ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА ГЕНЕРАЦИИ MOMENT-MATCHING ПОСТРОЕНИЯ СЦЕНАРИЕВ ДЛЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

Ю.К. Изместьева
Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. М.Е. Семёнов
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: riitutoriisa@gmail.com

AN ALGORITHM FOR MOMENT-MATCHING SCENARIO GENERATION WITH APPLICATION TO FINANCIAL PORTFOLIO

U.K. Izmestyeva
Scientific Supervisor: Docent, Ph.D. M.E. Semenov
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: riitutoriisa@gmail.com

Abstract. *In the present study, we realize an algorithm for moment-matching scenario generation. This method produces scenarios and corresponding probability weights that match exactly the given mean, the covariance matrix, the average of the marginal skewness and the average of the marginal kurtosis of each individual component of a random vector. Optimisation is not employed in the scenario generation process and thus the method is computationally more advantageous than previous approaches.*

Введение. Одним из классических подходов к решению задач, включающих в себя неопереденность и риск, является стохастическое программирование. Для того чтобы стохастическая программа выдавала численный результат, используемое распределение должно аппроксимироваться через дискретные распределения с конечным числом результатов [1]. Этим процессом является алгоритм генерации сценариев.

Методы генерации «moment-matching» сценариев успешно применяются в задаче стохастической оптимизации [2]. Они обладают следующими преимуществами – эти методы не привязаны к определенной области и позволяют формировать различные границы. Алгоритм, рассматриваемый в этой работе, практически не включает в себя оптимизацию, поэтому вычислительная скорость этого метода больше, чем у прочих.

Цель работы: Применить метод «moment-matching» для генерации сценариев портфеля ценных бумаг.

Задачи:

1. Изучить литературу по исследуемой теме;
2. Реализовать метод в среде MathCAD;
3. Собрать исторические данные и применить к ним изучаемый метод;
4. Интерпретировать полученные результаты.

Материалы и методы исследования. Алгоритм был разработан и опубликован в работе под авторством Пономарёвой, Романа и Дэйта [3], а позднее дополнен коррективами, определёнными в работе Контрераса, Боша и Херрера [4]. Дополнения касались условий, параметров, а также шагов алгоритма, которых не хватало методу для правильного построения сценариев.

Всего данный алгоритм состоит из 5 шагов. В качестве входных параметров для него берутся вектор средних значений μ, матрица ковариации Σ, средние предельные моменты третьего и четвертого порядков $\bar{k}$ и $\bar{\xi}$, n – количество ценных бумаг, число сценариев s и скаляр $\rho \in (0,1)$.

Шаг №1. На данном этапе происходит вычисление вектора Z и матрицы L, способы расчёта которых можно выбрать различные. В данной работе эти параметры рассчитывались следующим образом: $Z = \rho\sqrt{\lambda_l}v^l$, где λ и v - это собственное число и соответствующий ему собственный вектор. Выбираются они по наибольшему собственному значению. Матрица L рассчитывается как $L = \sqrt{\Sigma - ZZ^T}$ **.**

Шаг №2. Здесь происходит проверка неравенства:

$$\frac{n\bar{k}}{\sum_{i=1}^{N} Z_i^4} - \left(\frac{n\bar{\xi}}{\sum_{i=1}^{N} Z_i^3}\right)^2 > 1 + 2\sqrt{\frac{n\sum_{i,j} L_{ij}^4}{\sum_{i=1}^{N} Z_i^4}} + n\frac{\sum_{i,j} L_{ij}^4}{2s^2\sum_{i=1}^{N} Z_i^4}.$$

Эта проверка необходима для того, чтобы убедится, что рассчитываемые далее параметры будут положительными.

Шаг №3. Рассчитываются следующие переменные:

$$A = \frac{N\bar{k}}{\sum_{i=1}^{N} Z_i^4} - \left(\frac{N\bar{\xi}}{\sum_{i=1}^{N} Z_i^3}\right)^2, \mathrm{B} = \frac{\sum_{i,j} L_{ij}^4}{2s^2\sum_{i=1}^{N} Z_i^4}, p^* = \sqrt{\frac{B}{2NA}}, p^*_{s+1} = 1 - 2Nsp^*, \upsilon^* = \left(\sqrt{A} - \sqrt{2NBs}\right)^2, \text{ где}$$

p^*, p^*_{s+1} - это весовые вероятности.

Шаг №4. Далее рассчитывается $\varepsilon_k = u_k p^* \sqrt{\frac{\nu^* - 1}{p_{s+1}A - 1}}, k = 1,...,s/2,$, где u_k - вектор случайных равномерно распределённых чисел. Используя эту величину, пересчитываем весовые вероятности: как $p_k = p^* + \varepsilon_k$ для $k = 1,...,s/2$, $p_k = p^* - \varepsilon_k$ для $k = s/2+1,...,s$, а также $p_{s+1} = p^*_{s+1}$. Затем рассчитываются оставшиеся величины:

$$\phi_1 = \frac{N\bar{\xi}\sqrt{p_{s+1}}}{\sum_{j=1}^{N} Z_j^3}, \phi_2 = \frac{N\bar{k} - \frac{1}{2s^2}\sum_{l,k} L_{lk}^4 (\sum_{i=1}^{S}\frac{1}{p_i})}{\sum_{j=1}^{N} Z_j^4}, \alpha = \frac{1}{2}\phi_1 + \frac{1}{2}\sqrt{4\phi_2 - 3\phi_1^2},$$

$$\beta = -\frac{1}{2}\phi_1 + \frac{1}{2}\sqrt{4\phi_2 - 3\phi_1^2}, w_1 = \frac{1}{\alpha(\alpha+\beta)}, w_2 = \frac{1}{\beta(\alpha+\beta)}, w_0 = 1 - \frac{1}{\beta\alpha}.$$

Шаг №5. Последним шагом вычисляются сценарии и соответствующие им вероятности:

$$X_{ik}^{\pm} = \mu \pm \frac{1}{\sqrt{2sp_k}} L_i, X_\alpha = \mu + \frac{\alpha}{\sqrt{p_{s+1}}} Z, X_\beta = \mu - \frac{\beta}{\sqrt{p_{s+1}}} Z, X_0 = \mu,$$

$$V(\mathrm{X}_{ik}^+) = V(\mathrm{X}_{ik}^-) = \mathrm{p}_k, V(\mathrm{X}_0) = \mathrm{p}_{s+1} w_0, V(\mathrm{X}_\alpha) = \mathrm{p}_{s+1} w_1, V(\mathrm{X}_\beta) = \mathrm{p}_{s+1} w_2.$$

Результаты. Для практической реализации исследуемого метода были выбраны исторические данные компаний Газпром, Сбербанк и ВТБ за период с 01.01.2016 по 01.01.2018 год. Вычисления производились в пакете MathCAD. Скаляр $\rho = 0,7$. Количество генерируемых сценариев принималось равным 10, количество ценных бумаг соответственно равнялось 3. Матрица ковариации, вектор средних, а также средние моменты 3-его и 4-ого порядков рассчитывались по относительным приращениям цен акций выбранных кампаний. После определения входных параметров вычислялся приведённый раньше алгоритм. На выходе были получены сценарии и их вероятности.

Таблица 1

Вывод сценариев-векторов для ценных бумаг

Сценарий	**№**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
ценная бумага	**1**	0,102	0,087	0,097	0,105	0,103	-0,115	-0,167
	2	0,126	0,107	0,120	0,129	0,127	-0,133	-0,196
	3	0,129	0,109	0,123	0,133	0,130	-0,145	-0,212
Сценарий	**№**	**8**	**9**	**10**	**0**	**α**	**β**	
ценная бумага	**1**	-0,123	-0,110	-0,113	0,002	0,138	0,091	
	2	-0,143	-0,128	-0,131	0,006	0,226	0,149	
	3	-0,156	-0,140	-0,143	0,002	0,207	0,135	

Таблица 2

Вывод вектора вероятностей сценариев-векторов

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Вероятности	0,0055	0,0077	0,0061	0,0052	0,0054	0,0041	0,0020
№	**8**	**9**	**10**	**0**	**α**	**β**	
Вероятности	0,0036	0,0045	0,0042	0,6740	0,0140	0,0220	

Заключение. В ходе данной работы был рассмотрен, реализован и применён на реальных данных алгоритм нахождения сценариев методом «moment-matching». Во время выполнения алгоритма были успешно пройдены основные проверки корректности вычисляемых параметров, что позволяет сделать вывод о адекватности получившихся сценариев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ермольев Ю.М., Ястремский А.И., Стохастические модели и методы в экономическом планировании, М.,1979.
2. Date, P., Jalen, L., & Mamon, R. (2008). A new algorithm for latent state estimation in nonlinear time series models. Applied Mathematics and Computation, 203, 224–232.
3. Ponomareva K., Roman D., Date P. An algorithm for moment-matching scenario generation with application to financial portfolio optimization, Stochastics and Statistics, School of Information Systems, Computing and Mathematics, Brunel University, UK
4. Juan Pablo Contreras, Paul Bosch , Mauricio Herrera,Comment on “An algorithm for moment-matching scenario generation with application to financial portfolio optimization”,Facultad de Ingeniería, Universidad del Desarrollo, Ave. Plaza 680, Las Condes, Santiago de Chile, Chile