УДК 514.762

ПОСТРОЕНИЕ РЕПЕРА НЕГОЛОНОМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ТРЁХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Р.Н. Щербаков, Н.Р. Щербаков

Томский государственный университет
E-mail: nrs@math.tsu.ru

Приведён краткий исторический обзор возникновения понятия неголономной геометрии. Построен репер неголономной поверхности с применением теории подвижного репера и метода внешних форм.

Введение

Со времен Г. Монжа [1] дифференциальная геометрия развивалась в тесной связи с развитием теории дифференциальных уравнений. Эта связь явно прослеживается и в монографии Г. Дарбу [2]. Постепенно теория дифференциальных уравнений превратилась в самостоятельную математическую дисциплину, лишь время от времени использующую язык дифференциальной геометрии для придания наглядности отдельным результатам и даже целым теориям. Дифференциальная геометрия также стала самостоятельной дисциплиной, пользующейся теорией дифференциальных уравнений, как аппаратом. Э. Картан произвел, как теперь это можно утверждать, переворот в методах дифференциальной геометрии, поставив на службу ей теорию систем Пфаффа. Эта теория была развита им при помощи метода внешних форм в теорию систем внешних дифференциальных уравнений [3]. В отечественную литературу идеи Картана проникли благодаря многолетней работе С.П. Финикова, подытоженной в цикле монографий [4–6]. Как известно, фигурирующие в теории Картана-Финикова формы Пфаффа являются, как правило, коэффициентами деривационных формул подвижного репера, а системы Пфаффа, составленные из них, предполагаются вполне интегрируемыми. Однако произвольная система Пфаффа

$$\sum_i f_j^i(x)dx_i = 0,\ i = 1,...,n;\ j = 1,..., m\ (m< n) \qquad (1)$$

при $n>2$ не является вполне интегрируемой, т.е. не имеет интегральных многообразий $n-m$ измерений. Тем не менее, через каждую точку $\{x_i\}$ всегда проходит бесчисленное множество интегральных кривых. Поэтому система (1) допускает целый ряд истолкований и в геометрии и в механике.

Термин «неголономная геометрия» введен Г. Герцем [7. S. 158, 726] в 1894 г. и обозначает материальную систему, движение которой может быть описано только не вполне интегрируемой системой вида (1). Но геометрические интерпретации уравнения $P(x,y,z)dx+Q(x,y,z,)dy+R(x,y,z,)dz=0$, простейшего случая системы (1), изучалась гораздо ранее. Первая работа, специально посвященная этому вопросу, появилась в 1880 г. Её автор – известный немецкий математик и механик А.Э. Фосс (1845–1931) – так и назвал ее «Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения $P(x,y,z)dx+Q(x,y,z,)dy+R(x,y,z,)dz=0$» [8]. Эту работу следует считать первой по неголономной геометрии, которая, т.о., существует и развивается уже свыше 100 лет. До начала двадцатых годов XX века было известно сравнительно немного работ, посвященных неголономной геометрии, т.е. геометрическим интерпретациям систем вида (1). Не было в геометрии и самого термина «неголономный». Фосс говорил о точечно-плоскостной системе, Иссали [9] – о псевдоповерхности и т.д.

Положение изменилось в 1926–1927 гг. Именно в эти годы в большом количестве появились работы Г. Врынчану, Д.М. Синцова, И.А. Схоутена и других математиков по неголономной геометрии. Сам термин «неголономная геометрия» появился в 1928 г. в работе Дж. Синга [10]. Несколько ранее появились термины «неголономное многообразие» и «неголономное пространство».

Можно предположить, что большое значение для роста интереса к неголономной геометрии имел доклад Э. Картана «Теория групп и геометрия», сделанный им 7 мая 1927 г. в г. Берне и опубликованный в том же году [11]. В этом докладе Картан четко сформулировал возможность (и необходимость для физики) синтеза идей Клейна и Римана, который он же и осуществил в своих работах о пространствах аффинной, конформной и проективной связности [12]. Аналитически идея состояла в том, чтобы отказаться от требования вполне интегрируемости деривационных уравнений самого общего репера того или иного клейнова пространства, т.е. рассматривать эти формулы, как не вполне интегрируемые системы Пфаффа. Таким образом, по Картану пространство Римана есть неголономное евклидово пространство; пространство проективной связности есть неголономное проективное пространство и т.д. Естественно, что эта идея Картана стимулировала исследования по геометрической интерпретации систем Пфаффа, т.е. по неголономной геометрии. Накопившийся материал был обобщен в монографиях Г. Врынчану [13] и В.В. Вагнера [14].

Следует сказать, что почти все работы по неголономной геометрии в это время (т.е. в конце 40-х гг. XX века) выполнялись тензорным методом, который, как известно, весьма эффективен при развитии общих схем и менее удобен (из-за громоздкости выкладок и отсутствия аппарата для канонизации репера) при конкретных исследованиях. Хотя сам

Картан строил теорию пространств со связностями (которые он толковал как неголономные пространства), пользуясь, естественно, методом внешних форм, но общим достоянием этот метод стал лишь в 50-е годы прошлого века. Все эти обстоятельства, а также не оправдавшиеся (пока) надежды на широкую применимость результатов неголономной геометрии в механике и физике, привели к тому, что в следующем двадцатилетии (1940–1960 гг.) интерес к идеям неголономной геометрии несколько снизился. Однако в последующее двадцатилетие исследования по неголономной геометрии снова активизировались, особенно в нашей стране. Новые результаты о неголономных поверхностях можно найти, например, в книге В.В. Слухаева [15] и в статьях Н.М. Онищук [16]. Это связано с тем, что метод Картана-Финикова оказался весьма эффективным не только при исследовании обычных (голономных), но и неголономных многообразий. Кроме неголономных поверхностей и гиперповерхностей этим методом легко получаются многие новые результаты для неголономных конгруэнций и комплексов прямых, погруженных в клейновы пространства – евклидово, аффинное, проективное и др.

Кроме того, неголономная геометрия получила хорошее применение в «классической» локальной дифференциальной геометрии. Дело в том, что идея Г. Дарбу ([2], см. также [17, 18]) отнесения поверхности к произвольной ортогональной или сопряжённой сети линий привела к возможности определять полную систему инвариантов линии на поверхности, которая автоматически даёт все основные дифференциальные инварианты поверхности, а после выбора инвариантной сети – простую геометрическую характеристику полной системы конечных инвариантов самой поверхности. Распространение этой идеи на теорию поверхностей в любом клейновом (трёхмерном) пространстве и затем на теорию конгруэнций дало хорошие результаты. Но при повышении числа независимых параметров применение этой идеи встретило затруднения, т.к. отнесение, например, линейчатого комплекса к произвольной конгруэнции требует наложения громоздких и негеометричных «условий интегрируемости» на пфаффово уравнение конгруэнции [19]. Замена голономного «подмногообразия отнесения» неголономным и составляет главную идею «метода репеража подмногообразий» [20, 21]. Это применение идей неголономной геометрии к исследованию обычных (голономных) геометрических образов и стимулировало новый интерес к неголономной геометрии. Особенно эффективным оказалось её применение к теории семейств многомерных плоскостей в работах Л.З. Круглякова и его учеников (см., например, [22]). Небольшая сводка этих работ дана в [23], см. также обзор [24].

§ 1. Неголономная поверхность

Мы начинаем с определения самого первого объекта исследований неголономной геометрии. Таковым является совокупность интегральных кривых уравнения Пфаффа

$$f^i(x_1,x_2,x_3)dx_i=0,\ i=1,2,3, \tag{2}$$

где x_i – декартовы координаты точки трёхмерного евклидова пространства. Именно эту совокупность рассматривал в своей первой работе Фосс [8], именно её весьма подробно исследовал в 1926–1940 гг. Д.М. Синцов [25]. Э. Бортолотти [26, 27] стал называть её *неголономной поверхностью*. Это название и стало общепринятым.

Конечно, такое определение нуждается в некоторых уточнениях. В общем случае, когда уравнение (2) не вполне интегрируемо, оно не определяет (даже локально) никакой поверхности в обычном смысле этого слова. Если же ур. (2) вполне интегрируемо, то оно эквивалентно конечному уравнению

$$\mathrm{F}(x_1,x_2,x_3,C)=0,\ C=\mathrm{const}$$

и определяет (по крайней мере, локально) ∞^1 обычных поверхностей, зависящих от параметра C («слоение»).

Последнее обстоятельство уже оправдывает терминологию, введенную Бортолотти. Иногда говорят, что ур. (2) определяет неголономную поверхность в каждой точке пространства, то есть ∞^3 голономных поверхностей. Нам кажется, что эта терминология менее удобна, хотя при локальном рассмотрении разница становится несущественной.

Еще Фосс отметил, что все интегральные кривые ур. (2), проходящие через фиксированную точку пространства, касаются в общем случае одной и той же плоскости. Уравнение этой плоскости сразу получается, если ур. (2) записать в векторном виде

$$\boldsymbol{N}\cdot d\boldsymbol{r} = 0, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{N}$ имеет координаты f_1, f_2, f_3, а $d\boldsymbol{r}$ – дифференциал радиус-вектора $\boldsymbol{r}(x_1,x_2,x_3)$ точки $M(x_1,x_2,x_3)$. Именно, из ур. (3) следует, что все интегральные кривые, проходящие через точку M_0 с радиус-вектором $\boldsymbol{r}_0$, касаются плоскости

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_0)\cdot N_0=0, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{R}$ – текущий радиус-вектор плоскости, а $\boldsymbol{N}_0$ – значение вектор-функции $\boldsymbol{N}$ в точке M_0. Обозначив буквой Π плоскость (4), соответствующую переменной точке M пространства, получим соответствие

$$M\to\Pi, \tag{5}$$

которое Фосс назвал «точечно-плоскостной системой».

Если рассматривать евклидово пространство как дифференцируемое многообразие E_3 (в каждой точке касательное пространство совпадает с самим E_3), то соответствие (5), а следовательно, и ур. (2), определяют на E_3 *распределение*, т.е. (ср., например, [28. С. 130], или [29. С. 14]) закон, по которому каждой точке $M\in E_3$ сопоставляется подпространство (в нашем случае двумерное, т.е. плоскость) касательного пространства. Если эту плоскость считать инцидентной с соответствующей точкой, то возникает элемент, состоящий из точки и инцидентной ей плоскости – пара (M, Π) (или «нуль-пара» по Б.А. Розенфельду [30]), и трехпараметрический голономный геометрический образ с таким элементом. Таким образом, возникает возможность свести теорию неголономной поверхности к теории голономного геометрического образа с более сложным элементом. При таком рассмотрении любой кривой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ пространства E_3 соответствует 1-семейство пар (M, Π). Интегральные же кривые уравнения (2) и соответствующие им 1-семейства пар (M, Π) приходится как-то отличать от остальных (например, называя их «допустимыми» [14]).Такую же замену неголономного образа голономным в случае более сложного элемента производить не так просто и геометрически и аналитически. Например, неголономной конгруэнции прямых в проективном пространстве соответствует четырёхпараметрический геометрический образ, состоящий из прямой, оснащенной парой инцидентных ей точек и парой инцидентных плоскостей [31], а неголономному комплексу – четырёхпараметрическое семейство прямых, оснащенных произвольной корреляцией [31, 32]. Кроме того, и выбор элемента для голономного образа не всегда является однозначным; так вместо семейства нуль-пар можно в нашем случае рассматривать векторное поле $\boldsymbol{N}(x_1,x_2,x_3)$, $|\boldsymbol{N}|=1$, см., например, [33].

Мы останемся на исходной точке зрения, и будем считать элементом нашего неголономного многообразия точку и задавать его не конечными уравнениями (или функциями), а уравнением Пфаффа (2).

§ 2. Репер неголономной поверхности

Если через B обозначить некоторый геометрический образ, погруженный в данное клейново пространство R_K, а через G – совокупность всех реперов этого пространства (изоморфную, как известно, фундаментальной группе этого пространства), то репераж образа B сводится к нахождению сечения s: $B\to(B\times G)$ расслоения-произведения [34] ($B\times G$, p, B) (где p – каноническая проекция $(B\times G)\to B$: $(b, g)\to b$, $b\in B$, $g\in G$), то есть к установлению такого отображения f: $B\to G$, что $s(b)=(b,f(b))$ (см., например, [20]). Если через $t_1,\dots,t_p$ обозначить координаты элемента $b\in B$, а через $\tau_1,\dots,\tau_q$ – координаты элемента $g\in G$ то элемент (b, g), будет иметь координаты $(t_1,\dots,t_p,\tau_1,\dots,\tau_q)$ и репераж означает установление зависимости

$$\tau_\alpha=\tau_\alpha(t_1,\dots,t_p),\ \alpha=1,\dots,q$$

с максимальным рангом матрицы $\|\partial_{t_\sigma}\tau_\alpha\|$, $\sigma=1,\dots,p$.

Э. Картан указал алгоритм нахождения канонического репера, то есть такого репера, который может быть описан геометрически, как только задан образ B в некоторой окрестности своего элемента. Алгоритм этот многократно описывался, как в элементарных терминах [4], так и в терминах теории расслоений, см., например, [21, 35, 36]. Известно также, что часто удобно производить не сечение, а только некоторое сокращение расслоения ($B\times G$, p, B); эта идея лежит и в основе метода репеража подмногообразий. В простейших случаях репераж производится из геометрических соображений. Но и в том и в другом случае его распространение на теорию неголономных многообразий (по крайней мере, в клейновых пространствах) не представляет трудностей и значительно облегчает изложение.

Применим алгоритм Картана к неголономной поверхности (2). Выпишем деривационные формулы самого общего репера евклидова пространства

$$d\boldsymbol{r}=\Omega_0^i\boldsymbol{e}_i,\ d\boldsymbol{e}_i=\Omega_i^k\boldsymbol{e}_k,\ \Omega_i^k=-\Omega_k^i,\ i,k=1,2,3.$$

Здесь Ω_0^i, Ω_i^k – формы Пфаффа. Если совокупность всех реперов включена в расслоение-произведение ($B\times G$, p, B) то

$$\Omega_0^i\equiv\Omega^k=\pi^i_0+\omega_0^i,\ \Omega_i^k=\pi^k_i+\omega_i^k, \tag{6}$$

где

$$\pi_\alpha^k=h_\alpha^{k\rho}(t,\tau)d\tau_\rho,\ \omega_\alpha^k=\widetilde{h}_\alpha^{k\sigma}(t,\tau)dt_\sigma \tag{7}$$

$$\rho=1,\dots,6;\ \sigma=1,\dots,\text{p};\ \alpha=0,1,2,3,$$

p – число параметров образа, а запись вида $f(t,\tau)$ означает, что функция f зависит от всех переменных $t_1,\dots$ и $\tau_1,\dots$.

Параметры t и формы ω будем называть *основными* (в литературе можно встретить синонимы: главные, первичные), параметры τ и формы π – *слоевыми* (их часто называют вторичными или групповыми). Последние зависят от с дифференциалов параметров ρ-членной фундаментальной группы. В случае трёхмерного евклидова пространства это – шестичленная группа движений (так как за параметры τ можно принять координаты векторов $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{e}_i$ репера относительно неподвижной системы координат); поэтому в (7) $\rho=1,\dots,6$.

Сокращение расслоения ($B\times G$, p, B) начинается с «включения элемента в репер» [20]. В нашем случае это означает, что начало репера совмещается с точкой (элементом) геометрического образа, вследствие чего радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ становится зависимым только от основных параметров. Следовательно,

$$\Omega_0^i=\omega_0^i,\ \pi^i_0=0 \tag{8}$$

и остаётся только три слоевых параметра и три слоевых формы π_1^3, π_2^3, π_1^2, соответствующих трёхчленной группе вращений.

Возможность применения алгоритма Картана в неголономной геометрии обеспечивается представлением уравнения Пфаффа (2), задающего неголономную поверхность, в терминах основных форм. В силу (8) таковых у нас имеется три: ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3, что соответствует числу координат x_1,x_2,x_3 точки базы (т.е. евклидова пространства E_3). Поэтому ур. (2) соответствует уравнение вида

$$\omega^3=a(x,\tau)\omega^1+b(x,\tau)\omega^2, \tag{9}$$

причём разрешение относительно одной из трёх равноправных пока форм ω^i не нарушает общности рассмотрения.

Наличие в (9) двух функций от τ (а они входят существенно, так как $\omega^i=(d\boldsymbol{r},\boldsymbol{e}_i)$, а $\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{e}_i(t,\tau)$) позволяет произвести следующее сокращение за счет упрощения ур. (9).

Геометрически очевидно, что всегда можно выбрать групповые параметры так, чтобы ур. (9) приняло вид

$$\omega^3 = 0, \tag{10}$$

т.к. это значило бы, что $(\boldsymbol{dr},\boldsymbol{e}_3)=0$ вдоль любой интегральной кривой, т.е. вектор $\boldsymbol{e}_3$ стал бы вектором нормали плоскости Π. Однако мы покажем, как эта же фиксация может быть получена методом Картана и тем самым убедимся на простейшем примере, что алгоритм Картана распространим на неголономные многообразия.

Воспользовавшись уравнениями структуры

$$D\Omega^i_\alpha=\Omega^j_\alpha\wedge\Omega^i_j,\ \Omega^j_i=-\Omega^i_j,\ i,j=1,2,3;\ \alpha=0,1,2,3$$

евклидова пространства, продифференцируем (9) внешним образом. Получим соотношение

$$(da+\Omega^3_1-b\Omega^2_1)\wedge\omega^1+(db+\Omega^3_2+a\Omega^2_1)\wedge\omega^2+(a\Omega^3_1+b\Omega^3_2)\wedge\omega^3, \tag{11}$$

действующее на расслоении-произведении (так как формы da, db, Ω^3_1, Ω^3_2, Ω^2_1 имеют вид (6)) и являющееся дифференциальным следствием ур. (9).

Выделим произвольную кривую на базе (т.е. на E_3), принадлежащую неголономной поверхности. Вдоль неё $\omega^3=a\omega^1+b\omega^2$, $\omega^2=\lambda\omega^1$, где λ – некоторая функция, и соотношение (11) принимает вид:

$$(da-b\Omega^2_1+ba\Omega^3_2+(1+a^2)\Omega^3_1+$$
$$+\lambda\{db+a\Omega^2_1+(1+b^2)\Omega^3_2+ab\Omega^3_1\})\wedge\omega^1=0.$$

Поэтому, обозначив

$$\nabla a=da-b\Omega^2_1+ab\Omega^3_2+(1+a^2)\Omega^3_1,$$
$$\nabla b=db+a\Omega^2_1+ab\Omega^3_2+(1+b^2)\Omega^3_1 \tag{12}$$

и записав по аналогии с (6, 7)

$$\nabla a=\nabla_1 a+\nabla_2 a,\ \nabla b=\nabla_1 b+\nabla_2 b,$$

$$\nabla_1 a=\alpha^\rho{}_1 d\tau_\rho,\ \nabla_2 a=\alpha^i{}_2 d\tau_i,\ \nabla_1 b=\beta^\rho{}_1 d\tau_\rho,\ \nabla_2 b=\beta^i_2 d\tau_i,$$

получим

$$\nabla_1 a\wedge\omega^1+\nabla_1 b\wedge\lambda\omega^1+\nabla_2 a\wedge\omega^1+\nabla_2 b\wedge\lambda\omega^1=0.$$

Так как вдоль рассматриваемой кривой $dx_i=\rho_i\omega^1$, то последние два слагаемых равны нулю. Остаётся

$$(\nabla_1 a+\lambda\nabla_1 b)\wedge\omega^1=0$$

или

$$(\alpha^\rho_1+\lambda\beta^\rho_1)d\tau_\rho\wedge\omega^1=0.$$

Так как $d\tau_\rho\wedge\omega^1\neq0$ и λ – произвольная функция, то

$$\alpha^\rho_1 d\tau_\rho=0,\ \beta^\rho_1 d\tau_\rho=0$$

или

$$\nabla_1 a=0,\ \nabla_1 b=0. \tag{13}$$

Тогда

$$\nabla a=\alpha^i_2 dx_i,\ \nabla b=\beta^i_2 dx_i,$$

что в силу эквивалентности базисов (ω^1, ω^2, ω^3) и (dx_1, dx_2, dx_3) можно записать так

$$\nabla a=\mu_i\omega^i,\ \nabla b=\nu_i\omega^i. \tag{14}$$

Формулы же (13) с учетом (12) и (14) можно записать так

$$\delta a=-(1+a^2)\pi^3_1-ab\pi^3_2+b\pi^2_1,$$
$$\delta b=-(1+b^2)\pi^3_2-ab\pi^3_1-a\pi^2_1, \tag{15}$$

где δ – (здесь и в дальнейшем) символ дифференцирования по слоевым параметрам. На формулы (15) можно смотреть как на условия инвариантности вектора $\boldsymbol{N}(-1,a,b)$ или формы ω^3 относительно замены оставшихся трёх слоевых параметров (т.е. относительно группы вращений). Этот термин относительно точек, векторов и т.п. введён ещё в [37]; в дальнейшем он был распространён и на формы Пфаффа (см., например, [38. С. 23]). Однако это значение формул (15) практически не используется, т.к. указанная инвариантность имеет место *a priori*.

Более существенно то, что формулы (15) показывают, как коэффициенты a и b зависят от слоевых параметров. Поэтому эти уравнения могут быть использованы для осуществления первого этапа канонизации репера, т.е. для применения алгоритма Картана. Сущность этого алгоритма (см., например, [36, 20, 4]) состоит в том, чтобы использовать указанную зависимость для произведения некоторого сокращения множества G реперов в каждом слое, при котором каждый из коэффициентов a и b обратится в нуль или (если последнее невозможно) в константу, отличную от нуля (обычно ±1).

В нашем случае вдоль кривой $\pi^3_2=\pi^2_1=0$ слоя имеем

$$\pi^3{}_1\big|_{\pi^3_2=\pi^2_1=0}=d\xi \text{ и } \delta a=-(1+a^2)d\xi.$$

Это дифференциальное уравнение имеет решение, проходящее через точку ξ=const, a=0 плоскости переменных a, ξ. Следовательно, возможно такое сокращение слоя реперов, что коэффициент а обратится в нуль за счет ограничения на слоевые формы, выражаемого равенством $\pi^3{}_1$. Обычно, для краткости говорят: возможна фиксация π^3_1, a=0. Совершенно аналогично, вдоль кривой $\pi^3_1=\pi^2_1=0$ слоя имеем

$$\pi^3{}_2\big|_{\pi^3_1=\pi^2_1=0}=d\eta \text{ и } \delta b=-(1+b^2)d\eta.$$

Поэтому возможна фиксация $\pi^3_2=0$, $b=0$. Заметим, что система уравнений $\pi^3_1=\pi^3_2=0$ вполне интегрируема, то есть даёт связи не только на слоевые формы, но и на слоевые параметры. Следовательно, уравнения (14) дают возможность провести сокращение расслоения ($B\times G$, p, B) до расслоения ($B\times G_1$, p, B), $G_1\in G$, которое даёт

$$\pi^3_1=\pi^3_2=0\ ,\ a=b=0,$$

то есть приводит ур. (9) к виду (10).

Уравнения (15) обращаются теперь в тождества и в слое реперов действуют теперь лишь на один параметр ξ, соответствующий форме $\pi^2_1=d\xi$.

Далее имеются две возможности. Первая – продолжение сокращений (т.е. фиксация оставшихся слоевых параметров – в данном случае ξ) до получения сечения, определяющего канонический репер. Вторая, восходящая к Г. Дарбу [2], соответствует методу репеража подмногообразий (основы этого метода для голономных образов изложены в [20. Ч. I, гл. 3, § 6]). Именно, заметив, что $\pi^2_1=\boldsymbol{e}_2\cdot\delta\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{e}_1\cdot\delta\boldsymbol{e}_2$, т.е. фиксация о означает фиксацию вектора $\boldsymbol{e}_1$ (или, эквивалентно, ортогонального ему вектора $\boldsymbol{e}_2$) в плоскости Π, мы можем фиксировать последний слоевой параметр ξ произвольно, т.е. полагая его произвольной функцией основных параметров $\xi=\xi(x_1,x_2,x_3)$. Тем самым мы зададим векторное поле $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_1(x_1,x_2,x_3)$ так, что через каждую точку пространства будет проходить единственная прямая $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}+\lambda\boldsymbol{e}_1$. Система же уравнений $\omega^3=\omega^2=0$ после того или иного задания функции ξ будет определять в каждой точке M базы (т.е., имея в виду локальное рассмотрение, в каждой точке некоторой области евклидова пространства E_3) единственную интегральную кривую уравнения $\omega^3=0$, касающуюся вектора $\boldsymbol{e}_1$.

Получившийся таким образом репер будет каноническим для подмногообразия $\omega^3=\omega^2=0$ и полуканоническим [20. С. 99] для неголономной поверхности. Отличие от теории репеража голономной поверхности состоит лишь в том, что функция о зависит от трёх (а не от двух) основных параметров.

Разумеется, задание функции ξ кроме векторного поля $\boldsymbol{e}_1$, определяет и векторное поле $\boldsymbol{e}_2$, касательное для интегральных кривых $\omega^3=\omega^1=0$. Для них наш репер тоже будет каноническим.

Замечание. Если потребовать, чтобы ур. (11), было арифметическим следствием ур. (9), то мы имели бы случай голономной поверхности, заданной уравнением Пфаффа (9), точнее, получилось бы «слоение», т.е. ∞^1 поверхностей $F(x_1,x_2,x_3,C)=0$. Применяя в этом случае известную лемму Картана, можно было бы провести репераж поверхности (см., например, [39. С. 145]). В нашем случае формула (11) тоже дала возможность провести репераж неголономной поверхности, а также получить формулы (14), с которых начинается построение последовательности геометрических объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монж Г. Приложения анализа к геометрии. – М.-Л.: Объединённое научно-техническое изд-во, 1936. – 699 с.
2. Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces. – Paris, 1887–1896. – V. I–IV.
3. Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. – М.: Изд-во МГУ, 1962. – 227 с.
4. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.-Л.: Гос. изд-во технико-теоретич. литературы, 1948. – 432 с.
5. Фиников С.П. Теория конгруэнций. – М.: Гос. изд-во технико-теоретич. литературы, 1950. – 528 с.
6. Фиников С.П. Теория пар конгруэнций. – М.: Гос. изд-во технико-теоретич. литературы, 1956. – 443 с.
7. Naas J., Schmid H.L. Mathematische Wörterbuch. – Berlin-Leipzig, 1961. – B. 1. – 1043 S.
8. Voss A. Geometrische Interpretation der Differentialgleichung $Pdx+Qdy+Rdz=0$ // Math. Ann. – 1880. – № 16. – S. 556–570.
9. Issaly A. Principes fondamentaux de la thèorie des pseudo-surfaces. – Paris: Hermann, 1902.
10. Sunge J.-L. Geodesics in non-holonomic geometry // Math. Ann. – 1928. – № 99. – S. 738–751.
11. Картан Э. Теория групп и геометрия // В кн.: Об основаниях геометрии. – М.: Гос. изд-во технико-теоретич. литературы, 1956. – С. 485–507.
12. Картан Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. – Казань: Изд-во КГУ, 1962. – 210 с.
13. Vranceanu G. Les espaces non holonomes et leurs applications mecaniques // Met. sci. math. – 1936. – № 76. – P. 1–70.
14. Вагнер В.В. Дифференциальная геометрия неголономных многообразий // VIII Международный конкурс на соискание премии им. Н.И. Лобачевского (1937). Отчёт. – Казань: Изд-во КГУ, 1939. – С. 195–262.
15. Слухаев В.В. Геометрия векторных полей. – Томск: Изд-во ТГУ, 1982. – 294 с.
16. Онищук Н.М., Васильева О.В. Неголономные поверхности вращения // Международная конференция по математике и механике: Избранные доклады – Томск, 2003. – С. 69–82.
17. Фиников С.П. Теория поверхностей. – М.-Л.: Гос. изд-во технико-теоретич. литературы, 1934. – 200 с.
18. Щербаков Р.Н. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. – Томск: Изд-во ТГУ, 1960. – 194 с.
19. Щербаков Р.Н. Построение метрической теории комплекса при помощи метода репеража линейчатых подмногообразий // Труды Томского ун-та. – 1961. – № 155. – С. 3–24.
20. Щербаков Р.Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. – Томск: Изд-во ТГУ, 1973. – 236 с.
21. Щербаков Р.Н., Слухаев В.В. Репераж и расслоения // Труды Томского ун-та. Геометрический сб. – 1972. – Т. 212. – № 9.– С. 10–20.
22. Мизин А.Г., Чупахин Н.П., Щербаков Н.Р. Введение в проективно-дифференциальную геометрию многообразий прямых и плоскостей. – Томск: Изд-во ТГУ, 1991. – 150 с.
23. Кругляков Л.З. Основы проективно-дифференциальной геометрии семейств многомерных плоскостей. – Томск: Изд-во ТГУ, 1980. – 111 с.
24. Щербаков Р.Н. Двадцать геометрических сборников // Геометрический сб. – 1980. – № 21.– С. 77–90.
25. Синцов Д.М. Работы по неголономной геометрии. – Киев: Вища школа, 1972. – 294 с.
26. Bortolotti E. Geometria proiettiva differentiale delle superficie anholonome // Atti dei Congresso dell'Unione Matem. Italiana. – Firenze, 1937. – P. 305–311.
27. Bortolotti E. Duale Verwandschaften anholonomen Flächen im projektiven und im affinen Raume // Jahresberichte der Deutsch. Math. Vereinigung. – 1941. – № 51. – S. 151–169.
28. Шевалле К. Теория групп Ли. – М.: Гос. изд-во иностр. литер., 1948. – Т. 1. – 315 с.
29. Номидзу К. Группы Ли и дифференциальная геометрия. – М.: Изд-во иностр. литер., 1960. – 128 с.
30. Розенфельд Б.А. Проективная геометрия как метрическая геометрия // Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. – М., 1950. – Т. 8. – С. 328–354.
31. Близникас В.И., Гринцевичюс К.И. О неголономной линейчатой геометрии // Третья прибалтийская геометрическая конференция: Сб. докладов. – Паланга, 1968. – С. 21–25.
32. Гринцевичюс К.И. О неголономном комплексе // Литовский математический сб. – 1969. – Т. 9. – № 1. – С. 85–99.
33. Бюшгенс С.С. Геометрия векторного поля // Известия АН СССР. – 1946. – Т. 10. – № 1. – С. 73–96.
34. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. – М.: Мир, 1970. – 442 с.

35. Щербаков Р.Н., Слухаев В.В. Дифференциально-топологические аспекты метода Картана // Доклады АН СССР. – 1973. – Т. 210. – № 1. – С. 44–47.
36. Švec A. Cartan's method of specialization of frames // Czechoslovak. Math. J. – 1966. – № 16 (91). – P. 552–599.
37. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Труды Московского матем. об-ва. – М., 1953. – Т. 2. – С. 75–382.
38. Акивис М.А. Многомерная дифференциальная геометрия. – Калинин: Изд-во Калининского ГУ, 1977. – 83 с.
39. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. – М.: Изд-во иностр. литер., 1960. – 559 с.

УДК 536.46

ТЕОРИЯ СПОНТАННОЙ ДЕТОНАЦИИ В ГАЗАХ. Ч. 1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ

К.О. Сабденов

Томский политехнический университет
E-mail: sabdenov@k21.phtd.tpu.ru

Показано, что в рамках аксиоматического подхода может быть построена теория горения газов на основе понятии «поверхность горения» и «нормальная скорость пламени», которые принимаются в ней фундаментальными. Предложены простейшие модели турбулентного пламени, где поверхность горения представляется фракталом.

Расчет скорости турбулентного горения горючих газовых смесей представляет значительный практический интерес для предупреждения возможных взрывов в угледобывающей, нефтегазовой, пищевой и других важнейших отраслях промышленности. Развитие взрыва, как правило, начинается со стадии медленного горения, которое, благодаря возникающей впоследствии турбулентности, переходит в детонационный режим.

Традиционный подход в теории турбулентного горения опирается на представлении физических параметров (вектора скорости, температуры, плотности и т.д.) в виде суммы их средних значений и хаотически меняющихся пульсаций [1]. В итоге получается бесконечная цепочка дифференциальных уравнений (типа Фридмана-Келлера) для осредненных и корреляции всевозможных произведений пульсационных величин. Замыкание (обрыв) такой цепочки производится привлечением правдоподобных гипотез. Однако в таком подходе есть внутренние логические противоречия. Они возникают из-за того, что осреднение проводится по времени τ, числовое значение которого явно не указывается [1, 2]. Во-первых, для нестационарных процессов вовсе не очевидно сохранение во времени принятой функциональной формы замыкающего соотношения. Во-вторых, ввиду неопределенности величины τ становится не понятным ее физический смысл для быстропротекающих процессов. Для интуитивного восприятия τ, по крайней мере, необходимо, чтобы характерное время этих процессов было много больше τ. О других сложностях, возникающих при моделировании горения газов, будет сказано ниже.

Указание на существование еще одного подхода к математическому описанию как ламинарного, так и турбулентного горения газов дано в работах [3, 4], и ниже будет приведено его последовательное изложение.

Аксиоматический подход к формулировке теории горения газов

Согласно аксиоматическому подходу в физике, математическое описание изучаемого природного явления и процесса зависит от первоначальных понятий и определений, которые принимаются в качестве фундамента будущей теории. Часто эти понятия и определения называют первыми принципами. После того как основные понятия сформулированы, то следующий шаг – это установление свода математических «правил» работы с введенными принципами.

В зависимости от содержания «первых принципов» получаются разные формы описания физических явлений, причем ясно, что эти формы не могут взаимно исключать друг друга, а могут только дополнять. Одним из ярких примеров теории одних и тех же процессов, но опирающихся на разные «первые принципы», является феноменологическая и статистическая термодинамика.

Обратимся теперь к горению газов. Современная и общепринятая теория этого явления основывается на понятиях «молекула», «атом», «радикал» и др.; химическое превращение при горении есть результат преодоления энергетического барьера между сталкивающимися атомами или другими микрочастицами. Наиболее полное описание в теории горения достигается с привлечением квантовой химии. Но ввиду того, что взаимное превращение веществ в действительности не идет по обычному стехиометрическому уравнению, а происходит с образованием большого количества промежуточных продуктов, задействованных во всевозможных цепях и ветвях химической реакции [5], применение квантово-химического описания горения оказывается нецелесообразным по двум основным причинам. Во-первых, здесь встречают-