УДК 536.24

# РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ СТЕПЕННОЙ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ ВНУТРИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОБОГРЕВАЕМОЙ ПОЛОСТИ

Д.С. Лоенко

Научный руководитель: доцент, д. ф.-м. н. М.А. Шеремет

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: whiteink@bk.ru

# REGULARIZATION TECHIQUES IN NATURAL CONVECTION PROBLEMS FOR POWER-LAW NON-NEWTONIAN FLUID CIRCULATION IN A DIFFERENTIALLY-HEATED CAVITY

D.S. Loenko

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Dr. M.A. Sheremet

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: whiteink@bk.ru

***Abstract.*** *This work is devoted to the study of the regularization techniques for natural convection of a power-law fluid in a differentially-heated cavity. Three approaches of regularization are compared. The influence of the regularization parameter on hydrodynamics and heat transfer is estimated. Comparison with numerical data of other authors is performed. Optimal values of regularization parameter and uniform mesh are defined.*

**Введение.** Рост производительности вычислительных комплексов и постоянная миниатюризация элементов микроэлектронных систем ставит перед исследователями задачу поиска эффективного охлаждения тепловыделяющих элементов. Одним из наиболее популярных, дешевых и легких в реализации является метод пассивного охлаждения с помощью естественно-конвективного теплопереноса в жидкостях и газах. Известно, что большинство жидкостей, применяемых в таких задачах, проявляют неньютоновское поведение [1]. Особенностью неньютоновских сред является нелинейная зависимость напряжения сдвига от скорости сдвига. Примерами описанных жидкостей являются следующие вещества: различные суспензии, наножидкости, гели, масла, эмульсии, пены.

Учитывая особенности поведения неньютоновских сред, их математическое моделирование представляет собой сложную задачу. При численном исследовании конвективного теплопереноса в псевдопластических жидкостях возникает особенность, вследствие появления «бесконечной» эффективной вязкости при стремлении к нулю интенсивности скоростей деформаций [2].

В данном исследовании будут изучены походы, связанные с регуляризацией степенной модели для сохранения устойчивости численного метода.

**Постановка задачи.** На рисунке 1 представлена геометрическая схема области решения задачи. В замкнутой квадратной дифференциально-обогреваемой полости ($T_h > T_c$) содержится степенная неньютоновская жидкость. Горизонтальные стенки полностью теплоизолированы. Сила тяжести направлена вертикально вниз.

Дифференциальные уравнения, описывающие процесс нестационарного конвективного теплопереноса в приближении Буссинеска в размерных переменных «скорость–давление», имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}\right)+g\beta\left(T-T_c\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{4}$$

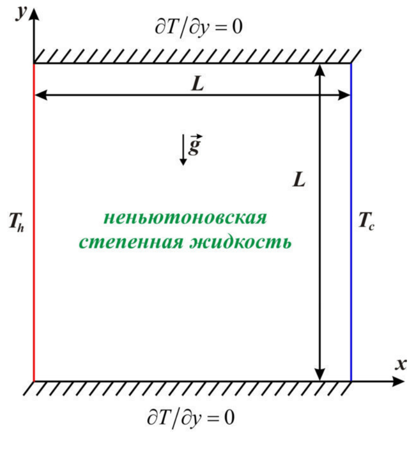


*Рис. 1. Область решения задачи*

Неньютоновский характер течения жидкости описывается степенным законом Оствальда-де-Виля [3, 4]:

$$\tau_{ij}=2\mu_{eff}D_{ij}=2K\left(2D_{kl}D_{kl}\right)^{\frac{n-1}{2}}D_{ij}$$

С целью исключения поля давления в систему уравнений (1)–(4) вводятся преобразованные переменные – функции тока и завихренности – а также применяется обезразмеривание [4]. Тогда система уравнений принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2}=-\Omega \tag{5}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}+\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\frac{\partial\Omega}{\partial X}-\frac{\partial\Psi}{\partial X}\frac{\partial\Omega}{\partial Y}=\left(\frac{Ra}{Pr}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left[\nabla^2\left(\bar{M}\Omega\right)+S_\Omega\right]+\frac{\partial\Theta}{\partial X} \tag{6}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}+\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\frac{\partial\Theta}{\partial X}-\frac{\partial\Psi}{\partial X}\frac{\partial\Theta}{\partial Y}=\frac{1}{\sqrt{Ra\cdot Pr}}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial Y^2}\right) \tag{7}$$

где источниковый член $S_\Omega$ и безразмерная эффективная вязкость $\bar{M}$ и имеют следующий вид:

$$S_\Omega=2\left[\frac{\partial^2\bar{M}}{\partial X^2}\frac{\partial U}{\partial Y}-\frac{\partial^2\bar{M}}{\partial Y^2}\frac{\partial V}{\partial X}+\frac{\partial^2\bar{M}}{\partial X\partial Y}\left(\frac{\partial V}{\partial Y}-\frac{\partial U}{\partial X}\right)\right],\quad \bar{M}=\left[2\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2+2\left(\frac{\partial V}{\partial Y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial Y}+\frac{\partial V}{\partial X}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}}$$

Выражение $A=\sqrt{2\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2+2\left(\frac{\partial V}{\partial Y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial Y}+\frac{\partial V}{\partial X}\right)^2}$ определяет интенсивность скоростей деформаций. Тогда эффективную вязкость можно выразить следующим образом: $\bar{M}=A^{n-1}$. В случае псевдопластической жидкости $(n<1)$ возможно появление «бесконечной» эффективной вязкости, поэтому для сохранения устойчивости численного метода используют регуляризацию степенной модели. В проводимых исследованиях использовались три подхода, представленные в таблице 1, где ε – параметр регуляризации, а $n$ – показатель поведения жидкости.

*Таблица 1*

*Три подхода в методе регуляризации*

| | |
|---|---|
| 1 | $\bar{M} = (A+\varepsilon)^{n-1}$ |
| 2 | $\bar{M} = \left(\sqrt{A^2+\varepsilon^2}\right)^{n-1}$ |
| 3 | $\bar{M} = \left(\dfrac{A}{1-\exp\left(-\dfrac{A}{\varepsilon}\right)}\right)^{n-1}$ |

Начальные и граничные условия для системы (5)-(7) в безразмерном виде:

$$\tau = 0 \rightarrow \Psi = \Omega = 0,\ \Theta = 0.5$$

$$\tau > 0 \rightarrow\ X = 0,\ 0 \le Y \le 1,\ \Psi = 0,\ \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0,\ \Theta = 1$$

$$X = 1,\ 0 \le Y \le 1,\ \Psi = 0,\ \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0,\ \Theta = 0$$

$$Y = 0 \text{ и } Y = 1,\ \ 0 \le X \le 1\ \ \Psi = 0,\ \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0,\ \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0$$

Система (5)-(7) с соответствующими начальными и граничными условиями решалась на основе конечных разностей с применением метода нижней релаксации и прогонки. В ходе решения были проанализированы три подхода регуляризации степенной модели при ε=0.0001–0.1. В результате были установлены оптимальные значения параметра регуляризации для каждой из рассмотренных моделей.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для молодых российских ученых (грант МД-5799.2021.4).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gangawane K.M., Manikandan, B. Laminar natural convection characteristics in an enclosure with heated hexagonal block for non-newtonian power law fluids // Chin. J. Chem. Eng. – 2017. – Vol. 25. – P. 555–571.
2. Шрагер Г.Р., Козлобродов А.Н., Якутенок В.А. Моделирование гидродинамических процессов в технологии переработки полимерных материалов. – Томск: Издательство Томского университета, 1999. – 230 с.
3. Khezzar L., Siginer D., Vinogarov I. Natural convection of power law fluids in inclined cavities // International Journal of Thermal Sciences. – 2012. – Vol. 53. – P. 8–17.
4. Лоенко Д.С., Шеремет М.А. Численное моделирование естественной конвекции неньютоновской жидкости в замкнутой полости // Компьютерные исследования и моделирование. – 2020. – Т. 12, № 1. – С. 59–72.