УДК 534.376

# РАСЧЕТ ИЗГИБА ВЯЗКОУПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ БАЛОК

Д.Д. Дубровский, Н.А. Куприянов, М.С. Павлов
Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.А. Светашков
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: ddd6@tpu.ru

# CALCULATION OF BENDING OF VISCOELASTIC ANISOTROPIC BEAMS

D.D. Dubrovskiy, N.A. Kupriyanov, M.S. Pavlov
Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.A. Svetashkov
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: ddd6@tpu.ru

***Abstract.*** *The simplest problem of the linear theory of viscoelasticity of an anisotropic body is considered. The problem is solved in two ways. The analytical solution obtained by the Volterra's method is compared with the solution found on the basis of the method of separation of variables. The comparison of the two methods of solution showed quite close coincidences in the calculation of the parameters of the stress-strain state.*

**Введение.** Несмотря на огромную востребованность анализа механических свойств вязкоупругих композитов, прогнозирования прочности и долговечности конструкций, задачи механики вязкоупругих анизотропных тел недостаточно полно проработаны в современной литературе.

Практически единственным аналитическим методом решения граничных задач остается принцип Вольтерра [1]. Главным препятствием широкого использования данного метода, помимо вычислительной сложности, является необходимость иметь соответствующее упругое аналитическое решение. Метод разделения переменных (МРП) разработан для изотропных вязкоупругих тел [2, 3], свободен от необходимости иметь в наличии аналитическое решение для определения вязкоупругого напряженно-деформированного состояния конструкции. Также данный метод позволяет решать задачи и в том случае, когда граница, ограничивающая объем тела, может меняться во времени.

Цель настоящей работы: модификация метода разделения переменных [2] на случай трансверсально-изотропных задач вязкоупругого тела; апробация на решении задачи изгиба вязкоупругой трансверсально-изотропной балки.

**Расчетно-аналитическая часть.** Постановка упругой задачи. Рассмотрим консольную балку, которая изгибается нормальной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q. Предполагается, что в каждой точке имеется плоскость упругой симметрии, параллельная серединной плоскости xOy. Нормальное напряжение в случае упругой ортотропной балки определяется соотношением [4] $\sigma_x = -\frac{qx^2y}{2J} + \frac{q}{h}m\cdot\left(\frac{4y^2}{b^3} - \frac{3y}{5b}\right)$.

Стрела прогиба $f = q\frac{a_{11}l^4}{8J} - q\frac{b^2l^2}{80J}\left(3a_{12} + 4a_{66} - \frac{8}{3}\frac{a_{16}^2}{d^4}\right)$.

Здесь J – момент инерции сечения, $J = \frac{hb^3}{12}$, $m = \frac{1}{2}(\frac{E_1}{G} - 2\nu_1)$.

Константы анизотропии представлены как $a_{11} = \frac{1}{E_1}, a_{12} = -\frac{\nu_1}{E_1}, a_{66} = \frac{1}{G}$.

Рассмотрим случай трансверсально-изотропного тела, для которого определяются уравнения упругого закона Гука имеют вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) - \frac{\nu_1}{E_1}\sigma_z, \varepsilon_{yz} = \frac{1}{G_1}\tau_{yz}, \ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) - \frac{\nu_1}{E_1}\sigma_z, \varepsilon_{xz} = \frac{1}{G_1}\tau_{xz},$$
$$\varepsilon_x = -\frac{\nu_1}{E_1}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{E_1}\sigma_z, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}. \quad (1)$$

Здесь E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона в плоскости симметрии, $E_1$, $\nu_1$ – соответствующие константы в плоскости, ортогональной плоскости симметрии.

Постановка и решение вязкоупругой задачи. Заменим константы упругости, входящие в (1), соответствующими вязкоупругими операторами. Выразим константы (E, ν) и ($E_1$, $\nu_1$) через соответствующие пары (G, K) и ($G_1$, $K_1$), где G и $G_1$ – модули сдвига, K и $K_1$ – модули объемного сжатия

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{3G} + \frac{1}{9K}, \ \frac{\nu}{E} = \frac{1}{6G} - \frac{1}{9K}, \ \frac{1}{E_1} = \frac{1}{3G_1} + \frac{1}{9K_1}, \ \frac{\nu_1}{E_1} = \frac{1}{6G_1} - \frac{1}{9K_1}. \quad (2)$$

Для перехода к вязкоупругому решению заменим упругие константы, входящие в (2), на соответствующие упруго-наследственные операторы G → G*, $G_1$ → $G_1$*. Кроме того, будем считать, что объемное поведение в плоскости симметрии и ортогональной ей плоскости подчиняется закону Гука. Тогда K = const, $K_1$ = const. Вязкоупругие операторы G* и $G_1$*представим как

$$G^*q = G\left[q(t) - \lambda Э^*_{\gamma+\lambda}q\right], \ G_1^*q = G_1\left[q(t) - \lambda_1 Э^*_{\gamma_1+\lambda_1}q\right], \ Э^*_\gamma q = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}q(\tau)d\tau.$$

Для получения решения вязкоупругой задачи достаточно выразить в выражении для m константы $E_1$, G, $\nu_1$ через G, K и $G_1$, $K_1$, затем заменить их на операторы G*, $G_1$*(константы K и $K_1$ при этом не подлежат преобразованию). Применяя алгебру интегральных операторов, получим «расшифровку» оператора $m^* = \frac{1}{2}(\frac{E_1^*}{G^*} - 2\nu_1^*)$ в следующем виде

$$m^* = \frac{9K_1}{2G}(1 + \lambda Э^*_\gamma) - \frac{A}{2G}[1 + \lambda Э^*_\gamma(1 + \frac{\Omega_1}{\beta_1 - \lambda}) + \Omega_1 Э^*_{\beta_1}(1 - \frac{\lambda}{\beta_1 - \gamma})] + 1 - \frac{3}{2+\omega_1}(1 + \Omega_1 Э^*_{\beta_1}).$$

Здесь введены обозначения $A = \frac{18K_1}{2+\omega_1}, \omega_1 = \frac{2G_1}{3K_1}, \beta_1 = \gamma_1 + \lambda_1 - \lambda_1\mu_1, \mu_1 = \frac{\omega_1}{2+\omega_1}$.

Решение по методу разделения переменных получим путем замен в выражении для m упругих констант на функции двух эффективных модулей трансверсальной изотропии

$$G \to g_c(t), \ G_1 \to g_{c1}(t), \ g_c(t) = \frac{H(t)}{G^{*-1}H}, \ g_{c1}(t) = \frac{H(t)}{G_1^{*-1}H}.$$

Здесь H(t) – функция, входящая в выражение погонной нагрузки $q = \tilde{q}H(t)$, где $\tilde{q} = const$. Например, $E_1 \Rightarrow E_c^1(t) = (\frac{1}{3g_{c1}(t)} + \frac{1}{9K_1})^{-1}$. Таким образом, оператор m*, применяя метод разделения переменных, примет вид $m_c = \frac{1}{2}\left[\frac{9K_1 \cdot g_{c1}(t)}{g_c(t)\cdot(3K_1 + g_{c1}(t))} - 2\frac{3K_1 - 2g_{c1}(t)}{6K_1 + 2g_{c1}(t)}\right]$.

Введем функцию относительной погрешности для оператора m*: $\delta(t)=\frac{m^*-m_c}{m^*}\cdot 100\%$. График этой функции показан на рис 1. На рисунке 1 видно, что наибольшее значение погрешности составляет порядка 38%. Также проиллюстрируем на рис. 2 относительную погрешность для значений напряжений по оси oX, которая имеет вид $f_\sigma(t)=\frac{\sigma_x-\tilde{\sigma}_x}{\sigma_x}\cdot 100\%$, по методу Вольтерра и МРП, соответственно. Значения напряжений отличаются меньше, чем на один процент (максимальное значение погрешности составляет 0,221 %), что говорит об эффективности применения метода разделения переменных. Отличий в значениях стрелы прогиба не наблюдается, поскольку операторы вязкоупругости входят в выражение для определения стрелы прогиба линейным образом.

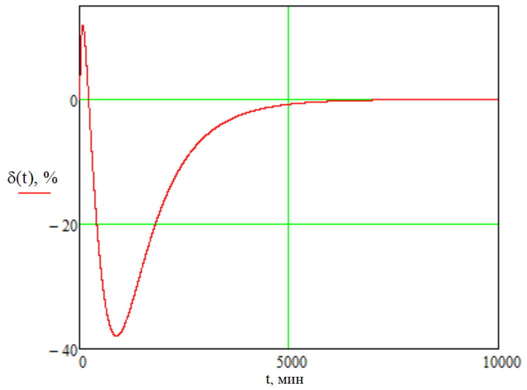


*Рис. 1. Относительная погрешность для оператора m**

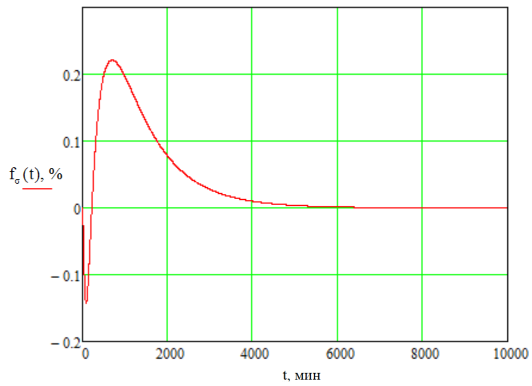


*Рис. 2. Относительная погрешность для нормальных напряжений $\sigma_x$*

**Заключение**. На основе решения установлено, что метод разделения переменных достаточно точно (до 0,221 %) позволяет прогнозировать напряженное и деформированное состояние вязкоупругой анизотропной балки при изгибе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Volterra V. (1930) Theory of Functionals and of Integral and integrodifferential Equations. London; Glasgos: Blackie and Son Limited; 2
2. Svetashkov A., Kupriyanov N.A., Pavlov M.S., Vakurov A.A. Variable separation method for solving boundary value problems of isotropic linearly viscoelastic bodies // Acta Mechanica. – 2020. – 231(9) – P.3583–3606 - DOI: 10.1007/s00707-020-02698-4. WOS/ Scopus IF 2.102; 3
3. Svetashkov A., Fok S.C., Kupriyanov N.A., Manabaev K.K., Pavlov M.S., Vakurov A.A. Modification of the Time-Effective Moduli of Viscoelastic Bodies // Mechanics of Composite Materials. – 2019. – Vol. 55, Iss. 5. – P. 667-686. - DOI: 10.1007/s11029-019-09843-8 WOS/Scopus /IF 1.007; 4
4. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки, 2-е изд. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. – 463 с.