УДК 53:517.928:530.145

# КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СЕРИИ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГРОССА-ПИТАЕВСКОГО, СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ НА КРИВОЙ

А.Е. Кулагин
Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.Ю. Трифонов
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: aek8@tpu.ru

# SEMICLASSICAL SPECTRAL SERIES OF THE NONLOCAL GROSS-PITAEVSKII EQUATION CONCENTRATED ON A CURVE

A.E. Kulagin
Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.Yu. Trifonov
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: aek8@tpu.ru

***Abstract****. The method of constructing spectral series for the nonlocal Gross-Pitaevskii equation is presented. The eigenfunctions concentrated on a curve in phase space and eugenvalues are constructed. The semiclassical quatization condition is obtained for the stationary states. Our approach is based on the WKB-Maslov method and is adopted for the solutions with the complex topology.*

**Введение.** Модель Гросса-Питаевского в приближении среднего поля описывает бозе-эйнштейновский конденсат (БЭК) в разреженных газах [1]. Часто для простоты используют локальное уравнения Гросса-Питаевского (УГП), которая является приближении короткодействующего взаимодействия нелокальной версии, однако ряд физических задач требует учет дальнодействующего характера межатомного взаимодействия (например, диполь-дипольное взаимодействие [2]), описываемого нелокальным УГП. Нелокальное УГП является нелинейным интегро-дифференциальным уравнением в частных производных, что сильно осложняет построение его решений как аналитическими, так и численными методами. Для численных методов особенно сложным становится решением спектральной задачи для УГП, которая обычно сводится к итеративному процессу, требующему хорошего начального приближения для стационарных состояний [3]. Обычно в качестве таких приближений выбираются решения соответствующего линейного уравнения Шредингера, которые являются хорошей аппроксимацией только для слабой нелинейности. Аналитические методы тоже, как правило, используют теорию возмущений для слабой нелинейности либо приближение Томаса-Ферми для сильной нелинейности, когда кинетическое слагаемое становится пренебрежимо мало [4]. Таким образом, задача построения решений для произвольной силы взаимодействия до сих пор является нерешенной в общем случае. В данной работе мы рассмотрим ее решение в квазиклассическом приближении на основе идей метода ВКБ-Маслова.

**Описание метода.** Нестационарное нелокальное уравнение Гросса-Питаевского в наиболее общем виде может быть записано как

$$\left\{-i\hbar\partial_t + V(\hat{z}) + \kappa \int_{\mathbb{R}^n} W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\left|\Psi(\boldsymbol{y},t)\right|^2 d\boldsymbol{y}\right\}\Psi(\boldsymbol{x},t) = 0, \tag{1}$$

где $\hat{z} = \left(\hat{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{x}\right)$ – $2n$-мерный вектор, $\boldsymbol{x} = (x_1,...,x_n)$, $\hat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\partial_{\boldsymbol{x}}$, $\kappa$ – параметр нелинейности. Слагаемое $V(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})$ описывает кинетическую энергию конденсата и его потенциальную энергию во внешнем поле ловушки, а $W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ отвечает эффективному взаимодействию в конденсате в приближении среднего поля. Подстановка

$$\Psi(\boldsymbol{x},t) = \exp\left(-\frac{i\mu t}{\hbar}\right)\Psi(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

в (1) приводит к стационарному уравнению Гросса-Питаевского вида

$$\left\{V(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}) + \kappa \int_{\mathbb{R}^n} W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\left|\Psi(\boldsymbol{y})\right|^2 d\boldsymbol{y}\right\}\Psi(\boldsymbol{x}) = \mu\Psi(\boldsymbol{x}), \tag{3}$$

для которого при выборе нормировки на единицу $\int_{\mathbb{R}^n} \left|\Psi(\boldsymbol{x})\right|^2 d\boldsymbol{x} = 1$ можно поставить задачу на собственные функции и собственные значения $\mu$, которые отвечают химическому потенциалу. Метод построения квазиклассических решений спектральной задачи для уравнения (3), сосредоточенных на кривых, основан на методе построения асимптотических решений задачи Коши для уравнения (1), представленного в работе [5], и выбора из них решений вида (2).

Рассмотрим решения, сосредоточенные на одномерном многообразии $\Lambda_t^1$ (кривой) в фазовом пространстве

$$\Lambda_t^1 = \left\{z = \left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}\right) = Z(t,s) = \left(\boldsymbol{P}(t,s), \boldsymbol{X}(t,s)\right) \mid s \in \left[0,\omega T\right]\right\},\ t \in \left[0,T\right],\ T > 0, \tag{4}$$

где $s$ – параметр кривой. Нас интересуют многообразия, инвариантные относительно сдвигов по времени. Частным случаем таких многообразий $\Lambda^1$ являются кривые, задаваемые функциями $Z$ вида

$$Z(t,s) = \overline{Z}(t + s/\omega),\ \ \overline{Z}(t+T) = \overline{Z}(t),\ \ \overline{Z}(t) = \left(\overline{\boldsymbol{P}}(t), \overline{\boldsymbol{X}}(t)\right). \tag{5}$$

Такие функции определяются $T$-периодическими решениями с автомодельной симметрией (5) следующей системы Гамильтона-Эренфеста типа *(1,1)*:

$$\dot{\overline{Z}}(t) = JH_z(t),\quad H_z(t) = V_z\left(\overline{Z}(t)\right) + \frac{\kappa}{T}\int_0^T W_z\left(\overline{\boldsymbol{X}}(t), \overline{\boldsymbol{X}}(r)\right)dr,\quad J = \begin{pmatrix} 0 & -I_{n\times n} \\ I_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Здесь $I_{n\times n}$ – единичная матрица размера $n\times n$.

Квазиклассические решения уравнения (1) вида (2), сосредоточенные на кривых (4), (5), с точностью $O\left(\hbar^{3/2}\right)$ по правой части могут быть записаны в виде

$$\begin{gathered}\Psi_0(\boldsymbol{x},\mu_0) = \frac{N}{\sqrt{\det C(t)}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\int_0^t\left(\left\langle\overline{\boldsymbol{P}}(r), \dot{\overline{\boldsymbol{X}}}(r)\right\rangle - H(r) + \mu_0\right)dr + \left\langle\overline{\boldsymbol{P}}(r), \Delta\boldsymbol{x}\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle\Delta\boldsymbol{x}, Q(t)\Delta\boldsymbol{x}\right\rangle\right]\right\}\Bigg|_{t=\tau(\boldsymbol{x})}, \\ \Psi_\nu(\boldsymbol{x},\mu_n) = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\nu_k!}}\left(\hat{\alpha}_k^+(t)\right)^{\nu_k}\Psi_0(\boldsymbol{x},\mu_\nu),\quad \Delta\hat{z} = \left(\Delta\hat{\boldsymbol{p}}, \Delta\boldsymbol{x}\right) = \hat{z} - \overline{Z}(t),\end{gathered} \tag{7}$$

$$H(t) = H^{(0)}(t) + \hbar H^{(1)}(t)[\nu], \quad H^{(0)}(t) = V\left(\bar{Z}(t)\right) + \frac{\kappa}{T}\int_0^T W\left(\bar{\boldsymbol{X}}(t), \bar{\boldsymbol{X}}(r)\right)dr,$$

$$H^{(1)}(t)[\nu] = \frac{\kappa}{T}\int_0^T \left(\left\langle W_y\left(\bar{\boldsymbol{X}}(t), \bar{\boldsymbol{X}}(r)\right), \boldsymbol{X}^{(1)}(t)[\nu]\right\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left[W_{yy}\left(\bar{\boldsymbol{X}}(t), \bar{\boldsymbol{X}}(r)\right)\cdot \sigma_{xx}(r)[\nu]\right]\right)dr.$$

Здесь $\boldsymbol{X}^{(1)}(t)$ и $\sigma_{xx}(t)$ – *T*-периодические решения системы Гамильтона-Эренфеста второго порядка [5], $\nu$ – *(n-1)*-мерный мультииндекс, а $\hat{a}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left\langle a_k(t), J^T \Delta\hat{z}\right\rangle$ – оператор, действующий при условии $t = \tau(\mathbf{x}) = const$, где $a_k(t)$, $a_k(t) = 1, \ldots, (n-1)$ – набор линейно независимых решений Флоке системы в вариациях

$$a(t) = JH_{zz}(t)a(t), \quad H_{zz}(t) = V_{zz}\left(\bar{Z}(t)\right) + \frac{\kappa}{T}\int_0^T W_{zz}\left(\bar{\boldsymbol{X}}(t), \bar{\boldsymbol{X}}(r)\right)dr,$$

дополняющих $a_0(t) = \dot{\bar{Z}}(t)$ и отвечающих условию косоортогональности [5]. Для устойчивости кривой $\Lambda^1$ в линейном приближении, мы требуем, чтобы показатели Флоке $\lambda_k = \exp\left(i\Omega_k T\right)$ удовлетворяли условию $\mathrm{Im}\,\Omega_k = 0$. Функции $C(t)$, $Q(t)$ также однозначно выражаются через решения системы в вариациях [5].

Из условия однозначности решений (7) можно получить следующие условия квантования в квазиклассическом приближении $\mu = \mu^{(0)} + \hbar\mu^{(1)}$:

$$H^{(0)}(t) = \mu^{(0)}, \quad \int_0^T \left\langle \bar{\boldsymbol{P}}(t), \dot{\bar{\boldsymbol{X}}}(t)\right\rangle dt = 2\pi\hbar l, \quad l \in \mathbb{Z},$$
$$\mu^{(1)} = \frac{1}{T}\int_0^T H^{(1)}(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1}\Omega_k\left(\nu_k + \frac{1}{2}\right). \tag{8}$$

Первое условие квантования в (8) является совпадает с условием квантования Бора-Зоммерфельда, а второе является нетривиальным результатом и описывает высшие поправки к химическому потенциалу. Отметим, что в линейном случае условие квантования Бора-Зоммерфельда дает хорошее согласие с точными решениями уравнения Шредингера при $\hbar l = O(1)$, что стоит требовать и в нелинейном случае.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Томской области в рамках научного проекта № 19-41-700004.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kevrekidis, P.G., Frantzeskakis, D.J., Carretero-Gonzalez R. Emergent nonlinear phenomena in Bose-Einsten condensates: Theory and experiment. – Berlin: Springer-Verlag, 2008.
2. Baranov, M.A. Theoretical progress in many-body physics with ultracold dipolar gases // Physics Reports. – 2008. – V. 464, №. 3. – P. 71-111.
3. Antoine, X., Duboscq, R. GPELab, a Matlab toolbox to solve Gross-Pitaevskii equations I: Computation of stationary solutions // Computer Physics Communications. – 2014. – V. 185, №. 3. – P. 2969-2991.
4. Stationary solutions of the Gross-Pitaevskii equation with linear counterpart // Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics. – 2000. – V. 275, №. 5-6. – P. 424-434.
5. Shapovalov A.V., Kulagin A.E., Trifonov A.Yu. The Gross-Pitaevskii equation with a nonlocal interaction in a semiclassical approximation on a curve // Symmetry. – 2020. – V. 12, №. 2. – P. .