РАСШИРЕНИЕ КОНДЕСАТА В КОЛЬЦЕВОЙ ЛОВУШКЕ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГРОССА-ПИТАЕВСКОГО

А.Е. Кулагин
Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.Ю. Трифонов
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: aek8@tpu.ru

EXPANSION OF THE CONDENSATE IN A RING-SHAPED TRAP IN A SEMICLASSICAL APPROXIMATION FOR THE GROSS-PITAEVSKII EQUATION

A.E. Kulagin
Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.Yu. Trifonov
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: aek8@tpu.ru

Abstract. *The nonlocal Gross-Pitaevskii equation describing the expansion of the Bose-Einstein in the ring-shaped trap potential is studied in a semiclassical approximation. The first-order Hamilton-Ehrenfest system for the semiclassically concentrated solutions of the given Gross-Pitaevskii equation is considered. The correspondence between the solutions of the Hamilton-Ehrenfest system and the numerical solutions of the initial Gross-Pitaevskii equation is shown. The remarks about the applicability of the semiclassical approximation to the considered problem are given.*

Введение. Для описания бозе-эйнштейновского конденсата (БЭК) в ловушках широко используется уравнение Гросса-Питаевского. Развитие экспериментальных возможностей позволило получать БЭК в ловушках со сложной геометрией (см. [1, 2] и ссылки в них). Поэтому наряду с экспериментальным интересом возник интерес и к математическому описанию таких структур. В работе [3] был предложен метод построения решений задачи Коши для нелокального уравнения Гросса-Питаевского, квазиклассически сосредоточенных на кривых, динамика которых описывается «классическими» уравнениями (системой Гамильтона-Эренфеста). Качество квазиклассического приближения во многом определяется тем, насколько хорошо «классические» уравнения описывают эволюцию кривой локализации конденсата. В данной работе мы рассматриваем задачу описания расширения конденсата в кольцевой ловушке с помощью системы Гамильтона-Эренфеста в рамках метода, представленного в работе [3]. Интерес к такой задаче был вдохновлен работой [2], в которой описывается эксперимент по расширению конденсата в ловушке с кольцевым потенциалом.

Математическая модель. Расширение конденсата в кольцевой ловушке описывается решением задачей Коши для нелокального уравнение Гросса-Питаевского вида

$$\left\{-i\hbar\partial_t + V(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}) + \kappa\int_{\mathbb{R}^2} W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\Psi(\boldsymbol{y},t)|^2\,d\boldsymbol{y}\right\}\Psi(\boldsymbol{x},t)=0, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{p}=-i\hbar\partial_x$, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$, κ – параметр нелинейности. Функции $V(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})$, $W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ и начальное условие выбирались следующими:

$$V(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^2 - \exp\left[\frac{-(|\boldsymbol{x}|-1)^2}{0,25}\right], \quad W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{0,25\pi}\exp\left[-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2}{0,25}\right],$$

$$\Psi(\boldsymbol{x},0) = N\cdot\exp\left[-\frac{(|\boldsymbol{x}|-1)^2}{\hbar}\right]\cdot\exp\left[-\frac{\sin^2(\varphi/2)}{0,16}\right], \quad \varphi = \arg(x_1 + i\cdot x_2). \tag{2}$$

Здесь N – нормировочный коэффициент (квадрат модуля волновой функции нормируется на единицу).

Квазиклассически сосредоточенными на многообразии Λ_t^1

$$\Lambda_t^1 = \{z = (\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}) = Z(s,t) = (\boldsymbol{P}(s,t),\boldsymbol{X}(s,t)) \mid s\in[0,2\pi]\},\ t\in[0,T],\ T>0 \tag{3}$$

функциями называются функции, для которых существует предел

$$\begin{gathered}\lim_{\hbar\to 0}\langle \hat{A}\rangle = \lim_{\hbar\to 0}\frac{\langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle}{\|\Psi\|^2} = \int_0^{2\pi}\sigma(s)A(Z(s,t),t)\,ds,\\ \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^2}\Psi^*(\boldsymbol{x},t)\hat{A}\Psi(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{x}, \quad \|\Psi\|^2 = \langle\Psi|1|\Psi\rangle.\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $\sigma(s)$ – весовая функция, а $\hat{A}$ – оператор с вейлевским символом $A(z,t)$. Функции $\boldsymbol{P}(s,t)$ и $\boldsymbol{X}(s,t)$ несут информацию об эволюции многообразия Λ_t^1 (3) и определяются системой Гамильтона-Эренфеста первого порядка:

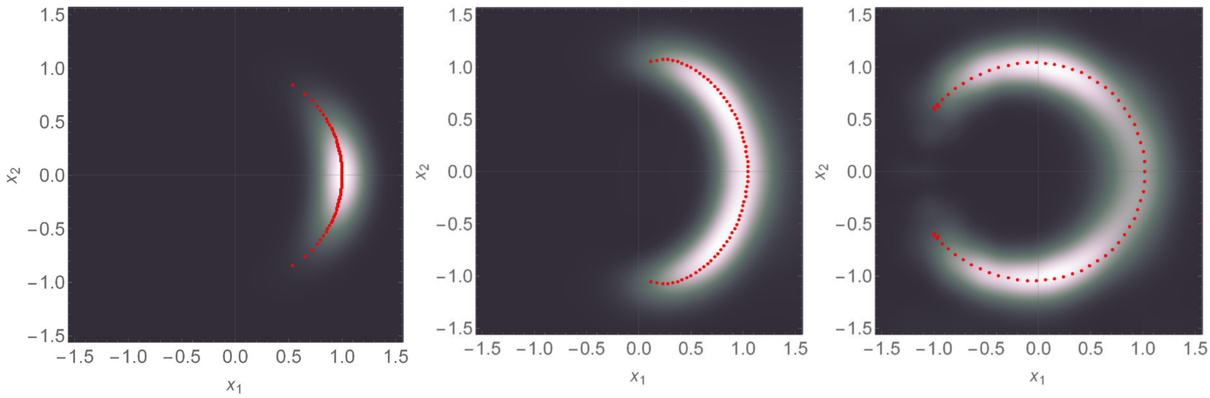
$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}(s,t) = V_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{P}(s,t),\boldsymbol{X}(s,t)),\\ \dot{\boldsymbol{P}}(s,t) = -V_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{P}(s,t),\boldsymbol{X}(s,t)) - \tilde{\kappa}\int_0^{2\pi}\sigma(r)W_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}(s,t),\boldsymbol{X}(r,t))\,dr, \quad \tilde{\kappa} = \dfrac{\kappa}{\|\Psi\|^2}.\end{cases} \tag{5}$$

Выбирая в качестве параметра многообразия в начальный момент времени $s=\varphi$, имеем следующие весовую функцию и начальные условия для системы (5), соответствующие начальному условию (2):

$$\boldsymbol{P}(s,0) = (0,0), \quad \boldsymbol{X}(s,0) = (\cos s, \sin s), \quad \sigma(s) = \exp\left[-\frac{\sin^2(\varphi/2)}{0,08}\right].$$

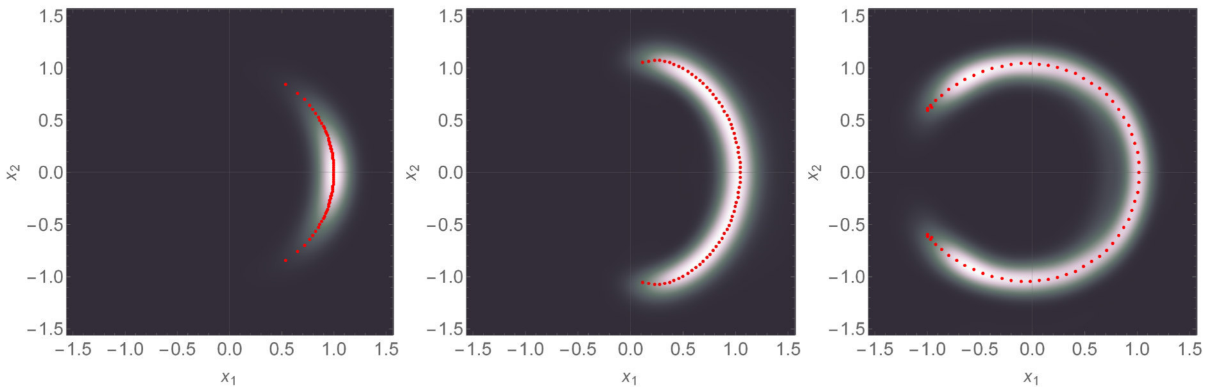
Для оценки качества квазиклассического приближения были построены численные решения уравнения (1) и уравнения (5). Для иллюстрации решений (5) использовался набор точек на многообразии для разных s с шагом $\Delta s_i = 0,15/\sigma(s_i)$, чтобы плотность точек отображала плотность конденсата в квазиклассическом приближении в заданной точек многообразия. Для решения уравнения (1) использовался метод расщепления оператора Странга-Марчука и метод Кранка-Николсон. Решения уравнения (5) строились методом расщепления оператора Странга-Марчука и неявным методом средней точки. На рис. 1 и рис. 2 представлены графики плотности $|\Psi(\boldsymbol{x},t)|^2$ и кривой $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}(s,t)$ для $\kappa = 1$, $\hbar = 0,1$ (рис. 1) и $\hbar = 0,05$ (рис. 2).

Обсуждение результатов. Из рис. 1-2 видно, что решение системы Гамильтона-Эренфеста первого порядка дает хорошую оценку скорости расширения конденсата в кольцевой ловушек, причем при уменьшении параметра $\hbar$ кривая $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}(s,t)$ дает более точное описание локализации конденсата, что свидетельствует о квазиклассическом характере процесса. Таким образом, в квазиклассическом приближении заполнение конденсатом кольцевой ловушки можно описать решениями системы (5), не решая само уравнение Гросса-Питаевского (1). В частности, решение системы (5) позволяет определить время, за которое он полностью заполняет ловушку. Стоит отметить, что оценка малого параметра $\hbar$ по условиям эксперимента [2] дает даже меньшее значение, чем на рис. 2, которое было специально увеличено для большей наглядности рисунков, т.е. такое приближение представляет интерес с точки зрения физики. Отметим, что неинтегральная часть уравнения (5) хорошо линеаризуется в окрестности многообразия Λ_t^1. При такой линеаризации или для квадратичной по своим аргументам функции $V(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})$ система (5) интегрируется в квадратурах.



а) $t=0$ б) $t=1$ в) $t=2$

Рис. 1. График плотности $|\Psi(\boldsymbol{x},t)|^2$ *и кривой* $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}(s,t)$ *для разных* t *и* $\hbar=0{,}1$



а) $t=0$ б) $t=1$ в) $t=2$

Рис. 2. График плотности $|\Psi(\boldsymbol{x},t)|^2$ *и кривой* $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}(s,t)$ *для разных* t *и* $\hbar=0{,}05$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Томской области в рамках научного проекта № 19-41-700004.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Miesner H., Ketterle W. Bose-Einstein condensation in dilute atomic gases // Solid State Communications. – 1998. – V. 107, № 11. – pp. 629-637.
2. Bell T.A., Glidden J.A.P., Humbert L., Bromley M.W.J., Haine S.A., Davis M.J., Neely T.W., Baker M.A., Rubensztein-Dunlop H. Bose-Einstein condensation in large time-averaged optical ring potentials // New Journal of Physics. – 2016. – V. 18, no. 3. – article 035003.
3. Shapovalov A.V., Kulagin A.E., Trifonov A.Yu. The Gross-Pitaevskii equation with a nonlocal interaction in a semiclassical approximation on a curve // Symmetry. – 2020. – V. 12, № 2. – article 201.