МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ РЕКОНСТРУКЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО ПРОЕКЦИЯМ

Аметова Э.С.
Томский политехнический университет
634050, Россия, г. Томск, пр-т Ленина, 30
E-mail: evelinaametova@gmail.com

Введение

Рентгеновская компьютерная томография (далее КТ) это процесс получения изображений поперечных сечений объекта по данным об ослаблении рентгеновского излучения из-за поглощения и рассеяния на различных частях объекта исследования вдоль большого числа направлений, лежащих в плоскости данного сечения [1]. КТ широко применяется в медицинских, биологических и в промышленных исследованиях.

В общем виде задача реконструкции внутренней структуры (линейного коэффициента ослабления $\mu(x,y)$) объекта по проекционным данным формулируется как линейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода типа свертки:

$$Af = P(\rho,\theta) = \int f(x,y)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho\cos\theta - s\sin\theta, \rho\sin\theta + s\cos\theta)\,ds$$

где $P(\rho,\theta)$ – преобразование Радона функции ослабления $f(x,y)$. Таким образом, проекция – это линейный интеграл $f(x,y)$ вдоль линии s под углом θ. A – оператор проецирования.

На практике используется конечное число направлений снятия проекций $\theta \in \{\theta_1 \dots \theta_M\}$ и детекторов $s \in \{s_1 \dots s_N\}$. Обычно количество направлений снятия проекций θ и количество детекторов s совпадают и равномерно распределены. Предположим, что неизвестная функция μ ограничена диапазоном B (0,25…0,5 ГГц), тогда согласно теореме Найквиста-Шеннона, для точной реконструкции изображения необходимо как минимум $M \geq B/\pi$ проекций и $N \geq B$ детекторов [2]. Это условие сбора проекций является обязательным для самого распространенного аналитического алгоритма реконструкции Filtered Back Projection (FBP).

Задача сокращение количества проекций заключается в реконструкции по $M \ll B/\pi$ проекциям изображения без потери качества. Решение этой задачи приводит к снижению дозы радиации и позволяет ускорить сбор проекционных данных. К сожалению, использование классических аналитических алгоритмов, таких как FBP, приводит к появлению артефактов.

Альтернативными методами решения некорректных задач являются итеративные или алгебраические методы. Задача реконструкции изображения по проекциям может быть представлена в виде линейной системы алгебраических уравнений:

$$Af = b + \eta \qquad (1)$$

где $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$ оператор преобразования – дискретное представление оператора преобразования Радона, $b \in \mathbb{R}^M$ – вектор наблюдаемого выхода (изображения), $f \in \mathbb{R}^N$ – неизвестное изображение, $\eta \in \mathbb{R}^M$ – вектор шума.

Задача состоит в том, чтобы по искаженной версии изображения объекта получить представление о самом объекте. Очевидно, что, каким бы высоким ни было качество изображения, ему соответствует всегда большое число возможных объектов. Поэтому обратная задача, сформулированная для изображения, в общем случае может иметь только приближенное решение. При сокращении количества проекций система (1) сильно недоопределена, так как $M \ll N$.

Регуляризация

Наиболее общий поход к решению некорректных задач был сформулирован советским математиком Тихоновым и получил название регуляризация. Регуляризация это фактически способ добавить априорной информации о допустимом виде решения.

В области КТ было предложено множество способов определения априорной информации. Рассмотрим применимость указанных методов к задаче реконструкции изображения по малому количеству проекций.

Регуляризация с использованием выпуклых ограничений

Априорные данные в задаче КТ могут быть представлены в форме жестких ограничений:

1. Положительность: $C_+ := \{f(x) \geq 0, \text{почти всюду}\}$
2. Пространственная локализация: $C_\Omega := \{f(x) = 0, x \notin \Omega, \text{почти всюду}\}$
3. Априорные значения: $C_v := \{a \leq f(x) \leq b, \text{почти всюду}\}$
4. Ограниченная энергия: $C_E := \{\|f\|_2 \leq E\}$

Все указанные ограничения являются замкнутыми и выпуклыми множествами $X \subset L^2(\mathbb{R}^d)$. Использование этих ограничений при оптимизации значительно сокращает пространство возможных решений и может значительно улучшить качество реконструкции. В начале 70-х годов был предложен ряд алгебраических алгоритмов, в основе которых лежит принцип сжимающих отображений (теорема Банаха): Algebraic Reconstruction Technique (ART), Simultaneous Iterative Reconstruction Technique (SIRT) [1].

ART использовался в первых поколениях томографов. ART основан на методе Качмажа для решения систем линейных алгебраических уравнений и является простейшим алгоритмом с использованием принципа сжимающих отображений. SIRT ищет решение как среднее значение одновременных проекций на гиперплоскости и дает лучшие результаты реконструкции в случае несовместной системы.

Энтропийные методы

Так как каждому изображению соответствует большое число возможных объектов, то обратную задачу можно свести к проблеме выбора того из них, который является наиболее правдоподобным. При решении этой проблемы используют принцип максимума энтропии.

Согласно определению, данному Больцманом, энтропия равна логарифму статистического веса или логарифму вероятности реализации данного состояния. Энтропия распределения вероятности f обозначается как $-H(f)$:

$$H(f) \triangleq \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \log f(x) dx$$

Задача реконструкции изображения по проекциям может быть представлена как реконструкция d-мерного распределения вероятности по ее $(d-1)$-мерным ограничениям, и согласно принципу максимальной энтропии наилучшее решение – это решение, содержащее наибольшее количество информации. В литературе задача реконструкции по проекционным данным с использованием принципа максимума энтропии формулируется как:

$$\min_f H(f) \text{ s.t. } Af = b$$

В работе [3] отмечается, что использование принципа максимальной энтропии иногда ведет к следующим нежелательным последствиям:

1. увеличивается соотношение сигнал/шум в реконструируемом изображении;
2. нарушается критерий разрешения по Рэлею и точки становятся неразличимыми.

Статистические методы

С использованием Байесовской статистики задача реконструкции формулируется как оценка с помощью апостериорного максимума:

$$\hat{f} := \min_{f \in \mathcal{X}} F(f,b) + R(f)$$

где $\mathcal{X}$ – заданное функциональное пространство, $F(f,b)$ – терм, обеспечивающий непротиворечивость данных и описывающий физический процесс получения изображения по проекционным данным; $R(\cdot)$ терм регуляризации, характеризующий априорную информацию о f [5]. Байесовский подход предполагает, что наблюдаемое изображения b являются некоторой детерминированной или случайной функцией от «истинного» изображения f.

Самыми эффективными являются методы, которые определяют априорную информацию о f, которая характеризует локальные свойств функции, такие как неоднородности и сглаженность. Они наилучшим образом характеризуют f и могут быть легко описаны как взаимозависимости между соседними пикселами.

Для задания локальной априорной информации используются Марковские случайные поля (Markov random field), априорная информация, учитывающая границы в изображении (edge-preserving prior), Вариация Харди и полная вариация (Total Variation), норма Бесова и вейвлет-коэффициенты.

Заключение

Методы регуляризации начали свое развитие в 1970-х гг. с методов, которые построчно обрабатывали изображение. Однако при использовании таких подходов стало ясно, что решение задачи реконструкции изображения по проекциям требует нетривиальной априорной информации об искомой функции. Методы регуляризации, применяемые в области КТ, эволюционировали в методы, основанные на статистике Байеса. Статистические методы позволили использовать в качестве априорной информации общие соображения, вытекающие из модели изображения, получаемого в КТ. Исходя из априорной информации относительно гладкости функции, регуляризация осуществляется с использованием априорно заданного распределения.

Начиная с 1990-х гг. было предложено множество различных методов. Наибольший интерес представляют методы, использующие в качестве априорной информации информацию о границах в изображении, что позволяет производит реконструкцию кусочно-постоянных функций по малому количеству проекций.

Литература

1. G.T.Herman Fundamentals of computerized tomography(2nd ed.). Springer.-2009
2. F.Natterer The Mathematics of Computerized Tomography SIAM.-2001
3. D.L Donoho, I.M.Johnstone, J.C.Hoch, A.S.Stern. Maximum entropy and the nearly black object. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 54(1):41–81, 1992
4. P.Oskoui-Fard, H.Stark Tomographic Image Reconstruction Using the Theory of Convex Projection, IEEE Trans. Med. Imag., Vol 7, p.p. 45-58, 1998
5. Г. Винклер, Анализ изображений, случайные поля и динамические методы Монте-Карло (математические основы), Новосибирск, Изд-во СО РАН, филиал ГЕО, 2002, 343 стр.