Таким образом, каждый уровень дерева Штерна-Броко растет гармонично и, следовательно, имеет связь с двойным отношением. Это позволяет нам с помощью этого числового треугольника рассчитывать гармонические интервалы любого уровня сложности.

Литература.

1. Бескин Н. М. Деление отрезка в данном отношении. М.: Наука, 1973, 64 с.
2. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. – М.: Мир, 1998. – 703 с.

МЕТОД ФЛЮКСИЙ НЬЮТОНА

А.П. Степанов, ст. преподаватель, Ю.М. Готовщик, студент, Е.И. Черных, студент
Юргинский технологический институт (филиал) Национального исследовательского Томского политехнического университета
652055, Кемеровская обл., г. Юрга, ул. Ленинградская, 26
E-mail: apsuti@rambler.ru

Одним из первооткрывателей дифференциального и интегрального исчисления является Исаак Ньютон, родившийся в 1642 г., который разделил честь его открытия наряду с Лейбницем. В 1660 г. И. Ньютон поступил в Кембриджский университет и преуспел. За несколько лет он создал метод решения проблемы касательной: теперь он мог вычислить касательную к любой плавной кривой в любой точке. Этот процесс представляет собой первую часть математического анализа, теперь известную как дифференциальное исчисление. Однако способ дифференцирования Ньютона не особенно похож на тот, которым мы пользуемся в настоящее время.

В понятиях и терминологии метода флюксий с полной отчётливостью отразилась глубокая связь математических и механических исследований Ньютона. Понятие непрерывной математической величины он вводит как абстракцию от различных видов непрерывного механического движения. Линии производятся движением точек, поверхности - движением линий, тела - поверхностей, углы - вращением сторон и т.д.

Переменные величины Ньютон назвал **флюентами** (текущими величинами, от *лат.* fluo - теку). Общим аргументом текущих величин - флюент - является у Ньютона "*абсолютное время*", к которому отнесены прочие, зависимые переменные. Скорости изменения флюент Ньютон назвал **флюксиями**, а необходимые для вычисления флюксий бесконечно малые изменения флюент - "*моментами*" (у Лейбница они назывались **дифференциалами**). Момент флюэнты *u*, например, он обозначает так: $o\dot{u}$, где *u* – флюксия. Таким образом, Ньютон положил в основу понятия флюксий (**производной**) и флюенты (первообразной, или неопределённого **интеграла**).

Наиболее полное изложение дифференциального и интегрального исчислений содержится в "**Методе флюксий**..." (1670-1671 гг., опубликовано в 1736 г.). Здесь Ньютон формулирует две основные взаимно-обратные задачи анализа: 1) определение скорости движения в данный момент времени по известному пути, или определение соотношения между флюксиями по данному соотношению между флюентами (**задача дифференцирования**), и 2) определение пройденного за данное время пути по известной скорости движения, или определение соотношения между флюентами по данному соотношению между флюксиями (**задача интегрирования** дифференциального уравнения и, в частности, отыскания первообразных).

Метод флюксий применяется здесь к большому числу геометрических вопросов (задачи на касательные, кривизну, экстремумы, квадратуры, спрямления и др.); здесь же выражается в элементарных функциях ряд интегралов от функций, содержащих квадратный корень из квадратичного трёхчлена.

Большое внимание уделено в "Методе флюксий" интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, причём основную роль играет представление решения в виде бесконечного степенного ряда.

Стиль дифференцирования Ньютона основывался на флюксиях (производных) – потоках – математических выражений, которые он называл флюэнтами (переменными).

Как пример метода флюксий Ньютона рассмотрим функцию [3]

$$y = x^2 + x + 1. \qquad (1)$$

В этом уравнении флюэнтами (переменными) являются x и y. Ньютон полагал, что x и y изменяются – текут – с течением времени. Скорость их изменения он назвал флюксиями и обозначал как $\dot{x}$ и $\dot{y}$ соответственно.

Метод дифференцирования Ньютона основывается на одном приеме: Ньютон позволяет флюксиям изменяться, но изменяться бесконечно мало. По существу, он не давал им времени течь. В обозначениях Ньютона y в этот момент времени меняется на $(y + o\dot{y})$, в то время как x меняется на $(x + o\dot{x})$. Буква «*o*» представляла собой количество прошедшего времени, оно было почти нулем, но не совсем.

Уравнение (1) тогда принимает вид

$$(y + o\dot{y}) = (x + o\dot{x})^2 + (x + o\dot{x}) + 1 .$$

Раскрывая выражение $(x + o\dot{x})^2$ по обыкновенным правилам алгебры, получим:

$$(y + o\dot{y}) = x^2 + 2x(o\dot{x}) + (o\dot{x})^2 + x + (o\dot{x}) + 1 .$$

Приводим подобные члены:

$$(y + o\dot{y}) = (x^2 + x + 1) + (o\dot{x})^2 + 2x(o\dot{x}) + 1 \cdot (o\dot{x}) .$$

Поскольку $y = x^2 + x + 1$, мы можем сократить данное выражение, получим

$$o\dot{y} = 2x(o\dot{x}) + 1 \cdot (o\dot{x}) + (o\dot{x})^2 .$$

Далее следует следующий прием Ньютона: он заявил, что поскольку $o\dot{x}$ на самом деле очень мал, $(o\dot{x})^2$ будет еще меньше и значит исчезает. По сути это ноль, и его можно игнорировать. Это дает нам уравнение

$$o\dot{y} = 2x(o\dot{x}) + 1 \cdot (o\dot{x}), \tag{2}$$

а это значит, что

$$\frac{o\dot{y}}{o\dot{x}} = 2x + 1 \cdot \tag{3}$$

Это и есть угол наклона касательной в любой точке данной кривой $y = x^2 + x + 1$ (рис. 1):

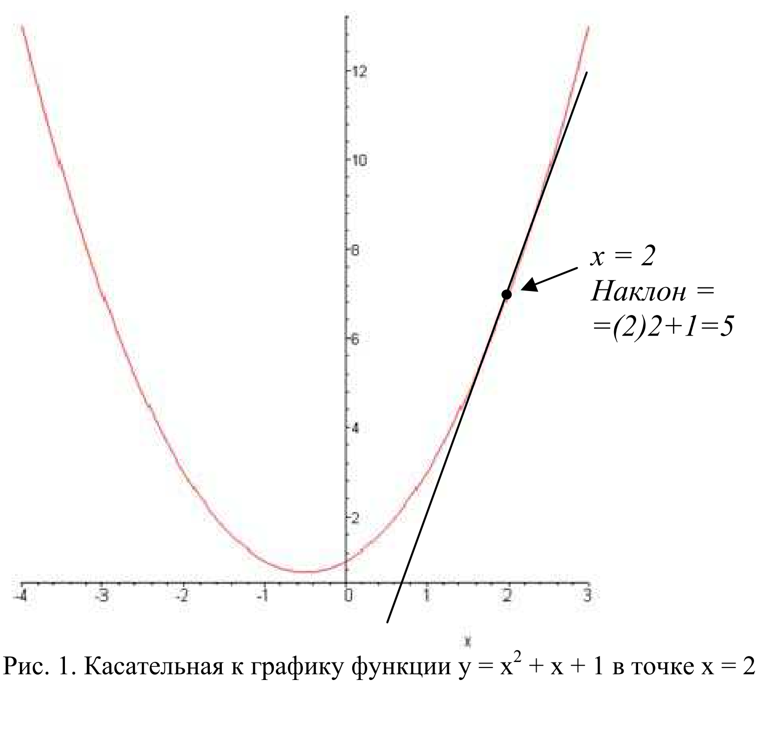

Рис. 1. Касательная к графику функции $y = x^2 + x + 1$ в точке $x = 2$

Как мы видим в уравнении (3) , бесконечно малый период времени *o* выпадает из уравнения, $o\dot{y}/o\dot{x}$ превращается в $\dot{y}/\dot{x}$ и об *o* больше не нужно думать.

Метод Ньютона давал правильный ответ, но ньютоновские действия исчезновения величины $(o\dot{x})^2$ очень смущало современников Ньютона.

Из арифметики известно, что если мы перемножаем два числа и получаем ноль, то одно из них должно быть равно нулю: если $ab = 0$, то или $a = 0$, или $b = 0$. Это значит, что если $a^2 = 0$, то $aa = 0$, и тем самым $a = 0$. Значит если, как настаивал Ньютон, $(o\dot{x})^2$, $(o\dot{x})^3$ и более высокие степени $o\dot{x}$ были равны нулю, то и само $o\dot{x}$ должно быть равно нулю: $o\dot{x} = 0$.

Следовательно, если $o\dot{x}$ – ноль, то деление на $o\dot{x}$, что мы делали в выражении (2), как и последний шаг избавления от *o* в верхней и нижней части выражения $o\dot{y}/o\dot{x}$ в уравнении (3), являются запрещенными математическими операциями. Деление на ноль запрещено математической логикой.

Метод флюксий Ньютона был очень сомнителен. Он предполагал незаконную математическую операцию, однако обладал одним огромным преимуществом – он работал. Метод флюксий не только разрешал проблему касательной, но и позволял определять максимумы и минимумы величин, определять кривизну плавной кривой в данной точке, а также разрешал проблему площадей.

В методе Ньютона бесконечно малые величины, маленькие *o* в его флюксиях иногда вели себя как ноль, а иногда – как отличные от нуля числа. В определенном смысле эти бесконечно малые были бесконечно малы, меньше любого положительно числа, но все же каким-то образом больше нуля. Для математиков того времени это была смешная концепция и неразрешимый парадокс.

Исчисление бесконечно малых почти одновременно и независимо друг от друга разработали И. Ньютон и Г. Лейбниц. Каждый применял свои обозначения для одних и тех же математических величин. Символы Лейбница настолько ясно и удобно выражали смысл и значение новых понятий, что легко привились и вскоре стали общепринятыми на континенте.

Там, где Ньютон писал $o\dot{x}$, Лейбниц писал *dx* – бесконечно малый кусочек *x*. При этом если у Ньютона маленькие *o* в его уравнениях были всего посредниками, которые исчезали к концу выкладок (уравнение (3)), то в методе Лейбница бесконечно малые величины остаются во всех расчетах. При вычислениях с этими *dx* и *dy* можно было общаться как с обычными числами, поэтому современные математики и физики обычно используют обозначения Лейбница, а не Ньютона. Дифференциальное исчисление Лейбница обладало той же самой силой, что и метод Ньютона, а благодаря удобным обозначениям – даже несколько большей.

Не сразу Лейбниц пришел и к общепринятому ныне символу интеграла. Ознакомившись через Гюйгенса с одной из теорем Паскаля, он записывает ее в 1676 году формульным языком, применив выражение «omn *x*» («все *x*») как сокращенное обозначение интеграла от величины *x*. Но уже через несколько дней Лейбниц замечает, что удобнее использовать для интеграла символ, тот, который употребляется в настоящее время, - стилизованную первую букву латинского слова «summa". (В то время интеграл еще назывался суммой и лишь несколько позднее был принят термин Иоганна Бернулли «интеграл».) В печатных научных трудах того времени этот символ так и употребляется в виде прописной буквы S. Вскоре Лейбниц вводит под интеграл знак дифференциала. В такой форме эта запись окончательно узаконена и сохранилась до наших дней. Подобно многократному умножению друг на друга одинаковых чисел, повторное дифференцирование Лейбниц обозначает в виде степени буквы *d.* Столь удачная находка расширила сферу действия одного символа. Совсем иными были обозначения Ньютона – точки и штрихи, кружки и рамки…(табл.)

Таблица 1

Обозначение величин исчисления бесконечно малых Ньютона и Лейбница

Обозначения	Ньютон	Лейбниц
производной	$\dot{x}$	$\frac{dx}{dt}$
второй производной	$\ddot{x}$	$\frac{d^2x}{dt^2}$
бесконечно малой	$o\dot{x}$	dx
интеграла	$\boxed{x}$ и x'	$\int x$ и $\int dx$

Ньютон мыслил не менее тонко и не менее глубоко, чем Лейбниц. Но он не слишком задумывался о значении символики для созданного им математического метода. Ньютон видел огромную ценность найденного им абстрактного метода, однако, возможно, на начальном этапе, когда идея еще не оформилась окончательно, ему было сложно выразить ее доступно. Скорее всего, на этом этапе ему попросту не хватало терминов и обозначений. Он сосредоточил основное внимание на формулировке и решению абстрактных задач анализа.

Склоняясь перед непререкаемым авторитетом своего великого соотечественника, английские ученые впоследствии канонизировали каждый штрих, каждую мельчайшую деталь его научной деятельности, даже введенные им для личного употребления математические знаки. «Над английской наукой тяготела традиция почитания Ньютона, и его обозначения, неуклюжие по сравнению с обозначениями Лейбница, затрудняли прогресс», - пишет голландский ученый Д. Я. Стройк, указывая на поразительное сходство между английской математикой XVIII века и античной математикой позднеалександрийской эпохи.

В 1812 году несколько молодых кембриджских математиков основали «Аналитическое общество», главной целью которого была пропаганда лейбницевских обозначений. Благодаря их деятельности английские ученые вскоре перешли к общепринятым в Европе математическим символам. Консерватизм университетских профессоров не устоял против удобства и мудрости математических знаков. Но ньютоновская символика не исчезла бесследно. Например, знак «*o* малое» употребляется ныне в оценочных формулах как показатель малой величины, а точечное обозначение производной часто используется в механике.

Учение Ньютона о пределе через ряд посредствующих звеньев (Ж. Л. Д'Аламбер, Л. Эйлер) получило глубокое развитие в математике XIX в. (О. Л. Коши и др.). В настоящее время понятие производной опирается на надежный логический базис, поскольку мы определяем ее в терминах пределов.

Формально производная от функции $f(x)$ в точке x_0, обозначается как $f'(x)$ и определяется как

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}.$$

Чтобы увидеть, как это определение помогает избежать приема Ньютона, рассмотрим функцию, которая использовалась для демонстрации метода флюксий Ньютона: $y = x^2 + x + 1$. Производная этой функции равна

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(x^2 + 2\varepsilon x + \varepsilon^2 + x + \varepsilon + 1 - x^2 - x - 1)}{\varepsilon}.$$

После приведения подобных членов, получим

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(2\varepsilon x + \varepsilon^2 + \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Разделив на ε, мы помним, что ε всегда отлично от 0, потому что мы еще не вычислили предел (поэтому деление на ε математически корректно), получим

$$f'(x) = \lim(2x + 1 + \varepsilon) \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Теперь мы находим предел, т.е. позволяем ε приблизиться к нулю. Получаем

$$f'(x) = 2x + 1 + 0 = 2x + 1.$$

Это и есть уравнение касательной, которое мы нашли методом флюксий Ньютона (3).

С помощью найденного им абстрактного метода Ньютон также определял площади, ограниченные кривыми определенного типа и др. вопросы анализа.

Приведем частный случай, описанный самим Ньютоном в работе «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов», которая была завершена в 1669 году, но опубликована только в 1711-м.

Определим площадь, ограниченной кривой, которая задается следующей формулой

$$A(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}.$$

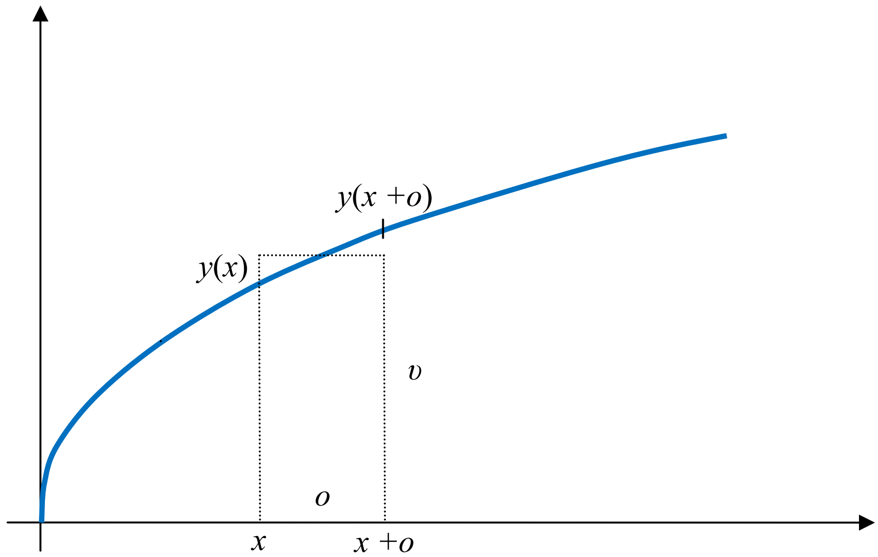

Рис. 2. Определение площади, ограниченной кривой

Ньютон действовал следующим образом. Увеличим на бесконечно малую величину, которую обозначим через o, абсциссу x (рис. 2). Площадь увеличится на площадь прямоугольника с вершинами x, $y(x)$, $y(x + o)$ и $x + o$, как показано на рис. 2. Возьмем прямоугольник со сторонами o и v такой, что его площадь будет равна упомянутому приращению площади. Получим:

$$\frac{2}{3}(x+o)^{\frac{2}{3}} = A(x+o) = A(x) + ov = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + ov.$$

Возведя обе части в квадрат и упростив равенство, получим:

$$\frac{4}{9}\left(3x^2o + 3xo^2 + o^3\right) = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}ov + o^2v^2.$$

Разделив обе части на o, получим:

$$\frac{4}{9}\left(3x^2 + 3xo + o^2\right) = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}v + ov^2.$$

Если теперь мы примем прирост x бесконечно малым, т. е. приравняем o к нулю, то v = y, и предыдущая формула примет вид

$$\frac{4}{3}x^2 = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}y,$$

откуда выразим y:

$$y = x^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Отсюда следует, что площадь, ограниченная кривой (4), равна 2/3 ·3/2x.

Многие считают, что Ньютон был исключительно физиком, точнее натурфилософом, или занимался прикладной математикой. По этому поводу Дерек Том Уайтсайд, составитель восьмитомника рукописей Ньютона по математике сказал: «Никогда не следует забывать, что математика была для Ньютона не просто набором инструментов для поиска истины. Она обладала внутренней красотой и силой, не зависящей от внешних причин и способов практического применения. Тем, кто не чувствует элегантность и мощь математики как самостоятельной дисциплины, я представляю Ньютона – «чистого» математика, который, как в библейской метафоре, удалился от мира в башню из слоновой кости в Кембридже, где занимался поисками новых теорем, свойств, алгоритмов и доказательств, элегантных самих по себе. И сколь удивительно он использовал свой талант и способности! В то время в мире не было более одаренного и разностороннего математика, никого, кто больше него разбирался бы в алгебре, геометрии и в тонкостях анализа бесконечно малых» [4].

О значении метода флюксий Ньютона для математики можно привести слова Д.Д. Мордухай-Болотовского: "«Метод флюксий» содержит, кроме формального аппарата анализа …еще богатый комплекс идей, с помощью которых обосновываются операции анализа и которые имели очень важное значение для эволюции основных понятий анализа бесконечно малых, представляя переходную ступень от точки зрения актуально бесконечно малых к точке зрения потенциально бесконечно малых, т.е. к теории пределов" [1].

Литература.

1. И. Ньютон. Математические работы / пер. с англ. Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М.-Л.: 1937. – 452 с.
2. Глейзер Г.И. История математики в школе: IX – X кл. Пособие для учителей.– М.: Просвещение, 1983. – 351 с.
3. Ноль: биография опасной идеи / Чарльз Сейфе; пер. с англ. А.В. Александровой. – Москва: АСТ, 2014. – 287 с.
4. Мир математики: в 40 т. Т.14: Антонио Дуран. Истина в пределе. Анализ бесконечно малых/ Пер. с исп. – М.: Де Агостини, 2014. – 144 с.

ГЕОМЕТРИЯ ОТ ЕВКЛИДА ДО ГАСПАРА МОНЖА

А.А. Галеева, студент гр. 10300, Л.А. Потапова, доцент кафедры ГШО
Юргинский технологический институт (филиал) Национального исследовательского
Томского политехнического университета
652055, Кемеровская обл., г. Юрга, ул. Ленинградская, 26
E-mail: pla46@mail.ru

Греческие авторы относят появление геометрии в Греции к концу VII в. до н. э. и связывают его с именем Фалеса Милетского (639-548), вся научная деятельность которого изображается греками в полумифическом свете. Достоверно, что Фалес в молодости много путешествовал по Египту, имел общение с египетскими жрецами и у них научился многому, в том числе геометрии. Возвратившись на родину, Фалес поселился в Милете, посвятив себя занятиям наукой, и окружил себя учениками, образовавшими так называемую Ионийскую школу. Фалесу приписывают открытие ряда основных геометрических теорем (например, теорем о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника, равенстве вертикальных углов и т.д.).

Ионийская школа перенесла геометрию в область гораздо более широких представлений и задач, придала ей теоретический характер и сделала ее предметом тонкого исследования, в котором наряду с интуицией начинает играть видную роль и абстрактная логика. Абстрактно-логический характер геометрии, который в Ионийской школе только намечался, в Александрийской школе нашел свое завершение. Была создана наука, широкая по замыслу, богатая фактическим материалом и, несмотря на свой абстрактный характер, дающая ряд чрезвычайно важных практических применений.

Около IV в. до н. э. уже стали появляться сводные сочинения под названием «Начал геометрии», имевшие задачей систематизировать добытый геометрический материал. Такие «Начала» по свидетельству Прокла, составили Гиппократ Хиосский, Феодосий из Магнезии, Гиероним Колофонский и др. Ни одно из этих сочинений до нас не дошло: все они утратили свое значение и были забыты, когда появилось замечательное руководство по геометрии - «Начала» Евклида, жившего в конце IV - начале III в. до н. э.

Евклид жил в Александрии в эпоху, когда там образовался наиболее крупный центр греческой научной мысли. Материал, содержащийся в «Началах», по существу охватывает элементарную геометрию, как мы ее понимаем в настоящее время. Метод построения геометрии у Евклида позже характеризовали словами - строить геометрию исключительно геометрическими средствами(geometria geometrice) , не внося в нее чуждых ей элементов. Это означает, прежде всего, что Евклид не прибегает к арифметическим средствам, т. е. к численным соотношениям. Равенство фигур у Евклида означает, что они могут быть совмещены движением, неравенство - что одна фигура может быть целиком или частями вмещена в другую. Равновеликость фигур означает, что они могут быть составлены из частей. Именно этими средствами, не прибегая даже к пропорциям, Евклид доказывает, что каждый многоугольник может быть преобразован в равновеликий треугольник, а треугольник - в квадрат.

Эпоха великих геометров (второй Александрийский период). Наиболее характерной чертой второй Александрийской эпохи является то, что она принесла с собой метрику, которой геометрии Евклида не доставало. Ту задачу, которую Евклид, может быть, сознательно обходил, - измерение, -