполнения разработки позволит определить сравнительную эффективность проекта и выбрать наиболее целесообразный вариант из предложенных. Сравнительная эффективность проекта определяется по формуле 11:

$$\Xi_{ср} = \frac{I_{финр}^p}{I_{max}} \quad (14)$$

Сравнительная эффективность разработки представлена в таблице 17:

Таблица 4.26 – Расчет интегрального показателя ресурсоэффективности

№ п/п	Показатели	Проект магистранта	Проект конкурента
1	Интегральный финансовый показатель разработки	0,95	1
2	Интегральный показатель ресурсоэффективности разработки	4,55	3,7
3	Интегральный показатель эффективности	4,79	3,7
4	Сравнительная эффективность вариантов исполнения	1,05	0,81

Таким образом, сравнивая значения интегральных показателей эффективности можно сделать следующие выводы:

1. Научный проект требует больше ресурсов для реализации;
2. Научный проект более эффективен чем конкурент.

### **Выводы по главе "Финансовый менеджмент, ресурсоэффективность и ресурсосбережение"**



В ходе выполнения части работы по финансовому менеджменту, ресурсоэффективности и ресурсосбережению был проведен анализ разрабатываемого исследования.

1. Было проведено планирование НИИ, а именно: определена структура и календарный план работы, трудоемкость, составлена ленточная диаграмма Ганта, и определен бюджет научно-исследовательской работы. Результаты соответствуют требованиям ВКР по срокам и иным параметрам.

2. Оценен коммерческий потенциал и перспективность проведения исследования. Полученные результаты говорят о потенциале и перспективности на уровне выше среднего.

3. Оценены риски проекта. Главной проблемой может стать снижение спроса на разработанный алгоритм. Эту проблему можно предотвратить созданием оптимального алгоритма, который подходит ко всем прикладным задачам.

4. Определена эффективность исследования в разрезах ресурсной, финансовой, бюджетной и экономической эффективности

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выпускной квалификационной работы был разработан алгоритм, для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Данный алгоритм позволяет пользователю самостоятельно ввести необходимые параметры, а также изменить дифференциальное уравнение для выполнения уже другой поставленной задачи.

Проведены численные эксперименты разработанного алгоритма на различных типах уравнений второго порядка. Была посчитана погрешность и построен график зависимости погрешности от количества точек коллокаций. Точность численного решения зависит от правильного выбора базисных функций. Количество узлов коллокации влияет на погрешность. При увеличении точек коллокаций погрешность стремиться к нулю. Также проведен анализ устойчивости метода и приведен иллюстративный рисунок области абсолютной устойчивости метода.

В выпускной квалификационной работе также разработаны меры по охране труда работников и по защите окружающей среды.

В экономическом разделе рассчитаны основные технико-экономические показатели проекта, определена себестоимость получаемой целевой продукции и прибыль от ее реализации.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Иванов В.И. Дифференциальные уравнения: методические указания / В.И. Иванов. – М.: 2013. – 13с.
2. Лебедев А.Г. Лекции по численным методам: Обыкновенные дифференциальные уравнения: Учебное пособие для студентов / А.Г. Лебедев. – Изд. 3-е. - М.: Рубцовский индустриальный институт, 2016. – 37-38с.
3. Киреев В.А. Метод коллокации с бикубическим эрмитовым базисом в области с криволинейной границей / Киреев Виталий Александрович. – М.: Вестник СибГАУ, 2014. №3(55). – 73с.
4. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов / В.М. Вержбицкий. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 2005. – 631-637с.
5. Демидович Б.П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения: Учебное пособие / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – 5-е изд. – М.: Изд-во Лань, 2010. – 255-257с.
6. Venkateshan S.P. Prasanna Swaminathan, in Computational Methods in Engineering / S.P. Venkateshan. – М.: ScienceDirect, 2014.  
<https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/collocation-point>
7. Буханько А.А., Чостковская О.П. Приближенные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными и интегральных уравнений: учебно-методическое пособие / А.А. Буханько, О.П. Чостковская. – М.: Изд-во Самар. гос. аэро-косм. Ун-та, 2011. – 15-16с.: ил.
8. Hall, G. Modern numerical methods for ordinary differential equations / edited by G. Hall, J.M. Watt. – М.: Oxford: Clarendon Press, 1976.
9. Федюков А.А., Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами: учебно-методическое

пособие / А.А. Федюков. – М.: Нижегородский госуниверситет, 2016. – 5-6с.

10. Волков В.М. Численные методы для обыкновенных дифференциальных уравнений: учебно-методическое пособие / В.М. Волков, И.Л. Ковалева. – М.: Белорусский национальный технический университет, 2016. – 31с.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – 6-е изд. – М.: Наука, 1961.
12. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. - <http://xn--e1avkt.xn/> , 2020.
13. Butcher J.C. Numerical methods for ordinary differential equations. Second edition / J.C. Butcher. – М.: Chichester: Wiley, 2008.
14. Ракитский Ю.В. Численные методы решения жестких систем. / Ю.В. Ракитский, С.М. Устинов, Н.Г. Черноруцкий. – М.: Наука, 1979.
15. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Дж. Холл, Дж. Уатт. – ред.: пер. с англ. – М.: Мир, 1979.
16. Фельдман Л.П. Параллельные коллокационные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений / Л.П. Фельдман // Научные труды Донецкого национального технического университета. Сер. Информатика, кибернетика и вычислительная техника. – Вып. 9. – М.: ДонНТУ, 2008. – 33-40с.  
URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/Npdntu\\_inf\\_2008\\_9\\_7](http://nbuv.gov.ua/UJRN/Npdntu_inf_2008_9_7)
17. Окуонгае Р.И.  $L(\alpha)$ -устойчивые неявные методы Рунге–Кутты переменного порядка со второй производной / Р.И. Окуонгае, М.Н.О. Ихиле. – М.: Сибирский журнал вычислительной математики, 2014. Т. 17, № 4
18. СанПиН 2.2.2/2.4.1340-03. Санитарно-эпидемиологические правила и нормативы «Гигиенические требования к персональным электронно-

- вычислительным машинам и организации работы». – М.: Информационно-издательский центр Минздрава России, 2003. – 54с.
19. НПБ 105-03 Определение категорий помещений, зданий и наружных установок по взрывопожарной и пожарной опасности // Электронный фонд правовой и нормативно-технической документации. 2020.
20. СП 52.13330.2016 Естественное и искусственное освещение. – М.: Стандартинформ, 2017.
21. ГОСТ 12.1.003-2015 ССБТ. Шум. Общие требования безопасности. – М.: Стандартинформ, 2016.
22. СанПин 2.2.4.548-96 Гигиенические требования к микроклимату производственных помещений. – М.: Минздрав России, 2001.
23. ГОСТ 12.0.003-2015 ССБТ. Опасные и вредные производственные факторы. Классификация. – М.: Стандартинформ, 2016.
24. СанПиН 2.2.1/2.1.1.1200-03. Санитарно-эпидемиологические правила и нормативы. Санитарно-защитные зоны и санитарная классификация предприятий, сооружений и других объектов // Библиотека гостей и нормативов. 2020.
25. ГОСТ Р 51768-2001. Ресурсосбережение. Обращение с отходами. Методика определения ртути в ртутьсодержащих отходах. Общие требования. – М.: Издательство стандартов, 2001. – 13с.
26. ГОСТ 12.1.019-2017 ССБТ. Электробезопасность. Общие требования и номенклатура видов защиты. – М.: Национальный стандарт Российской Федерации, 2018.

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИИ СТУДЕНТА

1. Шаймарданова А.А. Решения дифференциальных уравнений методом коллокации в программной среде MATLAB /А.А. Шаймарданова, А.А. Тенгаева //Казахский национальный аграрный университет. – М.: Исследования, результаты, 2020. №1. – 428-434с.

URL: <https://izdenister.kaznau.kz/?last>

## ПРИЛОЖЕНИЕ А РАЗРАБОТАННЫЙ АЛГОРИТМ

Решение линейные однородные и неоднородные уравнения *методом полиномиальной коллокации*

```
clc
clear
% Matlab solution
y = dsolve('D2y-2*y=2*x', 'y(-1)=0', 'y(1)=0', 'x')
ezplot(y, [-1 1])
hold on

% Collocation method solution
N = 50;
a = -1;
b = 1;
A = 0;
B = 0;
dx = (b - a)/N;
x = a + dx; dx : b - dx;
F_1 = 1;
F_2 = 0;
F_3 = -2;
F_4 = 2 * x;
N = N - 1;
MATRIX_A = zeros(N, N);
VECTOR_B = F_4 - ((B - A)/(b - a)) .* F_2 - (A + (x - a) .* (B - A)/(b - a)) .* F_3;
for n = 1 : N
    MATRIX_A(n, :) = (n .* (n - 1) .* (b - x) .* (x - a) .^ (n - 2) - 2 .* n .* (x - a) .^ (n - 1)) .* F_1 + ...
        (n .* (b - x) .* (x - a) .^ (n - 1) - (x - a) .^ n) .* F_2 + ...
        ((x - a) .^ n .* (b - x)) .* F_3;
end
VECTOR_B = reshape(VECTOR_B, [N, 1]);
MATRIX_A = transpose(MATRIX_A);
C = MATRIX_A \ VECTOR_B;
x = a : dx : b;
y_C = A + (x - a) .* (B - A)/(b - a);
%
for n = 1:N
    y_C = y_C + C(n) .* ((x - a) .^ n .* (b - x));
end
%
plot(x, y_C, 'r--', 'LineWidth', 1)
hold on

% Analytical Solution
syms t C1 C2
q = [a b];
u = [A; B];
W = [exp(sqrt(2) .* q); exp(-sqrt(2) .* q)];
W = transpose(W);
E = u + reshape(q, [2, 1]);
R = W \ E;
C1 = R(1);
C2 = R(2);
y = C1 .* exp(sqrt(2) * t) + C2 .* exp(-sqrt(2) * t) - t;
ya = matlabFunction(y);
plot(x, ya(x), 'g--', 'LineWidth', 1)
legend('Matlab Solution', 'Collocation method', 'Analytical solution')
```

```

title('Задача 1.1');
xlabel('x');
ylabel('y');
hold off
error = max(abs(y_C-ya(x)))

```

#### %Error graphic

```

errors = 11 : 31;
for iter = 10 : 31
    N = iter;
    dx = (b - a)./N;
    x = a + dx: dx : b - dx;
    N = N - 1;
    F_1 = 1;
    F_2 = 0;
    F_3 = -2;
    F_4 = 2 * x;
    MATRIX_A = zeros(N, N);
    VECTOR_B = F_4 - ((B - A)./(b - a)) .* F_2 - (A + (x - a) .* (B - A)./(b - a)) .* F_3;
    for n = 1 : N
        MATRIX_A(n, :) = (n .* (n - 1) .* (b - x) .* (x - a) .^ (n - 2) - 2 .* n .* (x - a) .^ (n - 1)) .* F_1 + ...
            (n .* (b - x) .* (x - a) .^ (n - 1) - (x - a) .^ n) .* F_2 + ...
            ((x - a) .^ n .* (b - x)) .* F_3;
    end
    MATRIX_A = transpose(MATRIX_A);
    VECTOR_B = reshape(VECTOR_B, [N, 1]);
    C = MATRIX_A \ VECTOR_B;
    x = a : dx : b;
    y_C = A + (x - a) .* (B - A)./(b - a);

    for n = 1:N
        y_C = y_C + C(n) .* ((x - a) .^ n .* (b - x));
    end

    ya = matlabFunction(y);
    errors(N - 8) = max(abs(ya(x) - y_C));
end
fig = figure();
plot(errors)
xlabel('n')
ylabel('f(n)')
title('error graph 1.1')

```

## Решение линейные однородные и неоднородные уравнения *методом коллокации Фурье*

```

clc
clear

```

#### %Matlab solution

```

y = dsolve('D2y*(x^4)+Dy*(x^2-1)*x-(x^2-1)*y=0', 'y(1)=1', 'y(2)=0', 'x')
ezplot(y, [1 2])
hold on

```

#### %Collocation method solution

```

N = 50;

```



```

a = 1;
b = 2;
A = 1;
B = 0;
dx = (b - a)/N;
x = a + dx: dx : b - dx;
F_1 = x.^4;
F_2 = x.*(x.^2 - 1);
F_3 = 1 - x.^2;
F_4 = 0;
N = N - 1;
MATRIX_A = zeros(N, N);
VECTOR_B = F_4 - ((B - A)/(b - a)) .* F_2 - (A + (x - a) .* (B - A)/(b - a)) .* F_3;
for n = 1 : N
    MATRIX_A(n, :) = -((pi .* n ./ (b - a)) .^ 2) .* sin(pi .* n .* (x - a) ./ (b - a)) .* F_1 + ...
        (pi .* n ./ (b - a)) .* cos(pi .* n .* (x - a) ./ (b - a)) .* F_2 + ...
        sin(pi .* n .* (x - a) ./ (b - a)) .* F_3;
end
VECTOR_B = reshape(VECTOR_B, [N, 1]);
MATRIX_A = transpose(MATRIX_A);
C = MATRIX_A \ VECTOR_B;
x = a : dx : b;
y_C = A + (x - a) .* (B - A)/(b - a);
%
for n = 1:N
    y_C = y_C + C(n)*(sin(pi .* n .* (x - a) ./ (b - a)));
end
%
plot(x, y_C, 'r--', 'LineWidth', 1)
hold on

% Analytical Solution
syms t C1 C2
q = [a b];
u = [A; B];
W = [q; q .* exp(-1 ./ (2 .* q.^2))];
W = transpose(W);
E = u;
R = W \ E;
C1 = R(1);
C2 = R(2);
y = (C1 + C2 * exp(-1 ./ (2 * t.^2))) * t;
ya = matlabFunction(y);
plot(x, ya(x), 'g--', 'LineWidth', 1)
legend('Analytical solution', 'Collocation method', 'Matlab Solution')
title('Задача 2.3');
xlabel('x');
ylabel('y');
hold off
error = max(abs(y_C - ya(x)))

```

#### %Error graphic

```

errors = 1 : 30;
for iter = 3 : 31
    N = iter;
    dx = (b - a)/N;
    x = a + dx: dx : b - dx;
    N = N - 1;
    F_1 = x.^4;
    F_2 = x.^2 - 1;

```

```

F_3 = 1 - x.^2;
F_4 = 0;
MATRIX_A = zeros(N, N);
VECTOR_B = F_4 - ((B - A)/(b - a)) .* F_2 - (A + (x - a) .* (B - A)/(b - a)) .* F_3;
for n = 1 : N
    MATRIX_A(n, :) = -((pi .* n ./ (b - a)).^2) .* sin(pi .* n .* (x - a) ./ (b - a)) .* F_1 + ...
        (pi .* n ./ (b - a)) .* cos(pi .* n .* (x - a) ./ (b - a)) .* F_2 + ...
        sin(pi .* n .* (x - a) ./ (b - a)) .* F_3;
end
MATRIX_A = transpose(MATRIX_A);
VECTOR_B = reshape(VECTOR_B, [N, 1]);
C = MATRIX_A \ VECTOR_B;
x = a : dx : b;
y_C = A + (x - a) .* (B - A)/(b - a);
for n = 1:N
    y_C = y_C + C(n)*(sin(pi .* n .* (x - a) ./ (b - a)));
end

ya = matlabFunction(y);
errors(N) = max(abs(ya(x) - y_C));
end
fig = figure();
plot(errors)
xlabel('n')
ylabel('f(n)')
title('error graph 2.3')

```

**Solutions of differential equations by the collocation method in  
MATLAB software**

Студент

Группа	ФИО	Подпись	Дата
0BM82	Шаймарданова Айжан Алтайханкызы		

Руководитель ВКР

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Доцент	Семенов Михаил Евгеньевич	к.ф.-м.н., доцент		

Консультант-лингвист отделения иностранных языков ШБИП

Должность	ФИО	Ученая степень, звание	Подпись	Дата
Старший преподаватель	Маркова Наталия Александровна			

## INTRODUCTION

Developing of computer technology, numerical methods have become one of the most effective means of solving complex marginal problems for ordinary differential equations. The use of computer technology allows you to automate the process of finding a solution or to simplify the particularly time-consuming calculation procedures, reduce the number of iterations required to find an accurate or approximate solution.

Numerical methods for solving various types of equations are algorithms for finding approximate (and sometimes exact) values of the solution sought. Numerical methods can be applied only to correctly set tasks. To solve the differential equations using numerical methods, you need to know two parameters: the initial condition and the given interval. In the presence of these factors to solve the differential equation is not very difficult. But the analytical solution of marginal problems is very difficult. Hence, the great variety of approximate methods of problem solving. According to the type of representation of the results of the approximate solution, the methods can be divided into two groups:

- approximate-analytical, giving an approximate solution of the boundary value problem on the segment  $[a, b]$  in the form of some specific function;
- actual numerical and mesh methods giving a framework of an approximate solution on a given  $[a, b]$  grid.

In this report, we will consider the collocation method. The essence of the collocation method is as follows. An approximate solution is searched for in the finite linear function space. Unknown coefficients of its decomposition on the basis of space are determined from the collocation equations and boundary conditions. The collocation equations are the requirements that the approximate solution satisfy the differential equations of the problem in the final set of points of the problem formulation area (collocation points). Boundary conditions are obtained from the corresponding conditions of the initial problem statement

recorded at several points on the boundary of the region. The collocation method records exactly as many equations as there are unknown ones.

According to development of information technologies, the solution of the differential equation manually looks long and not rational process as there is a possibility of writing the program which carries out the decision of the set task with the minimum expenditure of time. At the same time, it is not excluded the possibility that the user himself can enter the necessary parameters, as well as change the differential equation to perform another task.

MATLAB package has been selected as the software implementation environment. MATLAB is an environment and language for technical calculations, designed to solve a wide range of engineering and scientific problems of any complexity in any industry.

## Practical part

In this part of the paper we will consider the solution of the following types of equations: linear homogeneous and heterogeneous equations.

The program code is given in Appendix A.

### 2.1 POLYNOMIAL COLLOCATION METHOD

General formula for solving the problem by polynomial collocation method

$$\begin{aligned} F_1(x)y'' + F_2(x)y' + F_3(x)y &= F_4(x) \\ y(a) &= A, \quad y(b) = B \end{aligned} \quad (p.1)$$

line-up replacement

$$y = u + v \quad (p.2)$$

where

$$v = A + \frac{B - A}{b - a}(x - a)$$

$$u = \sum_1^{\infty} C_n \omega_n(x)$$

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0$$

Since boundary conditions  $u$  are uniform, then (1.15)

$$\omega_n = (x - a)^n(b - x) \quad (p.3)$$

Substitution in (p.2), we get the general formula for finding the basis function

$$y = A + \frac{B - A}{b - a}(x - a) + \sum_1^{\infty} C_n (x - a)^n(b - x)$$

$$y' = \frac{B - A}{b - a} + \sum_1^{\infty} C_n (n(b - x)(x - a)^{n-1} - (x - a)^n)$$

$$y'' = \sum_1^{\infty} C_n (n(n - 1)(b - x)(x - a)^{n-2} - 2n(x - a)^{n-1})$$

Substitution in initial equation (p.1), gives

$$\begin{aligned}
& \sum_1^{\infty} C_n((n(n-1)(b-x)(x-a)^{n-2} - 2n(x-a)^{n-1})F_1(x) \\
& + ((n(b-x)(x-a)^{n-1} - (x-a)^n))F_2(x) + (x-a)^n(b \\
& - x)F_3(x) = \\
& = F_4(x) - \frac{B-A}{b-a}F_2(x) - (A + \frac{B-A}{b-a}(x-a))F_1(x)
\end{aligned}$$

### Task 1.5.

Find a solution to the linear homogeneous second order equation satisfying the specified boundary conditions [11].

$$\begin{aligned}
4x^6y'' - 4x^3(2x^2 + 1)y' + (8x^4 + 10x^2 + 1)y &= 0 \quad (p.12) \\
y(1) = 1 \quad \text{и} \quad y(2) &= 0.
\end{aligned}$$

The analytical solution of the problem (p.12) looks as follows:

$$y = (C_1 + C_2x)x \exp(-\frac{1}{4x^2})$$

Task solution (p.12) by the collocation method

$$F_1(x) = 4x^6; F_2(x) = -4x^3(2x^2 + 1); F_3(x) = (8x^4 + 10x^2 + 1); F_4(x) = 0.$$

Since in the problem (p.12) the boundary conditions are heterogeneous by the substitution (p.2). We select polynomials (p.3) as the basic functions, and we obtain

$$\begin{aligned}
y &= 1 - (x-1) + \sum_1^{\infty} C_n(x-1)^n(2-x) \\
y' &= \sum_1^{\infty} C_n(n(2-x)(x-1)^{n-1} - (x-1)^n) \\
y'' &= \sum_1^{\infty} C_n(n(n-1)(2-x)(x-1)^{n-2} - 2n(x-1)^{n-1})
\end{aligned}$$

Substitution in initial equation (p.12), gives

$$\begin{aligned}
4x^6 \sum_1^{\infty} C_n(n(n-1)(2-x)(x-1)^{n-2} - 2n(x-1)^{n-1}) - 4x^3(2x^2 + \\
1) \sum_1^{\infty} C_n(n(2-x)(x-1)^{n-1} - (x-1)^n) + (8x^4 + 10x^2 + 1) 1 - (x-1) + \\
\sum_1^{\infty} C_n(x-1)^n(2-x) = 0 \quad (p.13)
\end{aligned}$$

By substituting the collocation points in the equation (p.13) we obtain a system of equations for determining the coefficients  $C_n$ .

Table 5. Error for different number of collocation points

Collocation points	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 50$
Error	$4,7 \cdot 10^{-5}$	$2,8 \cdot 10^{-7}$	$1,9 \cdot 10^{-13}$	$1,8 \cdot 10^{-15}$

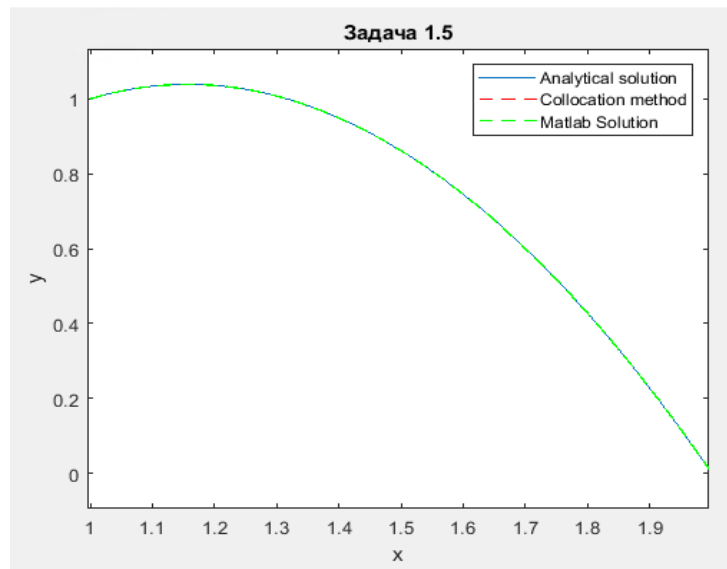


Figure 9. Solution Graphs of Task 1.5.

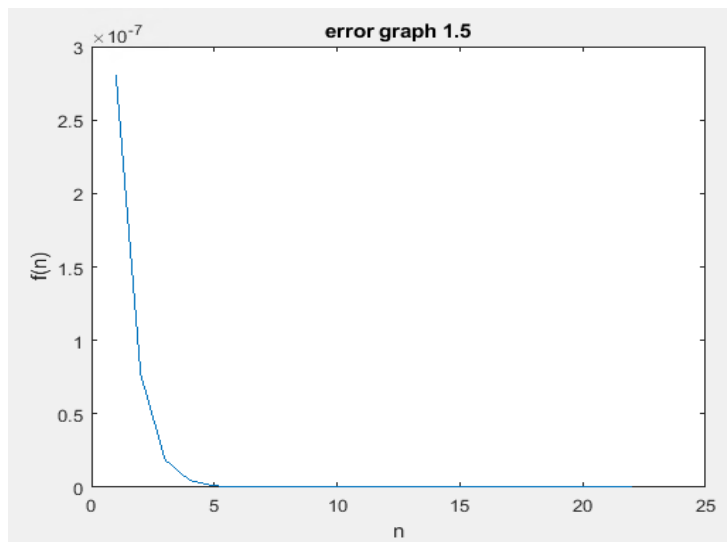


Figure 10. Error dependence plot on the number of collocation points



## 2.2 FOURIER COLLOCATION METHOD

In this part of the report, we consider the solution of the following types of equations: linear homogeneous and inhomogeneous equations.

General formula for solving the problem by the Fourier collocation method

$$\begin{aligned} F_1(x)y'' + F_2(x)y' + F_3(x)y &= F_4(x) \\ y(a) &= A, \quad y(b) = B \end{aligned} \quad (1)$$

Collocation method

$$\begin{aligned} y &= A + \frac{B-A}{b-a}(x-a) + \sum_1^{\infty} C_n \sin \frac{n(x-a)}{b-a} \pi \\ y' &= \frac{B-A}{b-a} + \sum_1^{\infty} C_n \left( \left( \frac{n\pi}{b-a} \right) \cos \frac{n(x-a)}{b-a} \pi \right) \\ y'' &= \sum_1^{\infty} C_n \left( - \left( \frac{n\pi}{b-a} \right)^2 \sin \frac{n(x-a)}{b-a} \pi \right) \end{aligned}$$

Substitution in the original equation (1) gives

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} C_n \left( - \left( \frac{n\pi}{b-a} \right)^2 \sin \frac{n(x-a)}{b-a} \pi \right) F_1(x) &+ \left( \left( \frac{n\pi}{b-a} \right) \cos \frac{n(x-a)}{b-a} \pi \right) F_2(x) \\ &+ \sin \frac{n(x-a)}{b-a} \pi F_3(x) \\ &= F_4(x) - \frac{B-A}{b-a} F_2(x) - \left( A + \frac{B-A}{b-a}(x-a) \right) F_1(x) \end{aligned}$$

### Task 6

Find a solution to the linear homogeneous second order equation satisfying the specified boundary conditions [11].

$$\begin{aligned} 4x^6y'' + 4x^3(2x^2 + 1)y' - (2x^2 - 1)y &= 0 \\ y(7) &= 4 \quad y(8) = 4.1 \end{aligned} \quad (\text{f.12})$$

The analytical solution looks like

$$y = \left( C_1 + \frac{C_2}{x} \right) \exp\left(\frac{1}{4x^2}\right)$$

Solution of problem 6 by collocation method

$$F_1(x) = 4x^6; F_2(x) = 4x^3(2x^2 + 1); F_3(x) = -(2x^2 - 1); F_4(x) = 0.$$

Since, in problem (f.12), boundary conditions are heterogeneous by substituting (f.2), the result is homogeneous.

Thus, we can take function (f.3) as the basis function. By substituting (f.2), we obtain the basic function:

$$y = 4 + 0.1(x - 7) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi(x - 7)$$

$$y' = \frac{1}{10} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n ((n\pi) \cos n\pi(x - 7))$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} C_n (-(n\pi)^2 \sin n\pi(x - 7))$$

Substitution in initial equation (f.12), gives

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n (-(n\pi)^2 \sin n\pi(x - 7)) F_1(x) + ((n\pi) \cos n\pi(x - 7)) F_2(x) + \sin n\pi(x - 7) F_3(x) = F_4(x) - \frac{1}{10} F_2(x) - (A + \frac{1}{10}(x - 7)) F_1(x) \quad (f.13)$$

By substituting the collocation points in equation (f.13) we obtain a system of equations to determine the coefficients  $C_n$

Table 9. Error for different number of collocation points

Collocation points	n = 5	n = 10	n = 50	n = 100	n = 500
Error	$1 \cdot 10^{-4}$	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$2,8 \cdot 10^{-7}$	$1,1 \cdot 10^{-8}$

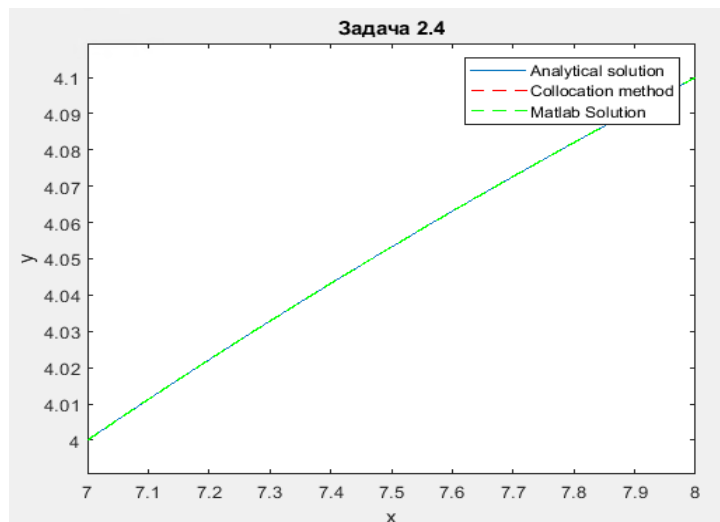


Figure 17. Solution graphs of task 2.4

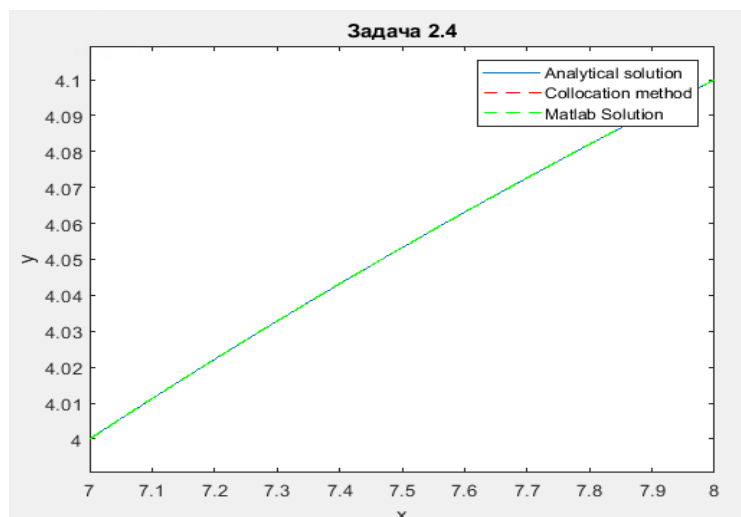


Figure 18. Error dependence plot on the number of collocation points

### Conclusion

The following conclusion can be drawn from the results of computational experiments on different types of second order equations. The algorithm was developed which includes 3 different solutions of tasks: analytical solution, collocation method solution, MatLab solution. Numerical experiments of the developed algorithm on different types of the second order equations were carried out.

The error was calculated and a graph of the error dependence on the number of collocation points was drawn. The accuracy of the numerical solution depends on the correct choice of basic functions. The number of collocation points affects the error. As the number of collocation points increases, the error tends to zero.