2. Астафьева М.Н. К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем с импульсным воздействием // Укр. матем. журн.— 1989.— **41**, N8.— С.1124-126.
3. Сопронюк Т.М. Асимптотична стійкість розв'язків нелінійної імпульсної системи з малим параметром // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип.111. Математика.— Чернівці: Рута, 2001.– С.113-120.
4. Петришин Р. І., Сопронюк Т.М. Обгрунтування методу усереднення для багаточастотних імпульсних систем // Укр. мат. журн.— 2003.— **55**, N1.— С.55—65.
5. Петришин Я.Р. Обгрунтування методу усереднення на півосі для одного класу нелінійних коливних систем з імпульсним впливом // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 111. Математика.— Чернівці: Рута, 2001.— С.105-109.
6. Петришин Р.І., Сопронюк Т.М. Наближені методи розв'язування диференціальних рівнянь з імпульсною дією:навч.посібник.- Чернівці: Чернівецький національний ун-т, 2010. –200 с.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА НА ПЕРСОНАЛЬНОМ КОМПЬЮТЕРЕ

М.В. Дубровский, студент гр. 10790, научный руководитель: В.А. Журавлев
Юргинский технологический институт (филиал) Национального исследовательского
Томского политехнического университета
652055, Кемеровская обл., г. Юрга, ул. Ленинградская, 26
E-mail: df1999@mail.ru

В процессе обучения мы неоднократно сталкивались с необходимостью вычисления определённых интегралов. Поскольку решение аналитическим методом не всегда легко даётся, то в этой работе мы решили воспользоваться программой Microsoft Excel, а точнее методом прямоугольников и методом трапеций. Принцип решения определённого интеграла состоит в следующем.

Пусть на отрезке [a, b] задана функция y=f(x), и отрезок [a, b] разбит на n элементарных отрезков точками x_0, x_1 ..., x_n: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$.

На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения выбрана некоторая точка Ψ и положено, что $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где i = 1, 2,..., n. Тогда сумма вида:

$$\sum f(\psi)\Delta x_i \tag{1}$$

называется интегральной суммой для функции y = f(x) на [a, b]. Интегральная сумма зависит как от способа разбиения отрезка [a, b] точками x_0, x_1, ..., x_n, так и от выбора точек Ψ_1, Ψ_2,..., Ψ_n на каждом из отрезков разбиения $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, i = 1,2,…, n.

Обозначим через $\max \Delta x_i$, максимальную из длин отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где i = 1,2,..., n.

Тогда определенным интегралом от функции y=f(x) на [a, b] называется предел интегральной суммы при стремлении $\max \Delta x_i$ к нулю, если он существует, конечен и не зависит от способа выбора точек x_1, x_2,... и точек Ψ_1, Ψ_2,.... Определенный интеграл обозначается:

$\int_a^b f(x)dx$, а функция f(x) называется интегрируемой на отрезке [a, b], т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\Psi)\Delta x_i \tag{2}$$

При этом число ***a*** называется нижним пределом определенного интеграла, число ***b*** - его верхним пределом, функция f(x) - подынтегральной функцией, выражение f(x)dx подынтегральным выражением, а задача о нахождении определенного интеграла интегрированием функции f(x) на отрезке [a, b].

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в следующем. Если функция y = f(x) неотрицательна на отрезке [a, b], где a < b, то $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади S под кривой y =f(x) на [a, b].

Действительно, отдельное слагаемое интегральной суммы (2) равно площади S_i прямоугольника со сторонами Δx_i и $f(x_i)$ (согласно определению значение определенного интеграла не зависит от способа выбора точек Ψ_1, Ψ_2,…), где i = 1, 2, ..., n. Поэтому вся интегральная сумма (1) равна площади $S_Л = S_1 + S_2 + ... + S_n$ под ломаной, образованной на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ прямыми, параллельными оси абсцисс. При стремлении max Δx, к нулю ломаная неограниченно приближается к исходной кривой и площадь под ломаной переходит в площадь под кривой $S_Л = S$.

Для нахождения определенного интеграла используется формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad (3)$$

где F(a) и F(b) первообразные для f(x) в точках a и b. Первообразной функцией для функции f(x) на промежутке x называется функция F(x), если в каждой точке x этого промежутка F'(x) = f(x).

Однако применение формулы (3) на практике связано с существенными трудностями, возникающими при нахождении первообразной в случае усложнения подынтегральной функции. Поэтому в приложениях используют так называемые численные методы, позволяющие найти приближенное значение искомого интеграла с требуемой точностью. Этот подход оказывается особенно предпочтительным при использовании компьютеров для нахождения интегралов.

Существуют различные численные методы вычисления определенных интегралов:

- метод прямоугольников – как сумма элементарных прямоугольников;

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \qquad (4)$$

- метод трапеций – как сумма элементарных трапеций;

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2}\Delta x\,, \qquad (5)$$

а также методы Симпсона, Монте-Карло и др.

Формула метода прямоугольников (4) получается, если отрезок интегрирования [a, b] разбить на n равных частей длиной: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. На каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ участок кривой y = f(x) заменяется отрезком прямой, параллельным оси абсцисс. Тогда: $\int_a^b f(x)dx \approx S_1 + S_2 + ... + S_n$, где $S_1, S_2, ..., S_n$ - площади прямоугольников на каждом из отрезков разбиения. Метод прямоугольников является простейшим, но и наименее точным.

Более точно определенный интеграл может быть вычислен по формуле трапеций (5). В этом случае, в отличие от метода прямоугольников, на каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ участок кривой y=f(x) заменяется хордами, стягивающими концевые точки. Тогда, отдельное слагаемое интегральной суммы S, равно площади трапеции с основаниями $f(x_i)$ и $f(x_{i-1})$ и высотой Δx, где i = 1, 2,..., n. То есть: $S_i = \dfrac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\Delta x$.

Складывая площади элементарных трапеций и приводя подобные члены, получаем формулу (5).

Погрешность (Δ) вычисления определенного интеграла по формуле трапеций (S(n)): $\Delta = \left|\int_a^b f(x)dx - S(n)\right|$ может быть оценена из выражения:

$\Delta \le \dfrac{(b-a)^3}{12n^2}M_2$, где M_2 - максимальное значение модуля второй производной f(x) подынтегральной функции y =f(x) на [a, b].

Рассмотрим вычисления интегралов по методу прямоугольников и методу трапеций.

Пример. Методом прямоугольников и методом трапеций найти $\int_0^3 x^2 dx$ с шагом Δx= 0,1.

Решение 1. Для нахождения определенного интеграла методом прямоугольников необходимо ввести значения подынтегральной функции f(x) в рабочую таблицу Excel в диапазоне $x \in [0;3]$ с заданным шагом Δx=0,1. Открываем чистый рабочий лист (команда Вставка, лист.), составляем таблицу данных (x и f(x)). Пусть первый столбец будет значениями x, а второй соответствующими показателями Δx. Для этого в ячейку A1 вводим слово Аргумент, а в ячейку B1 - слово Функция. В ячейку A2 вводится первое значение аргумента - левая граница диапазона (0). В ячейку A3 вводится второе значение аргумента - левая граница диапазона плюс шаг построения (0,1). Затем, выделив блок ячеек А2:А3, автозаполнением получаем все значения аргумента (за правый нижний угол блока протягиваем до ячейки А32, значение х = 3).

Далее вводим значения подынтегральной функции, в ячейку В2 необходимо записать ее уравнение. Для этого табличный курсор необходимо установить в ячейку В2 и с клавиатуры ввести формулу =А2^2 (при английской раскладке клавиатуры). Нажимаем клавишу Enter. В ячейке В2 появляется 0. Теперь необходимо скопировать функцию из ячейки В2. Автозаполнением копируем эту формулу в диапазон В2:В32. В результате должна быть получена таблица данных для нахождения интеграла. Нажимаем кнопку ОК. В ячейке В33 появляется приближенное значение искомого интеграла (9,455).

Сравнивая полученное приближение с истинным значением интеграла (9), можно видеть, что ошибка приближения метода прямоугольников в данном случае довольно значительна - 0,455.

Решение 2. Для нахождения определенного интеграла методом трапеций, как и в случае использования метода прямоугольников, значения подынтегральной функции f(x) должны быть введены в рабочую таблицу Excel в диапазоне $x \in [0;3]$ с заданным шагом $\Delta x=0,1$. Поэтому этапы 1-3 полностью аналогичны этапам предыдущего решения. Поскольку таблица данных для нахождения интеграла уже введена, приступаем сразу к этапу 4:

Теперь в ячейке В34 может быть найдено приближенное значение интеграла по методу трапеций. Для этого в ячейку В34 вводим формулу = 0,1*((В2 + В32)/2 +, затем вызываем Мастер функций (нажатием на панели инструментов кнопки Вставка функции (fx)). В появившемся диалоговом окне Мастер функций шаг 1 из 2 слева в поле Категория выбираем Математические. Справа в поле Функция - функцию Сумм. Нажимаем кнопку ОК. Появляется диалоговое окно Сумм. В рабочее поле мышью вводим диапазон суммирования В3:В31. Нажимаем кнопку ОК и еще раз ОК. В ячейке В34 появляется приближенное значение искомого интеграла (9,005). Сравнивая полученное приближение с истинным значением интеграла (9), можно увидеть, что ошибка приближения метода трапеций в данном случае вполне приемлемая - 0,005.

Вывод: 1) вычисление определенного интеграла с помощью программы Excel гораздо ускоряет расчеты;

2) метод трапеций является более точным методом, по сравнению с методом прямоугольников.

Литература.

1. Решение математических задач средствами Excel: Практикум / В.Я. Гельман. – СПб.: Питер, 2003. –240с.

ВЫБОР АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ МЕТОДОВ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

Г.Т. Даненова, к.т.н., Т.Б. Ахметжанов, к.т.н., М.М. Коккоз, к.п.н.
Карагандинский государственный технический университет
100027, Казахстан, г.Караганда, б.Мира, 56, тел.+7 (7212)56-75-98
E-mail: lady_aigerim@bk.ru, makhabbat_k@bk.ru

Для получения представительной выборки используем правило рационального планирования экспериментов [1,2]. Применение данного метода сокращает, по сравнению с полным экспериментом, число прогонов машинной модели в q^{k-2} раз, где k - число факторов, q - число уровней каждого фактора.

При большом числе факторов для получения плана эксперимента (k>4) более рациональным является применение числовых матриц. Число строк в матрице равно числу опытов, а число столбцов - числу влияющих факторов. Комбинация цифр в каждой строке представляет собой сочетание уровней факторов в соответствующем опыте. Такие планы строятся на основе латинских квадратов. Для получения оптимального плана пригодны только ортогональные латинские квадраты.

Методика построения взаимно ортогональных квадратов подробно описана в [1]. При q уровнях каждого фактора можно построить q+1 взаимно ортогональных квадратов. Следовательно, для построения рационального плана эксперимента максимально возможное число факторов может быть на единицу больше уровня каждого фактора. Каждая система взаимно ортогональных латинских квадратов может быть преобразована путем переставления строк и столбцов $(q!)^2$ раз [2]. Это позволяет выбрать оптимальный план по диапазонам изменения факторов или избежать неблагоприятного сочетания уровней факторов.