

УДК 536.24

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА ЖИДКОСТИ  
ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ В ЗАМКНУТОМ ПОРИСТОМ КУБЕ ПРИ НАЛИЧИИ  
ИЗОТЕРМИЧЕСКОГО НАГРЕВАТЕЛЯ**

М.С. Астанина

Научный руководитель: доцент, д.ф.-м.н. М.А. Шеремет  
Национальный исследовательский Томский государственный университет,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050  
E-mail: [astanina.marina@bk.ru](mailto:astanina.marina@bk.ru)

**NUMERICAL SIMULATION OF CONVECTIVE HEAT TRANSFER OF FLUID WITH VARIABLE  
VISCOSITY INSIDE A CLOSED POROUS CUBE HAVING AN ISOTHERMAL HEATER**

M.S. Astanina

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Dr. M.A. Sheremet  
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050  
E-mail: [astanina.marina@bk.ru](mailto:astanina.marina@bk.ru)

**Abstract.** *Mathematical simulation of natural convection within a cubical porous chamber having an isothermal heater with temperature  $T_h$  on the bottom surface has been performed. The horizontal walls are adiabatic while the vertical borders have a constant low temperature  $T_c$ . The governing equations have been formulated with help of dimensionless variables “vector potential functions – vorticity vector – temperature”. The system of control equations has been solved by the finite difference method. The influence of governing parameters such as Darcy number, Rayleigh number, Prandtl number and variable viscosity parameter on the heat transfer and cooling performance has been studied.*

**Введение.** Численное моделирование инженерных систем при наличии тепловыделяющих элементов в условиях развития конвективных режимов теплопереноса является эффективным способом прогнозирования сроков эксплуатации таких систем, а также позволяет разрабатывать и внедрять производительные системы охлаждения. Это связано с широким спектром математических моделей, учитывающих реальные условия работы оборудования, и возможностями компьютерного моделирования [1, 2].

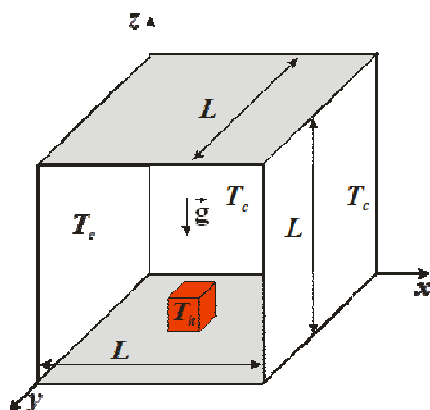


Рис. 1. Физическая модель задачи

**Материалы и методы решения.** Физическая постановка изучаемого процесса с используемой системой координат представлены на рисунке 1. Рассматривается задача конвективного теплообмена в замкнутом пористой кубе с нагревателем постоянной температуры на нижней стенке. В роли рабочей среды, заполняющей полость, используется ньютоновская теплопроводная жидкость, вязкость которой считается зависимой от температуры [1]. Также предполагается, что справедливо приближение Буссинеска.

Течение в кубе является ламинарным. Для моделирования пористой среды используется приближение Дарси-Бринкмана. Боковые грани куба поддерживаются при постоянной температуре охлаждения  $T_c$ ; остальные поверхности – теплоизолированы. Определяющие дифференциальные уравнения, описывающие рассматриваемый процесс, имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} = -\omega_x \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} = -\omega_y \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial z^2} = -\omega_z \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial \omega_x}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} = \\ & = \varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left( \frac{\partial^2 (\mu \omega_x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_x)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_x)}{\partial z^2} - \varepsilon \frac{\mu \omega_x}{Da} \right) - \varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \omega_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) + \\ & + 2\varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[ \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y \partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\varepsilon v}{2Da} \frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{\varepsilon w}{2Da} \frac{\partial \mu}{\partial y} \right] + \varepsilon^2 \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial \omega_y}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_y}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial v}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial v}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial v}{\partial z} = \\ & = \varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left( \frac{\partial^2 (\mu \omega_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_y)}{\partial z^2} - \varepsilon \frac{\mu \omega_y}{Da} \right) - \varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \omega_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) + \\ & + 2\varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y \partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\varepsilon w}{2Da} \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\varepsilon u}{2Da} \frac{\partial \mu}{\partial z} \right] - \varepsilon^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial \omega_z}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_z}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial w}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial w}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial w}{\partial z} = \\ & = \varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left( \frac{\partial^2 (\mu \omega_z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_z)}{\partial z^2} - \varepsilon \frac{\mu \omega_z}{Da} \right) - \varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \omega_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) + \\ & + 2\varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y \partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\varepsilon u}{2Da} \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\varepsilon v}{2Da} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\eta \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\alpha_{pm} / \alpha_f}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (7)$$

Здесь  $Ra = \rho g \beta (T_h - T_c) L^3 / (\alpha \mu_0)$  – число Рэлея,  $Da = K / L^2$  – число Дарси,  $\varepsilon$  – пористость,  $Pr = \mu_0 / (\rho \alpha)$  – число Прандтля,  $\eta$  – относительная теплоемкость,  $\mu = \exp(-\xi \theta)$  – безразмерная вязкость. В представленной системе уравнений использованы следующие безразмерные переменные: компоненты вектора завихренности и векторного потенциала, имеющие вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\partial \bar{\psi}_z}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial z}, \bar{v} = \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial z} - \frac{\partial \bar{\psi}_z}{\partial x}, \bar{w} = \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial y}, \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\psi}_z}{\partial z} = 0. \\ \bar{\omega}_x &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}, \bar{\omega}_y = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}, \bar{\omega}_z = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \end{aligned} \right.$$

Остальные безразмерные переменные вводились следующим образом:

$$\begin{aligned}x &= \bar{x}/L, \quad y = \bar{y}/L, \quad z = \bar{z}/L, \quad \tau = t\sqrt{g\beta(T_h - T_c)/L}, \quad \theta = (T - T_c)/(T_h - T_c), \quad \mu = \bar{\mu}/\mu_0, \\u &= \bar{u}/\sqrt{g\beta(T_h - T_c)L}, \quad v = \bar{v}/\sqrt{g\beta(T_h - T_c)L}, \quad w = \bar{w}/\sqrt{g\beta(T_h - T_c)L}, \\ \psi_x &= \bar{\psi}_x/\sqrt{g\beta(T_h - T_c)L^3}, \quad \psi_y = \bar{\psi}_y/\sqrt{g\beta(T_h - T_c)L^3}, \quad \psi_z = \bar{\psi}_z/\sqrt{g\beta(T_h - T_c)L^3}, \\ \omega_x &= \bar{\omega}_x\sqrt{L/[g\beta(T_h - T_c)]}, \quad \omega_y = \bar{\omega}_y\sqrt{L/[g\beta(T_h - T_c)]}, \quad \omega_z = \bar{\omega}_z\sqrt{L/[g\beta(T_h - T_c)]}.\end{aligned}$$

В начальный момент времени считалось, что жидкость неподвижна, и все переменные обнуляются. Граничные условия для сформулированной математической модели (1)–(7) рассматривались следующим образом:

$$\begin{aligned}\tau > 0: \quad & \begin{cases} \partial\psi_x/\partial x = 0, \psi_y = 0, \psi_z = 0; \omega_x = 0, \omega_y = -\partial w/\partial x, \omega_z = \partial v/\partial x; \\ \theta = 0 \quad \text{на } x=0, x=1, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad \text{и} \quad 0 \leq z \leq 1. \end{cases} \\ & \begin{cases} \psi_x = 0, \partial\psi_y/\partial x = 0, \psi_z = 0, \omega_x = \partial w/\partial y, \omega_y = 0, \omega_z = -\partial u/\partial y; \\ \theta = 0 \quad \text{на } y=0, y=1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{и} \quad 0 \leq z \leq 1. \end{cases} \quad (8) \\ & \begin{cases} \psi_x = 0, \psi_y = 0, \partial\psi_z/\partial z = 0, \omega_x = -\partial v/\partial z, \omega_y = \partial u/\partial z, \omega_z = 0; \\ \theta = 0 \quad \text{на } z=0, z=1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{и} \quad 0 \leq y \leq 1. \end{cases} \\ & \psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0, \quad \theta = 1 \quad \text{на источнике}\end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения в переменных «векторный потенциал – вектор завихренности – температура» (1)–(7) с учётом начальных и граничных условий (8) разрешались методом конечных разностей на однородной вычислительной сетке [1]. Разработанный метод решения был протестирован на модельных задачах и нескольких вычислительных сетках.

**Результаты и заключение.** В результате численного моделирования ламинарного конвективного течения были получены трёхмерные распределения полей температуры и компоненты скорости в кубе в зависимости от определяющих безразмерных параметров. Кроме того, анализ результатов проводился по зависимостям среднего числа Нуссельта, отражающего интенсивность теплообмена на поверхности нагревателя  $\left( \overline{Nu} = -\frac{1}{l} \int_0^1 \frac{\partial\theta}{\partial n} d\zeta \right)$ . Полученные результаты могут быть использованы при проектировании систем охлаждения тепловых элементов.

Работа выполнена в рамках реализации проекта Российского фонда фундаментальных исследований (договор № 20-31-90080).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Astanina M.S., Buonomo B., Manca O., Sheremet M.A. Transient free convection of variable viscosity liquid in an inclined cube affected by the temperature modulation on a vertical wall // International Journal of Thermal Sciences. – 2021. – Vol. 164. – P. 106880.
2. Chou H.M., Wu H.W., Lin I.H., Yang W.J., Cheng M.L. Effects of temperature-dependent viscosity on natural convection in porous media // Numerical Heat Transfer, Part A: Applications. – 2015. – Vol. 68. – P. 1331–1350.