ДИНАМИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ ПЕНСИОННЫХ НАКОПЛЕНИЙ

А.А. Мицель, профессор, О.И. Рекундаль, ст. преподаватель
Национальный исследовательский Томский политехнический университет
634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Юргинский технологический институт (филиал)
Национального исследовательского Томского политехнического университета
652055, Кемеровская обл., г. Юрга, ул. Ленинградская, 26
E-mail maa@asu.tusur.ru , rek_olga@mail.ru

В данной работе рассматривается задача управления инвестиционным портфелем пенсионных накоплений [1]. Причем задача управления заключается в перераспределении капитала между включенными в портфель активами таким образом, чтобы сформированный портфель с минимально возможными отклонениями следовал капиталу эталонного инвестиционного портфеля. Подобная задача рассматривалась в работе [2]. Однако, в отличие от [2], здесь управляемыми переменными являются как вложения в рисковые активы, так и в безрисковые активы.

Стоимость инвестиционного портфеля $V(t)$ в момент времени t, сформированного по модели [1], равна

$$V(t) = \sum_{i=1}^{N} V_i^{''}(t) + \sum_{j=1}^{k} V_j^{'}(t), \tag{1}$$

где $V_i^{''}(t)$ – объем вложений капитала в i-й рисковый актив в момент времени t; $V_i^{'}(t)$ – объем вложения капитала в безрисковый актив в момент времени t.

Динамику капитала инвестиционного портфеля в дискретном времени можно описать уравнением

$$V(t+1) = \sum_{i=1}^{N}\left[1+\rho_i(t)\right]\cdot V_i^{''}(t) + \sum_{j=1}^{k}\left[1+\nu_j(t)\right]\cdot V_j^{'}(t), \tag{2}$$

где $\rho_i(t)$ – ставка доходности i-го рискового актива в момент времени t; $\nu_j(t)$ – ставка доходности j-го безрискового актива.

Ставку доходности рискового актива будем описывать следующим соотношением

$$\rho_i(t) = \mu_i(t) + \eta_i(t).$$

Здесь $\mu_i(t) = M(\rho_i(t))$ – средняя ставка доходности i-го рискового вложения; $\eta_i(t)$ – случайная составляющая ставки доходности i-го рискового актива с параметрами $M(\eta_i(t)) = 0, M\left(\eta_i(t)\eta_j(t)\right) = \Sigma_{ij}, i,j = 1,\ldots,N-k$, где Σ_{ij} – матрица ковариации доходностей рисковых активов.

Используя (1), преобразуем (2) к виду

$$V(t+1) = V(t) + b_0^T(t)\cdot V^{''}(t) + \eta^T(t)\cdot V^{''}(t) + b_2^T V'(t),$$

где $b_0^T = \left[\mu_1(t) \quad \mu_2(t) \quad \ldots \quad \mu_N(t)\right]^T$; $\eta(t) = \left[\eta_1(t) \quad \eta_2(t) \quad \ldots \quad \eta_N(t)\right]$;

$V^{''}(t) = \left[V_1^{''}(t) \quad V_2^{''}(t) \quad \ldots \quad V_N^{''}(t)\right]^T$;

$b_2^T = \left[\nu_1(t) \quad \nu_2(t) \quad \ldots \quad \nu_k(t)\right]^T$; $V'(t) = \left[V_1'(t) \quad V_2'(t) \quad \ldots \quad V_k'(t)\right]^T$.

Уравнение эталонного портфеля определим уравнением:

$$V^0(t+1) = \left[1+\mu_0(t)\right]\cdot V^0(t), \tag{3}$$

где $\mu_0(t)$ - заданная ставка эталонного портфеля. Данный показатель характеризует склонность инвестора к риску: чем он больше, тем выше склонность к риску. $V^0(0) = V(0)$ (в начальный момент времени капитал эталонного портфеля совпадает с капиталом реального инвестиционного портфеля).

Введем вектор-столбец $y(t) = \left[V_1''(t), V_2''(t), \ldots V_N''(t), V_1'(t), V_2'(t), \ldots, V_k'(t)\right]^T$

В качестве меры риска выберем квадратичный функционал

$$J = M\left\{\sum_{t=0}^{T-1}\left[\left[V(t)-V^0(t)\right]^2 + \left(y(t)\right)^T\cdot R(t)\cdot y(t)\right] + \left[V(T)-V^0(T)\right]^2\right\}, \tag{4}$$

где $R(t)$ – диагональная матрица весовых коэффициентов размерности $(N+k)\times(N+k)$.

Определим вектор-столбец $u(t) = \left[V(t), V^0(t)\right]^T$, тогда модели (2), (2) примут вид

$$u(t+1) = A(t)u(t) + B_0(t)y(t) + B_1(t)V^{"}(t), \tag{5}$$

где $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\mu_0(t) \end{bmatrix}$,

$B_0(t) = \begin{bmatrix} \mu_1(t) & \mu_2(t) & \ldots & \mu_N(t) & v_1(t) & v_2(t) & \ldots & v_k(t) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$, $B_1(t) = \begin{Bmatrix} \eta_1(t) & \eta_2(t) & \ldots & \eta_N(t) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Bmatrix}$

Функционал (4) запишем следующим образом:

$$J = M\left\{\sum_{t=0}^{T-1}\left[u^T(t)h^T h\cdot u(t) + \left(y(t)\right)^T \cdot R(t)\cdot y(t)y(t)\right] + u^T(T)h^T h\cdot u(T)\right\} \tag{6}$$

где $h = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$.

Для определения оптимальной стратегии управления с обратной связью по квадратичному критерию используется линейный закон управления вида

$$y(t) = K_1(t)V(t) + K_2(t)V^0(t) = K(t)u(t) \tag{7}$$

где $K(t) = \left[K_1(t), K_2(t)\right]$ – матрица коэффициентов обратной связи выбирается из условия минимума функционала (4).

Функционал (5) можно переписать в виде

$$J = tr\left\{\sum_{t=0}^{T-1}\left[h^T h\cdot P(t) + K^T(t)R_0(t)K(t)P(t)\right] + h^T h\cdot P(T)\right\} \tag{8}$$

где $tr\{\cdot\}$ – след матрицы, а матрица вторых моментов $P(t) = M\left\{u(t)\cdot u^T(t)\right\}$. На основании (5) и (7) получим разностное матричное уравнение для определения матрицы $P(t)$:

$$\begin{aligned} P(t+1) &= \left[A(t) + B_0(t)K(t)\right]P(t)\left[A(t) + B_0(t)K(t)\right]^T + \\ &+ \sum_{r=1}^{N+r} B_r K(t)P(t)K^T(t)B_r^T(t) \end{aligned}, \tag{9}$$

где $B_r = \begin{pmatrix} \Sigma_{1r}^{1/2} & \Sigma_{2r}^{1/2} & \ldots & \Sigma_{Nr}^{1/2} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

При выводе (8) мы приняли во внимание тот факт, что случайные величины $\eta_j(t)$ и $u_j(t)$ независимы. Поэтому операции математического ожидания по переменным $\eta_j(t)$ и $u_j(t)$ выполняется независимо друг от друга.

Оптимальная стратегия управления находится путем решения задачи оптимизации детерминированной системы, которая может быть описана уравнением динамики вторых моментов состояний (9), матрицей *K(t)* как управляющими воздействиями и функционалом (8) как критерием качества.

Таким образом, необходимо минимизировать критерий (8) при динамических ограничениях, описываемых разностным матричным уравнением (9).

Для решения этой задачи используется метод динамического программирования [3].

Краевые условия на матрицы *P(t)* зададим в виде:

$$P(0) = \begin{pmatrix} \left(\overline{V(0)}\right)^2 & \overline{V(0)}V^0(0) \\ \overline{V(0)}V^0(0) & \left(V^0(0)\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Литература.

1. Мицель А.А., Рекундаль О.И. Инвестиционный портфель пенсионных накоплений // Финансовая аналитика: проблемы и решения, 2011 №40(82). – С.2-6.
2. Гальперин В.А., Домбровский В.В. Динамическое управление инвестиционным портфелем с учетом скачкообразного изменения цен финансовых активов// Вестник ТГУ, 2003, №280.– С. 112-117.