ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОФАКТОРНЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ БИРАЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

И.Ф. Боровиков, к.т.н., доцент, П.С. Пятанин, студент, Л.А. Потапова, доцент*
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
105005. г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, тел. (499)-263-54-58
E-mail: bif1986@mail.ru
**Юргинский технологический институт (филиал) Национального исследовательского Томского политехнического университета*
652055, Кемеровская обл., г. Юрга, ул. Ленинградская, 26, тел. (8-384-51) 5-39-23
E-mail: pla46@mail.ru

При решении многопараметрических задач появляется необходимость в конструировании гиперповерхностей, моделирующих те или иные технологические процессы, зависимости «состав-свойство» и т.д. И если принять во внимание, что в терминах многомерной геометрии, кривую можно трактовать как гиперповерхность двумерного пространства, двумерную поверхность–как гиперповерхность трехмерного пространства, то тогда задачи моделирования технических объектов и многофакторных процессов могут быть в общем виде представлены как задачи конструирования гиперповерхностей n-мерных пространств. Конструирование гиперповерхностей многомерных пространств удобно осуществлять на основе нелинейных преобразований. Такой подход позволяет заранее на стадии задания аппарата преобразования и прообраза гиперповерхности прогнозировать свойства гиперповерхности и, следовательно, в достаточно широких пределах управлять этими свойствами. Для получения гиперповерхностей предлагаем использовать нелинейные инволюции с пучками слабоинвариантных гиперквадрик. На возможность использования таких преобразований для случая $n = 2$ указывалось в работе $[1]$. Однако достаточно полного исследования в конструктивно-прикладном плане этот вопрос не получил. И лишь в работах $[2,3]$ исследуются отдельные аспекты для трехмерного и двумерного пространств.

Пусть заданы две различные гиперквадрики Q_{n-1} и Q'_{n-1} с однородными уравнениями

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}x_i x_j = 0, \quad \sum_{i,j=0}^{n} b_{ij}x_i x_j = 0,$$

где x_i, x_j - однородные координаты.

Тогда уравнение

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}x_i x_j + \lambda \sum_{i,j=0}^{n} b_{ij}x_i x_j = 0$$

описывает однопараметрическое множество гиперквадрик, называемых пучком. Все квадрики пучка пересекаются по $(n-2)$ – поверхности Φ, которая является базисной. Так, например, для случая $n = 2$ такой $(n-2)$ – поверхностью является совокупность четырех точек, для $n = 3$ - пространственная кривая, для $n = 4$ - двумерная поверхность и т.д.

Некоторую точку S пространства примем за центр преобразования. Произвольная точка $A(x_0, x_1, ..., x_n)$ выделяет из пучка единственную квадрику Q^A_{n-1}, которая прямой SA пересекается в двух точках - A и A'. Эти точки принимаем за соответственные в нелинейной инволюции I_k, которая индуцируется в пространстве P_n. Инвариантная гиперповерхность является геометрическим местом $(n-2)$-поверхностей касания $(n-1)$-конусов с вершинами в S с гиперквадриками пучка. В свою очередь, $(n-2)$-поверхность касания определяется как результат пересечения гиперквадрики пучка с первой полярой точки S относительно этой гиперквадрики. Первые поляры точки S относительно гиперквадрик пучка образуют пучок гиперплоскостей, проективный пучку гиперквадрик. Инвариантная гиперповерхность, образованная этими пучками, будет гиперповерхностью третьего порядка, для которой точка S будет простой точкой. И действительно, любая прямая, инцидентная S, пересекает гиперквадрики пучка в парах точек одной инволюции. Две двойные точки этой инволюции принадлежат инвариантной гиперповерхности, следовательно, третья точка пересечения прямой с инвариантной гиперповерхностью должна совпадать с S. В связи с тем, что инвариантная гиперповерность является гиперповерхностью третьего порядка, то рассматриваемое преобразование будет кубической инволюцией. Следовательно, произвольной гиперплоскости пространства P_n соответствует гиперповерхность третьего порядка. Центр преобразования S является двукратной F – точкой, а базисная $(n-2)$ – поверхность – простой f – поверхностью. Конструируемая гиперповерхность инцидентна точке S и поверхности Φ. Причем точка S является для гиперповерхности бипланарной. В случае если гиперплоскость Γ', являющаяся прообразом конструируемой гиперповерхности Γ, инцидентна F – элементам, то гиперповерхность будет приводимой, то есть иметь в своем составе образы, соответствующие F – элементам. Порядок собственно образа при этом понижается. Кроме того, поведением конструируемой гиперповерхности можно управлять, выбирая базисную $(n-2)$ – поверхность действительной или мнимой.

Практический интерес представляет случай двумерного пространства, когда пучком гиперквадрик является пучок коник, а конструируемой гиперповерхностью – плоская кривая. При этом базисные точки F_1, F_2, F_3, F_4 пучка коник являются простыми фундаментальными точками, а центр преобразования S - двукратной. Принципиальными кривыми для точек F_1, F_2, F_3, F_4 являются прямые, соединяющие эти точки с центром преобразования, а для точки S - коника пучка, инцидентная S. Инвариантной кривой является кубика, имеющая в S простую точку. Образом произвольной прямой a' будет кривая третьего порядка, имеющая в точках F_1, F_2, F_3, F_4 простые, а в S - двойную точки. Если прообраз инцидентен одной или нескольким фундаментальным точкам, то из состава образа выпадают принципиальные кривые, соответствующие этим F -точкам. Конструирование кривых с помощью кубических инволюций с пучками слабоинвариантных коник является достаточно универсальным способом конструирования плоских кривых, что обусловлено разнообразием пучков коник. Здесь возможны следующие случаи: Общий случай пучка коник, гиперболический пучок окружностей, эллиптический пучок окружностей, параболический пучок окружностей, пучок концентрических окружностей, пучок равносторонних гипербол с общей касательной в вершине, пучок гипербол с общими асимптотами, пучок конгруэнтных парабол с параллельными осями и с общей простой точкой, пучок конгруэнтных парабол с общей осью. Выведенные операторы преобразования позволяют получать алгебраические уравнения конструируемых кривых.

Выбор того или иного вида пучка коник позволяет получить практически любую кривую, отвечающую наперед заданным требованиям.

Рассмотренный подход предполагает обобщение на случай нелинейных преобразований с пучками слабоинвариантных кривых m -го порядка. Очевидно, что центр преобразования S должен совпадать с $(m-2)$ -кратной базисной точкой пучка кривых. Тогда $4(m-1)$ базисных точек пучка, отличных от S, являются простыми F -точками, а прямые, соединяющие их центром преобразования, будут p -кривыми, соответствующими этим точкам. Доказано, что:

-инвариантная кривая преобразования, а, следовательно, и порядок k преобразования определяется соотношением $k = 2m-1$;

-точка S является $2(m-1)$ -кратной F -точкой;

-порядок преобразования понижается на q, если q пар базисных точек пучка слабоинвариантных кривых коллинейны с центром преобразования;

Если центр преобразования не совпадает ни с одной из базисных точек пучка, то получается $(m-1) \div (m-1)$ -значное соответствие с пучком слабоинвариантных кривых m -го порядка.

Обобщение рассмотренных преобразований на случай $n \geq 3$ возможно в следующих направлениях:

-задаются пучки слабоинвариантных гиперповерхностей;

-нелинейное преобразование задается как расслояемое преобразование.

Суть первого подхода раскрыта в начале статьи. На наш взгляд с точки зрения теории преобразований он является более изящным. Конструируемая гиперповехность наиболее полно будет отвечать первоначальным условиям. Однако аналитическая реализация такого подхода существенно затруднена, и уже при задании пучков квадрик для трехмерного пространства это становится ощутимым.

Для задания расслояемого нелинейного преобразования $T_{k-k'}$ n -мерного проективного пространства P_n все пространство заполняется некоторыми алгебраическими многообразиями Π размерности $0 < s \leq n-1$ и на каждом многообразии задается свое преобразование. В нашем случае удобно задать нелинейные преобразования, расслаивающиеся в многообразии двумерных плоскостей на кубические инволюции с пучками слабоинвариантных кривых. Базисные точки пучков кривых в каждой из 2-плоскостей задаются $(n-2)$-мерными поверхностями, которые плоскостями расслоения пересекаются в точках, или двумя $(n-1)$-поверхностями, которые с двумерными плоскостями пересекаются по двум кривым пучка. Такой подход, безусловно, более прост в аналитической реализации. Однако существенным недостатком является возможность неоправданного завышения порядка конструируемой гиперповерхности и, как следствие, появление нежелательных особенностей поверхностей.

Рассмотренный метод конструирования гиперповерхностей достаточно прост. Он позволяет получить практически любую поверхность, отвечающую заданным свойствам. Наличие возможности создания на его основе удобных алгоритмов и программ позволяет использовать его в качестве базового способа получения технических гиперповерхностей.

Литература.

1. Боровиков И.Ф. Конструирование симметричных аэродинамических профилей на основе нелинейных преобразований с пучками слабоинвариантных коник: Сб.научных трудов «Вопросы преобразования и применения ЭВМ в начертательной геометрии» – Алма-Ата:КазПТИ, 1988. –с.27-31.
2. Боровиков И.Ф., Щербинин С.В. Нелинейные преобразования плоскости с пучками слабоинвариантных окружностей Приложения начертательной геометрии в инженерных задачах – Алма-Ата:КазПТИ, 1991. –с.31-35.
3. Sturm R. Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. Band 4. Leipzig und Berlin: Druck und Verlag von B.G.Teubner, 1908. -484 s.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНВОЛЮЦИИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ ФОРМ

И.Ф. Боровиков, к.т.н., доцент, П.С. Пятанин, студент, В.В. Владимирова, студент
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
105005. г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1 , тел. (499)-263-54-58
E-mail:bif1986@mail.ru

При разработке систем автоматизированного конструирования сложных технических форм в основу геометрического моделирования можно положить бирациональные (кремоновы) преобразования [1, 2]. При таком подходе кривая или поверхность получается как изоморфный образ прямой или плоскости. Зная свойства преобразования и прообраз, можно уже на начальной стадии конструирования указать свойства получаемой формы. В работе [3] описаны нелинейные преобразования, которые в пучках прямых расслаиваются на параллельные переносы. В данном исследовании мы упростили аппарат нелинейных инволюций, взяв в качестве исходных преобразований центральные симметрии.

Зададим на плоскости пучок прямых с центром в начале координат и на каждой прямой – центр симметрии. Для задания центров симметрий можно взять прямую k, уравнение которой имеет вид:

$$Ax + By + 1 = 0\,.$$

Произвольной точке $A(x_A, y_A)$ в пучке (O) будет соответствовать единственная прямая s_i, которая пересекается с k в точке Q_i, являющейся для A центром симметрии. Координаты точки Q_i:

$$x_{Q_i} = -\frac{x_A}{Ax_A + By_A}, \quad y_{Q_i} = -\frac{y_A}{Ax_A + By_A} \quad .$$

Координаты точки A', симметричной точке A относительно центра Q_i, определяются выражениями:

$$x_A{}' = -\frac{Ax_A^2 + Bx_A y_A + 2x_A}{Ax_A + By_A}, \quad y_A{}' = -\frac{Ax_A y_A + By_A^2 + 2y_A}{Ax_A + By_A}.$$

Опуская индексы, получаем операторы преобразования:

$$x' = -\frac{Ax^2 + Bxy + 2x}{Ax + By}, \quad y' = -\frac{Axy + By^2 + 2y}{Ax + By}.$$

Из выражений для операторов преобразований следует, что на плоскости задано квадратичное преобразование, в котором образом любой прямой будет являться кривая второго порядка q. Можно