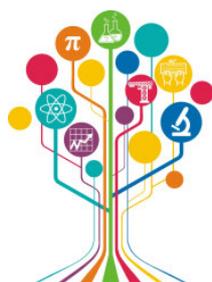


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУК

Том 3. Математика

Сборник научных трудов
XIX Международной конференции студентов, аспирантов
и молодых ученых
26–29 апреля 2022 г.

PROSPECTS OF FUNDAMENTAL SCIENCES DEVELOPMENT

Volume 3. Mathematics

Abstracts
XIX International Conference of students, graduate students
and young scientists
April 26–29, 2022



Национальный
исследовательский
**Томский
государственный
университет**



Томск 2022

УДК 501:004(063)
ББК 72:32.81л0
П27

Перспективы развития фундаментальных наук : сборник трудов XIX Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых (Томск, 26–29 апреля 2022 г.) : в 7 томах. Том 3. Математика / под ред. И.А. Курзиной, Г.А. Вороновой. – Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2022. – 117 с.

ISBN 978-5-4387-1084-4 (т. 3)
ISBN 978-5-4387-1081-3

Сборник содержит труды участников XIX Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Перспективы развития фундаментальных наук», представленные на секции «Математика».

Предназначен для студентов, аспирантов, молодых ученых и преподавателей, специализирующихся в области математического моделирования и анализа данных, математических методов в физике, химии, биофизике, биологии, экономике, медицине, психологии, математической логики и приложений, вычислительной математики, а также дифференциальных уравнений.

УДК 501:004(063)
ББК 72:32.81л0

Редакционная коллегия

И.А. Курзина, доктор физико-математических наук, доцент;
Г.А. Воронова, кандидат химических наук, доцент;
С.А. Поробова.

ISBN 978-5-4387-1084-4 (т. 3)
ISBN 978-5-4387-1081-3

© ФГАОУ ВО НИ ТПУ, 2022

Tomsk International Science Program (TISP) «Molecular engineering»



The program is related to biological systems engineering. With the application of the concepts and methods of biology (and, secondly, physics, chemistry, mathematics and computer science) to solve actual problems related to the sciences of living organisms or their applications, using analytical and synthetic methodologies of engineering. Biological engineering mainly uses the rapidly developing field of molecular biology and chemoinformatics to study and develop the applications of living organisms.

Studying under this educational program is carried out in the form of full-time studying, including online studying and distance learning technologies. The program is based on problem-based learning (PBL) approach, which is more effective than traditional way of education. Students will actively acquire knowledge and skills needed for your career prospects, your future. With PBL, students are solving complex, interdisciplinary and real-life academic problems.

Full-time form of education

Duration of study - 4 years

Areas of professional activity: healthcare, food industry, chemical, chemical-technological production, cross-cutting professional activities in industry

Study language - English

Tuition fees: 289,510 rubles a year

Admission exams: 2 exams, of which mathematics (mandatory) and a choice of chemistry, physics or computer science. Taking exams online from January to August 2022

Program Application Deadlines: January 10 - August 20, 2022. Application Link <https://admissions.tsu.ru/>

Objective of the program: Training of a specialist in the field of molecular engineering, capable of conducting applied research focused on development for a specific task of the enterprise. The program is aimed at training specialists with good mathematical, chemical, biological and IT fundamental background.

Basic disciplines: chemistry, biology, bioinformatics, biochemistry, mathematics, computer science and basic programming, metabolomics, organic synthesis, biomaterials science, applied medical biotechnology, large workshop on medical biotechnology.

The objects of professional activity of graduates are: microorganisms, cellular structures of animals and plants, viruses, enzymes, biologically active chemicals; devices and equipment for studying the properties of used microorganisms, cellular structures and substances obtained with their help in laboratory and industrial conditions; plants and equipment for biotechnological processes; means of quality control of raw materials, semi-finished products and finished products. The field of activity of graduates extends from the creation of artificial organs using technical means or the search for ways to grow organs and tissues using regenerative medicine methods to compensate for reduced or lost physiological functions (biomedical engineering) and to the development of genetically modified organisms, for example, agricultural plants and animals (genetic engineering), as well as molecular design of compounds with desired properties (chemoinformatics, protein engineering, engineering enzymology).

Places for internships for students and subsequent employment of graduates:

Pharmaceutical companies, biotechnology companies, Research Medical Centers, scientific laboratories. Graduates of the undergraduate program can continue their studies at the master's program at TSU or other universities. From the 4th year there is a selection for the double degree program (TSU-France, ParisTech University) «Translational chemical and biomedical technologies» of the master's level.



tisp_tsu



tisp.tsu



tsuTISP

tisp.tsu.ru/apply/



АВТОНОМНАЯ МАГИСТЕРСКАЯ ПРОГРАММА «ТРАНСЛЯЦИОННЫЕ ХИМИЧЕСКИЕ И БИМЕДИЦИНСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ»



Химический факультет



САЕ Институт «Умные материалы и технологии»

Направление подготовки	Химия
Факультет	Химический факультет
Форма обучения	Смешанный формат обучения
Продолжительность программы	2 года
Язык обучения	Русский
Бюджетные места	20

Условия приёма

Приём на первый курс магистратуры проводится на конкурсной основе по заявлениям лиц, имеющих высшее образование. Победители и призеры олимпиад («Магистр ТГУ»), «Химия биотехнологий», («Я - профессионал») имеют возможность получить максимальный балл за вступительный экзамен.

Вступительные испытания: экзамен по химии, собеседование.

Магистерская программа включает возможность обучения по программе двойного диплома совместно с университетом Chimie ParisTech (Франция). За период обучения по одной программе магистратуры можно получить дипломы двух Университетов, углублено освоить курсы химической технологии и инженерии материалов.

КЛЮЧЕВЫЕ ДИСЦИПЛИНЫ ПРОГРАММЫ

Основы общей иммунологии	Введение в медицинскую биологическую химию	Молекулярные методы в биомедицинских исследованиях
Основы клеточной биологии и диагностики клеточных систем	Химические технологии в медицине	Основы биоинформатики
Физико-химические методы анализа органических соединений и фармацевтических субстанций	Биоматериаловедение	Прикладная биоинформатика
		Молекулярная онкология

Магистратура «Трансляционные химические и биомедицинские технологии» – ЭТО:

- междисциплинарные знания на стыке химии, биологии, фармакологии, клеточной и молекулярной биомедицины
- компетенции по проведению доклинических и клинических испытаний, разработка технологического регламента, сертификации, маркетингу и малотоннажному производству продукта
- стажировки в ведущих мировых университетах
- диплом международного уровня
- работа с новыми технологиями
- освоение полного цикла получения продукта: синтез-исследование, доклинические исследования, сертификация, маркетинг

КОНТАКТЫ

Менеджер программы: **Шаповалова Елена**, +7 (953) 928 15 49, egshapovalova@yandex.ru
Заявки оставляйте на сайте: chembiomed.ru или через telegram-бота @smfi_tsu_bot

chembiomed.ru [chembiomed](https://t.me/smfi_tsu_bot)



ПРЕИМУЩЕСТВА ПРОГРАММЫ

- Обучение на базе научных центров ТГУ и Томского НИЦМ, университетов Гейдельберга и Мюнстера (Германия)
- Ведущие зарубежные и российские специалисты
- Индивидуальная образовательная траектория
- Более 30% учебных дисциплин составляют курсы по выбору
- Виртуальные лаборатории Labster (Технический университет Дании)
- Востребованность специалистов по трансляционным химическим и биомедицинским технологиям

ВЕДУЩИЕ ПРЕПОДАВАТЕЛИ



Куркина Ирина Александровна
Руководитель магистерской программы; д.ф.м.н., доцент, заведующая базовой кафедрой природных соединений, фармацевтической и медицинской химии ХФ ТГУ, зам. заведующего лабораторией трансляционной клеточной и молекулярной биомедицины, НИ ТГУ, Томск, Россия.



Клышкова Юлия Георгиевна
Соруководитель магистерской программы; д.б.н., профессор, зав. лабораторией трансляционной клеточной и молекулярной биомедицины, НИ ТГУ, Томск, Россия. Университет Гейдельберга, Медицинский факультет, Заведующая Отделом Врожденного Иммуитета и Иммунологической Толерантности Института Трансфузионной Медицины и Иммунологии, Мангейм, Германия.



Рыбов Вячеслав Валерьевич
д.м.н., заместитель директора по научной и лечебной работе НИИ кардиологии Томского НИМЦ, и. о. руководителя отделения неотложной кардиологии, профессор кафедры кардиологии ФПК и ППС СибГМУ, в. н. с. лаборатории трансляционной и клеточной биомедицины НИ ТГУ.



Чурина Елена Георгиевна
д.м.н., профессор кафедры органической химии ХФ ТГУ, врач иммунолог-аллерголог, профессор кафедры патофизиологии СибГМУ, член российской ассоциации аллергологов и клинических иммунологов, Томск, Россия.



Хайнрих Лотар Альфред
д.х.н., в.н.с. лаборатории трансляционной клеточной и молекулярной биомедицины НИ ТГУ, Томск, Россия. President of marcotech oHG, Honorary professor of the Westphalian Wilhelms University, Muenster. Руководитель блока инновационных материалов для регенеративной медицины, Мюнстер, Германия



Инженер-технолог

Инженер-разработчик

Инженер-исследователь



СОРБЕНТЫ • ТЕХНОЛОГИЯ ПРОИЗВОДСТВА • НАНОСТРУКТУРНЫЕ КАТАЛИЗАТОРЫ
ХИМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ • НОВЫЕ ТИПЫ МАТЕРИАЛОВ
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНЫЙ КУРС • ВИРТУАЛЬНЫЕ ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

Дополнительная профессиональная образовательная программа профессиональной переподготовки по теме

«МЕТОДЫ РАЗРАБОТКИ И ТЕХНОЛОГИИ ПРОИЗВОДСТВА ПЕРСПЕКТИВНЫХ НАНОСТРУКТУРНЫХ КАТАЛИЗАТОРОВ И СОРБЕНТОВ ДЛЯ НЕФТЕХИМИЧЕСКОГО ПРОИЗВОДСТВА»

- Основана на компетентностном подходе
- Использует вариативно-модульный принцип построения образовательного процесса
- Выбор модуля обеспечивает формирование требуемых профессиональных компетенций
- Содержание программы разработано в соответствии с потребностями предприятий-производителей катализаторов и сорбентов.

Руководитель программы:

Курзина Ирина Александровна

Kurzina99@mail.ru

Томский государственный университет

САЕ Институт «Умные материалы и технологии»

г. Томск, пр. Ленина, 36



САЕ Институт «Умные материалы и технологии»



ФОНД ИНФРАСТРУКТУРНЫХ И ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ
Группа РОСНАНО

г. Томск

СОДЕРЖАНИЕ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ А.А. Афанасьева	9
СХЕМА ПРОТИВ ПОТОКА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ В ЗАДАЧАХ ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ Я.П. Цесельская, Д.О. Диль	12
ИНТЕНСИФИКАЦИЯ ТЕПЛООБМЕНА В КУБЕ С ЖИДКОСТЬЮ ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛО ВЫДЕЛЯЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА М.С. Астанина	15
PLASTIC FLOW OF LIGHT HCP ALLOYS IN LINEAR FRICTION WELDING K.V. Iokhim, E.G. Skripnyak, V.A. Skripnyak	18
ПРИМЕНЕНИЕ БИОФИЛЬТРА ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА САМООЧИЩЕНИЯ СТОЧНЫХ ВОД А.В. Амзаракова	21
ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ЛОБОВОГО СЕЧЕНИЯ ДЛЯ ФРАКТАЛЬНЫХ АГРЕГАТОВ ИЗ КАСАЮЩИХСЯ ШАРОВ А.Н. Сусленкова, П.К. Ковылина	24
РАЗРАБОТКА ПРОГРАММЫ РАСЧЕТА ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕЧЕНИЯ И ПОТЕРЬ ТЯГИ НА ТРЕНИЕ В СОПЛОВОМ БЛОКЕ С ЦЕНТРАЛЬНЫМ ТЕЛОМ В.Н. Конев, К.В. Костюшин	27
ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ МАТРИЦАМИ Т.С. Индуцкая	30
ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЯВНОГО МЕТОДА ДЛЯ ИНТЕГРО- АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА АБЕЛЯ С ЖЁСТКИМИ КОМПОНЕНТАМИ Г.К. Соколова	33
ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ДВИЖЕНИЯ НЕСФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ КОНДЕНСИРОВАННОЙ ФАЗЫ В ПОТОКЕ ПРОДУКТОВ СГОРАНИЯ А.В. Червакова, К.В. Костюшин	36
АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ПОДЛОЖКИ НА ТЕРМОГРАВИТАЦИОННУЮ КОНВЕКЦИЮ ПСЕВДОПЛАСТИЧНОЙ НАНОЖИДКОСТИ В ПОЛОСТИ С ИСТОЧНИКОМ ПОСТОЯННОГО ОБЪЕМНОГО ТЕПЛО ВЫДЕЛЕНИЯ Д.С. Лоенко	39
ВЛИЯНИЕ ВНУТРЕННЕГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО БЛОКА НА ИНТЕНСИВНОСТЬ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ЗАМКНУТОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОБОГРЕВАЕМОЙ ПОЛОСТИ Е.В. Шулепова	42
ВЛИЯНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ВЕТРА НА РАЗВИТИЕ ОСЕННЕГО ТЕРМОБАРА Б.О. Цыденов	45
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ГОРЮЧИХ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ ТЕПЛООВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ РАЗЛИЧНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ Т.И. Медведева, Д.П. Касымов, М.В. Агафонцев, М.Б. Тохметова	48
ОБЗОР ПОДХОДОВ К ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ПОВЕДЕНИЯ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ ОТ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПОТОКА ГОРЯЩИХ И ТЛЕЮЩИХ ЧАСТИЦ М.Б. Тохметова	51
МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОТОКА ГОРЯЩИХ И ТЛЕЮЩИХ ЧАСТИЦ С КОНСТРУКТИВНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ Д.П. Касымов, Е.Н. Голубничий, К.Е. Орлов	54
РАСЧЕТ ИЗГИБА ВЯЗКОУПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ Д.Д. Дубровский	57

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ РЕБЕРНОЙ СТРУКТУРЫ НА ИНТЕНСИФИКАЦИЮ ТЕПЛООБМЕНА В ЗАМКНУТОМ КУБЕ С.Х.К. Лэ	60
ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОРОНКИ ОТ ВЗРЫВА ЗАГЛУБЛЕННЫМ ЗАРЯДОМ Е.Б. Бразовский	63
ЕСТЕСТВЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ КУБИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПРОФИЛЕ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКЕ С.А. Михайленко	66
КОНВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ПОРИСТОЙ ВСТАВКОЙ А.П. Порунова	69
ВЛИЯНИЕ ЧИСЛА ПРАНДТЛЯ НА ЕСТЕСТВЕННУЮ КОНВЕКЦИЮ ТЕПЛО ВЫДЕЛЯЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛУЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В УСЛОВИЯХ ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ А.И. Кудров	72
ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПРОСЛОЙКАХ Е.Е. Юдакова	75
NUMERICAL ANALYSIS OF NATURAL CONVECTION OF FLUID IN A SEMI- CYLINDRICAL CAVITY WITH ISOTHERMAL WALLS S.A. Khatab, A.I. Kudrov	78
ЕСТЕСТВЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ЗАМКНУТОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОЛОСТИ С ВОЛНИСТОЙ СТЕНКОЙ Н.С. Павленко	81
NATURAL CONVECTION OF NANOFUID OVER A VERTICALLY STRETCHING SHEET EMBEDDED IN A DARCY-BRINKMAN POROUS MEDIUM Muzamil Hussain, N.S. Gibanov	84
ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКТИВНО-РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛООБМЕНА В ЗАМКНУТЫХ ОБЛАСТЯХ НА ОСНОВЕ РЕШЁТОЧНОГО МЕТОДА БОЛЬЦМАНА Н.С. Гибанов	87
РАЗРАБОТКА ОНЛАЙН-ЭНЦИКЛОПЕДИИ ПО ПРОИЗВОДЯЩИМ ФУНКЦИЯМ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ А.Б. Дарижапов, Д.В. Кручинин	90
БИЕКЦИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВОМ ВАРИАНТОВ ДЕРЕВА И/ИЛИ И МНОЖЕСТВОМ ПОМЕЧЕННЫХ ДЕРЕВЬЕВ С ОГРАНИЧЕННЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ЛИСТЬЕВ Н.М. Денисов, Ю.В. Шабля	93
РАЗРАБОТКА СПОСОБА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОМБИНАТОРНОГО МНОЖЕСТВА, ОПРЕДЕЛЯЕМОГО ЧИСЛАМИ ЯКОБСТАЛЯ, В ВИДЕ СТРУКТУРЫ ДЕРЕВА И/ИЛИ С.С. Иконников, Ю.В. Шабля	96
РАЗРАБОТКА КОНФИГУРАТОРА НЕЙРО-НЕЧЁТКОЙ СЕТИ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ЗАГРУЗКИ ОБОРУДОВАНИЯ С.А. Ильина	99
ОБНАРУЖЕНИЕ РОБОТОВ В КОМПЬЮТЕРНЫХ ИГРАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ Е.А. Задорожных	102
АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАФИКА ПЛАНОВО- ПРЕДУПРЕДИТЕЛЬНЫХ РЕМОНТНЫХ РАБОТ Р.Р. Исмагилов, Е.А. Миронченко, А.Л. Руцков	105
ТЕСТИРОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ КЛАССИФИКАЦИИ И РЕГРЕССИИ ПОРЯДКОВОГО ПРИЗНАКА Д.А. Редько	108

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СУПЕРГРАФА Е.М. Сухова	111
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОВЕДЕНИЯ РЫНОЧНЫХ ТОРГОВ НА НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДАХ С ПОДКЛЮЧЕНИЕМ СИСТЕМЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В.К. Захаров, М.Е. Семенов	114

УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ

А.А. Афанасьева

Научный руководитель: профессор, д. ф.-м.н., А.В. Старченко
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: afanasyeva.a.a@bk.ru

NUMERICAL SOLUTION OF THE DIRECT PROBLEM OF ELECTRIC IMPEDANCE TOMOGRAPHY

A.A Afanasyeva

Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.V. Starchenko
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050
E-mail: afanasyeva.a.a@bk.ru

Abstract. *Electrical impedance tomography is used in medicine, therefore algorithms reconstruction image must produce accurate images of impedance changes. The numerical model of EIT is a boundary value problem for an elliptic type equation with different boundary conditions. Many researchers solve direct problems using finite element methods.*

Введение. Электроимпедансная томография (ЭИТ) – это метод, который позволяет реконструировать внутреннюю структуру объектов живой природы по сечениям на основе измерения напряжения электрического тока, проходящего через сетку электродов, с последующим считыванием напряжения на границе объекта [1]. Существует два типа задач ЭИТ [2]. Первый тип – прямая задача. В этой задаче проводится поиск электрического потенциала на поверхности исследуемого объекта при заданном распределении удельной проводимости σ и силе подаваемого на электроды тока I . Второй тип – обратная задача. Суть обратной задачи – восстановить неизвестное внутреннее распределение проводимости σ при известной силе тока I и значениях напряжения U на приложенных электродах.

Целью данной работы является создание на базе метода конечных объемов на неструктурированных сетках численного метода решения прямой задачи ЭИТ с концентрической вставкой на модели с 8 электродами и его сравнения с известным аналитическим решением [3].

Материалы и методы исследования.

Математическая постановка для решения прямой задачи ЭИТ в области $\bar{D} = D \cup \Gamma$ получается из уравнений Максвелла в проводниках, закона Ома для стационарных проводников и необходимых для получения единственного решения граничных условий [2].

Уравнение для электрического потенциала u в двумерном случае имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, (x, y) \in D.$$

На границе, контактирующей с воздухом, задается производная, равная нулю (отсутствие тока):

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, (x, y) \in \Gamma / \bigcup_{l=1}^L E_l$$

На электродах $E_l \in \Gamma$ рассматриваются граничные условия, учитывающие сопротивление электродов, так называемая полная электродная модель [2]:

$$u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = U_l, \int_{E_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = I_l, l = 1, \dots, L.$$

где u – электрический потенциал, σ – электропроводимость, z_l – сопротивление электрода, E_l – поверхность электрода, I_l – известная сила тока на электроде, L – количество электродов.

Для существования и единственности решения этой задачи требуется выполнение условий [4]:

$$\sum_{l=1}^L I_l = 0; \sum_{l=1}^L U_l = 0.$$

Для решения прямой двумерной задачи ЭИТ будем использовать метод конечных объемов. В качестве конечного объема будем рассматривать барицентрические ячейки, построенные вокруг каждого узла вычислительной сетки (рис. 1). Численная схема для конечного объема внутри области исследования будет записана как:

$$\sum_{m=1}^{M_p} \frac{\sigma_m}{4S_m} \left[u_{P_0} \left((y_{P_m} - y_{P_{m+1}})^2 + (x_{P_{m+1}} - x_{P_m})^2 \right) + u_{P_m} \left((y_{P_{m+1}} - y_{P_0})(y_{P_m} - y_{P_{m+1}}) + (x_{P_0} - x_{P_{m+1}})(x_{P_{m+1}} - x_{P_m}) \right) + u_{P_{m+1}} \left((y_{P_0} - y_{P_m})(y_{P_m} - y_{P_{m+1}}) + (x_{P_m} - x_{P_0})(x_{P_{m+1}} - x_{P_m}) \right) \right] = 0.$$

Численная схема для конечного объема на границе будет записана как:

$$0 = \int_{C_2}^{C_1} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} dl - \frac{1}{z_e} \left(\frac{3}{4} u_P + \frac{1}{4} u_{M_1} \right) |C_1 P| - \frac{1}{z_e} \left(\frac{3}{4} u_{M_2} + \frac{1}{4} u_P \right) |P C_2| + \frac{|C_1 P| + |C_2 P|}{E_l z_l} \sum_{k=1}^{K-1} \left(\frac{1}{2} u_{N_k} + \frac{1}{2} u_{N_{k+1}} \right) |N_k N_{k+1}| + \frac{|C_1 P| + |C_2 P|}{E_l z_l} I_e.$$

Здесь P_m – узлы – вершины треугольников; M_1, M_2 – узлы, лежащие на границе области, K – количество узлов N_k , лежащих на электроде; C_1, C_2 – середины медиан треугольников.

В качестве тестовой задачи ЭИТ рассмотрим прямую задачу ЭИТ в круге единичного радиуса. Середины электродов шириной $2w$ расположены при $\varphi = \{0; \pi/4; \pi/2; 3\pi/4; \pi; 5\pi/4; 3\pi/2; 7\pi/4\}$. Ток подавался через электрод № 3, отводился через электрод № 7. Для решения тестовой задачи в постановке полной электродной модели воспользуемся представленной выше разностной схемой с параметрами проводимости для вставки $\sigma_1 = 0,66$ (проводимость мышц), $\sigma_2 = 1$, полуширина электрода $w = 0,25$. Численное решение сеточных уравнений найдено методом исключения Гаусса с выбором главного элемента. Приближенное аналитическое решение рассматриваемой двумерной задачи ЭИТ в круге для полной электродной модели с заданной силой тока было получено в [3].

На рис. 1 показано сравнение численного решения с аналитическим на границе. Из графика видно, что численное решение, полученное со вставкой $\sigma_1 = 0,66$ (мышечная проводимость) близко к аналитическому, RMSE = 0,0065. В таблице 1 представлены результаты значений электрического

напряжения на электродах, полученные аналитическим и численным методами. Эти данные в дальнейшем будут необходимы для решения обратной задачи ЭИТ.

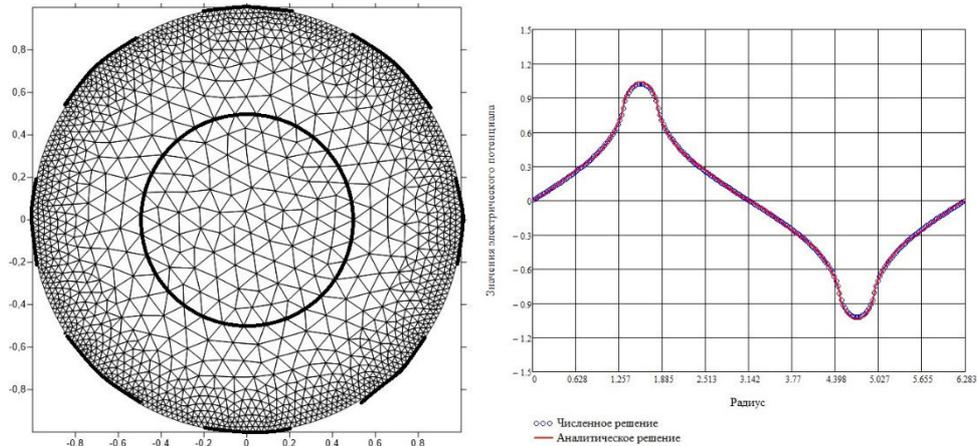


Рис. 1. Расчётная сетка с 2848 ячейками для круга со вставкой и 8 электродами и сравнение численного решения с приближенным аналитическим

Таблица 1

Напряжение на электродах, полученное для модели с 8 электродами

Номер электрода l	1	2	3	4	5	6	7	8
Напряжение $(U_l)_{an}$ (аналитическое решение)	0,0000	0,3341	2,9777	0,3341	0,0000	-0,3341	-2,9777	-0,3341
Напряжение $(U_l)_{num}$ (численное решение)	0,0002	0,3298	2,9558	0,3376	-0,0003	-0,3299	-2,9558	-0,3377

Заключение. В данной работе представлено численное решение прямой задачи ЭИТ с концентрической вставкой на модели с 8 электродами. Для этой модели была построена неструктурированная треугольная сетка с использованием генератора сетки Gambit. Дифференциальная задача аппроксимировалась методом конечных объемов на барицентрических ячейках. Полученное численное решение имеет хорошую точность в сравнении с приближенным аналитическим решением.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2022-884).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пеккер Я.С., Бразовский К.С., Усов В.Ю. и др. Электроимпедансная томография. – Томск: НТЛ, 2004. – 192 с.
2. Borcea L. Electric Impedance Tomography. Topical Review // Inverse Problems. – 2002. – Vol. 18. – P. R99–R136.
3. Старченко А.В., Седнев, С.В. Панько М.А. Приближенное аналитическое решение прямой задачи электроимпедансной томографии в неоднородном круге с учетом сопротивления электродов // Вестник ТГУ. Математика и механика. – 2021. – № 74. – С. 19-29.
4. Somersalo E., Cheney M., Isaacson D. Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography // SIAM J. Appl. Math. 1992. – Vol. 52. – P. 1023–1040.

УДК 532.546

**СХЕМА ПРОТИВ ПОТОКА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ В ЗАДАЧАХ ДВУХФАЗНЫХ
ТЕЧЕНИЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ**

Я.П. Цесельская, Д.О. Диль

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Д.О. Диль

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: yanazeselskaya@mail.ru

**HIGHER-ORDER UPWIND SCHEME IN PROBLEMS OF TWO-PHASE FLOWS IN POROUS
MEDIA**

Y.P. Tseselskaya, D.O. Dil

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Ph.D. D.O. Dil

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: yanazeselskaya@mail.ru

***Abstract.** In the present study, we performed a cell-centered finite volume method with Higher-Order scheme for approximation flow is presented for numerical solution of oil-water displacement problems. This method was used to discretize the saturation equation. The pressure equation was approximated by Implicit Pressure – Explicit Saturation method (IMPES). The obtained results were compared with those found using First-Order Upwind scheme (FOU). As a result, Higher-Order Upwind scheme (HOU) has shown effectiveness in the regions of slow saturation changing and near the shocks.*

Введение. С развитием вычислительных систем возрастает сложность гидродинамических моделей, используемых при анализе нефтегазовых месторождений. На практике часто встречаются случаи разломов, сдвигов, трещин и др., поэтому для таких случаев в численном моделировании применяется метод конечных объемов на неструктурированных сетках. При этом точность расчетов остается важным требованием, особенно при оценке времени водяного прорыва при вытеснении нефти водой. В таких ситуациях необходима разработка схемы, с порядком точности выше первого, применимой на неструктурированных сетках.

Целью данной работы является численная реализация математической модели двухфазной фильтрации на неструктурированной сетке с использованием схемы против потока второго порядка точности (HOU), а также сравнение с результатами, полученными при применении схемы против потока первого порядка точности (FOU).

Математическая модель. Течение в пористой среде описывали с помощью модели двухфазной фильтрации несжимаемых жидкостей в недеформируемом пласте с непроницаемыми границами, основанной на законе сохранения массы – уравнении неразрывности в дифференциальной форме (для фаз воды (W) и нефти (O))

$$\frac{\partial \rho_w \varphi s}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_w \overline{W}_w) = q_w, \quad \frac{\partial \rho_o \varphi (1-s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_o \overline{W}_o) = q_o,$$

и на законе сохранения импульса – обобщенном законе Дарси в дифференциальной форме

$$\overline{W}_w = -K\lambda_w(s)\overline{\nabla}(p - p_c(s)), \overline{W}_o = -K\lambda_o(s)\overline{\nabla}p.$$

Используя для каждой из фаз обозначение $l = \{w, o\}$ - для воды и нефти соответственно, определим через ρ_l - плотность соответствующего вещества; t - время; φ - пористость среды; S - эффективную влагонасыщенность (меняется от 0 до 1); \overline{W}_l - скорость фильтрации для соответствующей фазы; K - тензор проницаемости среды; $\lambda_l(s) = \frac{k_l(s)}{\mu_l}$ - мобильность; $k_l(s)$ и μ_l - относительную

проницаемость и вязкость каждой фазы; p - давление нефти; $p_c(s) = \frac{9,8\rho_w\sqrt{1-s^2}}{0,3s^2}$ - капиллярное

давление; $q_l = \frac{2\pi K\lambda_l(s)}{\ln(r_0/r_q)}(p_q - p)$ - источниковый член, вычисленный по формуле Писмена, где r_0 -

эффективный радиус, r_q - радиус скважины, p_q - давление на скважине.

Используя алгебраические преобразования, получили систему уравнений в частных производных, подходящую для использования IMPES схемы для дискретизации по времени [1]:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K(\lambda_w(s) + \lambda_o(s))\overline{\nabla}p - K\lambda_w(s)\overline{\nabla}p_c(s)) = q_w + q_o, \\ -\varphi\frac{\partial s}{\partial t} - \operatorname{div}(K\lambda_o(s)\overline{\nabla}p) = q_o. \end{cases}$$

Расчетная область – двумерная пористая среда длиной $L = 200$ м и шириной $M = 100$ м. Давление и насыщенность в начальный момент времени, на нагнетательной и добывающей скважинах (q_1 и q_2 соответственно) имеют следующие значения:

$$s(x, y, 0) = s_0 = 0,2, p(x, y, 0) = p_0 = 10^6 \text{ Па}, 0 < x < L, 0 < y < M,$$

$$q_1 : s_{\max} = 0,85, p_{\max} = 10^7 \text{ Па},$$

$$q_2 : s_{\min} = 0,2, p_{\min} = 10^5 \text{ Па}.$$

Дискретная модель. Для расчета потоков на гранях конечных объемов насыщенность определялась с помощью схемы против потока второго порядка точности [2]:

$$\tilde{s}_{l,j} = \begin{cases} s_j + \frac{1}{2}(v_j(s_i - s_j) + (1 - v_j)(s_j - s_j)) & \text{при } W_l \cdot n_j < 0, \\ s_i + \frac{1}{2}(v_i(s_j - s_i) + (1 - v_i)(s_i - s_i)) & \text{при } W_l \cdot n_j \geq 0. \end{cases}$$

Здесь параметр v_k ($k = i, j$) используется для определения порядка аппроксимации и ограничения наклона градиентов влагонасыщенности; n_k - нормаль к грани, I, J - центры соседних элементов для объемов с центрами i, j .

Для первого случая (при $W_l \cdot n_j < 0$) параметр v_k [2] рассчитывается следующим образом:

$$v_j = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{при } |s_i - s_j| \leq |s_j - s_j|, \\ 0 & \text{при } |s_i - s_j| > |s_j - s_j|. \end{cases}$$

Результаты. На рисунках 1 и 2 представлены распределения влагонасыщенности для момента времени 6 суток с начала течения. Как видно из рисунков схема высокого порядка позволяет минимизировать погрешность и получить более точное расчётное время прорыва воды в добывающей скважине. При использовании схемы первого порядка оно составляет 6 суток и 3 часа, при использовании схемы второго порядка – на 14 часов и 40 минут больше, что составляет 8,73% от общего времени течения.

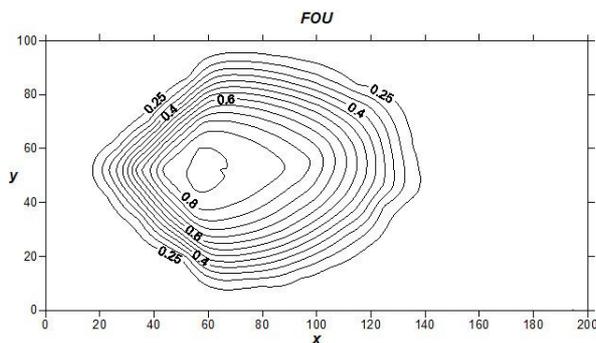


Рис. 1. Профиль насыщенности, рассчитанный с помощью схемы первого порядка

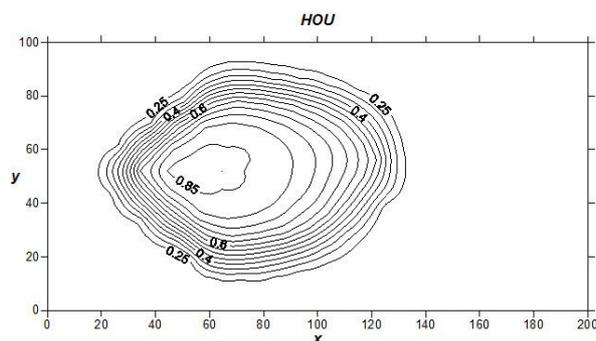


Рис. 2. Профиль насыщенности, рассчитанный с помощью схемы второго порядка

Заключение. В результате исследований была построена математическая модель двухфазной фильтрации, было проведено сравнение схем против потока первого и второго порядков точности на двумерной неструктурированной сетке с непроницаемой границей. Было показано, что схема второго порядка точности позволяет определить время водяного прорыва значительно точнее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Contreras F.R.L., Lyra P.R.M., Souza M.R.A., Carvalho D.K.E. A cell-centered multipoint flux approximation method with a diamond stencil coupled with a higher order finite volume method for the simulation of oil–water displacements in heterogeneous and anisotropic petroleum reservoirs // Computers and Fluids. – 2016. – V. 127. – P. 1-16.
2. Dil D.O. Higher order fully implicit cell-centered finite volume method for simulation of oil-water displacement in porous medium // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – V.1611. – P 012022.

УДК 536.24

**ИНТЕНСИФИКАЦИЯ ТЕПЛООБМЕНА В КУБЕ С ЖИДКОСТЬЮ ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ
ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛО ВЫДЕЛЯЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА**

М.С. Астанина

Научный руководитель: доцент, д.ф.-м.н. М.А. Шеревет

Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: astanina.marina@bk.ru

**HEAT TRANSFER ENHANCEMENT IN A CUBE WITH A LIQUID OF VARIABLE VISCOSITY IN
THE PRESENCE OF A HEAT-GENERATING ELEMENT**

M.S. Astanina

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Dr. M.A. Sheremet

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: astanina.marina@bk.ru

Abstract. Free convection of fluid with temperature-dependent viscosity inside a cube with porous layer in the presence of heat-generating element has been studied numerically using the finite difference method. The cavity is cooled from the side vertical boundaries with low temperature T_c , while the other walls are thermally insulated. The mathematical model has been written using non-dimensional non-primitive variables “vector potential functions – vorticity vector – temperature”. As a result, the distributions of three-dimensional temperature fields, velocity components and integral parameters of heat transfer have been shown depending on the thermophysical characteristics of the working liquid and the porous layer.

Введение. Изучение процессов конвективного теплообмена с применением численных методов

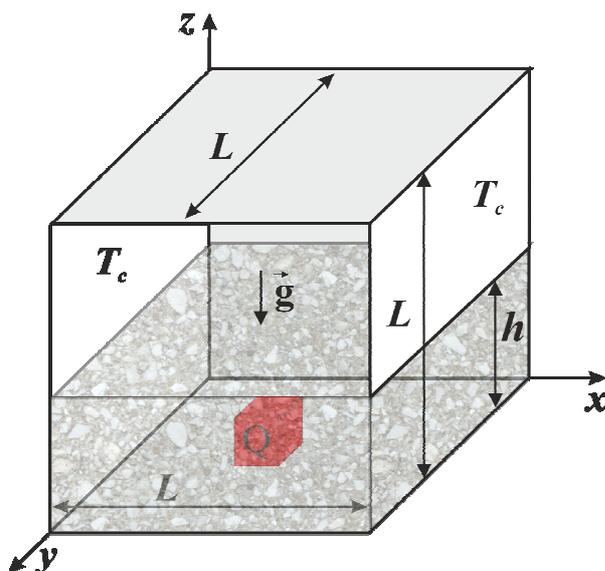


Рис. 1. Схема решаемой задачи

рассматривается как один из самых эффективных и доступных способ моделирования физических процессов в силу небольших материальных затрат. Результаты таких исследований находят своё применение во многих сферах промышленности, в том числе в приборостроении и микроэлектронике.

Математическая модель. Схематическая постановка рассматриваемой задачи показана на рисунке 1. Изучается процесс естественной конвекции за счёт охлаждающего эффекта от боковых стенок и нагревания от тепло выделяющего элемента в центре нижней границы куба. В качестве рабочей среды рассматривается ньютоновская теплопроводная

жидкость. При этом считается, что её вязкость является экспоненциальной функцией температуры. Для интенсификации теплообмена в полость введена пористая вставка изменяемой высоты h . Для описания чистого слоя жидкости используется модель среды, рассмотренная в [1]. Для моделирования пористой прослойки используется модель Дарси-Бринкмана:

$$\nabla^2 \psi_x = -\omega_x, \nabla^2 \psi_y = -\omega_y, \nabla^2 \psi_z = -\omega_z \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial \omega_x}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} = \\ & = \varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left(\frac{\partial^2 (\mu \omega_x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_x)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_x)}{\partial z^2} - \varepsilon \frac{\mu \omega_x}{Da} \right) - \varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\omega_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) + \\ & + 2\varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\varepsilon v}{2Da} \frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{\varepsilon w}{2Da} \frac{\partial \mu}{\partial y} \right] + \varepsilon^2 \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial \omega_y}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_y}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial v}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial v}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial v}{\partial z} = \\ & = \varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left(\frac{\partial^2 (\mu \omega_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_y)}{\partial z^2} - \varepsilon \frac{\mu \omega_y}{Da} \right) - \varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\omega_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) + \\ & + 2\varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y \partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\varepsilon w}{2Da} \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\varepsilon u}{2Da} \frac{\partial \mu}{\partial z} \right] - \varepsilon^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial \omega_z}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_z}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial w}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial w}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial w}{\partial z} = \\ & = \varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left(\frac{\partial^2 (\mu \omega_z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_z)}{\partial z^2} - \varepsilon \frac{\mu \omega_z}{Da} \right) - \varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\omega_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) + \\ & + 2\varepsilon \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y \partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\varepsilon u}{2Da} \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\varepsilon v}{2Da} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right] \end{aligned} \right\} (4)$$

$$\eta \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\alpha_{pm} / \alpha_f}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\alpha_{hs} / \alpha_f}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + Os \right) \quad (6)$$

Безразмерные преобразованные переменные (компоненты вектора завихрённости и векторного потенциала) вводились следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\partial \bar{\psi}_z}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial \bar{z}}, \bar{v} = \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{\psi}_z}{\partial \bar{x}}, \bar{w} = \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{\psi}_z}{\partial \bar{z}} = 0. \\ \bar{\omega}_x &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}}, \bar{\omega}_y = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}, \bar{\omega}_z = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}. \end{aligned} \right.$$

В системе уравнений (1)–(6) использованы следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} x &= \bar{x}/L, y = \bar{y}/L, z = \bar{z}/L, \tau = t \sqrt{g\beta\Delta T}/L, \theta = (T - T_c)/\Delta T, \mu = \bar{\mu}/\mu_0, \\ u &= \bar{u}/\sqrt{g\beta\Delta TL}, v = \bar{v}/\sqrt{g\beta\Delta TL}, w = \bar{w}/\sqrt{g\beta\Delta TL}, \psi_x = \bar{\psi}_x/\sqrt{g\beta\Delta TL^3}, \psi_y = \bar{\psi}_y/\sqrt{g\beta\Delta TL^3}, \\ \psi_z &= \bar{\psi}_z/\sqrt{g\beta\Delta TL^3}, \omega_x = \bar{\omega}_x \sqrt{L/(g\beta\Delta T)}, \omega_y = \bar{\omega}_y \sqrt{L/(g\beta\Delta T)}, \omega_z = \bar{\omega}_z \sqrt{L/(g\beta\Delta T)}, \\ Ra &= \rho g \beta (T_h - T_c) L^3 / (\alpha \mu_0), Pr = \mu_0 / (\rho \alpha), Da = K/L^2, Os = QL^2 / (\lambda_{hs} \Delta T), \mu = \exp(-\zeta \theta) \end{aligned}$$

Для начального момента времени $\tau = 0$ жидкость считалась неподвижной, поэтому все переменные были обнулены. Граничные условия для сформулированной системы дифференциальных уравнений записывались в следующем виде:

$$\tau > 0: \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = 0, \psi_y = 0, \psi_z = 0; \omega_x = 0, \omega_y = -\frac{\partial w}{\partial x}, \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \theta = 0 \text{ на } x = 0, x = 1, 0 \leq y \leq 1 \text{ и } 0 \leq z \leq 1. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_x = 0, \frac{\partial \psi_y}{\partial x} = 0, \psi_z = 0, \omega_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \omega_y = 0, \omega_z = -\frac{\partial u}{\partial y}; \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \text{ на } y = 0, y = 1, 0 \leq x \leq 1 \text{ и } 0 \leq z \leq 1. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_x = 0, \psi_y = 0, \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = 0, \omega_x = -\frac{\partial v}{\partial z}, \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z}, \omega_z = 0; \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \text{ на } z = 0, z = 1, 0 \leq x \leq 1 \text{ и } 0 \leq y \leq 1. \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\psi = 0, \omega = -\partial^2 \psi / \partial n^2, \theta_{hs} = \theta_{pm} \cdot (\lambda_{hs} / \lambda_{pm}) (\partial \theta_{hs} / \partial n) = \partial \theta_{pm} / \partial n \text{ на источнике}$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi_{pm} = \psi_f, \frac{\partial \psi_{pm}}{\partial z} = \frac{\partial \psi_f}{\partial z}, \omega_{pm} = \omega_f, \frac{\partial \omega_{pm}}{\partial z} = \frac{\partial \omega_f}{\partial z}, \\ \frac{\partial \theta_f}{\partial z} \Big|_{cl.f} = \frac{\lambda_s}{\lambda_f} \frac{\partial \theta_s}{\partial z} \Big|_{pm}, \theta_f \Big|_{cl.f} = \theta_f \Big|_{pm} = \theta_s \Big|_{pm} \end{array} \right\} \text{ на границах сред}$$

Сформулированные дифференциальные уравнения в переменных «векторный потенциал – вектор завихренности – температура» с соответствующими начальными и граничными условиями решались с помощью метода конечных разностей на равномерной расчётной сетке [2]. Предложенный метод решения задач конвективного теплопереноса был верифицирован ранее на нескольких модельных задачах. Конечным этапом работы являлась программная реализация задачи на языке программирования C++ с дальнейшей визуализацией результатов.

Результаты и заключение. Анализ результатов был проведён по полученным распределениям полей температуры и компонент вектора скорости, а также по зависимостям среднего числа Нуссельта на поверхности тепловыделяющего источника и его средней температуры. Полученные данные отражают возможность интенсификации теплообмена в полости путём варьирования теплофизических свойств рабочей среды (вязкость), пористой вставки (пористость, проницаемость), а также геометрических параметров (высоты пористого слоя). Также было рассмотрено влияние интенсивности тепловыделения нагревателя на структуру течения и режимы теплопереноса. Представленные результаты могут быть полезны при разработке и обслуживании тепловых систем в различных отраслях.

Работа выполнена в рамках реализации проекта Российского фонда фундаментальных исследований (договор № 20-31-90080).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Astanina M.S., Ghalambaz M., Chamkha A.J., Sheremet M. A. Thermal convection in a cubical region saturated with a temperature -dependent viscosity fluid under the non-uniform temperature profile at vertical wall // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2021. – Vol. 126. – P. 105442.
2. Wong K.C., Saeid N.H. Numerical study of mixed convection on jet impingement cooling in a horizontal porous layer-using Brinkman-extended Darcy model // International Journal of Thermal Sciences. – 2009. – Vol. 48. – P. 96–104.

УДК 539.3

PLASTIC FLOW OF LIGHT HCP ALLOYS IN LINEAR FRICTION WELDINGK.V. Iokhim, E.G. Skripnyak, V.A. Skripnyak

Scientific adviser: professor, Ph.D. V.A. Skripnyak

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin Ave., 36, 634050

Email: iokhim.k@mail.ru**ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ЛЁГКИХ ГПУ-СПЛАВОВ ПРИ ЛИНЕЙНОЙ СВАРКЕ ТРЕНИЕМ**К.В. Иохим, Е.Г. Скрипняк, В.А. Скрипняк

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. В.А. Скрипняк

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: iokhim.k@mail.ru

Аннотация: Целью данной работы было исследование массопереноса и закономерностей пластического течения в зоне формирования сварного шва титанового сплава методом численного моделирования. Сварку сплавов осуществляли методом ЛСТ (линейная сварка трением). Этот метод хорош тем, что позволяет добиться высоких прочностных характеристик вблизи поверхности контакта без доведения сплава до плавления и без существенного изменения химического состава сплава. Для численного моделирования процесса ЛСТ использовался метод гидродинамики сглаженных частиц (SPH) [1,2]. Моделирование процесса ЛСТ осуществлялось методом SPH с использованием пакета LS-DYNA (ANSYS WB 15.2) и разработанного модуля определяющего уравнения.

Introduction. Linear friction welding (LFW) is a high-tech process of welding the critical structural elements of aerospace engineering from light and heat-resistant alloys [1, 2]. Currently, LFW is used to obtain strong welded joints between blades and turbine impeller, as well as welded joints of critical structural elements made of titanium alloys. A feature of LFW is the possibility of forming a high-strength joint due to the mixing of alloys during plastic flow. Friction welding makes it possible to obtain strong welded joints of various alloys containing elements such as titanium, aluminum, magnesium, etc., as well as to obtain welded joints of steels. Linear friction welding makes it possible to obtain a strong connection of materials in the plane of the contact surface of moving bodies due to heat release during friction and the transfer of material particles between the contacting bodies [1-4]. Experimental studies of the LFW regimes of such alloys are expensive and technically complex. In this regard, the study of LFW regimes by computer simulation methods is of great interest, both in applied and theoretical terms.

Numerical simulation. For three-dimensional modeling of the LST process, metal blocks were used by the method of smoothed particle hydrodynamics (SPH) [3, 4]. To describe the mechanical behavior of alpha- and alpha + beta titanium alloys during LST, a three-dimensional thermomechanical model was proposed [4]. The method of modeling the LST process of titanium blocks was carried out by SPH using the LS DYNA package (ANSYS WB 15.2) and the developed module for obtaining the equation. The system of particles was formed in blocks with a long smoothing length of 0.1 mm particles with nonuniform initial value. Linear friction welding (LFW) is a solid-state joining process that works by oscillating one workpiece relative to another while under a

large, compressive force; see Fig.1. The friction between the oscillating surfaces produces heat which causes the interface material to plasticise. The plasticised material is then expelled from the interface causing the workpieces to shorten (burn-off) in the direction of the compressive force [1–4]. During the burn-off the interface contaminants, such as oxides and foreign particles, which can affect the properties [5] and possibly the service life of a weld, are expelled from the weld into the flash. Once free from contaminants, pure metal to metal contact occurs resulting in an integral bond. LFW is an established technology for the manufacture of titanium alloy integrated bladed disks (blisks) for aero-engines. However, owing to the many benefits of the process, it is finding increasing interest for the manufacture of aircraft structural components.

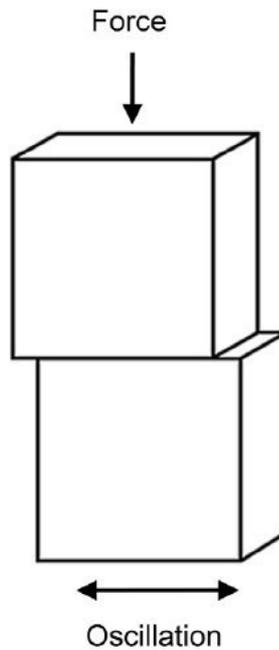


Fig. 1. (a) LFW process schematic

For numerical simulation in the LS-DYNA ANSYS WB 15.2 program, the SPH method with stroke extension is used. The lower block moves forward and backward with a speed that varies as $\bar{v} = \bar{v}_0 \cdot \sin(\omega t)$. The friction welding process was simulated at a speed change frequency of 50 Hz. The ranges of displacement amplitudes and frequency of velocity change were chosen in accordance with the parameters implemented in McAndrew's experiments on LST blocks of titanium alloy Ti-6Al-4V [5].

Results. The results of numerical simulation showed that the process of LFW of structural elements made of titanium alloys is a multi-stage one. It is shown that in the LFW zone the materials are also in a stress-strain state. In the weld seam formation zone, LST showed that the strain rates under cyclic loading of the bodies being welded vary over a wide range. For conditions equivalent to those that were selected experimentally for the LST of titanium alloys, the strain rate amplitudes in the formation zone of the welded joint reached 1000 s^{-1} [1, 2, 4].

The results obtained confirmed the need to use wide-range constitutive equations for the numerical analysis of the LFW process of titanium alloys. The simulation results showed that as a result of intense plastic deformation of titanium alloys in the near-surface layers, they are heated, which in turn leads to a decrease in the resistance to plastic flow. The decrease in resistance to plastic deformation is the main reason for the intensification of material extrusion from the joint zone under the action of a pressure gradient. Also, in the

process of LFW, the symmetry plane of the plastic deformation zone deviates from the initial position of the contact plane of the bodies being welded. The simulation results indicate the formation of vortices or local regions of rotation within the volume of plastically deformable material in the zone of weld formation.

The results obtained indicate that the plastic flow of the near-surface layers of the material of the blocks is distributed non-uniformly over the depth and area of the volume of the contacting blocks. Impact of pressure on observers in patients with hypersensitivity to plastically deformable material, even when sprains develop. Due to this, titanium alloys in the near-surface layers can be deformed in hard plastic deformation.

The extrusion of the alloy from the weld zone by friction is caused by a pressure gradient, which leads to a significant decrease in the flow stress of the alloy as a result of heating.

The simulation results indicate a deviation of the symmetry plane of the plastic deformation zone from the initial position of the contact plane of the blocks being welded. This effect influences the flatness of welds, their mechanical properties and residual stress fields in the joints. The alpha (HCP) - beta (BCC) phase transition of titanium alloys during heating in the LFW process leads to a change in the mechanical properties of the alloys.

The following conclusion can be drawn: in order to obtain a welded joint, it is necessary to increase the LST loading time and the amount of accumulated plastic deformation.

Conclusion. With a high frequency of signs of alternating motion of contact bodies made of titanium alloys, the temperature in the LFW range may exceed the temperature of the alpha-frequency switching range.

In the case of the transition of the volume of plastically deformed alloys of titanium alloys with a hexagonal close-packed lattice into a phase with a volume-centered cubic lattice, due to a change in the processes of mass mixing in the presence of LFW welding.

As a result, to obtain a welded joint, an increase in the time of cyclic loading of the welded bodies is required. In this regard, the question arises about the resonance of the LFW parameters of titanium alloys for obtaining strong control joints. The proposed thermomechanical 3D model can be used to substantiate the feeling of the presence of the control parameters of the LWF process for welding structural elements from alpha and alpha + beta titanium alloys.

REFERENCES

1. Heidarzadeh A., Mironov S., Kaibyshev R., Cam G., Simar A., Gerlich A., Khodabakhshi F., Mostafaei A., Field D. P., Robson J. D., Deschamps A., Withers P. J. Friction stir welding/processing of metals and alloys: A comprehensive review on microstructural evolution // *Progress in Materials Science*. – 2020. – P. 100752.
2. Venu B., Bhavya Swathi I., Raju L. S., Santhanam G. A review on friction stir welding of various metals and its variable // *Materials Today: Proceedings*. – 2019. – V. 18, Part 1. – P. 298–302.
3. Tartakovsky A., Grant G., Sun X., Khaleel M. Modelling of friction stir welding (FSW) process with smooth particle hydrodynamics (SPH) // *SAE Technical Paper Series*. – 2006. – V. 01. – Art. 1394.
4. Skripnyak V.A., Iohim K.V., Skripnyak E.G., Skripnyak V.V. Modeling of titanium alloys plastic flow in linear friction welding // *Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering*. – 2021. – V. 19(1). – P. 91–104.
5. Skripnyak V.V., Skripnyak E.G., Skripnyak V.A. Fracture of titanium alloys at high strain rates and under stress triaxiality // *Metals*. – 2020. – V. 10(3). – P. 305.

УДК 519.6

**ПРИМЕНЕНИЕ БИОФИЛЬТРА ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА
САМООЧИЩЕНИЯ СТОЧНЫХ ВОД**

А.В. Амзаракова

Научный руководитель: старший преподаватель М.Д. Михайлов
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, г.Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: nastya.amzarakova.00@mail.ru

**APPLICATION OF BIOFILTER IN COMPUTATIONAL MODELING OF THE PROCESS
OF WASTEWATER SELF-PURIFICATION**

A.V. Amzarakova

Scientific Supervisor: senior lecturer M.D. Mikhailov
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050
E-mail: nastya.amzarakova.00@mail.ru

***Abstract.** In the present study, we investigate the effect of a highly loaded biofilter in the computational modeling of the wastewater self-purification process. The classical Streeter-Phelps model is modified by introducing a highly loaded biofilter into this model.*

Введение. Основными отраслями специализации хозяйств Томской области являются топливная (нефтегазодобывающая), лесная промышленность, черная металлургия, химия, нефтехимия, машиностроение и сельское хозяйство. Эти отрасли и транспорт оказывают заметное воздействие на экологическое состояние области и всей Западной Сибири. Предприятия Западно-Сибирского экономического региона производят 14,7% промышленной продукции страны, а по объемам выбросов загрязненных стоков их доля составляет 6,2% [1].

В бассейне реки Томь предприятия Кемеровской, Новосибирской, Томской областей и республики Хакасия ежегодно сбрасывают свыше 1100 тыс.т. загрязняющих веществ, в том числе 647 тыс.т. сульфитов, 116 тыс.т. хлоридов, 3 тыс.т. нитратов, 540 тыс.т. нефтепродуктов и др. Основными источниками загрязнения вод бассейна реки Томь являются предприятия Кемеровской области. Их вклад составляет 93,6%. Роль предприятий Томской области в процессе загрязнения р. Томь значительно меньше – 6,3% [1].

Каждый водоем - это сложная живая система, где обитают бактерии, высшие водные растения, водоросли, различные беспозвоночные животные. Совместная деятельность обитателей обеспечивает самоочищение водоемов. Факторы самоочищения многообразны. В работе рассматривается математическая модель процесса самоочищения и кислородного баланса в реках, а также биологической очистки с помощью очистного сооружения – биофильтра. Последний предназначен для фильтрации сточной воды через загрузочный материал, который покрыт биологической пленкой, образованной колониями микроорганизмов [2].

Модификация модели Стритера-Фелпса. Неявный метод трапеций. Классическая модель Стритера-Фелпса [3] описывает систему, состоящую из воды, растворенного в ней кислорода и органических веществ. Разложение загрязнения происходит под воздействием бактерий, вызывающих химическую реакцию с использованием кислорода.

Рассматривается модификация этой модели путем добавления в нее соотношения $-kL$. В результате получается задача Коши, описываемая системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= -k_1L - kL, \\ \frac{dD}{dt} &= k_1L - k_2D, \end{aligned} \quad (1)$$

с соответствующими начальными условиями:

$$L(0) = L^0, D(0) = D^0. \quad (2)$$

В данной системе t - время, $L(t)$ – концентрация органического вещества, k_1 – коэффициент разложения загрязнителя, 1/сут, k – константа скорости изъятия органических загрязнений, 1/сут, [2, с.68]. $D(t)$ - дефицит кислорода, $D = q - q_0$, где q – реальная концентрация кислорода в воде, а q_0 – равновесная, при отсутствии загрязнения, k_2 – коэффициент аэрации, 1/сут.

В качестве очистного сооружения рассматривается высоконагружаемый биофильтр, основные характеристики которого получены в [2] путем обработки многочисленных отечественных и зарубежных данных и используются при задании параметра k . Отличительной особенностью биофильтра этого типа является более высокая, по сравнению с другими, окислительная мощность, что обусловлено меньшей его заиляемостью и лучшим обменом воздуха.

В работе получено точное решение системы уравнений (1) с начальными условиями (2) в виде:

$$\begin{aligned} L(t) &= L^0 e^{-(k_1+k)t}, \\ D(t) &= \frac{k_1 L^0}{k_2 - k_1 - k} e^{-(k_1+k)t} + \left(D^0 - \frac{k_1 L^0}{k_2 - k_1 - k} \right) e^{-k_2 t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для численного решения задачи (1), (2) используется неявный метод трапеций.

Показано, что погрешность аппроксимации данного метода имеет 2-й порядок и разностная схема метода трапеций является абсолютно устойчивой по начальным данным (т.е. условие устойчивости выполняется при любом $\tau > 0$). Следовательно, по теореме Лакса решение разностной задачи будет сходиться к решению соответствующей дифференциальной задачи.

Результаты. Проводится сравнение точного (3) и численного решений для концентрации нефтепродуктов $L(t)$ в реке Томь и дефицита кислорода $D(t)$ без использования (при скорости изъятия органических загрязнений $k = 0,0 \frac{1}{сут}$) и с использованием биофильтра ($k = 7,08 \frac{1}{сут}$). Результаты численных расчетов представлены в виде графиков для $L(t)$ на рис. 1, 2.

Сравнение концентрации загрязнения нефтепродуктами реки Томь за 2005 год (0,619 мг/л) [4] с концентрацией за 2016 год (0,014 мг/л) [5] показывает, что загрязнение реки нефтепродуктами стало значительно меньше.

Заключення. Відносительна погрешность концентрації органічного речовини $L(t)$ і дефіциту кисню $D(t)$ в обох випадках становить приблизно 5-ти відсотків. В результаті проведених досліджень показано, що використання біофільтра суттєво прискорює процес самоочищення в водоймах.

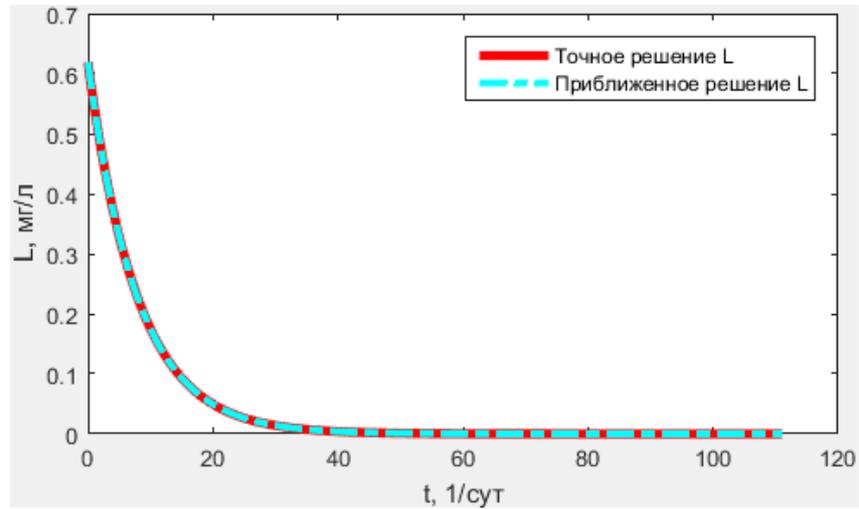


Рис. 1. Графік порівняння приближеного і точного розв'язків (концентрації органічного речовини $L(t)$) без використання біофільтра

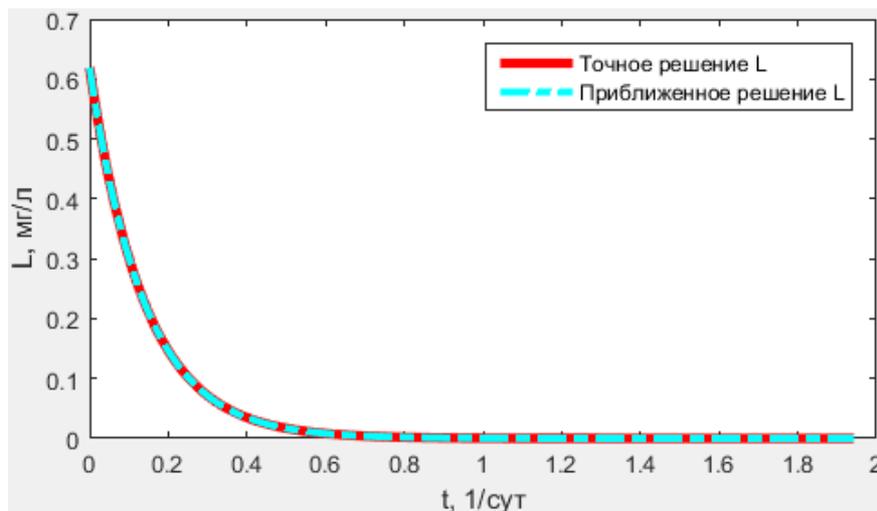


Рис. 2. Графік порівняння приближеного і точного розв'язків (концентрації органічного речовини $L(t)$) з використанням високонавантаженого біофільтра

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Екологічний моніторинг // Состояние окружающей среды Томской области в 1998 г. – Томск, 1999. – 231 с.
2. Яковлев С.В., Воронов Ю.В. Биологические фильтры. – М.: Стройиздат, 1982. – 121 с.
3. Вавилин В.А. Нелинейные модели биологической очистки и процессов самоочищения в реках. – М.: Наука, 1983. - 158 с.
4. Екологічний моніторинг: Состояние окружающей среды Томской области в 2005 г. – Томск, 2006. – 148 с.
5. Румак А.В. Химический состав реки Томи в районе Лагерного сада (г. Томск). [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://earchive.tpu.ru/handle/11683/28994>.

УДК 517.518.83

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ЛОБОВОГО СЕЧЕНИЯ ДЛЯ ФРАКТАЛЬНЫХ АГРЕГАТОВ
ИЗ КАСАЮЩИХСЯ ШАРОВ**А.Н. Сусленкова, П.К. Ковылина

Научный руководитель: к.ф.-м.н. О.П. Стояновская

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет

Россия, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2, 630090

E-mail: a.suslenkova@g.nsu.ru**COMPUTING OF THE CROSS SECTION AREA FOR FRACTAL AGGREGATES FROM STICKED BALLS**A.N. Suslenkova, P.K. Kovylyina

Scientific Supervisor: PhD O.P. Stoyanovskaya

Novosibirsk State University, Russia, Novosibirsk, Pirogova str., 2, 630090

E-mail: a.suslenkova@g.nsu.ru

Abstract. To simulate the motion of solid particles in a gas in the Epstein or free-molecular regime, it's necessary to know the projected area of the body. Finding the projected area for nonspherical particles is a non-trivial task. To describe the mobility of some type of nonspherical particles - fluffy aggregates, considered as a set of spheres - monomers, the value D_f called fractal dimension is often used. For such aggregates with fixed fractal dimension several authors suggested the approximations of the projected area PA as a function of N - the number of monomers in the aggregate. These authors validated their approximations on experimental data. On the other hand, new direct numerical simulation (DNS) data on mobility of fractal aggregates have been obtained recently. The aim of this work is to obtain an explicit expression for calculating the cross section, which approximates as closely as possible the results of direct numerical simulation (DNS) of aggregates with a small amount of monomers and the known analytical representations for aggregates with a large amount of monomers.

Введение. Математическое моделирование динамики газопылевых сред или аэрозолей имеет большое количество приложений. Для некоторых приложений существенным является учет процессов роста и дробления пылевых частиц в результате столкновений. Известно, что столкновения мелкодисперсных частиц в аэрозолях формируют разветвленные агрегаты. Аэродинамическое сопротивление таких агрегатов существенно превосходит аэродинамическое сопротивление компактных объектов - шаров, собранных из того же вещества.

Для моделирования аэродинамики рыхлых агрегатов разработаны подходы, в которых агрегаты представляют как множество касающихся сфер - мономеров. Эти подходы опираются на идею, что если агрегат собирается из мономеров в определенных и неизменных физических условиях, то его геометрические или аэродинамические характеристики могут быть определены как функции количества мономеров в агрегате. Из-за того, что разному количеству мономеров в агрегате соответствует одна и та же функция для определения его геометрических или аэродинамических характеристик, такие объекты называют самоподобными или фрактальными. У такого объекта можно определить фрактальную размерность (например, [1]).

В режимі Епштейна або вільно-молекулярного обтекання сила тертя залежить від площі лобового сечення PA агрегата. К поточному моменту є дані об ефективній площі лобового сечення агрегатів фрактальної розмірності $D_f = \frac{2}{3}, 1,78, 1,8, 1,95, 3$. Ці дані були обобщені в функціональні залежності PA від кількості мономерів в агрегаті N авторами [2-5].

Матеріали і методи дослідження. Цілью поточної роботи являється отримання явного вираження для розрахунок лобового сечення, максимально наближаючого результати прямого численного моделювання (DNS) агрегатів з малим кількістю мономерів [6, 7] і відомі аналітичні представлення для агрегатів з великим кількістю мономерів. Щоб моделювати динаміку об'єктів різної фрактальної розмірності, необхідно побудувати апроксимацію величини PA як функцію двох змінних - кількості мономерів N і фрактальної розмірності агрегата D_f . Для цього в [8] ми будували інтерполяційні поліноми Лагранжа по змінній D_f , використовуючи в вузлах інтерполяції відомі функціональні залежності від N , тобто $PA(D_f, N) = \sum_{i=1}^l PA_i(N) \mathcal{L}_i(D_f)$,

де $\mathcal{L}_i(D_f) = \prod \frac{D_f - D_j}{D_i - D_j}$ - базисні поліноми Лагранжа.

В якості вузлів для побудови полінома використовували всі елементи D_i для PA , або вибірка з цього множини. Таким чином було побудовано декілька поліномів-претендентів, апроксимуючих шукану функцію PA . З претендентів були обрані кращі апроксимації PA , що задовольняють критеріям

- монотонність по D_f при $N \geq 2$ і по N при $\frac{2}{3} < D_f < 3$,
- доставлення мінімуму середньоквадратичного відхилення від даних DNS [6, 7].

Далі ми провели порівняння отриманої функції з представленим в недавній роботі [9] більш реалістичним аналітичним вираженням для розрахунок площі лобового сечення фрактальних агрегатів, що представляють собою неявну функцію. З цією метою нами були побудовані на одній панелі графіки залежності значення $\frac{PA}{N}$, отриманого по знайденої нами формулі, і тієї ж величини, отриманої з допомогою вираження з [9].

Результати. В [8] нами була отримана функція $PA(D_f, N)$:

$$PA(D_f, 1) = 1;$$

$$PA(D_f, N) = 0,3340 (D_f - 1,95)(D_f - 3)(0,802(N - 1) + 1) + 0,4082 \left(D_f - \frac{2}{3} \right) (D_f - 1,95) N^{2/3} -$$

$$\begin{cases} 11,2801 \left(D_f - \frac{2}{3} \right) (D_f - 3) N^{2/3} \exp(-2,86 / N^{0,096}), & 2 \leq N \leq 20; \\ 0,5135 \left(D_f - \frac{2}{3} \right) (D_f - 3) N^{0,95} \left(1 + \frac{0,301}{\ln N} \right), & N > 20. \end{cases}$$

На Рис.1 представлені графіки залежності значення $\frac{PA}{N}$ від N . На кожній з панелей зелений колір відповідає значенню, отриманому по формулі з [8], а червоний - значенню, отриманому з допомогою вираження з [9]. На панелях 1-8 зображені графіки при фіксованих фрактальних розмірностях 1, 1,4, 1,78, 2, 2,15, 2,5, 2,8 і 3 відповідно. Можливо зауважити, що на перших 3 панелях графіки апроксимацій PA суттєво відрізняються, однак решта 5 панелей показують, що при

фрактальной размерности D_f от 2 до 3 найденная нами в [8] функция, аппроксимирующая площадь лобового сечения PA достаточно близка к выражению, полученному в [9].

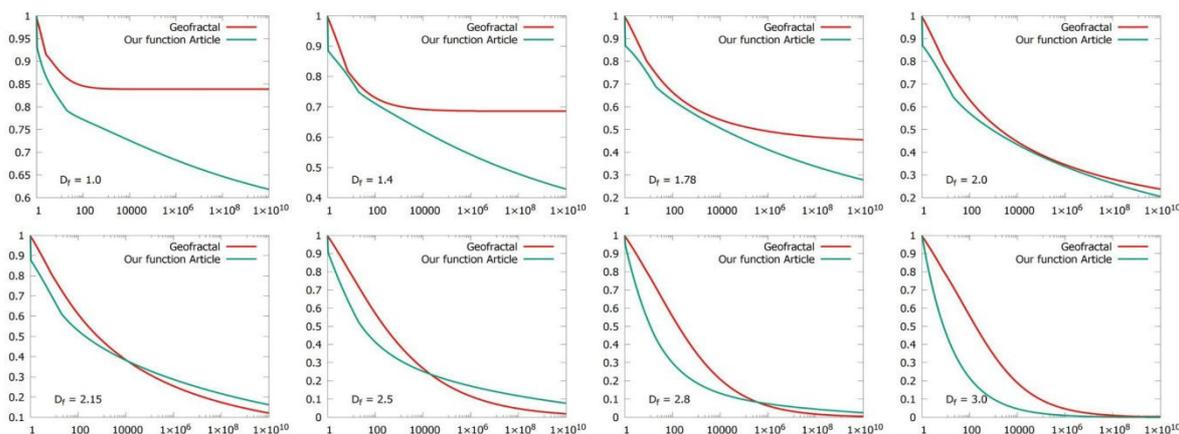


Рис. 1. Графики функций, аппроксимирующих $\frac{PA}{N}$

Заключение. Рассматриваемые в работе несферические частицы представляют собой фрактальные агрегаты из склеенных сфер. В [8] нами была построена аппроксимация площади лобового сечения $PA(D_f, N)$ таких агрегатов. Кроме того, нами было проведено сравнение полученной функции с выражением из [9]. Установлено, что для фрактальной размерности D_f от 2 до 3 найденная нами функция, аппроксимирующая площадь лобового сечения PA , достаточно близка к неявному, более сложному для вычислений выражению, полученному в [9] и может быть использована для расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колесниченко А.В. К моделированию роста пылевых фрактальных агрегатов в солнечном протопланетном диске // *Mathematica Montisnigri*. – 2012. – Т. 25. – С. 65-93.
2. Sorensen C.M. The Mobility of Fractal Aggregates // *Aerosol Science and Technology*. – 2011. – V. 45., № 7. – P. 765-779.
3. Ossenkopf V. Dust coagulation in dense molecular clouds: the formation of fluffy aggregates // *Astron. Astrophis.* – 1993. – V. 280 – P. 617-646.
4. Chan P., Dahneke B. Free-Molecule Drag on Straight Chains of Uniform Spheres // *J. Appl. Phys.* – 1981. – V. 52. – P. 3106–3110.
5. Meakin P., Donn B. and Mulholland G. Collisions Between Point Mass and Fractal Aggregates // *Langmuir*. – 1989. – V. 5. – P. 510–518.
6. Gopalakrishnan R., Hogan C.J., Thajudeen T. Collision limited reaction rates for arbitrarily shaped particles across the entire diffusive Knudsen number range // *The Journal of Chemical Physics*. – 2011. – V. 135. – P. 054302.
7. Thajudeen T., Gopalakrishnan R., Hogan C.J. The Collision Rate of Nonspherical Particles and Aggregates for all Diffusive Knudsen Numbers // *Jr. Aerosol Science and Technology*. – 2012. – V. 46., № 11. – P. 1174-1186.
8. Stoyanovskaya O.P., Suslenkova A.N., Kusnatdinov T.R. Computing the aerodynamic drag of fractal aggregates in free-molecular and transition regimes // *J. Phys.: Conf. Ser.* – 2020. – V. 1640., № 1. – P. 012010.
9. Tazaki R. Analytic expressions for geometric cross-sections of fractal dust aggregates // *MNRAS*. – 2021. – V. 504. – P 2811-2821.

УДК 533.697.4

**РАЗРАБОТКА ПРОГРАММЫ РАСЧЕТА ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕЧЕНИЯ
И ПОТЕРЬ ТЯГИ НА ТРЕНИЕ В СОПЛОВОМ БЛОКЕ С ЦЕНТРАЛЬНЫМ ТЕЛОМ**

В.Н. Конев, К.В. Костюшин

Научный руководитель: инженер А.В. Червакова

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: konev_vasya@mail.ru

**DEVELOPMENT OF A PROGRAM FOR CALCULATION OF GAS-DYNAMIC CHARACTERISTICS
OF THE FLOW AND LOSS OF THROAT FOR FRICTION IN A NOZZLE UNIT WITH A CENTRAL
BODY**

V.N. Konev, K.V. Kostyushin

Scientific Supervisor: engineer A.V. Chervakova

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: konev_vasya@mail.ru

***Abstract.** A method and algorithm for calculating the gas dynamic characteristics of the flow and thrust losses due to friction and scattering in the nozzle block of a rocket engine have been developed. Based on the developed algorithm, a specialized software package is implemented to calculate the flow and thrust losses in a nozzle with or without a central body.*

Введение. Одними из основных элементов РДТТ являются камера сгорания и сопло. В сопловых блоках ракетных двигателей (РД) происходит разгон продуктов сгорания до сверхзвуковых скоростей. Газодинамические процессы, происходящие в соплах РД играют важную роль, так как от них зависят энерго-тяговые характеристики, в том числе удельный импульс тяги и потери удельного импульса. В настоящее время высокий практический интерес представляет изучение двигательных установок с соплами с центральным телом [1, 2]. Преимуществом таких сопел является возможность улучшения характеристик РД путем регулирования внутрибаллистических параметров посредством перемещения центрального тела вдоль оси сопла.

Целью данной работы является разработка методики и алгоритма расчета газодинамических характеристик течения и потерь тяги на трение и рассеяние в сопловом блоке с центральным телом.

Методика расчета. Рассматривается одномерное стационарное течение идеального газа в сопле Лавала. Алгоритм расчета течения газа в сопловом блоке основан на определении коэффициента скорости из газодинамической функции [3]:

$$q(\lambda) = \frac{S_{кр}}{S} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad (1)$$

где λ – коэффициент скорости, S – площадь анализируемого сечения, $S_{кр}$ – площадь критического сечения, k – показатель адиабаты. Уравнение (1) является нелинейным и решается с помощью метода простых итераций:

Для сужающейся части сопла:

$$\lambda_i = \frac{q_i}{\left(\frac{k+1}{2} - \frac{k-1}{2} \lambda_{i-1}^2\right)^{\frac{1}{k-1}}}, \quad (2)$$

где i – номер итерации.

Для расширяющейся части сопла:

$$\lambda_i = \sqrt{\frac{k+1}{k-1} - \frac{2}{k-1} \left(\frac{q_i}{\lambda_{i-1}}\right)^{k-1}}. \quad (3)$$

По полученным значениям приведенной скорости вычисляются остальные газодинамические параметры потока: давление, температура, плотность газового потока, числа Маха и скорость потока по формулам (4) – (8) соответственно:

$$p = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \cdot p^*, \quad (4)$$

$$T = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right) \cdot T^*, \quad (5)$$

$$\rho = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \rho^*, \quad (6)$$

$$M = \lambda \sqrt{\frac{\frac{2}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}}, \quad (7)$$

$$V = \lambda \cdot a_{кр}, \quad (8)$$

где p^* , T^* , ρ^* – давление, температура и плотность газа в камере сгорания, $a_{кр}$ – скорость в критическом сечении сопла:

$$a_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT^*}. \quad (9)$$

Для определения потерь удельного импульса тяги использовалась методика, основанная на полуэмпирических соотношениях, описанных в [4].

Потери удельного импульса тяги на рассеяние:

$$\xi_p = \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot 100\%, \quad (10)$$

где α – полуугол раствора конического сопла.

Потери удельного импульса тяги на трение:

$$\xi_{mp} = 0,56(y_a - 1)^{0,5} \left(\frac{2,62}{k^2 T_{ст}^{0,33}} - 1 \right) L_0 (1 + 16,88 k_s^{0,4}), \quad (11)$$

где y_a – степень расширения сопла, $T_{ст}$ – фактор теплообмена, k_s – относительная высота бугорков шероховатости, L_0 – степень укорочения сопла:

$$L_0 = \frac{L}{r_{кр} \cdot (5,88 y_a - 5,44)}, \quad (12)$$

где $r_{кр}$ – радиус критического сечения сопла, L – длина сопла.

Потери, обумовлені теплообміном потоку продуктів згорання со стенками камери і сопла приймаються рівними $\xi_{\text{тепл}} = 0,5\%$.

Результаты. Для тестирования разработанной методики и алгоритма проведена серия расчетов основных газодинамических параметров и потерь удельного импульса тяги на трение и рассеяние для конического сопла с центральным телом каплевидной формы. Расчеты проведены на базе разработанного программного комплекса с графическим интерфейсом «G-D-function». Основное окно программного комплекса показано на рисунке 1. Программа реализована на языке C# с использованием программной платформы NET.Framework. В качестве входных данных программный комплекс принимает данные о контуре сопла и параметрах в камере сгорания. Приложение «G-D-function» позволяет рассчитывать основные газодинамические параметры и потери удельного импульса для конического сопла Лавалья с центральным телом или без него, визуализировать результаты расчетов.

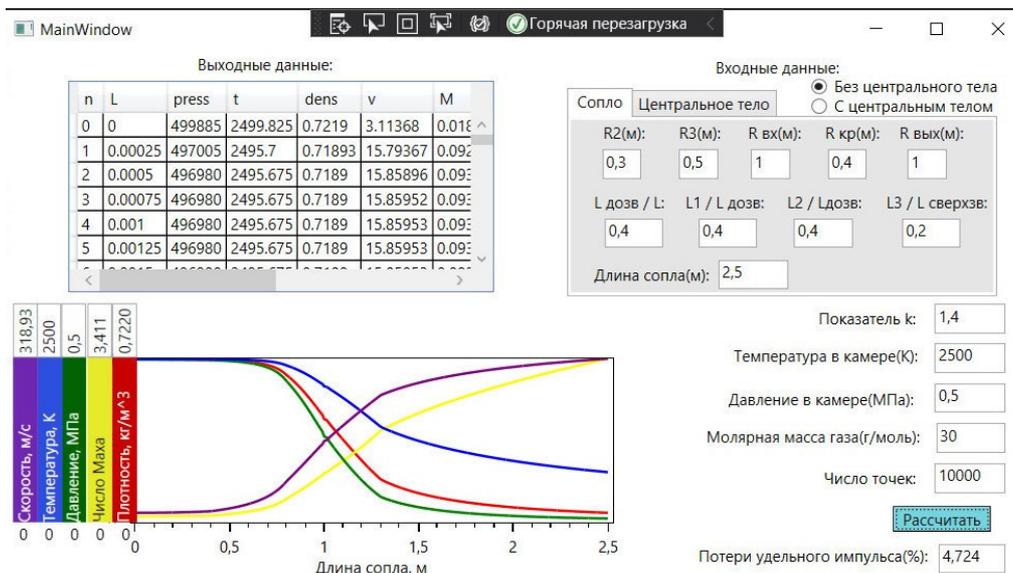


Рис. 1. Интерфейс приложения «G-D-function»

Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России, проект № 0721-2020-0032.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чванов В.К. и др. Использование сопел с центральным телом в компоновочных схемах многокамерных двигательных установок ракет-носителей // Труды НПО Энергомаш имени академика ВП Глушко. – 2014. – №. 31. – С. 69-89.
2. Егоров Г.П., Смагина М.А. Повышение эффективности жидкостных ракетных двигателей путем замены сопла Лавалья на кольцевое сопло (сопло с центральным телом) // Наука и образование: сохраняя прошлое, создаём будущее. – 2017. – С. 82-87.
3. Алемасов В.Е., Дрегалин А.Ф., Тишин А.Л. Теория ракетных двигателей: Учебник для вузов. – М.: Машиностроение. – 1989. – 464 с.: ил.
4. Липанов А.М., Алиев А.В. Проектирование ракетных двигателей твердого топлива – М: Машиностроение, 1995.– 400 с.: ил.

УДК 519.642

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ МАТРИЦАМИ**

Т.С. Индуцкая

Научный руководитель: к.ф.-м.н. О.С. Будникова

Иркутский государственный университет,

Россия, г. Иркутск, ул. Карла Маркса, 1, 664003

E-mail: indutskaya.tat@yandex.ru

**NUMERICAL SOLUTION OF FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS
WITH VARIABLE MATRIXES**

T. S. Indutskaya

Scientific Supervisor: PhD O.S. Budnikova

Irkutsk State University, Russia, Irkutsk, Karl Marks str., 1, 664003

E-mail: indutskaya.tat@yandex.ru

Abstract. *The article describes numerical methods for solving differential-algebraic equations of fractional order with the Riemann-Liouville derivative. The case of variable matrix coefficients is considered. The proposed methods are based on the method of left rectangles and the method of product integration.*

Введение. Дифференциальные уравнения (ДУ) дробного порядка возникают в различных разделах физики сплошных сред [1]. В настоящее время направление вычислительной математики, связанное с численными методами решения систем ДУ с дробными производными, находится в начале своего развития. Представляемая работа посвящена разработке численных методов решения вырожденных систем ДУ (или *дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ)*) дробного порядка с производной Римана – Лиувилля. Отметим, что известные численные методы (см., например, [2]), разработанные для систем ДУ с дробной производной неприменимы к рассматриваемому классу задач в силу вырожденности главного слагаемого.

Постановка задачи. Рассмотрим ДАУ дробного порядка

$$D_{0+}^{\alpha} (A(t)u(t)) + B(t)u(t) = f(t), \quad t \in [0;1], \quad (1)$$

$$D_{0+}^{\alpha-1} (A(t)u(t)) \Big|_{t=0} = u_0, \quad u_0 \in R^n. \quad (2)$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ – переменные $(n \times n)$ - матрицы, причем $\det A(t) \equiv 0$, а $u = u(t)$, $f = f(t)$ – искомая и заданная n - мерные вектор-функции, введено обозначение *производной Римана – Лиувилля* [3]

$$D_{0+}^{\alpha} q(t) = \frac{d}{dt} I_{0+}^{1-\alpha} q(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} q(s) ds,$$

дробного порядка $0 < \alpha < 1$. Начальная задача (1), (2) традиционно называется *задачей типа Коши* [3].

Под ее решением будем понимать вектор-функцию $u(t) \in C([0;1], R^n)$, которая обращает в тождество уравнение (1) и удовлетворяет начальному условию (2).

Действие оператором Римана – Лиувилля I_{0+}^{α} дробного порядка $0 < \alpha < 1$ на уравнение (1) преобразует задачу типа Коши (1), (2) к интегро-алгебраическому уравнению (ИАУ) типа Абеля

$$A(t)u(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} B(s)u(s)ds = g(t) + \frac{u_0 t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (3)$$

где $g(t) = I_{0+}^{\alpha} f(t)$. В условиях непрерывности правой части, индекса 1 матричного пучка $\lambda A(t) + B(t)$ и $rank A(0) = rank(A(0)|g(0))$ непрерывное решение ИАУ (3) существует и единственно [4]. Положим $u_0 = 0$, так как это является необходимым условием непрерывности правой части ИАУ (3).

Численный метод. Кратко опишем идею построения численного алгоритма. Для вычисления интегрального слагаемого будем использовать квадратурную формулу левых прямоугольников с выделенной весовой функцией $p(t,s) = (t-s)^{\alpha-1}$. Задавая на отрезке $[0;1]$ равномерную сетку

$$t_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad h = \frac{1}{N},$$

и вводя обозначение $v_i = v(t_i)$ для некоторой функции $v = v(t)$, получим цепочку равенств

$$\int_0^{t_{i+1}} (t_{i+1}-s)^{\alpha-1} v(s)ds = \sum_{j=0}^i \int_j^{t_{j+1}} (t_{i+1}-s)^{\alpha-1} v(s)ds \approx \sum_{j=0}^i v_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{i+1}-s)^{\alpha-1} ds = \sum_{j=0}^i \frac{h^{\alpha}}{\alpha} \left((i-j+1)^{\alpha} - (i-j)^{\alpha} \right) v_j$$

Тогда численный метод для ИАУ (3) имеет вид

$$A_{i+1}u_{i+1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j=0}^i h^{\alpha} \left((i-j+1)^{\alpha} - (i-j)^{\alpha} \right) B_j u_j = g_{i+1}. \quad (4)$$

В силу вырожденности матрицы $A(t)$, прямое применение алгоритма (4) приведет к проблемам решения вырожденной системы линейных алгебраических уравнений, поэтому модифицируем его

$$A_{i+1}u_i + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j=0}^i h^{\alpha} \left((i-j+1)^{\alpha} - (i-j)^{\alpha} \right) B_j u_j = g_{i+1}.$$

Численные эксперименты. Численные расчеты проведены на тестовых примерах ДАУ порядков 0,01 и 0,99, близких к граничным значениям параметра α , порядка 0,5, который является центральным интервальным значением параметра α , а также порядков 0,37 и 0,87, выбранных произвольно.

Пример 1.

$$D_{0+}^{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{4t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + t - 4 \\ 12 + 3t \end{pmatrix}, \quad t \in [0;1], \quad \alpha \in (0;1).$$

Точное решение: $x(t) = t - 4$, $y(t) = 12 + 3t$. Результаты расчетов приведены в таблице 1.

Пример 2.

$$D_{0+}^{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + t^2 - 1 \\ \frac{18t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + t^3 + 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0;1], \quad \alpha \in (0;1).$$

Точное решение: $x(t) = t^2 - 1$, $y(t) = 2t$. Результаты расчетов приведены в таблице 2.

Таблица 1

Расчеты примера 1

h	$\alpha = 0,01$		$\alpha = 0,37$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0,87$		$\alpha = 0,99$	
	err(h)	p	err(h)	p	err(h)	p	err(h)	p	err(h)	p
0,2	0,5941	1	0,4380	1	0,4000	1	0,3209	1	0,3015	1
0,1	0,2970	1	0,2190	1	0,2000	1	0,1604	1	0,1508	1
0,05	0,1485	1	0,1095	1	0,1000	1	0,0802	1	0,0754	1

Таблица 2

Расчеты примера 2

h	$\alpha = 0,01$		$\alpha = 0,37$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0,87$		$\alpha = 0,99$	
	err(h)	p	err(h)	p	err(h)	p	err(h)	p	err(h)	p
0,2	0,3952	1,0039	0,3446	0,9280	0,3390	0,9313	0,3198	0,9406	0,3165	0,9591
0,1	0,1971	1,0042	0,1811	0,9655	0,1778	0,9673	0,1666	0,9720	0,1628	0,9726
0,05	0,0982	0,9951	0,0927	0,9827	0,0909	0,9837	0,0849	0,9863	0,0830	0,9867

Порядок метода определяется по формуле:

$$p = \log_2 \frac{err(h)}{err(h/2)},$$

где $err(h) = \max_{0 \leq i \leq N-1} \|u_i - u(t_i)\|$, а $\|\cdot\|$ – евклидова норма в R^n .

Заключение. Результаты численных экспериментов демонстрируют сходимость не хуже порядка $1 - \alpha$, а в некоторых случаях достигается первый порядок. Дальнейшее направление работы связано с выявлением свойств разработанного алгоритма на предмет его устойчивости относительно погрешности входных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Учайкин В.В. Дробно-дифференциальные модели в гидродинамике // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2019. – Т. 27, № 1. – С. 5-40.
2. Zhu L., Fan Q. Numerical solution of nonlinear fractional-order Volterra integro-differential equations by SCW // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2013. – V. 18, № 5. – P. 1203-1213.
3. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam; Boston; Heidelberg: Elsevier Science Publishers, 2006. – 541 p.
4. Bruner H., Bulatov M.V. On singular systems of integral equations with weakly singular kernels // Proceeding of the 11-th Baikal International School Seminar “Optimization Methods and Their Applications”. – Irkutsk: ESI SB RAS, 1998. – P. 64-67.

УДК 519.642

ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЯВНОГО МЕТОДА ДЛЯ ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА АБЕЛЯ С ЖЁСТКИМИ КОМПОНЕНТАМИ

Г.К. Соколова

Научные руководители: доцент, к.ф.-м.н. О.С. Будникова

Иркутский государственный университет,

Россия, г. Иркутск, ул. Карла Маркса, 1, 664003

E-mail: 98gal@mail.ru

CONSTRUCTION OF STABILITY DOMAINS OF IMPLICIT METHOD FOR THE ABEL TYPE INTEGRAL ALDEBRAIC EQUATIONS WITH STIFF COMPONENTS

G.K. Sokolova

Scientific Supervisors: Assoc. Prof., PhD. O.S. Budnikova

Irkutsk State University, Russia, Irkutsk, Karl Marx str., 1, 664003

E-mail: 98gal@mail.ru

Abstract. *This note deals with the study of the stability property of zerostep method for the Abel type integral algebraic equation. The generalized Abel integral equations with stiff components is used for examining the stability of the considered numerical method. The stability domains are constructed.*

Рассматривается система взаимосвязанных линейных алгебраических уравнений и обобщённых интегральных уравнений типа Абеля, которая представлена в форме интегрального уравнения

$$A(t)x(t) - \int_0^t (t-s)^{-a} K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad a \in (0, 1), \quad t \in [0, 1], \quad (1)$$

с ненулевой тождественно вырожденной матрицей в главной части, где $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – неизвестная вектор-функция. Матрицы $A : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $K : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ и вектор-функция $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ заданы и имеют элементы достаточного порядка гладкости. Символ $\mathbb{R}^{n \times n}$ обозначает вещественное векторное пространство $(n \times n)$ -матриц, а $\Delta = [0, 1] \times [0, t]$. Уравнение (1) называют *интегро-алгебраическим уравнением (ИАУ) типа Абеля* или *ИАУ со слабой диагональной особенностью* [1].

Ранее в работе [2] были разработаны k -шаговые методы численного решения ИАУ типа Абеля, основанные на явных методах типа Адамса и методе интегрирования произведений. Неявный алгоритм нахождения $x_i \approx x(t_i)$ на равномерной сетке $t_i = ih$, $hN = 1$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, имеет вид

$$A_{i+1}x_i + \sum_{\ell=0}^i \omega_{i+1,\ell} K_{i+1,\ell} x_\ell = f_{i+1}, \quad (2)$$

где введены обозначения $A_i = A(t_i)$, $K_{i,\ell} = K(t_i, t_\ell)$, $f_i = f(t_i)$ и

$$\omega_{i+1,\ell} = \frac{((i+1-\ell)h)^{1-a}}{1-a} - \frac{((i-\ell)h)^{1-a}}{1-a}.$$

В представляемом докладе планируется изложить результаты исследования свойств устойчивости неявного метода численного решения (2) ИАУ типа Абея (1) с жёсткими компонентами в решении. Введём следующее определение.

Определение. Численный метод называется *A-устойчивым*, если его область абсолютной устойчивости включает всю полуплоскость $\operatorname{Re}(\lambda h^{1-a}) \leq 0$.

Так как рассматриваемое ИАУ типа Абея (1) содержит обобщенные интегральные уравнения Абея как первого, так и второго рода, то исследование *A-устойчивости* алгоритмов (2) предлагается проводить на основе модельных интегральных уравнений

$$\int_0^t (t-s)^{-a} \left((t-s)^a - \frac{\lambda(t-s)}{\Gamma(2-a)} \right) x(s) ds = t, \quad a \in (0, 1), \quad (3)$$

$$x(t) - \frac{\lambda}{\Gamma(1-a)} \int_0^t (t-s)^{-a} x(s) ds = 1, \quad a \in (0, 1), \quad (4)$$

первого и второго рода соответственно, где $\Gamma(a)$ – гамма-функция Эйлера. К указанным интегральным уравнениям сводится начальная задача

$${}^{\text{GC}}D_{0+}^{1-a} x(t) = \lambda x(t), \quad x(0) = 1, \quad t \in [0, 1], \quad \operatorname{Re} \lambda \ll 0, \quad (5)$$

для дифференциального уравнения дробного порядка $1-a$, где введено обозначение

$${}^{\text{GC}}D_{0+}^{1-a} x(t) = I_{0+}^a x'(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^t (t-s)^{a-1} x'(s) ds,$$

производной Герасимова – Капуто. Данная задача имеет единственное решение

$$x(t) = E_{1-a,1}(\lambda t^{1-a}),$$

которое выражается через *специальную двухпараметрическую функцию Миттаг-Леффлера*, задаваемую абсолютно и равномерно сходящимся на любом компакте из \mathbb{C} функциональным рядом

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

В частном случае при $a = 0$ задача (5) совпадает с задачей Коши

$$x'(t) = \lambda x(t), \quad x(0) = 1, \quad t \in [0, 1], \quad \operatorname{Re} \lambda \ll 0,$$

для уравнения Далквиста, называемая также «жёсткой» задачей [3], единственным решением которой является быстро убывающая функция

$$x(t) = e^{\lambda t}.$$

Поскольку при любом натуральном n выполняется равенство $\Gamma(n) = (n-1)!$, то

$$E_{1,1}(\lambda t) = e^{\lambda t},$$

т. е. решение задачи (5) является также согласованным со случаем $a = 0$. Отметим, что интегральные аналоги «жёсткой» задачи в форме интегральных уравнений Вольтерра первого и второго рода используются при исследовании устойчивости алгоритмов численного решения ИАУ с гладким ядром (см., например, статью [4] и монографию [5]).

Применяя разностную схему (2) к уравнениям (3) и (4), получим

$$\sum_{\ell=0}^i \omega_{i+1, \ell} \left((t_{i+1} - t_{\ell})^a - \frac{\lambda}{\Gamma(2-a)} (t_{i+1} - t_{\ell}) \right) x_{\ell} = t_{i+1}, \quad (5)$$

$$x_i - \frac{\lambda}{\Gamma(1-a)} \sum_{\ell=0}^i \omega_{i+1, \ell} x_{\ell} = 1. \quad (6)$$

С учётом обозначения $z = \lambda h^{1-a}$, характеристический полином алгоритма (5) имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{i+1} \frac{(-1)^k \Gamma(3-a)}{k!(1-a)\Gamma(3-a-k)} \sum_{j=k+1}^{i+2} \left((i+3-j)^{1-a} - (i+2-j)^{1-a} \right) \left((i+3-j)^a - \frac{z}{\Gamma(2-a)} (i+3-j) \right) x_j = \\ = \sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k \frac{\Gamma(3-a)}{k!\Gamma(3-a-k)} (i+k-1), \end{aligned}$$

а характеристический полином алгоритма (6) имеет следующую форму

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k \frac{\Gamma(2-a)}{k!\Gamma(2-a-k)} \left(x_{i+1-k} - z \sum_{\ell=0}^{i+1-k} \frac{((i+2-k-\ell)^{1-a} - (i+1-k-\ell)^{1-a})}{\Gamma(2-a)} x_{\ell} \right) = \\ = \sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k \frac{\Gamma(2-a)}{k!\Gamma(2-a-k)}. \end{aligned}$$

Указанные полиномы построены с помощью *конечных разностей Грюнвальда – Летникова*

$$\Delta^{2-a} x_{i+1} = \sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k \frac{\Gamma(3-a)}{k!\Gamma(3-a-k)} x_{i+1-k}, \quad \Delta^{1-a} x_{i+1} = \sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k \frac{\Gamma(2-a)}{k!\Gamma(2-a-k)} x_{i+1-k},$$

дробных порядков $2-a$ и $1-a$, которые при $a=0$ сводятся к конечным разностям второго и первого порядков соответственно.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Иркутской области в рамках научного проекта № 20-41-385002 p_Наставник.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brunner H., Bulatov M.V. On singular systems of integral equations with weakly singular kernels // Proceeding of the 11-th Baikal International School Seminar "Optimization Methods and their Applications". – Irkutsk: ESI SB RAS, 1998. – P. 64–67.
2. Булатов М.В., Будникова О.С. Численное решение интегро-алгебраических уравнений со слабой особенностью в ядре k-шаговыми методами // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2015. – Т. 13. – С. 3–15.
3. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 312 с.
4. Булатов М.В., Будникова О.С. Исследование многошаговых методов для решения интегроалгебраических уравнений: построение областей устойчивости // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т. 53, № 9. – С. 1448–1459.
5. Brunner H., van der Houwen P.J. The numerical solution of Volterra equations. – Amsterdam: North-Holland, 1986. – 588 p.

УДК 533.697.4

**ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ДВИЖЕНИЯ НЕСФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ
КОНДЕНСИРОВАННОЙ ФАЗЫ В ПОТОКЕ ПРОДУКТОВ СГОРАНИЯ**А.В. Червакова, К.В. Костюшин

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. И.В. Еремин

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 27, 634050

E-mail: ch-nastya1997@mail.ru**INVESTIGATION OF THE CHARACTERISTICS OF THE MOTION OF NON-SPHERICAL
CONDENSED PHASE PARTICLES IN THE FLOW OF COMBUSTION PRODUCTS**A.V. Chervakova, K.V. Kostyushin

Scientific Supervisor: Ass. Pr., PhD I.V. Eremin

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: ch-nastya1997@mail.ru

Abstract. *A method for calculating the motion of a conglomerate of arbitrary shape in an accelerating flow of a viscous compressible heat-conducting gas is implemented. The simulation of the movement of arbitrary configurations of conglomerates in an accelerating flow of combustion products has been carried out. It was found that when moving in an accelerating flow, stabilization of the trajectory of movement of conglomerates along the axis is observed.*

Введение. В настоящее время активно исследуются высокоэнергетические материалы, содержащие добавки на основе бора алюминия, магния, углерода и др. Они нашли применение в смесевых твердых топливах для ракетных двигателей на твердом топливе (РДТТ), в твердых горючих для прямоточных воздушно-реактивных двигателей (ПВРД). Основное назначение таких добавок заключается в увеличении энергетических показателей твердотопливного заряда [1]. За время пребывания в камере сгорания двигательной установки частицы высокоэнергетических добавок претерпевают ряд физико-химических превращений, приводящих к формированию двухфазного потока продуктов сгорания. Для неплавящихся частиц на поверхности горения образуются конгломераты, имеющие несимметричную форму. Конгломераты срываются с поверхности горения и уносятся потоком газообразных продуктов сгорания. Целью данной работы является изучение характеристик движения отдельных несферических частиц конденсированной фазы в ускоряющемся потоке продуктов сгорания.

Методика расчета. Рассматривается задача моделирования движения конгломерата в ускоряющемся газовом потоке. Газ является вязким, сжимаемым, теплопроводным. Эффекты теплообмена между газом и конгломератом, горение и разрушение конгломерата не учитываются. Для описания нестационарного течения вязкого сжимаемого теплопроводного газа используется система уравнений Навье-Стокса [2]:

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u_j] = 0, \quad (1)$$

де ρ – щільність, кг/м³; t – час, с; x_j – декартова координата, м; u_j – проекція вектора швидкості потоку, м/с.

Уравнение движения:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - \overline{\rho u_i u_j} \right] = 0, \quad (2)$$

де p – тиск, Па; δ_{ij} – оператор Кронекера; μ – коефіцієнт динамічної в'язкості, Па·с.

Уравнение сохранения энергии:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho u_j E + u_j p + q_j - u_i \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - \overline{\rho u_i u_j} \right) \right] = 0, \quad (3)$$

де E – повна енергія, Дж; q_j – тепловий потік, Дж/(м²·с).

Система уравнений (1)–(4) замыкается уравнением состояния идеального газа:

$$p = \rho RT, \quad (4)$$

де T – температура, К; R – удельная газовая постоянная, Дж/(кг·К).

Для разрешения системы уравнений вязкого газа использовалась модель турбулентности SST $k-\omega$ [3].

В качестве начальных условий в расчетной области используются параметры установившегося течения в сопле. В качестве граничного условия на входе фиксируется давление P и температура T , на стенках ставятся условия непротекания, на поверхности конгломератов задаются условия прилипания.

Численное моделирование движения несферических частиц в сопловом блоке РДТТ выполнялось с использованием программного пакета ANSYS Fluent. Движение конгломерата в расчетной области реализуется при помощи специального программного кода, используемого в качестве UDF-функции.

Результаты расчетов и выводы. Для тестирования разработанной методики и алгоритма проведены расчеты движения сферической частицы и двух типов конгломератов эквивалентных по массе и количеству частиц в ускоряющемся газовом потоке. Геометрия расчетной области представлена на рисунке 1. На рисунке 2 показаны траектории движения исследуемых конгломератов в ускоряющемся потоке. При движении в ускоряющемся потоке наблюдается стабилизация траектории движения конгломератов по оси.

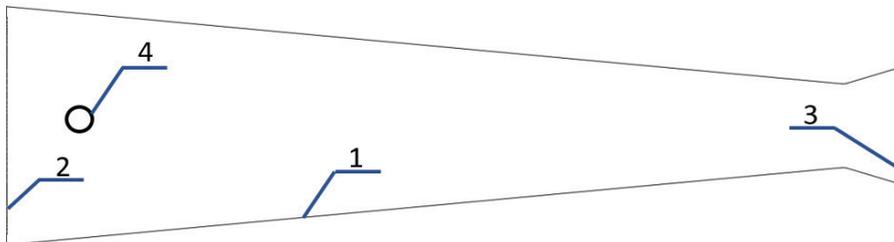


Рис. 1. Геометрия расчетной области: 1 – стенки сопла; 2 – входное сечение; 3 – выходное сечение; 4 – конгломерат

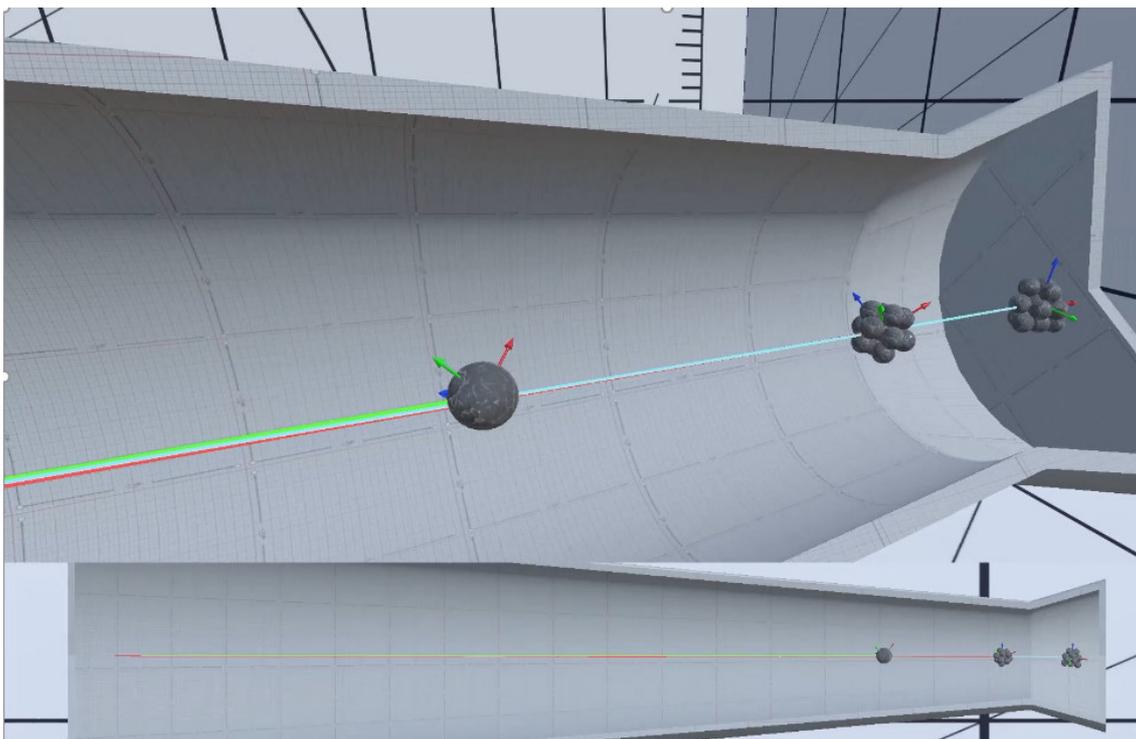


Рис. 2. Движение конгломератов в ускоряющемся потоке

Построенная модель является одной из составных частей более общей физико-математической модели, предназначенной для детального численного исследования движения конденсированных продуктов сгорания с учетом процессов теплового, химического и механического взаимодействия частиц друг с другом и с газообразными продуктами сгорания.

Работа выполнена при поддержке РФФ (грант № 21-19-00541).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Штехер М.С. Топлива и рабочие тела ракетных двигателей // М.: Машиностроение. – 1976. – С. 167.
2. Пирогов В. Б., Северинов Л. И. О расчете внутренних течений вязкого теплопроводного газа // ВИНТИ, № 3359-77 Деп.
3. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten years of industrial experience with the SST Turbulence model // Proceedings of the 4th International Symposium on Turbulence. Heat and Mass Transfer. Begell House Inc., West Redding. – 2003. – P. 625–632.

УДК 536.24

**АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ПОДЛОЖКИ НА ТЕРМОГРАВИТАЦИОННУЮ
КОНВЕКЦИЮ ПСЕВДОПЛАСТИЧНОЙ НАНОЖИДКОСТИ В ПОЛОСТИ С ИСТОЧНИКОМ
ПОСТОЯННОГО ОБЪЕМНОГО ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ**

Д.С. Лоенко

Научный руководитель: доцент, д. ф.-м. н. М.А. Шеремет
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: whiteink@bk.ru

**ANALYSIS OF THE HEAT-CONDUCTING SUBSTRATE EFFECT ON THE PSEUDOPLASTIC
NANOFLUID THERMOGRAVITATIONAL CONVECTION IN A CAVITY WITH A SOURCE
OF CONSTANT VOLUMETRIC HEAT GENERATION**

D.S. Loenko

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Dr. M.A. Sheremet
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050
E-mail: whiteink@bk.ru

Abstract. This study is devoted to thermogravitational convection of pseudoplastic nanofluid in the cavity. The lower wall of the cavity is heat-conducting and a local heater placed on this solid wall has a constant volumetric heat generation. The cavity is filled with a mixture of carboxymethyl cellulose with water and tiny solid particles of copper oxide. The problem is described by unsteady Oberbeck-Boussinesq equations with non-primitive variables such as stream function and vorticity. In the course of the study, the influence of the volume fraction of solid nanoparticles, the height of the heat-conducting lower wall on nanofluid flow and heat transfer was analyzed.

Введение. Псевдопластичная наножидкость КМЦ/вода+CuO заполняет квадратную замкнутую полость, вертикальные и верхняя стенки которой являются охлаждающими с постоянной температурой T_c . Нижняя стенка полости является теплопроводной и имеет высоту h . Внешние границы нижней стенки являются адиабатическими. На нижней стенке расположен источник с постоянной плотностью объёмного тепловыделения Q . Сила тяжести направлена вертикально вниз.

Дифференциальные уравнения, описывающие процесс нестационарного конвективного теплопереноса в приближении Обербека-Буссинеска в преобразованных безразмерных переменных «функция тока–завихренность», имеют следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = H_1(\phi) \left(\frac{Ra}{Pr} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left[\nabla^2 (\bar{M}\Omega) + S_\Omega \right] + H_2(\phi) \frac{\partial \Theta}{\partial X} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{H_3(\phi)}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_{bf}} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_{bf}} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) \right] \quad (3)$$

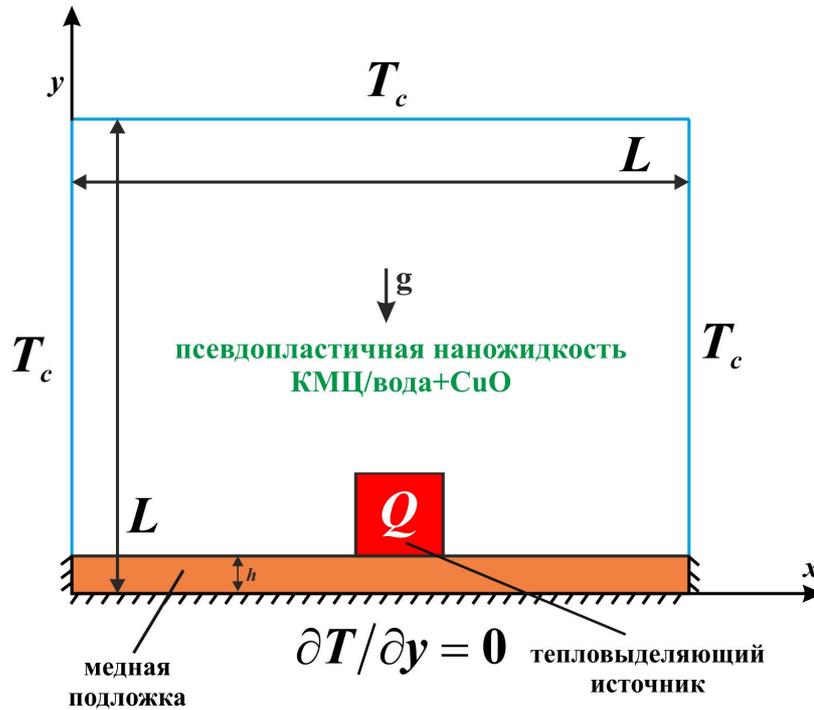


Рис. 1. Область решения задачи

Уравнение теплопроводности для источника энергии и нижней стенки:

$$\frac{\partial \Theta_{hs}}{\partial \tau} = \frac{\alpha_{hs}/\alpha_{bf}}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \Theta_{hs}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta_{hs}}{\partial Y^2} + 1 \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Theta_w}{\partial \tau} = \frac{\alpha_w/\alpha_{bf}}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \Theta_w}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta_w}{\partial Y^2} \right) \quad (5)$$

Вспомогательные функции:

$$\bar{M} = \left[4 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}},$$

$$S_{\Omega} = 2 \left[\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial X^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial Y^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} - 2 \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial X \partial Y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} \right],$$

$$H_1(\phi) = \frac{\mu_{nf} \cdot \rho_{bf}}{\mu_{bf} \cdot \rho_{nf}} = \frac{\mu_{nf}/\mu_{bf}}{(1-\phi + \phi \rho_p/\rho_{bf})},$$

$$H_2(\phi) = \frac{(\rho\beta)_{nf} \cdot \rho_{bf}}{(\rho\beta)_{bf} \cdot \rho_{nf}} = \frac{1-\phi + \phi(\rho\beta)_p/(\rho\beta)_{bf}}{1-\phi + \phi \rho_p/\rho_{bf}},$$

$$H_3(\phi) = \frac{(\rho c)_{bf}}{(\rho c)_{nf}} = \frac{1}{1-\phi + \phi(\rho c)_p/(\rho c)_{bf}}.$$

Псевдопластичный характер течения жидкости описывается степенным законом Оствальда-де-Вилля [1]:

$$\tau_{ij} = 2\mu_{nf} D_{ij} \quad (6)$$

Эффективный коэффициент вязкости наножидкости вычислялся с помощью соотношения Гуо и др. [2]:

$$\frac{\mu_{nf}}{\mu_{bf}} = \left(1 + 2.5\phi + 6.5\phi^2 \right) \left(1 + 350 \frac{\phi}{d_p} \right) \quad (7)$$

Вязкость базовой жидкости в соответствии со степенным законом определялась следующим соотношением: $\mu_{bf} = K(2D_{kl}D_{kl})^{\frac{n-1}{2}}$, где K — коэффициент плотности потока; n — показатель поведения жидкости, который равен 0.91. Учитывая, что показатель поведения жидкости $n < 1$, отметим

его соответствие псевдопластичным свойствам среды. Псевдопластичные жидкости имеют вязкость, которая уменьшается с увеличением скорости деформации, что делает такую среду эффективной в задачах охлаждения.

Эффективная теплопроводность наносuspензии вычислялась с помощью экспериментальной корреляции Жанга и Чой [3]:

$$\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_{bf}} = (1 - \phi) + 0.01 \frac{\lambda_p}{\lambda_{bf}} \phi + (18 \cdot 10^6) \frac{d_{bf}}{d_p} Re^2 Pr \phi \quad (8)$$

Начальные и граничные условия для системы (1)-(5) в безразмерном виде выглядят следующим образом:

$$\tau = 0 \rightarrow \Psi = \Omega = 0, \Theta = 0.0;$$

$$\tau > 0 \rightarrow$$

$$X = 0 \text{ \textit{e} } X = 1, 0 \leq Y \leq h/L, \frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0;$$

$$X = 0 \text{ \textit{e} } X = 1, h/L \leq Y \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \Theta = 0;$$

$$Y = 0, 0 \leq X \leq 1, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0;$$

$$Y = 1, 0 \leq X \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \Theta = 0;$$

$$\text{На поверхности источника: } \begin{cases} \Theta_{hs} = \Theta_{bf} \\ \lambda_{hs} \frac{\partial \Theta_{hs}}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial \Theta_{bf}}{\partial \bar{n}} \end{cases}$$

На поверхности подложки:

$$\Psi = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{n}^2}, \begin{cases} \Theta_w = \Theta_{bf} \\ \lambda_w \frac{\partial \Theta_w}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial \Theta_{bf}}{\partial \bar{n}} \end{cases}$$

Описанная задача решена на основе метода конечных разностей. Разработанный алгоритм решения был протестирован на более простых задачах [4]. Также было оценено влияние сеточных параметров на сходимость решения. В ходе исследования был проведен анализ влияния объемной доли наночастиц и высоты теплопроводной нижней стенки на возможность интенсификации отвода тепла от нагретого элемента. Результаты рассматривались в виде распределения линий тока и изотерм, а также по интегральным характеристикам – средней температуре в источнике тепла и среднему числу Нуссельта на поверхности нагретых стенок.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для молодых российских ученых (грант МД-5799.2021.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Khezzar L., Siginer D., Vinogarov I. Natural convection of power law fluids in inclined cavities // International Journal of Thermal Sciences. – 2012. – Vol. 53. – P. 8–17.
2. Guo S.S., Luo Z.Y., Tao W., Zhao J.F., Cen K.F. Viscosity of monodisperse silica nanofluids // Bull. Chin. Ceram. Soc. – 2006. – Vol. 25 (5). – P. 52–55.
3. Jang S.P., Choi S.U.S. Effects of Various Parameters on Nanofluid Thermal Conductivity // Journal of Heat Transfer. – 2007. – Vol. 129. – P. 617–623.
4. Лоечко Д.С., Шеремет М.А. Модели регуляризации при исследовании свободноконвективного тепло-массопереноса псевдопластичной жидкости в замкнутой дифференциально-обогреваемой полости // Вестник Пермского университета. Физика. – 2021. – № 3. – С. 13–22.

УДК 536.24

**ВЛИЯНИЕ ВНУТРЕННЕГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО БЛОКА НА ИНТЕНСИВНОСТЬ
ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ЗАМКНУТОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОБОГРЕВАЕМОЙ
ПОЛОСТИ**Е.В. Шулепова

Научный руководитель: доцент, д.ф.-м.н. М.А. Шеремет
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: elena.vasilevna.1996@mail.ru

**INTERNAL HEAT-CONDUCTING BODY EFFECT ON NATURAL CONVECTION STRENGTH
IN A DIFFERENTIALLY-HEATED CAVITY**E.V. Shulepova

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Dr. M.A. Sheremet
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050
E-mail: elena.vasilevna.1996@mail.ru

Abstract. *This research is devoted to the numerical simulation of natural convection in a cavity with an internal heat-conducting block. The Oberbeck-Boussinesq partial differential equations written using non-primitive variables have been solved by the finite difference technique. The analysis of the influence of the inner body geometry and the Rayleigh number on the flow structure and heat transfer has been carried out. The optimal values of the control parameters illustrating the heat transfer enhancement have been defined.*

Введение. Микроэлектроника является первым звеном технологической цепочки радиоэлектронной промышленности. Продукция микроэлектроники (компоненты) используется для производства плат и частей оборудования, которые в дальнейшем применяются при производстве готовых изделий.

В современной жизни любая техника, которой мы пользуемся ежедневно, наполнена различными микроэлектронными компонентами. Одной из важных проблем в электронике является перегрев частей оборудования и её поломка. Немаловажную роль в отведении тепла от составных частей электронной техники играет их расположение и геометрическая форма.

Цель представленной работы – численный анализ естественной конвекции в квадратной дифференциально-обогреваемой полости с внутренним теплопроводным блоком и изотермическими вертикальными границами.

Определяющие уравнения и метод решения. Математическое описание поставленной задачи проведено в рамках механики сплошной среды с использованием основных законов сохранения массы, импульса и энергии. Ньютоновская теплопроводная жидкость, удовлетворяющая приближению Буссинеска, циркулирует внутри квадратной области (рисунок 1).

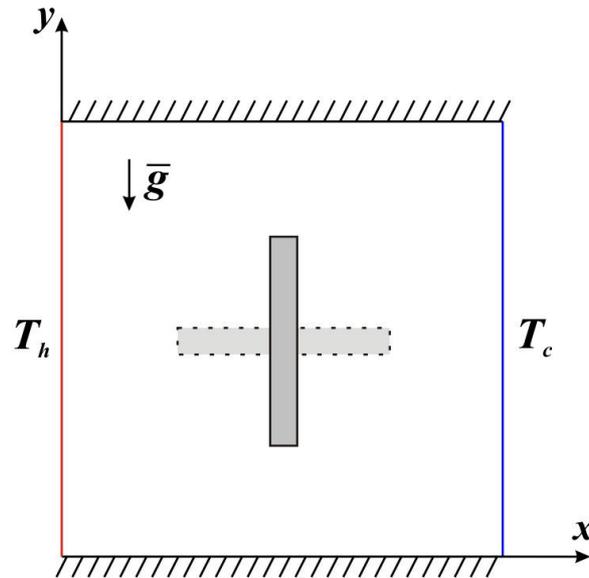


Рис. 1. Область исследования

Для моделирования теплопереноса в замкнутой полости с внутренним блоком за основу были взяты дифференциальные уравнения в размерных переменных «скорость–давление», имеющие следующий вид [1, 2]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + \rho g \beta (T - T_c) \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

$$(\rho \hat{n})_b \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_b \nabla^2 T \quad (5)$$

Здесь x, y – координаты декартовой системы координат; t – время; u, v – составляющие скорости в проекции на оси x, y , соответственно; ρ – плотность; p – давление; T – температура; μ – коэффициент динамической вязкости; β – температурный коэффициент объемного расширения; a – коэффициент температуропроводности; c_b – коэффициент теплоемкости материала внутреннего блока; λ_b – коэффициент теплопроводности материала внутреннего блока.

Краевая задача формулируется с использованием безразмерных преобразованных переменных «функция тока – завихренность». В результате использования новых функций и обезразмеривания задачи, нестационарные дифференциальные уравнения примут вид [2, 3]:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2} = -\omega \quad (6)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{y}} = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Pr} \cdot \text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (8)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{a_b/a_f}{\sqrt{\text{Pr} \cdot \text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (9)$$

Начальные и граничные условия для сформулированной системы дифференциальных уравнений (6)–(9) в безразмерном виде выглядят следующим образом:

$$\tau = 0: \psi = 0, \omega = 0, \theta = 0.5 \text{ при } 0 \leq \bar{x} \leq 1, 0 \leq \bar{y} \leq 1;$$

$$\tau > 0: \psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} = 0, \theta = 1 \text{ при } \bar{x} = 0, 0 \leq \bar{y} \leq 1;$$

$$\psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} = 0, \theta = 0 \text{ при } \bar{x} = 1, 0 \leq \bar{y} \leq 1;$$

$$\psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} = 0, \frac{\partial \theta}{\partial \bar{y}} = 0 \text{ при } \bar{y} = 0, 1, 0 \leq \bar{x} \leq 1$$

$$\psi = \xi, \frac{\partial \psi}{\partial \bar{n}} = 0, \begin{cases} \theta_f = \theta_b \\ \lambda_f \frac{\partial \theta_f}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial \theta_b}{\partial \bar{n}} \end{cases} \text{ на внутренней границе блока}$$

При решении поставленной краевой задачи используется метод конечных разностей. Область, в которой определяется решение дифференциальных уравнений, покрывается расчетной равномерной сеткой – дискретным множеством точек. При переходе от дифференциальной задачи к разностной все дифференциальные операторы, входящие в уравнения, заменяются их разностными аналогами.

Численные исследования проведены в широком диапазоне изменения определяющих параметров, характеризующих режимы конвективного теплопереноса: число Рэлея ($Ra = 10^4 - 10^6$), число Прандтля ($Pr = 6.82$). Исследования также проводились для различных положений внутреннего теплопроводного блока и его геометрической формы (квадратная и прямоугольная).

В результате моделирования получены распределения изолиний функции тока и температуры, отражающие внутреннюю гидродинамику и тепловое состояние анализируемой системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-79-20141).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sivaraj C., Miroshnichenko I.V., Sheremet M.A. Influence of thermal radiation on thermogravitational convection in a tilted chamber having heat-producing solid body // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2020. – Vol. 115. – P. 104611.
2. Pop I., Sheremet M.A., Grosan T. Thermal convection of nanoliquid in a double-connected chamber // Nanomaterials. – 2020. – Vol. 10(3). – P. 588.
3. Shulepova E.V., Sheremet M.A., Oztop H.F. Natural convection of Al_2O_3 –water nanosuspension in a semi-open domain with composite fin // Physics of Fluids. – 2021. – Vol. 33. – P. 033606.

УДК 519.6:504.455

ВЛИЯНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ВЕТРА НА РАЗВИТИЕ ОСЕННЕГО ТЕРМОБАРА

Б.О. Цыденов

Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН,
Россия, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1, 634055

E-mail: tsydenov@iao.ru

THE IMPACT OF WIND DIRECTION ON THE DYNAMICS OF THE AUTUMNAL THERMAL BAR

B.O. Tsydenov

V.E. Zuev Institute of Atmospheric Optics SB RAS, Russia, Tomsk, Academician Zuev Sq. 1, 634055

E-mail: tsydenov@iao.ru

Abstract. *The results of numerical modeling of wind direction effects during the evolution of the autumnal thermal bar in Barguzin Bay of Lake Baikal are presented. The comparative analysis of temperature distributions showed that the horizontal movement speed of the thermal front is greater at easterly wind than at westerly wind. It was also found that the cooling of the bay is faster in the case of easterly wind direction.*

Введение. Необычное природное явление, называемое *термобаром*, возникает в озерах средних широт дважды в год – весной и осенью. Термобар представляет собой узкую зону погружения водных масс в районе температуры максимальной плотности ($\sim 4^\circ\text{C}$) и ограничивает горизонтальный водообмен между прибрежным и центральным участками озера.

Формирование, особенность развития и длительность существования термобара зависит от ветрового режима. Также известно, что направление ветра значительно влияет на перемещение термического фронта. Настоящая работа нацелена на исследование влияния направления ветра на динамику осеннего термобара в Баргузинском заливе оз. Байкал методами численного моделирования.

Описание математической модели. Негидростатическая модель для воспроизведения термогидродинамических процессов в крупном водоеме включает в себя уравнения количества движения, энергии, неразрывности и турбулентных характеристик [1]. Поглощение коротковолновой радиации рассчитывается по закону Бугера–Ламберта–Бэра:

$$H_{sol} = H_{Sol,0} (1 - r_s) \exp(-\varepsilon_{abs} d),$$

где $H_{Sol,0}$ – коротковолновая радиация на поверхности водоема, $\text{Вт}/\text{м}^2$; $r_s \approx 0.2$ – коэффициент отражения воды; $\varepsilon_{abs} \approx 0.3 \text{ м}^{-1}$ – коэффициент поглощения коротковолновой радиации в воде; d – глубина, м. Параметризация потоков длинноволновой радиации, явного и скрытого тепла осуществляется по расчетным формулам модели № 3 из [2]. Сдвиговое напряжение ветра на поверхности озера описывается законом

$$\tau_{surf}^u = c_{10} \rho_a \sqrt{v_{10}^2 + u_{10}^2} \cdot u_{10},$$

$$\tau_{surf}^v = c_{10} \rho_a \sqrt{v_{10}^2 + u_{10}^2} \cdot v_{10},$$

где ρ_a – плотность воздуха у поверхности воды; $c_{10} = 1.3 \times 10^{-3}$; u_{10}, v_{10} – составляющие скорости ветра на высоте 10 м над поверхностью озера.

Область исследования и параметры задачи. В качестве области исследования выбрано вертикальное сечение Баргузинского залива оз. Байкал, начало системы координат совпадает с устьем р. Баргузин $53^{\circ}25'30''$ с. ш. $108^{\circ}59'50''$ в. д. (рис. 1, а). Вычислительная область $20 \text{ км} \times 100 \text{ м}$ (рис. 1, б) покрыта равномерной ортогональной сеткой с шагами $h_x=25 \text{ м}$ и $h_z=2.5 \text{ м}$. Шаг по времени – 10 с .

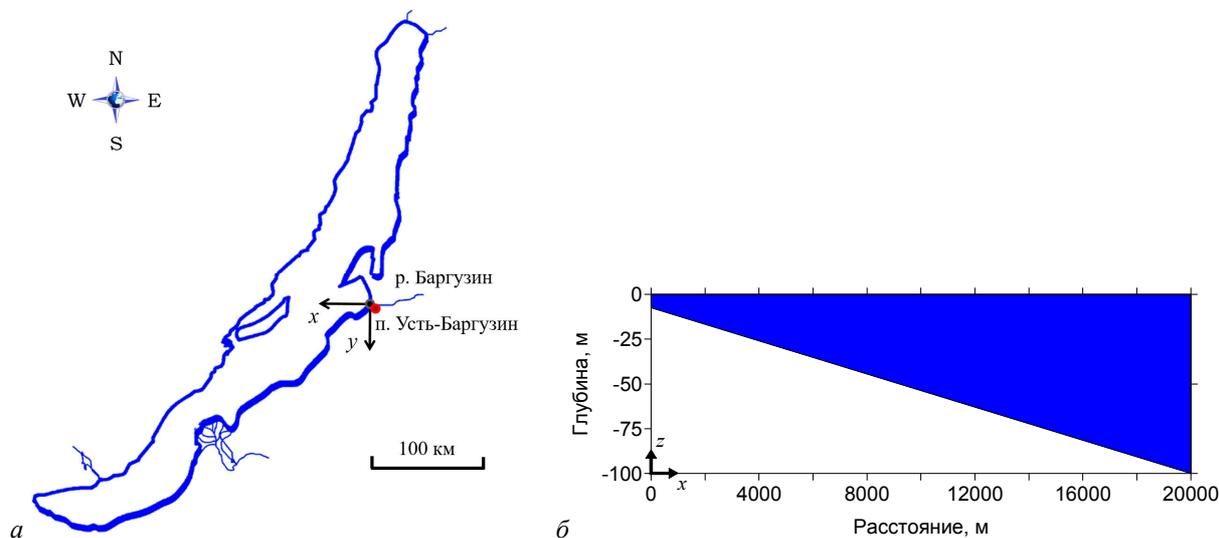


Рис. 1. Схема разреза оз. Байкал (а); геометрия расчётной области (б)

Начальное распределение температуры воды однородно и соответствует 7°C (согласно данным космических съемок температуры воды на поверхности Баргузинского залива в последней декаде октября 2015 г. [3]). Температура воды в устье р. Баргузин в начальный момент времени равна 1.5°C и понижается на 0.017°C в сутки. Минерализация воды в озере составляет 96 мг/л [4], в реке – 149 мг/л [5]. Скорость течения р. Баргузин при впадении в озеро – 0.5 см/с . Для расчета тепловых потоков на поверхности водоема используются данные о температуре воздуха, относительной влажности, атмосферном давлении и облачности из архива погодных условий метеостанции п. Усть-Баргузин за ноябрь 2015 г. В настоящей работе исследованы эффекты ветров западного и восточного направлений с переменной скоростью (рис. 2).

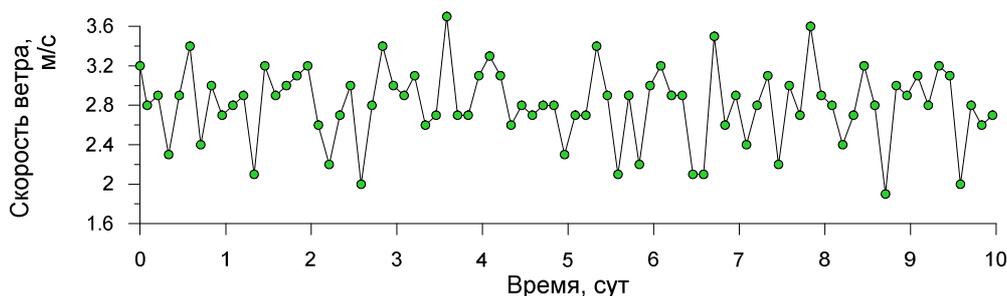


Рис. 2. Скорость ветра в вычислительных экспериментах

Результаты моделирования. Полученные в результате вычислительных экспериментов распределения температуры воды указывают на существенное влияние направления ветра на термическое состояние Баргузинского залива оз. Байкал. Согласно положению изотермы 4°C термобар на 10 сутки при западном ветре расположен на расстоянии 4.9 км (рис. 3, а), а при восточном ветре – на расстоянии 6.1 км от устья реки (рис. 3, б).

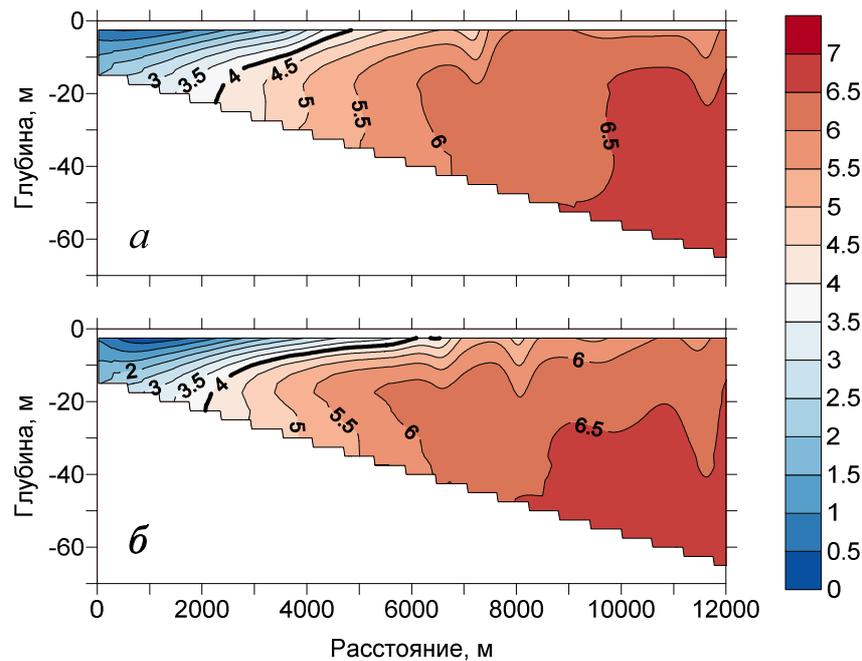


Рис. 3. Распределение температуры [°C] на 10 сутки при западном (а) и восточном (б) ветре

Под воздействием восточного ветра на водную поверхность наблюдается интенсивное распространение холодных вод из реки в озеро (рис. 3, б). Тем самым ветер восточного направления способствует более быстрому охлаждению залива.

Заключение. На основе численного моделирования установлено влияние направления ветра на динамику осеннего термобара в Баргузинском заливе оз. Байкал. Сравнительный анализ температурных распределений показал, что скорость горизонтального движения термического фронта при восточном ветре выше, чем при западном ветре. Также выявлено, что под воздействием ветра восточного направления охлаждение залива происходит быстрее.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-00013, <https://rscf.ru/project/21-71-00013/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tsydenov B.O., Kay A., Starchenko A.V. Numerical modeling of the spring thermal bar and pollutant transport in a large lake // Ocean Modelling. – 2016. – V. 104. – P. 73–83.
2. Tsydenov B.O., Starchenko A.V. To the selection of heat flux parameterization models at the water–air interface for the study of the spring thermal bar in a deep lake // Proc. SPIE. – 2015. – V. 9680. – P. 96800.
3. Бюллетень космического мониторинга Байкальской природной территории [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://geol.irk.ru/baikal/law/mlawecmon/mlawcosmmon> (дата обращения: 20.10.2021)
4. Shimaraev M.N., Verbolov V.I., Granin N.G., Sherstyankin P.P. Physical Limnology of Lake Baikal: a Review. – Irkutsk–Okayama, 1994. – 81 p.
5. Вотинцев К.К. Гидрохимия. В кн.: Проблемы Байкала / Под. ред. Г.И. Галазий, К.К. Вотинцев. – Новосибирск, 1978. – Т. 16, № 36. – С. 124–146.

УДК 536.37

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ГОРЮЧИХ СТРОИТЕЛЬНЫХ
МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ ТЕПЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ РАЗЛИЧНОЙ
ИНТЕНСИВНОСТИ**

Т.И. Медведева, Д.П. Касымов, М.В. Агафонцев, М.Б. Тохметова

Научный руководитель: к.ф.-м.н., Д.П. Касымов

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: tatedmedvedeva@yandex.ru

**EXPERIMENTAL STUDY OF THE BEHAVIOR OF COMBUSTIBLE BUILDING MATERIALS
UNDER CONDITIONS OF HEAT EXPOSURE OF VARYING INTENSITY**

T.I. Medvedeva, D.P. Kasymov, M.V. Agafontsev, M.B. Tokhmetova

Scientific Supervisor: PhD D.P. Kasymov

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: tatedmedvedeva@yandex.ru

***Abstract.** Wood is a renewable and easily processed material that has been used in the construction industry for thousands of years. Its use remains widespread, ranging from structural frames to floors, panels, doors, interior and exterior woodwork and furniture. Wood is one of the most sustainable and environmentally friendly materials. A tree is an integral part of structures. The often unavoidable danger of fire makes wood a very desirable material for further research. In addition to its fire resistance and low heat release rate, wood products have long been required to resist burning and maintain structural integrity while still providing protection when exposed to fire or heat. To understand and change the fire resistance of wood, it is necessary to know as much as possible about the decomposition processes. The test results are highly dependent on various parameters, including changes in the gas composition, temperature, heating rate, and sample size. The use of wood is restricted by various safety requirements and regulations regarding its flammability and spreading fire characteristics. To improve the reaction to fire, wood products are usually treated with flame-retardants.*

Введение. В последние годы наблюдается увеличение количества природных пожаров на природно-урбанизированных территориях (Wildland Urban Interface Fires). Воспламенение построек в зоне раздела природной и городской сред является серьезной международной проблемой из-за крупномасштабных пожаров в Австралии, Греции, Португалии, России и США. Для России, где леса занимают большую территорию, пожары на природно-урбанизированной территории являются национальной проблемой, а ущерб, наносимый реальному сектору экономики, исчисляется десятками и сотнями миллионов долларов в год. Примером могут служить разрушительные пожары, произошедшие в 2015 году в России в республике Хакасия, в результате которых в считанные часы полностью выгорело несколько населенных пунктов.

Основными факторами, влияющими на воспламенение строительных материалов и распространения таких пожаров, являются радиационный и конвективный перенос тепла от пламени и

горящие частицы, которые могут накапливаться на крыше и в углах зданий, заборах или найти иной способ попадания внутрь помещений и привести к их воспламенению. Сгорит дом или нет, зависит от факторов, которые влияют на воспламеняемость. Использование дерева ограничено различными требованиями безопасности и правилами, касающиеся его воспламеняемости и распространения огненных характеристик. Чтобы улучшить реакцию на огонь, изделия из древесины обычно обрабатываются антипиренами.

Экспериментальная часть. Проведен комплекс экспериментальных исследований в лабораторных условиях с применением инфракрасной камеры научно-исследовательского класса JADE J530SB по оценке поля температуры на поверхности образцов древесных строительных материалов в результате воздействия модельного низового лесного пожара слабой интенсивности. За основу была взята модель низового лесного пожара, как наиболее распространённого в природных условиях, моделирование которого в лабораторных условиях не требует существенных технических затрат [1]. В качестве лесного горючего материала рассматривалась хвоя сосны, запас лесного горючего материала (ЛГМ) выбирался в соответствии с известными данными [2].

В результате съемки на инфракрасную камеру были получены последовательности термограмм, дальнейшая обработка которых производилась с использованием программного обеспечения «Altair» а также разработанной в ходе реализации проекта программы «Tempfild-v.1» [3]. Для анализа динамики изменения температуры на поверхности исследуемого образца была предложена следующая обработка. Зная размеры матрицы инфракрасной камеры и масштабный коэффициент (расстояние от объектива камеры до торца образца), на полученной термограмме были определены границы образца на кадре. Для того чтобы получить таблицу температур, соответствующую данному образцу, был произведен экспорт значений температуры, соответствующий каждому пикселю матрицы.

Использование бесконтактного метода ИК-диагностики позволило экспериментально определить распределение температуры, а также теплонпряженные участки на поверхности образцов в результате воздействия модельного очага горения (рис. 1).

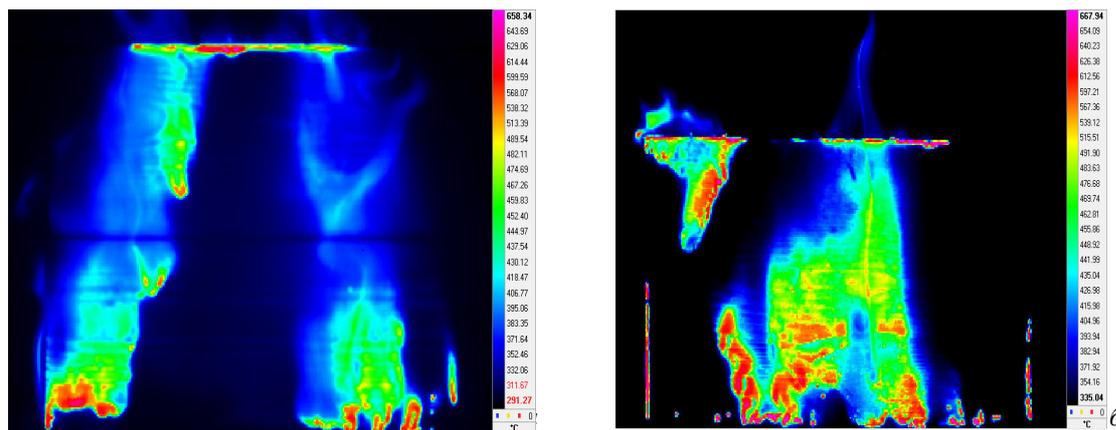


Рис. 1. Мгновенное распределение поля температуры на поверхности образцов (а – блок хаус; б – осина; в – сосна) после воздействия модельного очага низового лесного пожара

Результаты. Экспериментально проанализировано влияние различных огнезащитных составов (огне-био защитная пропитка для древесины «ФУКАМ», «Pirilax»-Classic, «СЕНЕЖ ОГНЕБИО ПРОФ»), а также огнезащитный состав «МИГ-09») на пожароопасные свойства образцов древесных строительных материалов. Отмечено существенное снижение температуры поверхности образцов древесины,

обработанных огнезащитными пропитками с аналогичными необработанными образцами (табл. 1).

Таблица 1

Значения максимальной температуры $T_{max av}^$ на поверхности образцов древесины в зависимости от применяемого огнезащитного состава (на примере сосны)*

Тип строительного материала	Огнезащитный состав	$T_{max av}^*$, °С
Доска строительная (сосна)	«Pirilax Classic»	303
	«СЕНЕЖ ОГНЕБИО ПРОФ»	236
	«МИГ-09»	260
	«ФУКАМ»	244
	Без пропитки	740

Сравнительный анализ показывает, в зависимости от сорта древесины эффективность обработки поверхностными огнезащитными пропитками разных производителей поверхностей выбранных строительных материалов не превышает 30 % на основе метода определения времени воспламенения, скорости и глубины обугливания.

Определены скорости обугливания, а также величина глубины обугливания образцов древесины в зависимости от сорта древесины, а также типа применяемого огнезащитного состава. В частности, без использования предварительной обработки огнезащитным составом, скорость обугливания вдоль волокон плоских образцов из сосны при воздействии очага горения низового лесного пожара составила в экспериментах 0,2 мм/мин, осины – 0,22 мм/мин, лиственницы – 0,35 мм/мин. Полученные результаты согласуются с работой [4], в которой оценивалась средняя скорость обугливания древесины в зависимости от интенсивности внешнего теплового потока.

Заключение. Предложена оригинальная методика постановки геометрии эксперимента с регистрацией инфракрасного изображения температурного поля торца исследуемого образца при воздействии на его фронтальную поверхность теплового потока. Использование в качестве излучателя теплового потока эталонного излучателя АЧТ позволяет иметь исследователю источник тепла с высокой однородностью плотности теплового потока, большой диапазон задаваемых температур с погрешностью поддержания 1,0 °С задаваемой температуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Медведева Т.И., Агафонцев М.В., Касымов Д.П. Исследование влияния типа огнезащиты и способа ее нанесения на пожарную опасность древесины // Сопряженные задачи механики реагирующих сред, информатики и экологии. Материалы XXII Всероссийской научной конференции с международным участием, посвященной 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко. – Томск, 2021. – С. 77-79.
2. Валендик Э.Н., Матвеев П.М., Сафронов М.А. Крупные лесные пожары. - Москва: Наука, 1979. – 198 с.
3. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018660031 «Tempfild-v.1. Построение и анализ поля температуры по данным, полученным при помощи инфракрасной камеры JADE J530SB» /авторы: Агафонцев М.В., Касымов Д.П., Рейно В.В., Лобода Е.Л. Зарегистрирована 28.08.2018 г.
4. Лобода Е.Л., Касымов Д.П., Агафонцев М.В., Рейно В.В. и др. Влияние малых природных пожаров на характеристики атмосферы вблизи очага горения. //Оптика атмосферы и океана. 2020. – Т. 33. № 10 (381). – С. 818-823.

УДК 504.06

**ОБЗОР ПОДХОДОВ К ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ПОВЕДЕНИЯ
КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ ОТ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПОТОКА
ГОРЯЩИХ И ТЛЕЮЩИХ ЧАСТИЦ**

М.Б. Тохметова

Научный руководитель: к. ф.-м. н. Д.П. Касымов

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: madina.tokhmetova@mail.ru

**REVIEW OF APPROACHES TO PHYSICAL AND MATHEMATICAL MODELING
OF THE BEHAVIOR OF STRUCTURAL ELEMENTS OF BUILDINGS AND STRUCTURES
FROM THE IMPACT OF SPOT FIRES**

M.B. Tokhmetova

Scientific Supervisor: PhD, D.P.Kasymov

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: madina.tokhmetova@mail.ru

Abstract. *As the set of experiments result, statistically substantiated data were obtained on the laws of ignition of a model angular structure under conditions of a point source of heat exposure. The use of IR diagnostics made it possible to control the thermal picture in the experimental area, as well as to capture areas of the highest and lowest heating. In the Large Aerosol Chamber of IAO SB RAS, preliminary experiments were carried out on a "Firebrand Shower" model exposure, which is naturally occurring firebrands with some types of construction materials (chipboards). The exposure of the samples to flow of firebrands was provided using a firebrand generator of own original design. It was experimentally confirmed that particle size plays a significant role in the ignition of a building structure. If the characteristic particle size, which can be defined as the ratio of its volume to the surface area in contact with the wood, is less than a certain characteristic value, then the ignition mode with a sharp temperature maximum near the phase interface is not fulfilled. This can be explained by the prevailing heat removal into the external environment in comparison with the amount of heat coming from a heat gun and resulting from chemical reactions.*

Введение. В среднем в США ежегодно происходит более 73 000 лесных пожаров. Эти лесные пожары сжигают миллионы акров, разрушают дома и, в некоторых случаях, приводят к травмам или гибели владельцев домов и пожарного персонала. Во всем мире растет число и интенсивность лесных пожаров, причем крупные лесные пожары происходят вне обычного пожароопасного сезона и истощают ресурсы для тушения пожаров. Одна из проблем в борьбе с лесными пожарами заключается в том, что они распространяются по трем основным причинам: 1) перенос и осаждение тлеющих углей; 2) лучистое тепло; 3) воздействие пламени. Риск возгорания от тлеющих углей зависит от нескольких факторов, включая: количество тлеющих углей и продолжительность воздействия; Количество горючего мусора или материалов вблизи здания; условия окружающей среды (такие как температура, относительная

влажность и ветер). Поэтому **целью данной работы** является литературный обзор подходов к физико-математическому моделированию поведения конструктивных элементов зданий и сооружений от воздействия потока горящих и тлеющих частиц.

Методика эксперимента. Эксперименты проводились в Большой аэрозольной камере, которая дает возможность избавиться от влияния бокового и лобового ветра, оказывающее действие на характеристики летящих частиц. Для регистрации температуры полей были использованы тепловизоры JADE J530SB с применением оптического фильтра 2,5–2,7 мкм и размером матрицы 320×240 пикселей, и FLIRX6530scs рабочим спектральным интервалом 1,5–5,1 мкм и размером матрицы 640×512 пикселей. Для использованных тепловизоров применялись заводские калибровки для интерпретации зарегистрированного излучения в значение температуры.

Результаты. Проведение экспериментов для изучения огнестойкости строительных материалов и конструкций при воздействии горящих и тлеющих частиц нуждается в сопоставлении получаемых данных с натурными огневыми испытаниями. Обзор по текущему направлению дает понять, что имеются отдельные разрозненные научные группы, занимающиеся полунатурными и полигонными испытаниями генерации и взаимодействия горящих и тлеющих частиц природного происхождения с элементами строительных конструкций [1–6].

Укладывались листы древесных плит (ориентированно-стружечная плита, древесно-стружечная плита, фанера) в зоне наибольшего скопления частиц. Кроме горизонтально уложенных листов рассматривался случай модельной конструкции из древесных плит и забора. Листы по размеру 0,6×1,0 м толщиной 12 мм; плотность составляла 570–590 кг/м³. С помощью анализатора влажности марки ANDMX-50, с погрешностью определения влагосодержания 0,1 %, перед началом проведения экспериментов наблюдалось влагосодержание образцов, которое не превосходило 10 % для строительных панелей. В роли горящих частиц использовались кора и веточка сосны диаметром 2–4, 4–6, 6–8 мм и длиной 10, 20, 40 и 60 мм, а также древесные пеллеты диаметром 8 мм и древесные топливные гранулы длиной от 30 до 50 мм. Для оценки количества частиц, предварительно производилось взвешивание образцов, а также подсчет их количества перед загрузкой в бункер генератора.

В эксперименте предполагался случай накопления частиц на придомовой территории, а также в элементах крыши, когда реализуется сценарий повального верхового пожара, происходящего вблизи жилой застройки на природно-урбанизированной территории.

Стоит отметить, что была получена серия тепловизионных файлов, на которых зафиксирован процесс генерации и взаимодействия с настиленными на полу древесными плитами. Их дальнейшая обработка осуществлялась с использованием программного обеспечения «Altair».

Также получены последовательности термограмм, характеризующих тепловую картину на поверхности образца при вертикальном горении (рис. 1). Ссылаясь на полученные данные и 3 повтора эксперимента скорость распространения волны горения по результатам ИК-диагностики составила $6,83 \cdot 10^{-4}$ м/с.

По результатам анализа выявленных термограмм температура частиц в момент падения определена в интервале 490–650 °С. Учитывая это, температура в момент вылета из генератора горящих частиц составляет 750–800 °С. Было замечено, что минимальный запас частиц, необходимый для

зажигания древесного строительного материала, упавших в пламенном режиме в области 50×50 мм, составляет 6–10 шт.

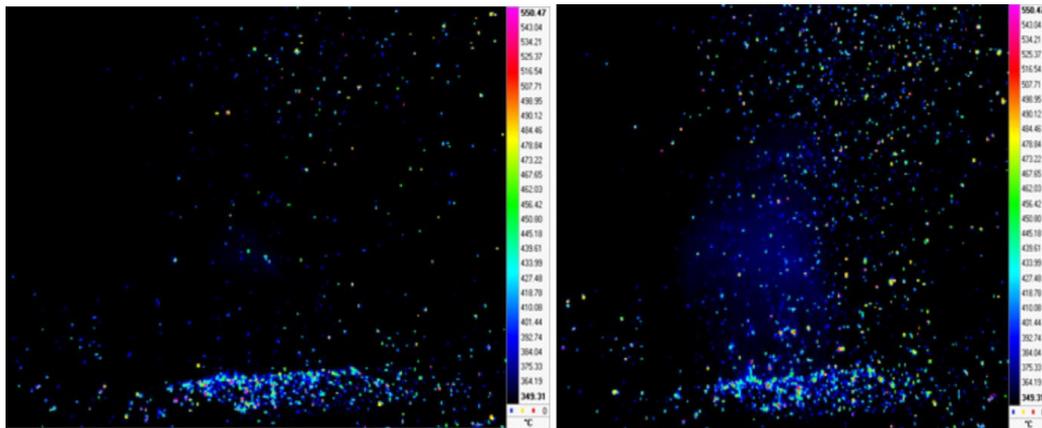


Рис. 1. Термограммы процесса генерации и взаимодействия с настеленными на полу древесными плитами и элементами конструкций из древесины

Заключение. В дальнейшем планируется проведение лабораторных и полунатурных экспериментов по зажиганию модельных конструкций из древесины из пластика (ограждение разной конфигурации, модель деревянного строения, модель стены здания с облицовкой из пластиковых материалов), а также разработка математической модели зажигания древесины в результате воздействия потока горящих частиц. При проведении экспериментов будут контролироваться следующие параметры: распределение температуры во фронте пожара, поле температуры поверхности модельных конструкций из древесины и пластика.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Manzello S.L., Park S., Cleary T.G. Investigation on the ability of glowing firebrands deposited within crevices to ignite common building materials // *Fire Safety Journal*. – 2009. – V. 44(6). – P. 894–900.
- 2 Manzello S.L., Shields J.R., Yang J.C. et al. On the use of a firebrand generator to investigate the ignition of structures in wildland–urban interface (WUI) fires // 11th International Conference on Fire Science and Engineering (INTERFLAM)’, 3–5 September 2007, London, UK. (Interscience Communications Ltd: London). – 2007. – P. 1–12.
- 3 Oliveira R., Quesada C., Viegas D. X. et al. Firebrand generator system applied to wildland-urban interface research // *Forest fire research*. – 2014. – P. 759–765.
- 4 Manzello S.L., Shields J.R., Hayashi Y. et al. Investigating the vulnerabilities of structures to ignition from a firebrand attack // *Fire Safety Science – Proceedings of the Ninth International Symposium*. – 2008. – V. 9. – P. 143–154.
- 5 Касымов Д.П., Агафонцев М.В., Перминов В.В. и др. Исследование влияния мощности теплового потока на характеристики воспламенения и обугливания древесных строительных материалов с применением методов ИК-диагностики // *Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика*. – 2019. – № 59. – С. 65–78.
- 6 Kasymov D.P., Agafontsev M.V., Marty'nov P. et al. Thermography of Wood-Base Panels During Fire Tests in Laboratory and Field Conditions // *Wood and Fire Safety : Proceedings of the 9th international conference on Wood & Fire Safety 2020*. [Cham]: Springer Nature. – 2020. – P. 203–209.

УДК 533.6

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОТОКА ГОРЯЩИХ И ТЛЕЮЩИХ ЧАСТИЦ
С КОНСТРУКТИВНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ**Д.П. Касымов, Е.Н. Голубничий, К.Е. Орлов

Научный руководитель: к.ф.-м.н. Д.П. Касымов

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: golubnichii_egor@mail.ru**SIMULATION OF THE FIREBRAND INTERACTION WITH STRUCTURAL FUELS**

D.P. Kasymov, E.N. Golubnichiy, K.E. Orlov

Scientific adviser: Ph.D. D.P. Kasymov

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin Ave., 36, 634050

E-mail: golubnichii_egor@mail.ru

Abstract. To verify the model, preliminary experiments were conducted on the effects of a stream of burning and smoldering firebrands with some types of combustible building materials. The flow of burning and smoldering firebrands was realized using the original installation. As a result of mathematical modeling, the following conclusions can be drawn. For small particles, the heat stored in them is insufficient to initiate the ignition process. If the particle size reaches a critical value, then the pyrolysis process begins in the area adjacent to it. This result agrees more closely with the model.

Введение. Во время пожара строительные и отделочные материалы подвергаются разнообразным видам теплового воздействия. Пожар — это неконтролируемый процесс горения вне специального очага. Пожар является прямой угрозой для человеческих жизней и способен уничтожить огромное количество материальных ценностей. Это и воздействие радиационного потока от фронта горения, и конвективного теплового потока, и потока горящих частиц, вызванного разрушением горящих конструкций или замыкания электропроводки, когда локально образуется электрическая дуга с высокими температурами, которая может стать причиной образования брызг расплавленного металла и вызвать воспламенение. В качестве примеров можно привести крупные пожары: 1 августа 2008 года в Турции, в окрестностях деревни Караташ начался пожар, который продлился 19 дней; 17 июня 2017 года в португальском округе Лейрия произошел лесной пожар, пожар стал крупнейшим по числу жертв и по площади в новейшей истории Португалии; 25 марта 2018 года, в городе Кемерово (Россия) произошло возгорание ТРЦ “Зимняя вишня”, в результате погибло 60 человек.

Целью настоящей работы является адаптация и усовершенствование предложенной в статьях [1-3] физико-математической модели для моделирования процесса зажигания слоя древесины тлеющими частицами растительного происхождения, а также сравнение результатов расчетов с экспериментом.

Математическая модель и методика эксперимента. В работе представлена модель зажигания и горения древесины в результате воздействия частиц.

Будем считать, что горючие компоненты, входящие в состав летучих продуктов пиролиза, можно моделировать одним эффективным горючим газом с реакционными свойствами монооксида углерода.

Уравнение теплопроводности для конденсированной фазы (частицы и слоя древесины) имеет вид:

$$C_f \frac{\partial \rho_f T_f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial z} \right] - Q_{td} \Phi_{td} - Q_{dr} \Phi_{dr} + Q_{pyr} \Phi_{pyr} + \varepsilon^* \frac{(U - \sigma T_f^4)}{\delta}, \quad (1)$$

где C_f , ρ_f , λ_f , ε^* – теплоемкость, плотность, теплопроводность и степень черноты конденсированной фазы.

Уравнение теплопроводности газовой фазы можно записать в виде:

$$C_{p,g} \left(\frac{\partial \rho_g T_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g v_x T_g}{\partial x} + \frac{\partial \rho_g v_y T_g}{\partial y} + \frac{\partial \rho_g v_z T_g}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial z} \right] + Q_g \Phi_g + \dot{h} + \beta (U - \sigma T_g^4) \quad (2)$$

Скорость химической реакции в газовой фазе:

$$\Phi_g = k_g \rho_g^2 M_{O_2} M_{CO} \exp \left(- \frac{E_g}{R_g T_g} \right) \quad (3)$$

Система уравнения, описывающая процессы диффузии, смешения, химического реагирования и горения в газовой фазе, поле течения, изменение энтальпии, начальные и граничные условия, а также информация о методе вычисления представлены в работе [1].

Результаты. При моделировании структуры течения предполагалось, что движение воздуха вблизи поверхности происходит в ламинарном режиме, влияние поступления в газовую фазу продуктов пиролиза и испаренной воды на структуру течения пренебрежимо мало [4].

Рис. 1. Иллюстрирует распределение температуры в окрестности частицы.

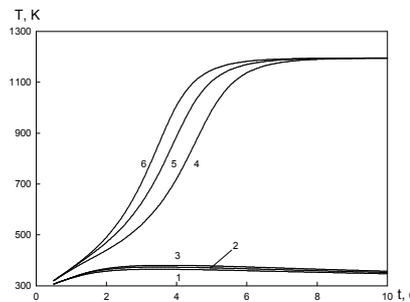


Рис. 1. Изменение температуры с течением времени: $L = 50$ мм, $H = 5$ мм, 1, 2, 3 – $D = 6$ мм, 4, 5, 6 – $D = 10$ мм, 1, 4 – точка А, 2, 5 – точка В, 3, 6 – точка С

Результаты исследования показывают, что в случае низкотемпературного режима температура в рассматриваемых точках различаются незначительно. В случае высокотемпературного режима процесс прогрева и сушки слоя древесины во всех рассматриваемых точках протекает практически одинаково (на это указывает близость температурных кривых в начальный период времени). Однако достижение критических условий зажигания (точка перегиба на температурных кривых) происходит сначала с подветренной стороны, затем в медианной точке В и только после этого с наветренной стороны.

В ходе эксперимента в большой аэрозольной камере ИОА СО РАН были получены скорости нагрева поверхностей, температуры образцов, тепловые потоки, зажигание. Так же стоит отметить, что

на процесс воспламенения образцов влияет размер и количество частиц, начальная температура образцов, а также наличие воздушного потока в зоне падения частиц.

Таблица 1

Данные о скорости нагрева древесины при воздействии горючих частиц

Образец древесины	Скорость нагрева поверхности, °С/сек	Время зажигания, сек
Угловая модель	0,1494	Нет зажигания
	0,3953	Нет зажигания
	0,2974	809
Забор	0,2412	650
	0,1738	874
	0,2024	Нет зажигания

Были получены термограммы температур горящих частиц в момент падения варьировалось от 270 -430 ° С. Температура на выходе из генератора горящих частиц составляла 350-700 ° С. Минимальный запас частиц, необходимый для воспламенения древесного строительного материала, попадающего в пламенном режиме в районе 50x50 мм, составляет 6 – 10 единиц.

Заключение. Для проверки модели была проведена серия экспериментов по определению поведения образцов древесных строительных материалов (фанера, ориентированно-стружечная плита, ДСП) в лабораторных условиях в результате воздействия сосновых веток. В экспериментах проверялось воздействие частиц на древесный слой при различных параметрах, таких как количество частиц, скорость ветра, тип древесного материала.

В экспериментах изучалось воздействие горючих материалов на древесный слой при различных параметрах, таких как размер и количество частиц, скорость ветра и порода древесины. Результаты экспериментов показали, что увеличение скорости ветра приводит к увеличению вероятности возгорания древесины. На основании полученных результатов можно сделать вывод о том, что кривая воспламенения образцов древесины горящими частицами имеет нелинейный характер и зависит от скорости ветра и размера частиц, а также их количества. Возгорание древесины возможно при уменьшении расстояния между частицами при уменьшении длины самих частиц. Этот результат более точно согласуется с моделью.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-71-10068).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Matvienko O, Kasymov D, Loboda E, Lutsenko A, Daneyko O. Modeling of Wood Surface Ignition by Wildland Firebrands // Fire. – 2022. V. 5(2). – P.38.
2. Filkov A., Kasymov D., Zima V., Matvienko O. Experimental investigation of surface litter ignition by bark firebrands // AIP Conference Proceedings. – 2016. – V. 1698. – P. 060004.
3. Matvienko O.V., Kasymov D.P., Filkov A.I., Daneyko O.I., Gorbatov D.A. Simulation of fuel bed ignition by wildland firebrands // International Journal of Wildland Fire. – 2018. – V. 27. – P. 550-561.
4. Ушаков, В.М., Матвиенко О.В. Численное исследование теплообмена и зажигания реакционноспособных стенок канала высокотемпературным потоком закрученного газа // Инженерно-физический журнал. – 2005. – Т. 78. – № 3. – С. 123-128.

УДК 539.376

**РАСЧЕТ ИЗГИБА ВЯЗКОУПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ НА УПРУГОМ
 ОСНОВАНИИ**

Д.Д. Дубровский

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.А. Светашков
 Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
 Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
 E-mail: ddd6@tpu.ru

**CALCULATION OF THE BENDING OF A VISCOELASTIC ISOTROPIC PLATE ON AN
 ELASTIC BASE**

D.D. Dubrovskiy

Scientific Supervisor: Prof, Dr. Sc. (Phys.-Math.) A.A. Svetashkov
 Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
 E-mail: ddd6@tpu.ru

***Abstract.** The problem of bending a viscoelastic plate on an elastic base is considered and its solution in displacements and stresses is obtained. Displacements and stresses are calculated using the Volterra method and the method of separation of variables. A comparative analysis of the listed methods for solving the viscoelastic problem based on relative errors for displacements and stresses is carried out.*

Введение. Несмотря на огромную востребованность анализа механических свойств вязкоупругих композитов, прогнозирования прочности и долговечности конструкций, задачи механики вязкоупругих тел недостаточно полно проработаны в современной литературе. Практически единственным аналитическим методом решения граничных задач остается принцип Вольтерра [1]. Главным препятствием широкого использования данного метода, помимо вычислительной сложности, является необходимость иметь соответствующее упругое аналитическое решение. В данной работе рассмотрен метод разделения переменных [2, 3], далее МРП, и проведено сравнение МРП с аналитическим методом Вольтерра [1] на примере задачи изгиба вязкоупругой плиты на упругом основании. Упругое решение данной задачи представлено в [4].

Расчетно-аналитическая часть. Упругое решение. К исследуемой упругой плите приложена равномерно распределенная нагрузка q . Уравнение равновесия для случая изгиба плиты, лежащей на Винклеровом основании, представляет собой выражение

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{k}{D} w = \frac{q}{D}, \quad (1)$$

где D – цилиндрическая жесткость плиты, k – модуль упругости основания (коэффициент постели), w – перемещения, q – внешняя распределенная нагрузка. Упругое решение контактной задачи представлено в перемещениях (формула нахождения прогиба) имеет вид

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad (2)$$

где w_{mn} – коэффициент разложения прогиба, a и b – длина и ширина плиты. По прогибу могут быть рассчитаны напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} , возникающие в плите. Цилиндрическая жесткость, входящая в состав выражения для прогиба плиты имеет вид

$$D = \frac{Kh^3}{4} \left(\frac{3}{4} + \frac{G}{6K} - \frac{3}{4}g_2 \right), \quad g_2 = \frac{1}{1 + 2\frac{2G}{3K}}, \quad (3)$$

где K – модуль объемного сжатия, G – модуль сдвига, h – толщина плиты.

Для нахождения нормальных напряжений σ_x , σ_y , и касательных напряжений τ_{xy} необходимо воспользоваться известными выражениями для определения напряжений через перемещения:

$$\sigma_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad \tau_{xy} = -G \cdot h \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (4)$$

где μ – коэффициент Пуассона.

Поскольку исследуемая плита является симметричной по направлениям X и Y , то напряжения σ_x и σ_y принимаем равными друг другу.

Вязкоупругое решение. *Решение по методу Вольтерра* заключается в замене упругих постоянных G и g_2 на операторы упругой наследственности G^* и g_2^* . Выражение для функции прогиба рассчитывается через ряд Фурье и принимает вид:

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (5)$$

Применяя алгебру метода Вольтерра, описанную в работе Работнова [5], можно представить дробно-рациональную функцию операторов G^* и g_2^* через сумму этих операторов. Итоговое выражение для величины w_{mn} выглядит следующим образом

$$w_{mn}(t) = \frac{q}{C} \cdot (1 + a_1 \mathcal{E}_{r_1}^* + a_2 \mathcal{E}_{r_2}^*), \quad (6)$$

где C , a_1 , a_2 , r_1 , r_2 – рассчитанные на основании алгебры Вольтерра константы, $\mathcal{E}_{r_1}^*$, $\mathcal{E}_{r_2}^*$ – преобразованные операторы упругой наследственности G^* и g_2^* . Для нахождения нормальных напряжений σ_x , σ_y , и касательных напряжений τ_{xy} по методу Вольтерра необходимо вычислить производные для функции прогиба, согласно (4).

Решение задачи по МРП заключается в замене упругих констант на эффективные по времени модули. Вывод выражений для эффективных по времени модулей представлен в работе Светашкова А. А. [3]. В данном случае необходимо заменить модуль сдвига G (в том числе в составе g_2) на эффективный по времени модуль $g_c(t)$. Выражения для функции прогиба рассчитывается через ряд Фурье и будет иметь вид

$$w_{(c)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn(c)}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (7)$$

Тогда выражения для величины w_{mn} , прогиба и напряжений будут иметь вид

$$w_{mn(c)}(t) = \frac{q}{D_c(t) \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + k}. \quad (8)$$

Преобразованное выражение для D представляет собой

$$D_c(t) = \frac{Kh^3}{4} \left(\frac{3}{4} + \frac{g_c(t)}{6K} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 + 2 \frac{2 \cdot g_c(t)}{3K}} \right), \quad \text{где } g_c(t) = \frac{q(t)}{G \left(1 + \lambda \cdot \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau \right) q(t)}. \quad (9)$$

Результаты. На рисунке 1 видно, что погрешность нахождения прогиба по МРП относительно метода Вольтерра, которая рассчитывается по формуле

$$\delta_w = \frac{w(t) - w_{(c)}(t)}{w(t)} \cdot 100\% \quad (10)$$

составляет не более 0,0015 %, что говорит о точности проведенных расчетов и эффективности применения МРП в подобных задачах.

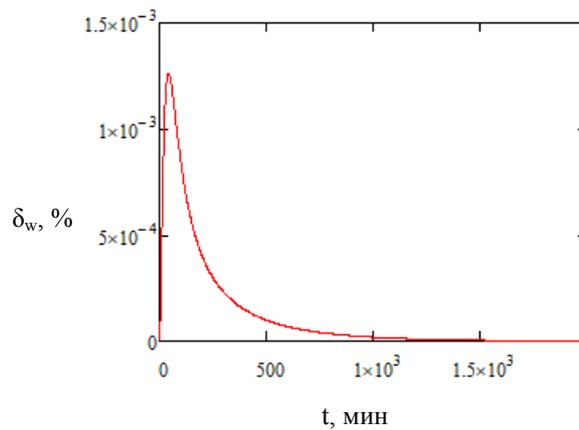


Рис. 1. Относительная погрешность МРП от метода Вольтерра при нахождении прогиба плиты

Формулы относительной погрешности напряжений выглядят аналогично (10). Погрешность определения напряжений логично совпадает с погрешностью прогиба плиты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Volterra V. Theory of Functionals and of Integral and integro-differential Equations. – London; Glasgow: Blackie and Son Limited, 1930. – 226p.
2. Svetashkov A., Kupriyanov N.A., Pavlov M.S., Vakurov A.A. Variable separation method for solving boundary value problems of isotropic linearly viscoelastic bodies // Acta Mechanica. – 2020. – 231(9) P.3583–3606.
3. Svetashkov A., Fok S.C., Kupriyanov N.A., Manabaev K.K., Pavlov M.S., Vakurov A.A. Modification of the Time-Effective Moduli of Viscoelastic Bodies // Mechanics of Composite Materials. - 2019. - Vol. 55, Iss. 5. - P. 667-686.
4. Александров А.В., Потапов В.Д., Основы теории упругости и пластичности: Учебник для строит. спец. Вузов. – М.:Выш. шк., 1990. – 400 с;
5. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.:Наука, 1966. – 752 с.

УДК 536.2

**АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ РЕБЕРНОЙ СТРУКТУРЫ НА ИНТЕНСИФИКАЦИЮ ТЕПЛООБМЕНА
В ЗАМКНУТОМ КУБЕ**С.Х.К. Лэ

Научный руководитель: д.ф.-м.н. М.А. Шеремет

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: lexuanhoangkhoa@gmail.com**ANALYSIS OF FINS STRUCTURE EFFECT ON HEAT TRANSFER ENHANCEMENT IN A CUBE**X.H.K. Le

Scientific Supervisor: Prof. Dr. M.A. Sheremet

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: lexuanhoangkhoa@gmail.com

Abstract. *The objective of this research is to study the effect of solid fins on heat transfer enhancement in a cubical cavity. The number of solid fins varies from 1 to 3 and their lengths vary from $0,1L$ to $0,5L$. A wide range of Rayleigh number and solid fins material has been investigated ($10^3 < Ra < 10^6$, copper, aluminum and steel fins). The left vertical side where the fins are located is uniformly heated while the opposite side is kept at lower temperature. Other sides are considered to be insulated. Governing equations are solved using finite difference method. It is shown that having solid fins attached to the heated vertical side of the cubical cavity can lead to the heat transfer enhancement compared with a cubical enclosure without any fins and thus solid fins have a positive effect on heat transfer enhancement within the differentially-heated cubical cavity.*

Введение. Развитие электроники и электронных систем приводит к росту интенсивности тепловыделения. Одним из самых простых и популярных в реализации методов интенсификации теплоотвода от тепловыделяющих элементов является введение развитой поверхности теплообмена, представляющей собой, например, реберную структуру. Ребра могут иметь различную форму (треугольник [1], трапеция [2], прямоугольник [3] и т.д), а также могут быть твердым [4, 5] или пористыми [6]. Многие опубликованные работы посвящены исследованию влияния реберной структуры в двумерной постановке. В данном исследовании изучается влияние твердых ребер на интенсификацию теплообмена внутри замкнутого куба.

Физико-математическая постановка задачи. Область решения представляет собой кубическую полость размера L с твердыми непроницаемыми стенками. Две противоположные вертикальные грани имеют постоянные температуры T_h (при $y = 0$) и T_c (при $y = L$), причем $T_h > T_c$. Другие грани являются теплоизолированными. Сила тяжести направлена вертикально вниз. На нагретой стенке устанавливаются одинаковые, равномерно расположенные твердые ребра с длиной l , которая варьируется в диапазоне от $0,1L$ до $0,5L$. Ширина ребер зафиксированы и совпадают с размером стороны кубической полости, а толщина ребер равна $h = 0,1L$.

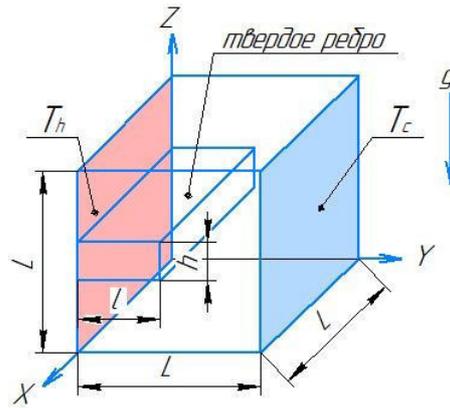


Рис.1. Область решения задачи

Дифференциальные уравнения, описывающие процесс нестационарного конвективного теплопереноса в приближении Буссинеска в безразмерных преобразованных переменных «скорость–вектор завихренности», имеют следующий вид:

– внутри воздушной полости:

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} = \sqrt{Pr} \left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_y}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial v}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial v}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial v}{\partial z} = \sqrt{Pr} \left(\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_z}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial w}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial w}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial w}{\partial z} = \sqrt{Pr} \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial \omega_y}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial \omega_z}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial \omega_x}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (7)$$

– внутри твердых ребер:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{a_{fin}/a_{fluid}}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (8)$$

Безразмерные начальные и граничные условия для системы уравнений (1)–(8) имеют вид:

$$\tau = 0 \rightarrow u = v = w = \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0, \theta = 0,5 \quad (9)$$

при $\tau > 0$ имеем

$$\text{– на твердых стенках } x = \text{const: } u = v = w = 0, \omega_x = 0, \omega_y = -\frac{\partial w}{\partial x}, \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$\text{– на твердой стенке } y = 0: u = v = w = 0, \omega_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \omega_y = 0, \omega_z = -\frac{\partial u}{\partial y}, \theta = 1 \quad (11)$$

$$\text{– на твердой стенке } y = 1: u = v = w = 0, \omega_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \omega_y = 0, \omega_z = -\frac{\partial u}{\partial y}, \theta = 0 \quad (12)$$

$$\text{– на твердой стенке } z = \text{const}: u = v = w = 0, \omega_x = -\frac{\partial v}{\partial z}, \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z}, \omega_z = 0, \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

$$\text{– на поверхности твердых ребер: } u = v = w = 0, \begin{cases} \theta_{fin} = \theta_{fluid} \\ \frac{\partial \theta_{fluid}}{\partial n} = \frac{\lambda_{fin}}{\lambda_{fluid}} \frac{\partial \theta_{fin}}{\partial n} \end{cases} \quad (14)$$

Система (1)–(8) с соответствующими начальными (9) и граничными (10)–(14) условиями решалась методом конечных разностей. Разработанный алгоритм решения был протестирован на модельных задачах в сравнении с экспериментальными и численными данными других авторов.

Результаты. Результаты показывают, что введение твердых ребер приводит к улучшению теплообмена за счет увеличения поверхности теплообмена. Рост числа ребер оказывает немонотонное влияние на интенсивность теплообмена внутри полости. При одинаковых условиях увеличение длины одиночного ребра проявляется в повышении среднего числа Нуссельта.

Заключение. В ходе решения задачи было проанализировано влияние твердых ребер на интенсивность теплообмена. В результате была выявлена возможность интенсификации теплообмена внутри дифференциально-обогреваемой кубической полости путем установки твердых ребер на нагреваемой поверхности куба.

Работа выполнена при поддержке Программы развития Томского политехнического университета (Приоритет-2030-НИП/ЭБ-002-0000-2022).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абузова Ф.Ф. Тепломассообмен. – М: УГНТУ, 2008. – 175 с.
2. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. – М.: Энергия, 1977. – 344 с.
3. Lakhali E.K., Hasnaoui M., Bilgen E., Vasseur P. Natural convection in inclined rectangular enclosures with perfectly conducting fins attached on the heated wall. Heat Mass Transfer – 1997. – V. 32, № 5. – P. 365-373.
4. Hasnaoui M., Vasseur P., Bilgen E., Natural convection in rectangular enclosures with adiabatic fins attached on the heated wall // Heat Mass Transfer – 1992. – V. 27, № 6. – P. 357–368.
5. Ambarita H., Kishinami K., Daimaruya M., Saitoh T., Takahashi H., Suzuki J. Laminar natural convection heat transfer in an air filled square cavity with two insulated baffles attached to its horizontal walls // Thermal Science & Engineering. – 2006. – V. 14, № 3. – P. 35–46.
6. Khanafar K., AlAmiri A., Bull J. Laminar natural convection heat transfer in a differentially heated cavity with a thin porous fin attached to the hot wall // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2015. – V. 87. – P. 59–70.

УДК 51-7

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОРОНКИ ОТ ВЗРЫВА ЗАГЛУБЛЕННЫМ ЗАРЯДОМ

Е.Б. Бразовский

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.М. Бубенчиков
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: kondraten.kondraten@mail.ru

HYDRODYNAMIC MODEL OF A FUNNEL FROM AN EXPLOSION OF A BURIED CHARGE

E.B. Brazovskiy

Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.M. Bubenchikov
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050
E-mail: kondraten.kondraten@mail.ru

***Abstract.** In this study, the author explores mathematical modeling methods to solve one of the main problems that arise when using explosions in the development of minerals, when digging trenches, during the construction of dams, the problems of determining the size and shape of explosive craters depending on the geometry of the terrain, soil properties, energy characteristics of the charge, as well as its shape and location.*

Введение. Одной из основных задач, возникающих при использовании взрывов на выброс, является задача определения размеров и формы воронок выброса в зависимости от геометрии области, свойств грунта, энергетической характеристики заряда, а также его формы и расположения. Взрывы применяются при разработке полезных ископаемых, при проходке траншей, при сооружении плотин, строительстве подземных хранилищ [1-5].

В 1960 г. М.А. Лаврентьевым была предложена новая математическая постановка задачи о действии взрыва в твердой среде. Основная идея состоит в том, что в области, близкой к взрыву, давления настолько велики, что можно пренебречь прочностными и пластическими свойствами среды и силами трения по сравнению с инерционными силами. Кроме того, при давлениях взрывного нагружения сжимаемость грунта не очень велика, так что при определении поля скоростей в грунте ее можно не учитывать. Таким образом, среду вблизи взрыва можно рассматривать как идеальную несжимаемую жидкость. Вдали от взрыва, наоборот, преобладают прочностные силы и среда практически неподвижна. Эти зоны разделяются переходным слоем, который в первом приближении считается бесконечно тонким и является непротекаемой границей для движущейся идеальной среды. Следовательно, применима импульсная постановка, при которой границу жидкой зоны можно определить, если на ней задано некоторое дополнительное условие физического характера (например, скорость U движения вдоль границы постоянна, и равна некоторой критической величине c , определяемой прочностью грунта).

Как решать задачу о течении идеальной жидкости с неизвестной (свободной) границей известно из теории струй [6-8], которая хорошо разработана и широко применяется для решения задач из области гидродинамики и теории фильтрации. Методы этой теории можно успешно применять и для расчета

формы воронок при взрывах, используя для этого хорошо разработанный математический аппарат теории потенциальных течений и теории аналитических функций.

Экспериментальные воронки имеют более пологую форму, чем теоретические. Но ширина воронок соответствует эксперименту при надлежащем выборе параметра c . Усложнение математической модели, с целью учета неоднородности, пластичности и других реальных свойств грунта, не всегда бывает оправданным. Математическая модель должна быть достаточно простой, содержать небольшое число параметров, имеющих ясный физический смысл, и допускать аналитическое решение, желательно, в элементарных функциях.

Целью данной научной **работы** является. Подобрать ряд задач о форме воронок в грунте при взрыве заглубленного заряда, которые можно легко решить, и представить схему их решения.

Материалы и методы исследования. Рассмотрена задача о взрыве заглубленного шнурового заряда в твердожидкостной импульсной постановке. Действие заряда может быть описано источником интенсивности ψ_0 . Требуется найти границу воронки выброса, которая является линией тока и на которой выполняется условие $v = c$.

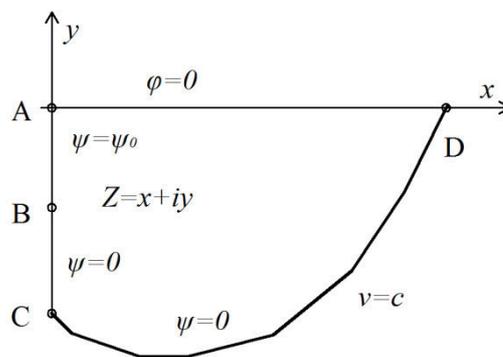


Рис. 1. Геометрия области течения

На рисунке 1 изображена геометрия области движения в плоскости разреза, перпендикулярной шнуровому заряду. В силу симметрии рассматривается только правая полуплоскость.

Введем комплексный потенциал течения: $\omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$.

Скорость, как известно из теории аналитических функций, тогда представляется в виде:

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{d}{dx} + i \frac{d\psi}{dx} = \frac{d\varphi}{dx} - i \frac{d\psi}{dy} = v_x - i v_y.$$

Граничные условия для потенциальной функции $\varphi(x, y)$ и функции тока $\psi(x, y)$.

На открытой поверхности грунта AD давление равно нулю, следовательно: $\varphi = 0$, (1)

На неизвестной границе CD выполняется условие: $\frac{d\varphi}{dn} = 0$, (2)

так как CD жесткая стенка, и, кроме того, на ней модуль скорости должен иметь постоянное значение:

$$\left| \frac{d\omega}{dz} \right| = c, \quad (3)$$

На линиях тока BCD и AB должно быть: $\psi = 0, \psi = \psi_0,$ (4)

соответственно, причем, на участке BC скорость направлена вниз, а на участке BAD - вверх.

Сформулирована задача следующим образом: требуется найти аналитическую в области $ABCD$ функцию $\omega(z)$ и неизвестную часть границы CD по краевым условиям (1) - (4). Известными (входными)

величинами мы будем считать значения $\psi = \psi_0$ и модуля скорости $\left| \frac{d\omega}{dz} \right| = c$ на границе воронки CD , которые характеризуют мощность заряда и прочность грунта. Еще одним известным параметром будем считать глубину заложения заряда, которую будем обозначать буквой b .

Результаты. Из выведенных соотношений получено, что при постоянном значении величины $\pi c / \psi_0$, форма воронки зависит от параметра μ , или от глубины заряда b , поскольку она связана с μ посредством формулы. Когда μ изменяется в пределах от нуля до бесконечности, глубина заложения заряда изменяется, наоборот, в пределах от бесконечности до нуля. При этом ширина воронки, вычисляемая по формуле, изменяется в пределах от значения равного π (при $\mu = 0$) до нуля (при $\mu = \infty$)

Заключение. В работе применена твердо - жидкостная модель взрыва, предложенная М.А. Лаврентьевым в 1960 г. В рамках этой математической модели получено и подробно проанализировано решение для задачи: взрыв точечного заглубленного заряда.

Выбор этой задачи обусловлен тем, что она имеет точное аналитическое решение, причем в простой аналитической форме, в элементарных функциях. Решение этой задач было известно из литературных источников [9], но она решена заново другим способом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Норов, А.Ю. Проблема управления энергией взрыва при формировании развала взорванной горной массы на карьерах // Взрывное дело. – 2020 (129-86). – С. 85-104.
2. Хохлов, С.В., Баженова, А.В. Исследование вопроса управления и контроля за смещением взорванной рудной массы // Взрывное дело. – 2021 (132-89). – С. 59-76.
3. Закалинский, В.М. О буровзрывных работах на больших глубинах // Взрывное дело. – 2021 (133-90). – С. 113-121.
4. Викторов, С.Д., Закалинский, В.М., Шиповский, И.Е. Концепция развития буровзрывных работ при разработке месторождений полезных ископаемых // Взрывное дело. – 2021 (133-90). – С. 100-112.
5. Болотова, Ю.Н. Влияние конструкции заряда взрывчатого вещества на формирование сейсмозрывных волн // Взрывное дело. – 2021 (133-90). – С. 149-157.
6. Гуревич, М.И. Теория струй идеальной жидкости. – М.: Физматгиз, 1961. – 496 с.
7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: «Наука», 1973.
8. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. – М.: «МИР», 1974.
9. Мартынюк П.А. О форме воронки выброса при взрыве в грунте шнурового заряда // Народнохозяйственное использование взрыва. – Новосибирск, 1965. – №30. – С. 3-9.

УДК 532.5

**ЕСТЕСТВЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ КУБИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ
ПРИ НЕОДНОРОДНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПРОФИЛЕ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКЕ**

С.А. Михайленко

Научный руководитель: доцент, д.ф.-м.н. М.А. Шеремет

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: stepanmihaylenko@gmail.com

**NATURAL CONVECTION IN A ROTATING CUBIC CAVITY UNDER THE NON-UNIFORM
TEMPERATURE PROFILE AT VERTICAL WALL**

S.A. Mikhailenko

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Dr. M.A. Sheremet

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: stepanmihaylenko@gmail.com

Abstract. *Natural convective heat transfer in a rotating cubic cavity under an effect of non-uniform temperature profile at vertical wall has been investigated numerically. The cavity is subjected to counterclockwise rotation around the z-axis with a constant angular velocity. One vertical wall of the cavity is cooled, while the opposite wall is heated unevenly. Other cavity walls are adiabatic. The working fluid is Newtonian, heat-conducting and satisfying the Boussinesq approximation. The basic equations formulated using the vector potential functions and vorticity vector have been solved by the finite difference method. The effects of non-uniform heating and rotating on heat transfer have been investigated.*

Введение. Естественная конвекция представляет интерес для решения широкого круга технических и инженерных задач. Теплообмен в условиях вращения является не менее интересной областью исследования. Задачи, связанные с вращающимися системами [1, 2], часто встречаются, например, при разработке роторных теплообменников, газовых турбин, выращивании кристаллов, в космической промышленности, при проектировании систем охлаждения электронной аппаратуры.

Математическая постановка. На рисунке 1 изображена кубическая полость размера H . Полость вращается против часовой стрелки вокруг оси \bar{z} . Стенка при $(\bar{x} = -0.5H)$ нагревается при температуре $T_w(\bar{y}) = T_c + (T_h - T_c)\cos(\pi\bar{y}/H)$, в то время как противоположная стенка $(\bar{x} = 0.5H)$ охлаждается при температуре T_c . Остальные стенки являются теплоизолированными. Полость заполнена теплопроводной жидкостью, удовлетворяющей приближению Буссинеска. При этом ее физические параметры не зависят от температуры. Течение является ламинарным.

Система уравнений, основанная на законах сохранения массы, импульса и энергии, записана с помощью безразмерных преобразованных переменных [3] «векторный потенциал» –

$$\left(\bar{u} = \frac{\partial \bar{\psi}_z}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial z}, \bar{v} = \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial z} - \frac{\partial \bar{\psi}_z}{\partial x}, \bar{w} = \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial y} \right) \quad \text{и} \quad \text{«вектор завихренности»} \quad -$$

$$\left(\bar{\omega}_x = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}, \bar{\omega}_y = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}, \bar{\omega}_z = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \quad \text{и выгледит следующим образом:}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} &= -\omega_x \\ \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} &= -\omega_y \\ \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial z^2} &= -\omega_z \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_x}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} = \\ = \frac{1}{\sqrt{Ta}} \left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} \right) - \frac{Ra}{Pr \cdot Ta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \cos(\tau) + \frac{Ra_\xi}{Pr \cdot Ta} y \frac{\partial \theta}{\partial z} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_y}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_y}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial v}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial v}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial v}{\partial z} = \\ = \frac{1}{\sqrt{Ta}} \left(\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial z^2} \right) + \frac{Ra}{Pr \cdot Ta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \sin(\tau) - \frac{Ra_\xi}{Pr \cdot Ta} x \frac{\partial \theta}{\partial z} + 2 \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_z}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_z}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial w}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial w}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial w}{\partial z} = \\ = \frac{1}{\sqrt{Ta}} \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right) + \frac{Ra}{Pr \cdot Ta} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos(\tau) - \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin(\tau) \right\} - \frac{Ra_\xi}{Pr \cdot Ta} \left\{ y \frac{\partial \theta}{\partial x} - x \frac{\partial \theta}{\partial y} \right\} + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{Pr \cdot \sqrt{Ta}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

Здесь τ – безразмерное время, θ – безразмерная температура; x, y, z – безразмерные координаты; u, v, w – безразмерные проекции скорости; ψ_x, ψ_y, ψ_z – безразмерные компоненты векторного потенциала; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – безразмерные компоненты вектора завихренности. В уравнениях присутствуют такие безразмерные комплексы как: Pr – число Прандтля; Ra – тепловое число Рэлея; Ra_ξ – вращательное число Рэлея; Ta – число Тейлора.

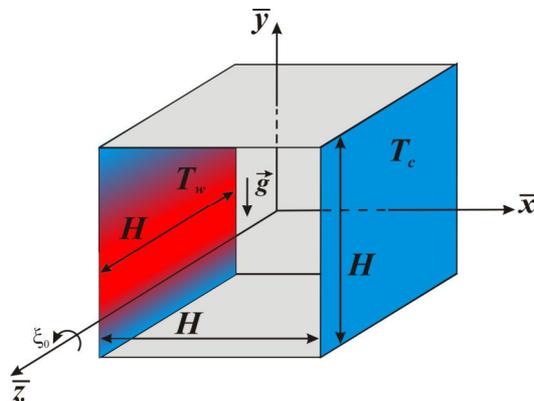


Рис. 1. Область решения задачи

В соответствии с поставленной задачей определяются следующие начальные и граничные условия:

$\tau = 0$:

$$\psi_x = \psi_y = \psi_z = \omega_x = \omega_y = \omega_z = \theta = 0 \quad \text{и} \quad -0.5 \leq x \leq 0.5, -0.5 \leq y \leq 0.5 \text{ и} -0.5 \leq z \leq 0.5;$$

$\tau > 0$:

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \psi_y = \psi_z = 0, \quad \bar{\omega} = -\nabla^2 \bar{\psi}, \quad \theta = \cos(\pi y) \quad \text{при} \quad x = -0.5, \quad -0.5 \leq y \leq 0.5 \text{ и} -0.5 \leq z \leq 0.5;$$

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \psi_y = \psi_z = 0, \quad \bar{\omega} = -\nabla^2 \bar{\psi}, \quad \theta = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.5, \quad -0.5 \leq y \leq 0.5 \text{ и} -0.5 \leq z \leq 0.5;$$

$$\psi_x = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = \psi_z = 0, \quad \bar{\omega} = -\nabla^2 \bar{\psi}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5, \quad -0.5 \leq x \leq 0.5 \text{ и} -0.5 \leq z \leq 0.5;$$

$$\psi_x = \psi_y = \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = 0, \quad \bar{\omega} = -\nabla^2 \bar{\psi}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm 0.5, \quad -0.5 \leq y \leq 0.5 \text{ и} -0.5 \leq x \leq 0.5;$$

Для решения сформулированной краевой задачи математической физики применяется метод конечных разностей на равномерной сетке. При аппроксимации уравнения Пуассона для векторного потенциала (1) используется семиточечная разностная схема. Решение полученной системы линейных алгебраических уравнений произведено с помощью метода последовательной верхней релаксации. При аппроксимации уравнений движения (2)–(4) и энергии (5) используется локально-одномерная схема А.А. Самарского совместно с центральными разностями для диффузионных слагаемых и монотонной схемой А.А. Самарского для конвективных членов. Полученные системы уравнений решались методом прогонки.

Для анализа интенсивности теплообмена используется среднее число Нуссельта на нагреваемой стенке:

$$\overline{Nu} = \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=-0.5} dydz$$

Результаты. Численное исследование конвективного теплопереноса в кубической вращающейся полости с неоднородным температурным профилем на вертикальной стенке проведено в широком диапазоне изменения определяющих параметров: $Pr = 0.7$, $Ra = 10^5$, $Ta = 10^3$ – 10^6 и $Ra = 1.8 \cdot 10^4$ – $1.8 \cdot 10^4$. Получены и проанализированы поля температуры в области решения в течение полного оборота полости. Исследовано влияние неоднородного температурного профиля и числа Тейлора на интенсивность теплообмена. Проведено сравнение с результатами двумерного моделирования.

Работа выполнена в рамках реализации проекта Российского научного фонда (соглашение № 17-79-20141).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kumar M., Pundarika G., Narasimha K.R., Seetharamu K.N. Effect of Rayleigh Number with Rotation on Natural Convection in Differentially Heated Rotating Enclosure // Journal of Applied Fluid Mechanics. – 2017. – Vol. 10. – P. 1125-1138.
2. Yu G., Lian Z., Gan W., Ji J. Numerical investigation on the effect of harmonic horizontal-axis rotation on laminar natural convection in an air-filled enclosure, International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2020. – Vol. 152. – 119533.
3. Gibanov N.S., Sheremet M.A. Natural convection in a cubical cavity with different heat source configurations // Thermal Science and Engineering Progress. – 2018. – Vol. 7 – P. 138–145.

УДК

**КОНВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ
В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ПОРИСТОЙ ВСТАВКОЙ**

А.П. Порунова

Научный руководитель: доцент, д.ф.-м.н. М.А. Шеревет
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: nastya.p-va@yandex.ru

**CONVECTIVE FLOW OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID
IN A FLAT CHANNEL WITH A POROUS INSERTION**

A.P. Porunova

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Dr. M.A. Sheremet
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050
E-mail: nastya.p-va@yandex.ru

Abstract. Numerical analysis of thermal convection inside a channel with a porous insert filled with a viscous incompressible fluid has been performed. The governing equations formulated using dimensionless stream function, vorticity and temperature have been solved by the finite difference method of the second order accuracy. Numerical analysis has been conducted in a wide range of governing parameters including Reynolds number, Darcy number and porosity. The obtained results allow understanding the flow structure and temperature fields for different heat transfer modes.

Введение. Изучение теплопереноса в неоднородных средах имеет большое значение при моделировании и оптимизации различных инженерных систем. Очень часто в технических устройствах встречаются пористые вставки, например, в пористо-микроканальном радиаторе, где наличие пористой вставки приводит к более интенсивному отводу энергии от тепловыделяющего элемента. Следует отметить, что пористые среды применяются в системах умных домов, использующих солнечный свет для аккумуляции энергии, и для поддержания комфортного микроклимата в помещении в разное время года.

Постановка задачи и методы решения. Целью работы является математическое моделирование конвективного теплопереноса вязкой несжимаемой жидкостью внутри прямоугольного канала при наличии пористой вставки. Областью решения является канал высоты H и длины L с адиабатическими стенками, по которому течет вязкая несжимаемая жидкость (воздух) (рис. 1).

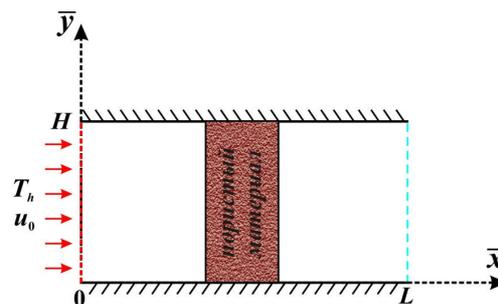


Рис. 1. Область решения задачи

Дифференциальные уравнения, описывающие анализируемый процесс в безразмерных переменных «функция тока – завихренность – температура», имеют следующий вид [1]:
Россия, Томск, 26-29 апреля 2022 г. Том 3. Математика
• для чистой среды

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Re \cdot Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

• для пористой среды

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{\varepsilon}{Da} \omega \right) - c_F \sqrt{\frac{\varepsilon}{Da}} \omega \sqrt{u^2 + v^2} - \\ - \frac{c_F}{\sqrt{u^2 + v^2}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{Da}} \left\{ v^2 \frac{\partial v}{\partial x} - u^2 \frac{\partial u}{\partial y} + 2uv \frac{\partial u}{\partial x} \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{(\rho \tilde{n})_{pm}}{(\rho \tilde{n})_f} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\lambda_{pm}/\lambda_f}{Re \cdot Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

Здесь x, y – безразмерные декартовы координаты; τ – безразмерное время; u, v – безразмерные составляющие скорости в проекции на оси; θ – безразмерная температура; Ψ – безразмерная функция тока; ω – безразмерная завихрённости скорости; $Pr = \mu/(\rho_f a_f)$ – число Прандтля; $Re = \rho u_0 H/\mu$ – число Рейнольдса, $Da = K/L^2$ – числа Дарси.

Безразмерные переменные были введены следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} x = \bar{x}/H, \quad y = \bar{y}/H, \quad \tau = t/t_0, \quad \theta = (T - T_0)/\Delta T, \quad u = \bar{u}/u_0, \\ v = \bar{v}/u_0, \quad \Psi = \bar{\Psi}/\Psi_0, \quad \omega = \bar{\omega}/\omega_0 \end{aligned}$$

Безразмерные начальные и граничные условия для предложенной системы уравнений:

$$\tau = 0: \quad \Psi = 0, \quad \omega = 0, \quad \theta = 0;$$

$$\tau > 0:$$

$$\Psi = y, \quad \omega = 0, \quad \theta = 1 \quad \text{ï ðè} \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{ï ðè} \quad x = L/H = A, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad \text{ï ðè} \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\Psi = 1, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad \text{ï ðè} \quad y = 1, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_f = \theta_{pm}, \\ \frac{\partial \theta_f}{\partial n} = \frac{\lambda_{pm}}{\lambda_f} \frac{\partial \theta_{pm}}{\partial n} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_f = \Psi_{pm}, \\ \frac{\partial \Psi_f}{\partial n} = \frac{\partial \Psi_{pm}}{\partial n} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_f = \omega_{pm}, \\ \frac{\partial \omega_f}{\partial n} = \frac{\partial \omega_{pm}}{\partial n} \end{array} \right\} \quad \left| \begin{array}{l} \text{í à äðáí èòá} \\ \text{ï î ðè ñòí é} \\ \text{âñòáâèè} \end{array} \right.$$

Уравнения Пуассона для функции тока (1) и (4) решались методом конечных разностей с последующим применением метода последовательной верхней релаксации [3]. Уравнения параболического типа (2), (3) для чистой среды и (5), (6) для пористой среды были решены с помощью локально-одномерной схемы А.А. Самарского [4].

Численный анализ был проведён в широком диапазоне изменения определяющих параметров:

- число Рейнольдса Re (50; 100; 200) для $Pr = 0,7$, $\varepsilon = 0,4$, $Da = 0,001$;

Россия, Томск, 2019 (01.04.2021) • Том 3. Математика

- число Дарси Da (0,0001; 0,001; 0,01) для $Re = 100$, $Pr = 0,7$, $\varepsilon = 0,4$.

С целью верификации разработанного численного алгоритма была решена задача неизоотермического течения в плоском канале [5]. Проведенные сравнения с данными других авторов (рис. 2.) отражают хорошее согласие и возможность использования разработанного вычислительного кода для решения сформулированной задачи.

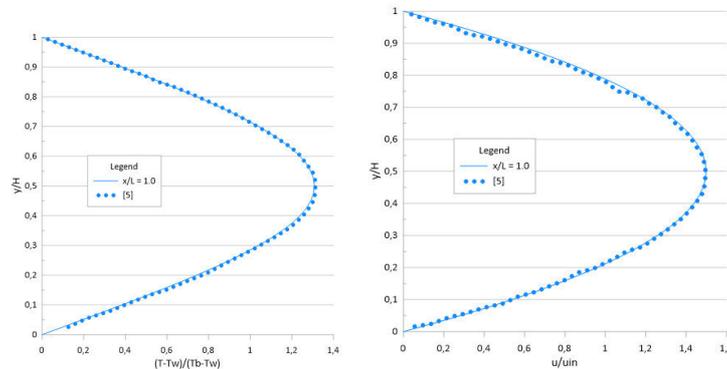


Рис. 2. Профили температуры и скорости в сравнении с данными [5]

Заключение. Полученные результаты позволили сделать вывод о том, что с увеличением числа Рейнольдса наблюдается более интенсивный прогрев левой части пористой вставки, при этом правая часть, вследствие малого числа Дарси, прогревается не так интенсивно. Так же было выяснено, что увеличение пористости вставки иллюстрирует более интенсивный прогрев.

Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987 – 830 с.
2. Шеремет М.А. Сопряженные задачи естественной конвекции. Замкнутые области с локальными источниками тепловыделения. – Берлин: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011 – 176 с.
3. Пасконов В.М. Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена: Учебное пособие по специальностям "Прикладная математика", "Физика" и "Механика". - М.: Наука, 1984. – 285 с.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977 – 656 с.
5. Tang G.H., Tao W.Q., He Y.L., Simulation of fluid and heat transfer in a plane channel using the lattice Boltzmann method // Internat J. Modern Phys. – 2003– V. 17. – P. 183–187.

УДК 536.25

**ВЛИЯНИЕ ЧИСЛА ПРАНДТЛЯ НА ЕСТЕСТВЕННУЮ КОНВЕКЦИЮ ТЕПЛОЫДЕЛЯЮЩЕЙ
ЖИДКОСТИ В ПОЛУЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В УСЛОВИЯХ ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ**А.И. Кудров

Научный руководитель: профессор, д. ф.-м. н. М.А. Шеремет
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: alex12kudrow@gmail.com

**PRANDTL NUMBER EFFECT ON NATURAL CONVECTION OF A HEAT GENERATING FLUID
WITHIN A SEMI-CYLINDRICAL CAVITY IN CASE OF VARIABLE VISCOSITY**

A.I. Kudrov

Scientific Supervisor: Prof. Dr. M.A. Sheremet
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: alex12kudrow@gmail.com

Abstract. *The study presents a numerical analysis on natural convection of a heat generating fluid having variable viscosity within a semi-cylindrical cavity. It is assumed that the top wall is adiabatic, and the bottom one is isothermal. The simulation is conducted to discover the influence of the Prandtl number on the average Nusselt number at the bottom wall when the dynamic viscosity of the fluid decreases exponentially. The natural convection in the cavity is described by the system of equations in the Boussinesq approximation. The problem has been formulated in terms of non-primitive variables in a dimensionless form. The governing equations have been solved using the finite difference method. As a result of the numerical simulation, we have obtained time dependencies of the average Nusselt number when the Prandtl number is equal to 7.0, 70 and 700, and the Rayleigh number is varied from 10^4 to 10^6 .*

Введение. Конвективный теплообмен является одним из главных видов переноса теплоты в различных инженерных аппаратах. Отдельное место при этом занимает естественная конвекция, которая наблюдается, например, в химических реакторах или при внутрикорпусном удержании расплава активной зоны ядерного реактора при тяжелой аварии. В таких системах жидкость, совершающая свободно-конвективное течение, выделяет тепло. Данный случай свободной конвекции изучен достаточно хорошо, однако влияние переменных свойств жидкости на перенос теплоты в таких условиях изучен недостаточно подробно. Поэтому в данной работе проводится численный анализ естественной конвекции тепловыделяющей жидкости с переменной вязкостью в замкнутой полуцилиндрической полости.

Математическая постановка задачи. Тепловыделяющая жидкость удерживается в полуцилиндрической области (см. рис. 1). На нижней границе полости поддерживается постоянная температура, в то время как верхняя стенка является теплоизолированной. В начальный момент времени жидкость покоится и ее температура равна температуре нижней стенки. Удельное тепловыделение жидкости постоянно во времени и не зависит от координат.

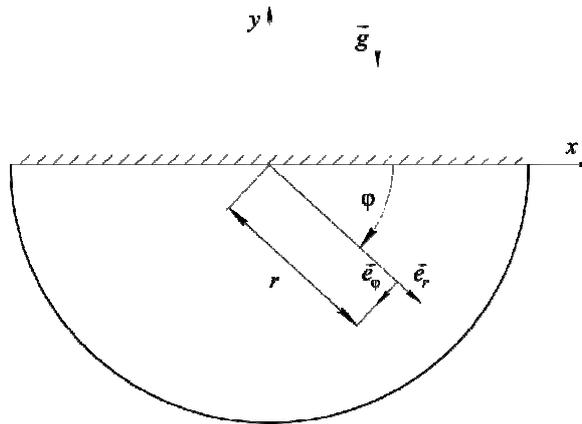


Рис. 1. Исследуемая область

Процесс естественной конвекции в полости описывается системой безразмерных уравнений Обербека-Буссинеска с использованием преобразованных переменных «завихренность – функция тока». При этом полагается, что вязкость жидкости зависит от температуры, однако другие теплофизические свойства, принимаются постоянными, включая плотность, поскольку приближение Обербека-Буссинеска предполагается наличие небольших перепадов температур в исследуемой области. Задача рассматривается в полярных координатах, где искомые величины зависят от полярного угла, φ , и безразмерного радиуса, R . Определяющие уравнения представлены ниже.

Уравнение дисперсии завихренности:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial(U\Omega)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial(V\Omega)}{\partial \varphi} + \frac{U\Omega}{R} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left(\frac{\partial^2(M\Omega)}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial(M\Omega)}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial(M\Omega)}{\partial \varphi^2} \right) + 2\sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 M}{\partial R^2} \left(V - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} \left(\frac{\partial M}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{2}{R} \frac{\partial U}{\partial R} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial R \partial \varphi} - \frac{1}{R} \frac{\partial M}{\partial \varphi} \right) \right] + \frac{\partial \theta}{\partial R} \cos \varphi - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{R} \quad (1)$$

где Ω – безразмерная завихренность, τ – безразмерное время, U и V – проекции безразмерного вектора скорости на орты \vec{e}_r и \vec{e}_φ , соответственно; Pr и Ra – числа Прандтля и Рэлея, соответственно; $M = M(\theta)$ – безразмерная динамическая вязкость жидкости; θ – безразмерная температура.

Уравнение Пуассона для функции тока:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = \Omega \quad (2)$$

где Ψ – безразмерная функция тока.

Уравнение энергии:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{V}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{Pr Ra}} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{1}{\sqrt{Pr Ra}} \quad (3)$$

В уравнениях (1) и (2) безразмерная завихренность и функция тока заданы как

$$U = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial R}; \quad \Omega = \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{V}{R} \frac{\partial V}{\partial R}.$$

Начальные и граничные условия для уравнений (1) – (3) представлены ниже.

$$\tau = 0, \quad R \in [0, 1], \quad \varphi \in [0, \pi]; \quad \Psi = \theta = \Omega = 0;$$

$$R = 0, \varphi \in [0, \pi]; \quad \Psi = \Omega = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0; \quad R = 1, \varphi \in [0, \pi]; \quad \Psi = \theta = 0, \quad \Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2};$$

$$\varphi = 0 \text{ и } \varphi = \pi, R \in (0, 1); \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = 0, \quad \Omega = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}.$$

Согласно работам [1, 2] принимается следующая зависимость для безразмерной вязкости:

$$M = \exp(-C\theta). \quad (4)$$

Результаты. В представленной работе изучается влияние числа Прандтля на среднее число Нуссельта на нижней стенке полости, которое вычислялось как $Nu_{cp} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{R=1} d\varphi$. Определяющие уравнения (1) – (3) решались при помощи метода конечных разностей. Численный анализ проводился при значениях числа Прандтля 7.0, 70 и 700 и числа Рэлея в пределах от 10^4 до 10^6 . Коэффициент в зависимости (4) был принят равным 2 ($C = 2$). В результате были получены временные зависимости Nu_{cp} для указанных значений чисел Прандтля и Рэлея (см. рис. 2).

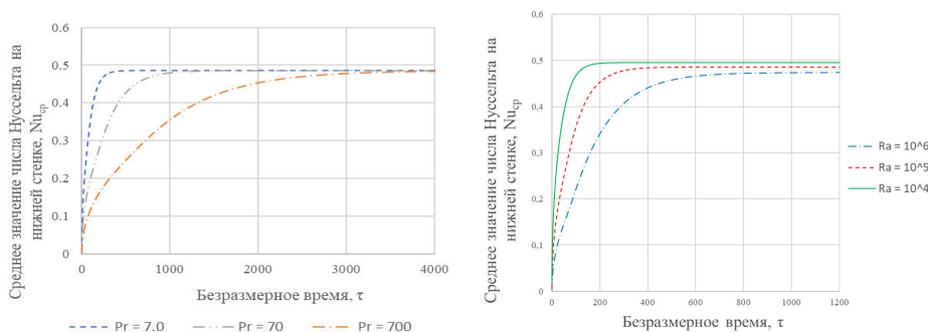


Рис. 2. Временные зависимости Nu_{cp} при $Pr = var$ и $Ra = 10^5$ (слева) и $Pr = 7.0$ и $Ra = var$ (справа)

Заключение. В представленной работе численно был исследован процесс естественной конвекции тепловыделяющей жидкости с переменной вязкостью. По результатам исследования были построены зависимости среднего числа Нуссельта на нижней стенке полости для числа Прандтля равного 7.0, 70 и 700 и числа Рэлея, изменяющегося от 10^4 до 10^6 . При этом было определено, что число Прандтля при постоянном Ra оказывает малое влияние на стационарные значения Nu_{cp} . Однако с ростом Pr нестационарные значения интегрального параметра теплообмена снижаются за счет менее интенсивного движения такой среды. Сравнение решений для постоянной и переменной вязкостей показало незначительное влияние последней на среднее число Нуссельта при указанных Ra и Pr , однако учет $M = var$ приводит к увеличению скорости движения жидкости и уменьшению температуры в полости.

Работа выполнена при поддержке Программы развития Томского политехнического университета (Приоритет-2030-НИИ/ЭБ-002-0000-2022).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yamasaki T., Irvine T. F. Laminar Free Convection in a Vertical Tube with Temperature-Dependent Viscosity. Int. J. Heat Mass Transfer. – 1984. – Vol. 27., No. 9. – P. 1613–1621.
2. Hyun J. M., Lee J. W. Transient natural convection in a square cavity of a fluid with temperature dependent viscosity // International Journal of Heat and Fluid Flow. – 1988. – Vol. 9. – P. 278–285.

УДК 532.5.

**ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ
ПРОСЛОЙКАХ**

Е.Е. Юдакова

Научный руководитель: доцент, д.ф.-м.н. М.А. Шеремет
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: katrin.ud17@gmail.com

FEATURES OF THE DEVELOPMENT OF NATURAL CONVECTION IN VERTICAL LAYERS

E.E. Yudakova

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Dr. M.A. Sheremet
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050
E-mail: katrin.ud17@gmail.com

***Abstract.** Numerical analysis of natural convection in vertical air layers has been performed. Governing equations formulated using dimensionless stream function, vorticity and temperature has been solved by the finite difference method. The developed computational code has been validated comprehensively. Effects of the height of the cavity and the thickness of solid walls on the heat transfer performance in vertical layers have been studied. The correlation for the average Nusselt number has been obtained.*

Введение. Естественная конвекция в закрытых полостях широко изучается в последние десятилетия [1–3]. Этот способ теплообмена имеет широкий спектр приложений в машиностроении, энергетике, электронике и других отраслях. Чаще всего в качестве рабочей области выступают вертикальные прослойки, заполненные воздухом, подверженные влиянию внешних тепловых потоков [1–3]. Конвективный теплообмен также сопровождается процессами теплопроводности.

В настоящей работе было проведено численное исследование естественной конвекции в вертикальной воздушной прослойке при наличии изотермических вертикальных стенок, толщина которых варьировалась.

Постановка задачи и методы решения. Геометрическая постановка задачи совместно с граничными условиями представлена на рис. 1. Вязкая несжимаемая жидкость, удовлетворяющая приближению Буссинеска, циркулирует внутри замкнутой вертикальной полости с изотермическими вертикальными стенками, горизонтальные стенки области являются теплоизолированными.

Дифференциальные уравнения в безразмерных переменных «вихрь скорости – функция тока – температура» примут вид [4]:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

Для элементов твердой стенки безразмерное уравнение теплопроводности имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{a_w/a_f}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

Здесь x, y – безразмерные декартовы координаты; τ – безразмерное время; θ – безразмерная температура; ψ – безразмерная функция тока; ω – безразмерная завихрённости скорости; $Pr = \mu/(\rho_f a_f)$ – число Прандтля; $Ra = \rho_f g \beta_f (T_h - T_c) L^3 / (\mu a_f)$ – число Рэлея; μ – вязкость жидкости; ρ_f – плотность жидкости; a_f – температуропроводность жидкости; a_w – температуропроводность материала твердой стенки; g – ускорение свободного падения; β_f – термический коэффициент объемного расширения жидкости.

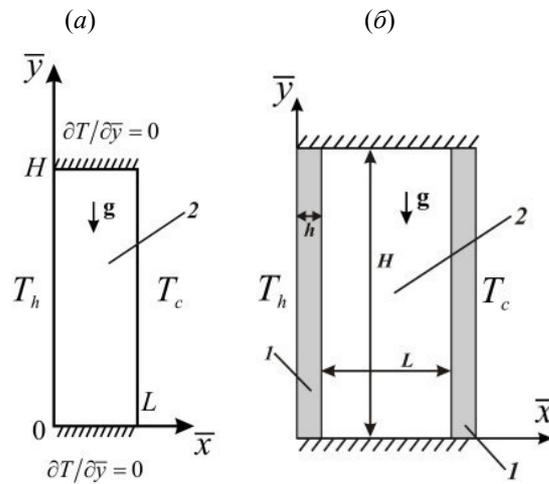


Рис. 1. Область решения задачи: (а) – полость с бесконечно тонкими вертикальными стенками, (б) полость с вертикальными твердыми стенками конечной толщины

В начальный момент времени предполагалось, что среда неподвижна и начальная температура совпадает с температурой холодной стенки, поэтому $\psi = 0, \omega = 0, \theta = 0$.

Граничные условия записывались следующим образом:

$$\tau > 0:$$

$$\psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \theta = 1 \text{ и } \delta \bar{x} \text{ на } x = 0, 0 \leq y \leq A,$$

$$\psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \theta = 0 \text{ и } \delta \bar{x} \text{ на } x = 1, 0 \leq y \leq A,$$

$$\psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \text{ и } \delta \bar{y} \text{ на } y = 0 \text{ и } y = A, 0 \leq x \leq 1$$

При наличии твердых стенок конечной толщины получаем граничные условия IV рода на внутренних границах «твердые стенки – жидкость»: $\left\{ \theta_f = \theta_w, \frac{\partial \theta_f}{\partial x} = \frac{\lambda_w}{\lambda_f} \frac{\partial \theta_w}{\partial x} \right.$. Здесь λ_f и λ_w – теплопроводность жидкости и материала твердой стенки, соответственно.

Сформулированная краевая задача была решена численно методом конечных разностей. Разработанный метод решения был протестирован на множестве модельных задач [4].

Заключение. Численные исследования выполнены при следующих значениях безразмерных комплексов: число Прандтля $Pr = 0.7$, число Рэлея $Ra = 10^4-10^6$, относительная толщина твердых стенок $\delta = 0 - 0.1$ и относительная высота полости $A = H/L = 1-4$.

На рис. 2 показано влияние геометрического параметра и относительной толщины твердых стенок на среднее число Нуссельта при $Ra = 10^6$. Представленные распределения отражают уменьшение интенсивности теплообмена с ростом толщины стенок и высоты прослойки. При этом увеличение δ проявляется также и в затягивании достижения стационарного режима теплообмена.

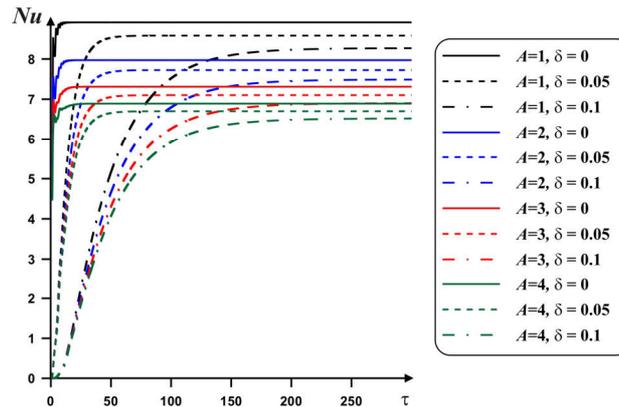


Рис. 2. Зависимость среднего числа Нуссельта от геометрического параметра A и относительной толщины твердых стенок δ при $Ra = 10^6$

В ходе моделирования показан рост интегрального коэффициента теплообмена с ростом числа Рэлея и его уменьшение с увеличением толщины твердых стенок δ и геометрического параметра A . С помощью метода наименьших квадратов установлено корреляционное соотношение для среднего числа Нуссельта:

$$\overline{Nu} = 0.207 \cdot Ra^{0.268} \cdot (1 + \delta)^{-0.414} \cdot A^{-0.107} \quad \text{при } 10^4 \leq Ra \leq 10^6, \quad 1 \leq A \leq 4, \quad 0 \leq \delta \leq 0.1$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bae Y., Kim S.H., Seo J.-K., Kim Y.I. Analytical modeling of natural convection in a tall rectangular enclosure with multiple disconnected partitions // Nuclear Engineering and Technology. – 2016. – Vol. 48. – P. 925–931.
2. Huang Y., El Mankibi M., Cantin R., Coillot M. Application of fluids and promising materials as advanced inter-pane media in multi-glazing windows for thermal and energy performance improvement: A review // Energy & Buildings. – 2021. – Vol. 253. – P. 111458.
3. Foruzan Nia M., Gandjalikhan Nassab S.A., Ansari A.B. Transient numerical simulation of multiple pane windows filling with radiating gas // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2019. – Vol. 108. – P. 104291.
4. Шеремет М.А. Сопряженные задачи естественной конвекции. Замкнутые области с локальными источниками тепловыделения. – Берлин: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 176 с.

УДК 519.6

NUMERICAL ANALYSIS OF NATURAL CONVECTION OF CORIUM IN A SEMI-CYLINDRICAL
CAVITY WITH ISOTHERMAL WALLS

S.A. Khatab, A.I. Kudrov

Scientific Supervisor: Prof. M.A. Sheremet

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: shoroukabelzaher@icloud.com

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ КОРИУМА В
ПОЛУЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ С ИЗОТЕРМИЧЕСКИМИ СТЕНКАМИ

Ш.А. Хатаб, А.И. Кудров

Научный руководитель: доцент, д. ф.-м. н. М.А. Шеремет

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: shoroukabelzaher@icloud.com

Аннотация. В настоящей работе проводится моделирование естественной конвекции кориума в полуцилиндрической полости с изотермическими стенками в ламинарном приближении. Для описания влияния выталкивающей силы внутри тепловыделяющей среды используется модель Буссинеска. Для реализации задачи, сформулированной на основе преобразованных переменных, применяется метод конечных разностей. Полученные результаты отражают влияние определяющих параметров на структуру течения и теплоперенос, а также на эволюцию интегральных характеристик.

Introduction. Natural convection is a heat and mass transfer mechanism where the fluid motion is generated only by density differences in the fluid due to the buoyancy forces influence. Natural convection of corium can be realized during the severe accident in reactor [1]. Therefore, it is very important to study the heat transfer performance for such severe accidents [1–3].

Mathematical model. Natural convection of heat-generated corium in a cooling horizontal cylindrical cavity of a radius R_c is studied (see Fig. 1). Walls of this region are maintained at a constant low temperature T_0 . At the initial moment, the corium is motionless, and its temperature at all points is equal to initial temperature T_0 , the volumetric heat generation density of the corium is constant in this case [4].

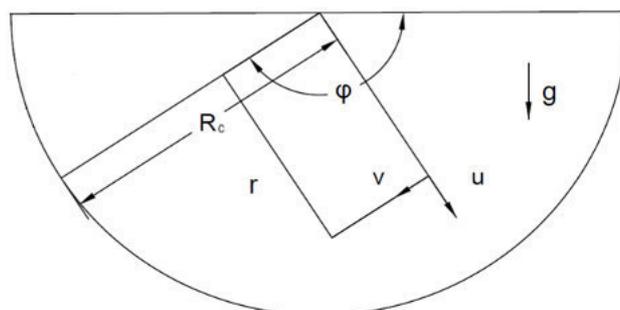


Figure 1. The domain of interest

Governing partial differential equations formulated using non-primitive variables [4, 5] have the following non-dimensional form:

$$R \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = \Omega \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial(U \cdot \Omega)}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial(V \cdot \Omega)}{\partial \varphi} + U \frac{\partial V}{\partial R} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Omega}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi^2} + \frac{\Omega}{R^2} \right) + \\ + R \frac{\partial \theta}{\partial R} \cos(\varphi) - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{V}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + 1 \right) \quad (3)$$

It should be noted that the used non-primitive variables stream function Ψ and vorticity Ω can be defined as

$$U = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial R}, \quad \Omega = \frac{\partial U}{\partial \varphi} - V - R \frac{\partial V}{\partial R} \quad (4)$$

Initial and boundary conditions for these governing equations can be written as follows

$$\tau = 0: \Psi = 0, \quad U = V = 0, \quad \Omega = 0, \quad \theta = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tau > 0: \Psi = 0, \quad \Omega = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{at } R = 0, \varphi \in [0, \pi]; \\ \Psi = 0, \quad \Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2}, \quad \theta = 0 \quad \text{at } R = 1, \varphi \in [0, \pi]; \\ \Psi = 0, \quad \Omega = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}, \quad \theta = 0 \quad \text{at } \varphi = 0, \pi, R \in (0, 1) \end{aligned} \quad (6)$$

Definition of all parameters used in equations combined with conditions (1)–(6) can be found in [4, 5].

Description of the numerical methods. The formulated boundary-value problem was solved using the finite difference method [4–6]. The second order difference schemes were used for an approximation of derivatives relative to the space coordinates, while for the unsteady term the first order difference schemes was used. The obtained difference equations for the vorticity and temperature were solved by the Thomas algorithm, while for the stream function the successive over relaxation technique was used. It should be noted that for transformation of two-dimensional problem to the set of one-dimensional problems the locally one-dimensional Samarskii scheme was used.

Results. In the present work, numerical analysis was conducted to study the heat transfer performance of the corium in a semi-cylindrical cavity with Prandtl number that was taken at the melting point of uranium dioxide, $Pr = 0.8202$, and Rayleigh number which varies from 10^3 to 10^6 . To represent the work, distributions of streamlines and isotherms were used as was mentioned before to analyze the structure of the convective flows. These results are represented in Figure 2. As shown, two symmetric convective cells of different rotations are formed within the cavity. When the Rayleigh number increases, the cores of both cells shift closer to the curvilinear wall of the cavity.

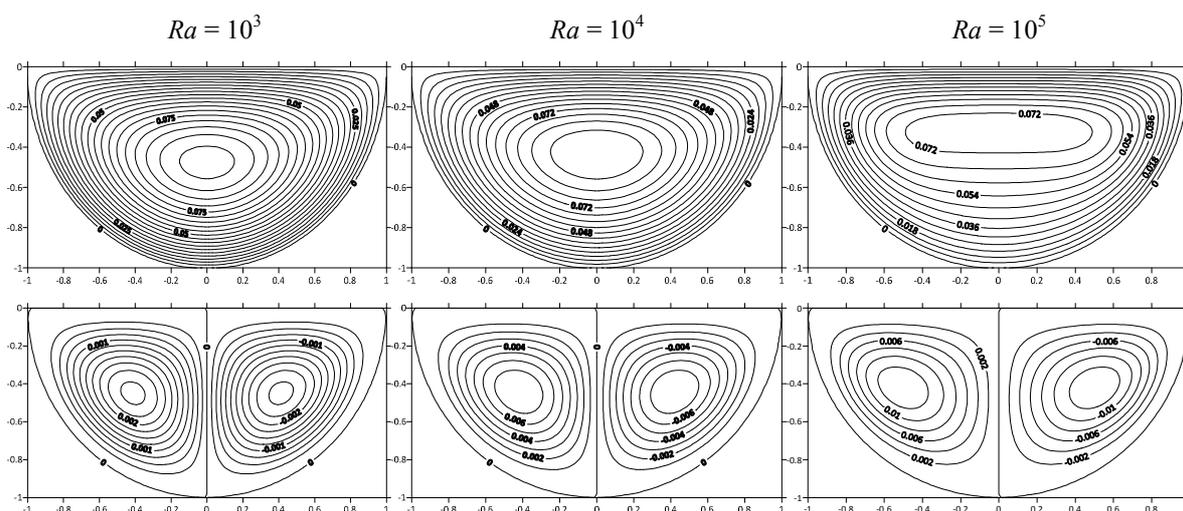


Fig. 2. Distributions of isotherms (top row) and streamlines (bottom row) at various Rayleigh numbers for $\tau = 100$

Conclusions. In this research, the numerical experiments for corium natural convection study in a semi-cylindrical cavity were performed using the Java programming language to show the influence of the Rayleigh number on streamlines and isotherms. It was found that a rise of the Rayleigh number illustrates a formation of two convective cells within the cavity and a uniform temperature field reflects an appearance of temperature maximum in a central part of the cavity due to an internal volumetric heat generation. Moreover, the average Nusselt number at the bottom and top walls have an opposite dependence on the Rayleigh number due to a displacement of the temperature maximum in the cavity to the upper wall with Ra .

Research was performed under the development programme of Tomsk Polytechnic University (Priority-2030-NIP/EB-002-0000-2022).

REFERENCES

1. Zhang L., Zhou Y., Zhang Y., Tian W., Qiu S., Su G. Natural convection heat transfer in corium pools: A review work of experimental studies // *Progress in Nuclear Energy*. – 2015. – V. 79. – P. 167–181.
2. Refaey A.M., Abdel-Latif S.H., Wasfy S.A. Thermal hydraulic and mechanical behaviour of VVER-1000 reactor lower plenum in the late phase of severe accident // *Progress in Nuclear Energy*. 2021. – V. 139. – P. 103833.
3. Hengra N.H., Ilyas M., Inayat M.H. Severe accident analysis of the Qinshan Nuclear Power Plant and evaluation of boundary conditions for ex-vessel heat transfer // *Progress in Nuclear Energy*. 2022. – V. 143. – P. 104032.
4. Kudrov A.I., Sheremet M.A. Numerical simulation of corium cooling driven by natural convection in case of in-vessel retention and time-dependent heat generation // *Computer Research and Modelling*. – 2021. – V. 13(4). – P. 807–822.
5. Sheremet M.A. Interaction of two-dimensional thermal “plumes” from local sources of energy under conditions of conjugate natural convection in a horizontal cylinder // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2012. – V 53(4). – P. 566–576.
6. Roache P.J. *Computational Fluid Dynamics*. – Hermosa Publishers, 1976. – 446 pp.

УДК 536.24

**ЕСТЕСТВЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ЗАМКНУТОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОЛОСТИ
С ВОЛНИСТОЙ СТЕНКОЙ**

Н.С. Павленко

Научный руководитель: доцент, д.ф.-м.н. М.А. Шеремет
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: Pavlenko-N-S@mail.ru

NATURAL CONVECTION IN A CLOSED HORIZONTAL CAVITY WITH A WAVY WALL

N.S. Pavlenko

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Dr. M.A. Sheremet
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050
E-mail: Pavlenko-N-S@mail.ru

Abstract. *The work is devoted to the study of free convective heat transfer of a viscous incompressible fluid in a closed inclined cavity under conditions of a lower isothermally heated wavy wall and an upper isothermally cooled wall. The medium in the cavity is considered to be a heat-conducting liquid that satisfies the Boussinesq approximation. To describe the flow and heat transfer inside the cavity, unsteady Oberbeck–Boussinesq differential equations are used in dimensionless non-primitive variables “stream function – vorticity”. To solve the formulated problem, the finite difference method of the second order accuracy has been used. The developed program code has been verified using different model problems. Effects of the amplitude and frequency of waves on the lower wall, as well as cavity inclination angle have been studied. The features of the development of convective structures inside the cavity are established, and the possibility of intensifying the heat transfer in a cavity with a wavy wall is shown.*

Введение. Естественная конвекция встречается во многих инженерных системах как один из определяющих механизмов передачи тепла и массы. С целью развития или оптимизации существующих технических аппаратов, например, солнечных коллекторов, возникает необходимость в детальном моделировании транспортных процессов в этих системах [1, 2]. К настоящему времени рассмотрено много задач в области конвективного теплопереноса в замкнутых областях при различных углах наклона в двумерных и трехмерных постановках [3, 4]. В большинстве опубликованных работ уделено мало внимания влиянию возможной нерегулярной структуры стенки.

Предлагаемая работа посвящена исследованию свободноконвективного теплопереноса вязкой несжимаемой жидкости в замкнутой наклонной полости при условии, что нижняя волнистая стенка является изотермически-нагреваемой, а верхняя стенка – изотермически-охлаждаемой.

Постановка задачи и методы решения. Физическая постановка задачи показана на рис. 1. Горизонтальные стенки описываются уравнениями $\bar{y}_1 = H - H[a + b \cdot \cos(2\pi k\bar{x}/L)]$ – нижняя стенка, $\bar{y}_2 = H$ – верхняя стенка, $a + b = 1$.

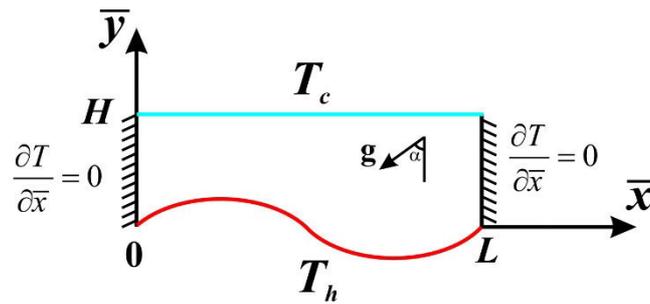


Рис. 1. Область решения задачи

Вертикальные стенки считаются адиабатическими. Сила тяжести направлена вниз под углом α к оси \bar{y} . Среда в полости считается теплопроводной жидкостью, которая удовлетворяет приближению Буссинеска. Дифференциальные безразмерные уравнения Обербека–Буссинеска в переменных “завихренность скорости – функция тока – температура” имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin(\alpha) \right]$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right)$$

В этой системе уравнений были использованы следующие безразмерные комплексы: $Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$ – число Прандтля и $Ra = \frac{\rho^2 c_p g \beta (T_h - T_c) H^3}{\mu \lambda}$ – число Рэлея.

Безразмерные граничные условия для предложенной системы уравнений имеют вид:

$$\tau = 0: \quad \psi = 0, \omega = 0, \theta = 0,5;$$

$$\tau > 0: \quad \psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \delta \delta \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = L/H = A;$$

$$\psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \theta = 0 \quad \text{и} \quad \delta \delta \quad y = y_2$$

$$\psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \theta = 1 \quad \text{и} \quad \delta \delta \quad y = y_1$$

При численном решении задачи совершаем переход к новым переменным:

$$\xi = x, \eta = \frac{y - y_1}{\Delta} = \frac{y - 1 + a + b \cdot \cos\left(\frac{2\pi kx}{A}\right)}{a + b \cdot \cos\left(\frac{2\pi kx}{A}\right)}$$

Принимая во внимание такое преобразование координат, определяющие уравнения примут вид [5]:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -\omega$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) + \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \cos(\alpha) - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \sin(\alpha) \right]$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{Pr \cdot Ra}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \eta} + \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)$$

Начальные и граничные условия для предложенной системы уравнений имеют вид:

$$\begin{aligned} \tau = 0: & \quad \psi = 0, \omega = 0, \theta = 0,5; \\ \tau > 0: & \quad \psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0 \quad \text{и} \quad \delta \xi = 0 \quad \text{и} \quad \xi = A; \\ & \quad \psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0, \theta = 0 \quad \text{и} \quad \delta \eta = 1 \\ & \quad \psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0, \theta = 1 \quad \text{и} \quad \delta \eta = 0 \end{aligned}$$

Для решения сформулированной задачи использовался метод конечных разностей и вторая схема с разностями против потока [5, 6]. Разработанный программный код был протестирован на множестве модельных задач, а также проанализирован на сеточную сходимость [5]. Численные исследования проведены при следующих значениях определяющих параметров: $Pr = 7,0$; $Ra = 10^4 - 10^6$; $A = 1 - 3$; $\alpha = 10^0, 30^0$; $k = 0 - 3$; $a = 0,7, 0,9$. В результате были получены распределения изолиний функции тока и температуры, а также распределения среднего числа Нуссельта в зависимости от интенсивности течения, геометрического параметра полости, угла наклона, количества волн и амплитуды. Установлены особенности развития конвективных структур внутри полости и показана возможность интенсификации теплообмена в полости с рельефной стенкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Evangelisti L., Vollaro R.D.L., Asdrubali F. Latest advances on solar thermal collectors: A comprehensive review // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. – 2019. – Vol. 114. – P. 109318.
2. Murugan M., Saravanan A., Elumalai P.V., Kumar P., Saleel C.A., Samuel O.D., Setiyo M., Enweremadu C.C., Afzal A. An overview on energy and exergy analysis of solar thermal collectors with passive performance enhancers // *Alexandria Engineering Journal*. – 2022. – Vol. 61. – P. 8123–8147.
3. Miroshnichenko I.V., Sheremet M.A. Turbulent natural convection heat transfer in rectangular enclosures using experimental and numerical approaches: A review // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. – 2018. – Vol. 82. – P. 40–59.
4. Hussain S., Oztop H.F. Impact of inclined magnetic field and power law fluid on double diffusive mixed convection in lid-driven curvilinear cavity // *International Communications in Heat and Mass Transfer*. – 2021. – Vol. 127. – P. 105549.
5. Shenoy A., Sheremet M., Pop I. Convective flow and heat transfer from wavy surfaces: viscous fluids, porous media and nanofluids. CRC Press, Boca Raton. – 2016. – 306 p.
6. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.

УДК 532

**NATURAL CONVECTION OF NANOFLUID OVER A VERTICALLY STRETCHING SHEET
EMBEDDED IN A DARCY-BRINKMAN POROUS MEDIUM**Muzamil Hussain^{1,2}, N.S. Gibanov²

Scientific Supervisors: Prof. Dr. M.A. Sheremet and Prof. Dr. Umer Farooq

¹COMSATS University Islamabad, Pakistan, Islamabad, 44000²Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: muzamil@upr.edu.pk

**ЕСТЕСТВЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ НАНОЖИДКОСТИ ВДОЛЬ ВЕРТИКАЛЬНОЙ
РАСТЯГИВАЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ДАРСИ-БРИНКМАНА**Музамиль Хуссейн^{1,2}, Н.С. Гибанов²

Научные руководители: доцент, д. ф.-м. н. М.А. Шеремет, профессор Умер Фарук

¹Университет COMSATS в Исламабаде,

Пакистан, г. Исламабад, 44000

² Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: muzamil@upr.edu.pk

***Аннотация.** В настоящей работе проводится моделирование естественной конвекции наножидкости вдоль нагреваемой растягивающейся поверхности, расположенной в пористой среде. Для описания транспортных процессов в пористой среде используется модель Дарси-Бринкмана, совместно с приближением Буссинеска для моделирования влияния выталкивающей силы. Исследования проводятся как на основе полных уравнений Обербека–Буссинеска, так и с использованием приближения пограничного слоя. Для реализации задачи, сформулированной в рамках приближения пограничного слоя, применяется метод локальной неавтономности. Полученные результаты отражают возможности использования различных подходов для моделирования свободно-конвективного течения вблизи вертикальной поверхности.*

Introduction. The analysis of viscous fluid flow along different surfaces is important, obtained results have several applications in the mechanical, electrical and industrial engineering, medicine and others engineering fields [1]. An addition of carbon nanotubes (CNTs) in the base fluid has some advantages from practical point of view [2]. Keeping these considerations in mind, the fluid flow of a viscous liquid with CNTs towards a stretchable surface embedded in a porous medium impacted by magnetic field is addressed. The Darcy-Brinkman model incorporates the effects of porosity.

To simulate the momentum and energy equations for the nanofluid flow, the single phase nanofluid model is used, while the full Oberbeck–Boussinesq differential equations are employed for the first approach and another approach is related with the boundary layer approximation. In the case of boundary-value problem for the Oberbeck–Boussinesq differential equations, the finite difference method has been used for numerical analysis. In the case of boundary layer flow approach, the governing expressions defining the flow are

transformed into dimensionless system with the assistance of appropriate transformations. The numerical analysis for the dimensionless non-similar partial differential system is performed by using a local nonsimilarity technique [3, 4] up to the second truncation level in association with the numerical algorithm bvp4c (MATLAB built-in solver).

Finally, the quantitative consequences of emerging dimensionless quantities on nondimensional velocity and temperature for the boundary layer problem and full Oberbeck–Boussinesq boundary-value problem are graphically depicted. Furthermore, the dimensionless friction coefficient and heat transfer rate are also reviewed. Comparison between considered two approaches has been performed. It is concluded that non-similar modelling, as compared to similar models, is more general and accurate in convection investigations with buoyancy effects for viscous nanofluids flow.

Mathematical models. Here, we consider the steady, incompressible, two-dimensional, nanofluid flow towards a stretched surface embedded in a porous medium under an influence of uniform magnetic field. The flow is triggered by the stretching of the surface in the Darcy-Brinkman medium. Water is assumed as a base fluid while SWCNTs and MWCNTs are adopted as nanoparticles. Magnetic field is parallel in x -axis of strength B_0 (see Fig. 1). Let us assume that $v = c \cdot y$ highlights the stretching velocity in the y -direction where $c > 0$. Temperature T_h and T_∞ denote the stretching surface and ambient specified temperatures, respectively.

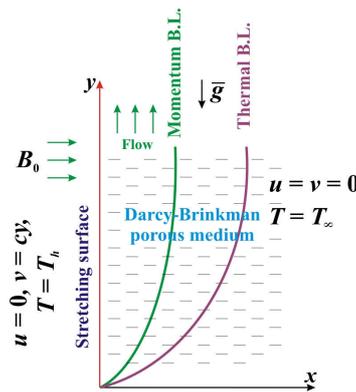


Fig. 1. Flow configuration for current model

Full Oberbeck–Boussinesq governing equations including single-phase nanofluid model can be written as follows

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\rho_{nf} \left(\frac{u}{\varepsilon^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{\varepsilon^2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{nf}}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu_{nf}}{K} u \tag{2}$$

$$\rho_{nf} \left(\frac{u}{\varepsilon^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{\varepsilon^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_{nf}}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu_{nf}}{K} v + (\rho\beta)_{nf} g (T - T_\infty) - \sigma_{nf} B_0^2 v \tag{3}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k_{pm}}{(\rho c)_{nf}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \tag{4}$$

In the case of boundary layer approach, the governing equations can be formulated as follows:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\rho_{nf} \left(\frac{u}{\varepsilon^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{\varepsilon^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\mu_{nf}}{\varepsilon} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\mu_{nf}}{K} v + (\rho\beta)_{nf} g(T - T_\infty) - \sigma_{nf} B_0^2 v \quad (6)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k_{pm}}{(\rho c)_{nf}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (7)$$

Boundary conditions can be formulated taking into account the physical formulation of the problem and Fig. 1. Thermal properties of the base fluid (water) and carbon nanotubes can be found in Table 1.

Table 1

Thermal properties of the base fluid and carbon nanotubes

Materials	k ($\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$)	ρ ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)	c ($\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$)	$\beta\cdot 10^{-5}$ (K^{-1})	σ ($\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$)	Pr
Single-walled carbon nanotubes	6600	2600	425	27	10^6-10^7	–
Multi-walled carbon nanotubes	3000	1600	796	44	$1.9\cdot 10^{-4}$	–
Water	0.613	997.1	4179	21	0.05	6.2

It should be noted that boundary-value problem for Oberbeck–Boussinesq partial differential equations has been solved using the finite difference method. The developed computational code has been validated using numerical data of other authors. While in the case of boundary layer governing equations, the local nonsimilarity technique combined with the second truncation level and *bvp4c* algorithm have been employed for analysis.

Conclusion. The performed numerical analysis allows studying natural convective flow and heat transfer of nanofluid along the vertical stretching surface immersed in the non-Darcy porous medium under an influence of horizontal magnetic field. Obtained results have illustrated the velocity and temperature fields defined using full Oberbeck–Boussinesq equations and boundary-layer approach.

REFERENCES

1. Dholey, S. Free convection boundary layer flow of a viscous fluid above a hot horizontal semi-infinite flat plate with prescribed surface temperature // Alexandria Engineering Journal. – 2016. – V. 55. – P. 2449–2461.
2. Ghalandari, M., Maleki, A., Haghighi, A., Shadloo, M. S., Nazari, M. A., Tlili, I. Applications of nanofluids containing carbon nanotubes in solar energy systems // A review. Journal of Molecular Liquids. – 2020. – V. 313. – P. 113476.
3. Farooq, U., Hussain, M., Ijaz, M. A., Khan, W. A., & Farooq, F. B. Impact of non-similar modeling on Darcy-Forchheimer-Brinkman model for forced convection of Casson nanofluid in non-Darcy porous media // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2021. – V. 125. – P. 105312.
4. Sparrow, E. M., Yu, H. S. Local nonsimilarity thermal boundary layer solutions // J. Heat Transfer. – 1971. V.93. – P. 328–334.

УДК 532.5, 536.21

**ЧИСЛЕННЕ ІСЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКТИВНО-РАДІАЦІОННОГО ТЕПЛООБМЕНА В
ЗАМКНУТИХ ОБЛАСТЯХ НА ОСНОВЕ РЕШІТЧОГО МЕТОДА БОЛЬЦМАНА**

Н.С. Гибанов

Научный руководитель: доцент, д.ф.-м.н. М.А. Шеремет

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: Gibanov@mail.tsu.ru

**NUMERICAL ANALYSIS OF CONVECTIVE-RADIATIVE HEAT TRANSFER IN ENCLOSURES
USING LATTICE BOLTZMANN METHOD**

N.S. Gibanov

Scientific Supervisor: Associate Professor, Dr. M.A. Sheremet

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin Avenue, 36, 634050

E-mail: Gibanov@mail.tsu.ru

***Abstract.** In this study, the benchmark problem of convective-radiative heat transfer in a closed square cavity has been solved on the basis of the lattice Boltzmann method (LBM). In addition, a similar problem has been solved using the finite difference method. The data obtained in various numerical methods have been compared with the data of other authors. The obtained thermohydrodynamic characteristics are in good agreement, which indicates the possibility of applying mesoscale method (LBM) to problems of natural convection and radiation in various fields. In addition, the lattice Boltzmann method allows calculations to be performed faster than classical grid methods.*

Введение. В настоящее время, существуют различные подходы и методы для решения задач тепломассообмена. Наибольшее развитие, в связи с активной эволюцией области вычислительных технологий, получили методы численного математического моделирования. Такой подход позволяет проводить численные эксперименты самых разнообразных и трудоёмких задач, решение которых необходимо в различных сферах человеческой деятельности. В последние десятилетия наблюдается бурное развитие решёточного метода Больцмана [1]. Данный метод позволяет эффективно проводить расчёты процессов тепломассообмена для различных сред – ньютоновская и неньютоновская, однофазная и многофазная, пористая среда, наножидкости, среда с изменяемым фазовым состоянием [2, 3].

В настоящем исследовании проводится численное моделирование задачи нестационарного конвективно-радиационного теплообмена в замкнутой квадратной области на основе методов конечных разностей и решёточного метода Больцмана.

Физическая и математическая постановка. На рисунке 1 представлена область решения задачи. Замкнутая квадратная полость была заполнена несжимаемой ньютоновской жидкостью с постоянными теплофизическими свойствами, а также удовлетворяла приближению Буссинеска. Система нагревалась от левой стенки с температурой T_h , и охлаждалась от правой холодной стенки с температурой T_c . Остальные стенки считались адиабатическими. При решении задачи решёточным методом Больцмана,

процеси переносу маси, імпульса і енергії в розглядаваній області описуються з допомогою кінетичного рівняння Больцмана для функцій розподілення (1)-(3). Було використано підхід TDF, оснований на використанні трьох функцій розподілення, для визначення скалярних і векторних макроскопічних характеристик.

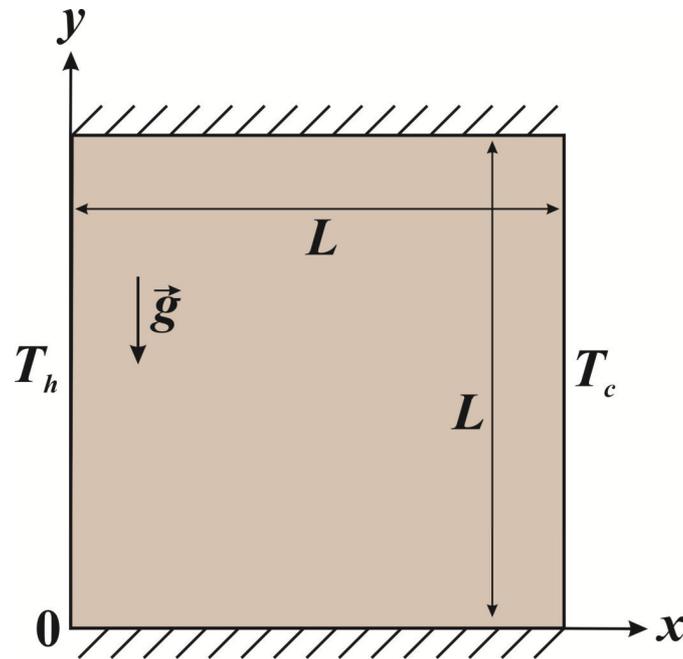


Рис. 1. Область исследования

Кінетичне рівняння Больцмана представлено в вигляді [4-5]:

$$f_k(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) = f_k(x, y, t)(1 - \omega_f) + \omega_f f_k^{eq}(x, y, t) + \Delta t F_i c_{y_i} \quad (1)$$

$$g_k(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) = g_k(x, y, t)(1 - \omega_g) + \omega_g g_k^{eq}(x, y, t) \quad (2)$$

$$I_k(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) = I_k(x, y, t)(1 - \omega_I) + \omega_I I_k^{eq}(x, y, t) \quad (3)$$

Здесь f_k – k -ая функция распределения (k определяется при выборе той или иной решеточной модели), $f_k^{eq} = w_k \rho \left(1 + \frac{\bar{u} \cdot \bar{c}_k}{c_s^2} + \frac{(\bar{u} \cdot \bar{c}_k)^2}{2c_s^4} - \frac{\bar{u} \cdot \bar{u}}{2c_s^2} \right)$ – k -ая функция локального равновесного распределения,

w_k – весовые коэффициенты, $\omega_f = \frac{1}{3\nu + 0.5}$ – формула для расчёта функции распределения для движения

(ν – кинематическая вязкость), f_k и f_k^{eq} – функции, используемые для определения макроскопических

параметров скорости и плотности, g_k и g_k^{eq} – функции для определения температуры, $\omega_g = \frac{1}{3a + 0.5}$ –

параметр, используемый при расчете функций распределения для температуры (a – коэффициент теплопроводности). I_k и I_k^{eq} – k -ые функции распределения, для определения плотности потока

излучения, $\omega_I = \kappa_a + \sigma_s$ – параметр, используемый при расчёте функции распределения для потока излучения (κ_a – коэффициент поглощения, σ_s – коэффициент рассеивания).

При решении задачи методом конечных разностей, основные уравнения процессов теплообмена представлялись в виде безразмерной системы дифференциальных уравнений в частных производных (4)–(8), представленных в преобразованных переменных.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial X} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{\text{Pr} \cdot \text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) \quad (6)$$

$$Q_{\text{rad}} = R_k - \sum_{i=1}^N F_{k-i} R_i \quad (7)$$

$$R_k = (1 - \varepsilon_k) \sum_{i=1}^N F_{k-i} R_i + \varepsilon_k (1 - \zeta)^4 \left(\Theta_k + 0.5 \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \right)^4 \quad (8)$$

Краевая задача (4)–(8) была решена с помощью метода конечных разностей на равномерной сетке. Уравнения параболического типа (4) и (6) решались с использованием локально-одномерной схемы А.А. Самарского, позволяющей свести двумерную задачу к системе одномерных. Полученная система линейных алгебраических уравнений была решена методом прогонки. Разностные уравнения эллиптического типа (5), (7) и (8) были решены методом последовательной верхней релаксации. Для вычисления угловых коэффициентов F_{k-i} был использован метод натянутых нитей Хоттеля.

Результаты и заключение. В процессе расчёта решёточным методом Больцмана была использована двумерная модель D2Q9 и link-wise простая схема граничных условий упругого отскока (simple bounce-back). В результате численного исследования были получены поля температуры и скорости, а также функции тока и средние числа Нуссельта на всех поверхностях, при различных значениях чисел Рэлея $10^4 \leq Ra \leq 10^6$ и для различных значений степени черноты внутренних поверхностей. Полученные различными вычислительными методами результаты, а также их сравнительный анализ, говорит о возможности использования метода конечных разностей, решёточного метода Больцмана, а также возможности их комбинирования для проведения численных исследований конвективно-радиационного теплообмена в замкнутых областях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Стипендии Президента РФ СП-2080.2021.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куперштох А.Л. Метод решеточных уравнений Больцмана для моделирования двухфазных систем типа жидкость-пар // Современная наука. – 2010. – №2 (4) – С. 56-63
2. Wolf-Gladrow D. A. Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models – an introduction. – Berlin: Springer-Verlag, 2005. – 311 pp.
3. Kruger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G. Viggien E.M. The Lattice Boltzmann Method. – Springer International Publishing Switzerland, 2017.
4. Mohamad A. A. Lattice Boltzmann Method. – Springer-Verlag London, 2011.
5. Sobhani M. Taguchi optimization of combined radiation/natural convection of participating medium in a cavity with a horizontal fin using LBM /M. Sobhani, H. A. Tighchi, J.A. Esfahani // Physica A. – 2018. – Vol. 509. – P. 1062–1079.

УДК 519.111.3+004.823

**РАЗРАБОТКА ОНЛАЙН-ЭНЦИКЛОПЕДИИ ПО ПРОИЗВОДЯЩИМ ФУНКЦИЯМ ДВУХ
ПЕРЕМЕННЫХ**

А.Б. Дарижапов, Д.В. Кручинин

Научный руководитель: д.т.н. В.В. Кручинин

Томский университет систем управления и радиоэлектроники,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 40, 634050

E-mail: kru@ie.tusur.ru

**DEVELOPMENT OF ONLINE ENCYCLOPEDIA ON GENERATING FUNCTIONS OF TWO
VARIABLES**

A.B. Darizhapov, D.V. Kruchinin

Scientific Supervisor: Dr. V.V. Kruchinin

Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Russia, Tomsk, 40 Lenina Pr.

E-mail: kru@ie.tusur.ru

***Abstract.** The issues of developing an online encyclopedia on generating functions of two variables are considered, a data model and a software system are proposed*

Введение. Развитие математического аппарата композиции производящих функций многих переменных [1] позволяет получать явные выражения коэффициентов производящих функций многих переменных и найти подходы и алгоритмы для реализации этой операции в системах компьютерной алгебры. Первым шагом в этом направлении является создание соответствующей базы знаний для тензоров $T(n, m, k)$ описываемых произведениями биномиальных коэффициентов, являющимися коэффициентами k -степени производящей функции двух переменных. В настоящее время эта база знаний реализована в системе компьютерной алгебры Maxima и насчитывает 1502 фреймов описания производящих функций и коэффициентов их степеней [2]. Однако, для широкого использования этой базы знаний необходимо создать ее онлайн-версию, с расширенными возможностями поиска, генерацией различных выходных форматов и механизмов развития базы знаний и внесения изменений сообществом математиков.

Основные понятия и методы. Переход на исследование коэффициентов степеней производящих функций многих переменных открыл новые возможности для решения задач, основанных на применении композиции производящих функций многих переменных и решения смежных задач. Для описания численного представления коэффициентов k -степени производящих функций двух переменных воспользуемся понятием тензора как многомерной таблицы. Запишем основные соотношения для коэффициентов степеней производящих функций двух переменных. Пусть задана производящая функция вида:

$$U_{num}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} u(n, m) x^n y^m.$$

Тогда пирамидой будем называть трехмерный тензор, формируемый выражением

$$T_{num}(n, m, k) = [x^n y^m] U_{num}(x, y)^k,$$

где $T_{num}(n, m, k)$ описывается выражением, состоящим из произведения или деления биномиальных коэффициентов, а также рациональных выражений, состоящих из переменных n, m, k и констант. Например, для производящей функции

$$U(x, y) = \frac{1}{1 - x - y}.$$

описываемая ею пирамида будет задана формулой

$$T(n, m, k) = [x^n y^m] U(x, y)^k = \binom{n+m}{n} \binom{n+m+k-1}{n+m}.$$

Производящая функция для тензора $T(n, m, k)$ будет иметь вид:

$$F(x, y, z) = \sum_{n, m, k} T(n, m, k) x^n y^m z^k = \frac{1}{1 - zU(x, y)}.$$

Для всех пирамид выполняются условия:

$$\begin{aligned} T(0, 0, 0) &= 1, & m = 0, n = 0, \\ T(n, m, 0) &= 0, & m > 0, n > 0, \\ T(n, m, k) &= 0, & m < 0 \text{ или } n < 0 \text{ или } k < 0. \end{aligned}$$

Структура электронной энциклопедии числовых пирамид.

Онлайн энциклопедия числовых пирамид представлена в виде веб-сервиса. Рассмотрим модель представления данных:

- 1) идентификатор пирамиды num ;
- 2) явные формулы производящей функции $U_{num}(x, y)$ и пирамиды $T_{num}(n, m, k)$;
- 4) программу вычисления членов пирамиды по формуле $T_{num}(n, m, k)$ на языке Python;
- 5) программу вычисления членов пирамиды по разложению производящей функции $U_{num}(x, y)$;
- 6) представление производящей функции и $U_{num}(x, y)$ пирамиды $T_{num}(n, m, k)$ в виде программы на языке Mathematica;
- 7) представление производящей функции $U_{num}(x, y)$ и явной формулы пирамиды $T_{num}(n, m, k)$ в виде программы на языке Mathematica;
- 8) список связанных пирамид (взаимная, реверсивная, инверсная, обратно-реверсивная);
- 9) список ссылок на последовательности онлайн-энциклопедию целых последовательностей OEIS.org;
- 10) представление производящей функции $U_{num}(x, y)$ и формулы пирамиды $T_{num}(n, m, k)$ в виде *latex*-текста в виде *latex*-текста;

Программная система состоит из базы данных пользователей и базы знаний пирамид и следующих модулей:

1. Модуль администрирования обеспечивает координацию и установку модулей, базы данных и базы знаний, организует права доступа к системе.
2. Модуль регистрации обеспечивает регистрацию и вход в систему.

3. Модуль управления базой пирамид обеспечивает ввод и редактирование данных и программ пирамиды.
4. Модуль анализа запроса производит синтаксический анализ запроса пользователя, при неверном запросе формирует сообщение об ошибке, при верном запросе производит его преобразование для дальнейшей обработки и передает его в модуль поиска.
5. Модуль поиска производит поиск подходящей пирамиды в базе знаний и формирует список пирамид. Если в результате поиска список пуст, то формируется соответствующее сообщение. Иначе полученный список передается в модуль формирования списка пирамид.
6. Модуль формирования списка пирамид обеспечивает преобразование списка в выходное представление и производит передачу полученного списка пользователю.
7. Модуль ведения протокола осуществляет запись протокола в файл протокола. Структура протокола содержит информацию о пользователе, о запросе, о работе модулей системы.
8. Модуль тестирования является необходимым элементом системы и обеспечивает тестирование базы знаний при внесении новых пирамид, проверяется соответствие функции и явной формулы пирамиды, отсутствие копий этой пирамиды под другими номерами, проверяются ссылки на другие пирамиды. Язык запросов описывается регулярной грамматикой и содержит следующие команды:
 - 1) F:<выражение производящей функции>;
 - 2) T:<выражение явной формулы пирамиды>;
 - 3) D:<список строк числовых данных>;
 - 4) номер пирамиды.

Программная система реализована как веб приложение, написано на языке Python, основано на микрофреймворке Flask, который, в свою очередь, для общения с браузером реализует WSGI (Web Server Gateway Interface) интерфейс. Для хранения информации о пользователях и фреймов производящих функций используется база данных на движке SQLite.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kruchinin D.V., Kruchinin V.V., Shablya, Y. Method for Obtaining Coefficients of Powers of Bivariate Generating Functions // Mathematics. – 2021. – V. 9. – P. 428.
2. Кручинин Д.В. База знаний коэффициентов k -степени производящих функций двух переменных // Доклады ТУСУР. – 2021. – Т. 24, № 4. – С. 81–87.

УДК 159.163

**БИЕКЦИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВОМ ВАРИАНТОВ ДЕРЕВА И/ИЛИ И МНОЖЕСТВОМ
ПОМЕЧЕННЫХ ДЕРЕВЬЕВ С ОГРАНИЧЕННЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ЛИСТЬЕВ**

Н.М. Денисов, Ю.В. Шабля

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 40, 634050

E-mail: denisovnik99@mail.ru

**A BIJECTION BETWEEN THE SET OF AND/OR TREE VARIANTS AND THE SET OF LABELED
TREES WITH THE LIMITED NUMBER OF LEAVES**

N.M. Denisov, Y.V. Shablya

Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Russia, Tomsk, Lenin str., 40, 634050

E-mail: denisovnik99@mail.ru

***Abstract:** This paper presents the structure of an AND/OR tree for the combinatorial set of labeled trees with the limited number of leaves. The rules of a bijection between the set of AND/OR tree variants and the set of labeled trees with the limited number of leaves are also described.*

Введение. Существует метод построения алгоритмов генерации комбинаторных множеств на основе деревьев И/ИЛИ [1], применение которого возможно в том случае, если выражение мощности комбинаторного множества принадлежит алгебре $\{\mathbb{N}, +, \times, R\}$. Часть данного метода заключается в построении биекции между элементами исходного множества и вариантами множества деревьев И/ИЛИ.

В данной статье рассматривается биекция между множеством вариантов дерева И/ИЛИ и множеством помеченных деревьев с ограниченным количеством листьев.

Анализ формулы мощности комбинаторного множества. Комбинаторное множество помеченных деревьев с ограниченным количеством листьев определяется двумя параметрами: n – количество всех узлов, k – количество листьев. Формула функции мощности такого множества [2]:

$$T(n, k) = \frac{n!}{k!} S_{n-2}^{n-k} = C_n^k P_{n-k} S_{n-2}^{n-k}, \quad n \geq 2, \quad k = \overline{2, n},$$

где S_{n-2}^{n-k} – число Стирлинга второго рода, которое определяет количество разбиений множества $n-2$ элементов на $n-k$ подмножеств, C_n^k – сочетание из n по k элементов, P_{n-k} – перестановка $n-k$ элементов.

Проанализировав данную формулу мощности, были сделаны выводы, что: сочетание определяет количество вариантов выбора k помеченных вершин, которые являются листьями, из общего числа n вершин, при этом порядок листьев не важен; перестановка определяет количество вариантов различных перестановок вершин дерева, не выбранных в качестве листьев; число Стирлинга второго рода определяет количество структур неизоморфных деревьев, которые могут существовать для заданного множества, без учёта различных перестановок вершин, которые не выбраны в качестве листьев.

Чтобы построить дерево И/ИЛИ, были использованы следующие формулы расчёта количества сочетаний и перестановок, а также чисел Стирлинга второго рода [3]:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, \quad C_n^n = C_n^0 = 1;$$

$$P_n = n \cdot P_{n-1}, \quad P_0 = 1;$$

$$S_n^k = k \cdot S_{n-1}^k + S_{n-1}^{k-1}, \quad S_n^n = S_n^1 = 1.$$

На рис. 1 изображена полученная структура дерева И/ИЛИ для исследуемого множества.

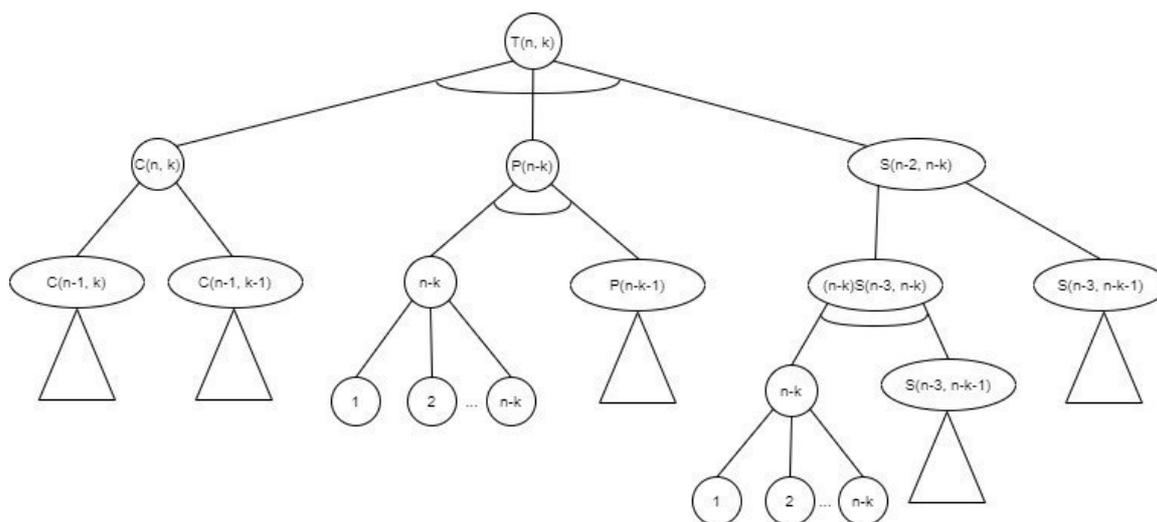


Рис. 1. Дерево И/ИЛИ для множества помеченных деревьев с ограниченным количеством листьев

Для нахождения правил биекции было решено сначала представить исходный объект в виде кода Прюфера, построение которого заключается в последовательном удалении из дерева вершин с наименьшим номером до тех пор, пока не останутся только две связанные вершины. При каждом удалении в код записывается номер той вершины, с которой соединена удаляемая вершина [4].

Для восстановления дерева по коду Прюфера из списка всех вершин выбирается вершина с минимальным номером, которого нет в коде, а из кода Прюфера берётся значение первого элемента, и к выбранной ранее вершине присоединяется вершина с номером, равным этому значению. Затем выбранные элементы удаляются из списка и кода, соответственно. Этот процесс повторяется, пока в списке всех вершин не останется два элемента, значение одного из которых уже будет находиться в структуре дерева, поэтому останется только добавить к нему соединение со вторым элементом из оставшегося кода Прюфера.

Результаты. В результате были разработаны правила биекции между вариантами дерева И/ИЛИ и объектами комбинаторного множества. Для получения варианта дерева И/ИЛИ необходимо выполнить следующие действия:

1. получить код Прюфера для исходного объекта;
2. на основании меток k листьев определить сочетание из n по k ;
3. получить список всех уникальных значений из кода Прюфера;
4. получить перестановку $n - k$ элементов, ранжируя по возрастанию список, составленный на шаге 3.

5. отримати розбиття множини з $n-2$ елементів на $n-k$ підмножин шляхом послідовного додавання в кожне з них номерів позицій однакових елементів коду Прюфера, починаючи з першого;

6. перетворити отримане комбінаційне, перестановку і розбиття в варіанти дерев І/ІЛІ, застосувавши правила бієкції для них з [5];

7. об'єднати варіанти з кроку 6 в варіант множини позначених дерев з обмеженим числом листків.

Для відновлення об'єкта множини варіанта дерева І/ІЛІ необхідно:

1. розділити варіант множини позначених дерев з обмеженим числом листків на варіанти комбінацій, перестановки і розбиття;

2. перетворити варіанти комбінацій, перестановки і розбиття в об'єкти відповідних множин;

3. на основі комбінацій і списку вершин позначеного дерева скласти відсортований за зростанням список значень вершин, які не є листками;

4. отримати номер об'єкта множини позначених дерев з обмеженим числом листків шляхом послідовного додавання, в початково порожню, послідовність P , номерів позицій підмножини розбиття, в якій знаходиться номер заповнюваної позиції з P .

5. замінити кожен елемент перестановки елементом з списку, отриманого на кроку 3, порядок якого дорівнює значенню поточного елемента перестановки;

6. отримати код Прюфера, замінюючи послідовно кожен елемент в P , на елемент з списку, складеного на кроку 5, номер позиції якого дорівнює значенню поточного елемента з P ;

7. відновити позначене дерево з обмеженим числом листків з коду Прюфера.

Висновок. Таким чином, розглянуто процес побудови структури дерева І/ІЛІ для комбінаційної множини позначених дерев з обмеженим числом листків. Також розроблено правила бієкції між даним множиною і множиною варіантів дерева І/ІЛІ. В подальших дослідженнях на основі створених правил бієкцій будуть розроблені алгоритми ранжування і генерації по рангу для представленого комбінаційного множини.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Шабли Ю.В. Алгоритмічне забезпечення комбінаційної генерації на основі застосування теорії виробляючих функцій: Дис. ... канд. техн. наук. – Томськ, 2019. – 123 с.
2. Harary F., Mowshowitz A., Riordan J. Labeled trees with unlabeled end-points // Journal of Combinatorial Theory. – 1969. – Vol. 6, no. 1. – P. 60–64.
3. Куртова Л.Н. Основы комбинаторики и теории чисел: Учебное пособие. – Белгород: Изд-во НИУ «БелГУ», 2018 – 50 с.
4. Keller M.T., Trotter W.T. Applied combinatorics – CreateSpace Independent Publishing Platform, 2016. – 384 p.
5. Кручинин В.В. Методи побудови алгоритмів генерації і нумерації комбінаційних об'єктів на основі дерев І/ІЛІ. – Томськ: В-Спектр, 2007. – 200 с.

УДК 159.163

**РАЗРАБОТКА СПОСОБА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОМБИНАТОРНОГО МНОЖЕСТВА,
ОПРЕДЕЛЯЕМОГО ЧИСЛАМИ ЯКОБСТАЛЯ, В ВИДЕ СТРУКТУРЫ ДЕРЕВА И/ИЛИ**

С.С. Иконников, Ю.В. Шабля

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 40, 634050

E-mail: danili101010@mail.ru

**THE DEVELOPMENT OF A WAY FOR REPRESENTING THE COMBINATORIAL SET
DETERMINED BY THE JACOBSTHAL NUMBERS IN THE FORM OF AN AND/OR TREE**

S.S. Ikonnikov, Y.V. Shablya

Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Russia, Tomsk, Lenin str., 40, 634050

E-mail: danili101010@mail.ru

***Abstract.** In the present work, we consider the development and implementation of methods and algorithms for solving scientific problems of ranking and unranking the combinatorial set determined by the Jacobsthal numbers. We also construct the corresponding AND/OR tree structure for this combinatorial set, as well as the bijection between the set of AND/OR tree variants and the combinatorial set.*

Введение. Комбинаторные объекты, которые описаны рекурсивно или иерархически, имеют возможность представления в виде древовидной структуры [1]. Например, выбранный для исследования класс комбинаторных множеств, определяемых числами Якобсталя, имеет требуемое рекурсивное описание. Примером методов и алгоритмов решения научных и прикладных задач является генерация и ранжирование разнообразных комбинаторных объектов [2]. Генерация – построение всех комбинаторных структур определенного типа, а ранжирование – нумерация объектов комбинаторных множеств. Для удобного хранения информации комбинаторных множеств необходимы алгоритмы комбинаторной генерации, следовательно, важно разрабатывать эффективные алгоритмы комбинаторной генерации, что показывает актуальность данной задачи [3].

Целью данной работы является разработка способа представления комбинаторного множества, определяемого числами Якобсталя, в виде структуры дерева И/ИЛИ.

Описание способа. Далее представлены основные этапы по разработке способа представления комбинаторного множества, определяемого числами Якобсталя, в виде структуры дерева И/ИЛИ:

1. Числа Якобсталя P_n , где $n \geq 0$, образуют последовательность A001045 в онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей [4]. Числа Якобсталя удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$P_n = P_{n-1} + 2P_{n-2}, \quad P_1 = 1, \quad P_0 = 0.$$

2. Числа Якобсталя имеют комбинаторную интерпретацию: P_n определяет количество способов, которыми прямоугольник $(n-1) \times 2$ может быть выложен плиткой из домино вида 1×2 , 2×1 и 2×2 квадратов [5]. Например, при $n = 6$ будет 21 способ разложить плитку (рис. 1).

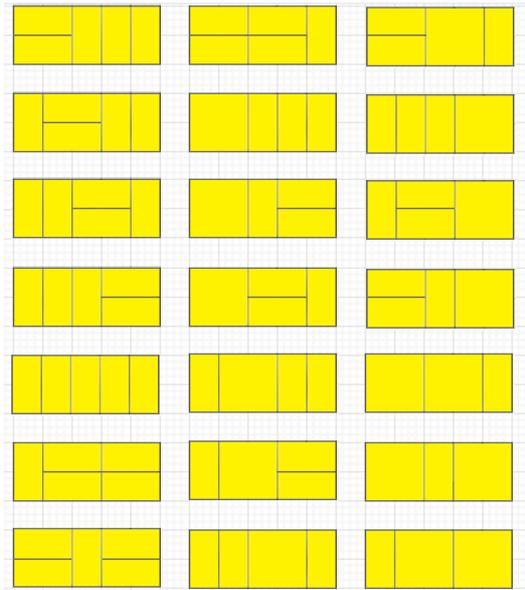


Рис. 1. Все способы разложить плитку при $n = 6$

3. На основе рекуррентного соотношения для чисел Якобсталя, построено дерево И/ИЛИ (рис. 2).

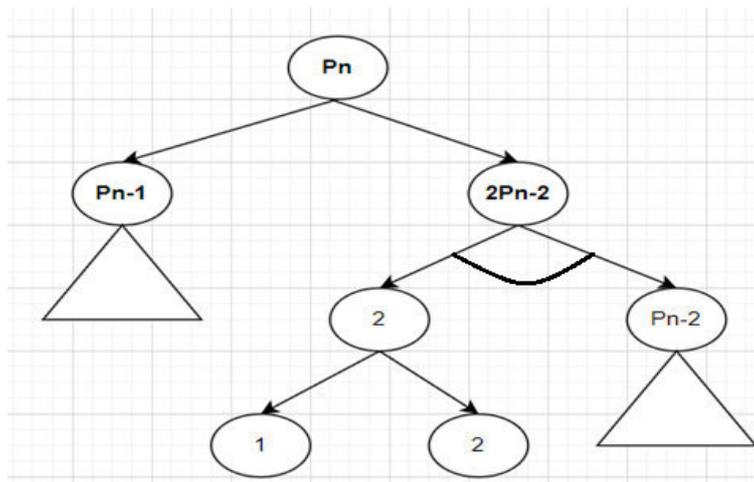


Рис. 2. Структура дерева И/ИЛИ для комбинаторного множества, определяемого числами Якобсталя

4. Разработанные правила биекции:

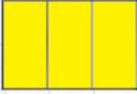
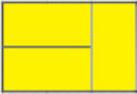
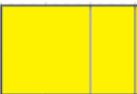
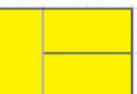
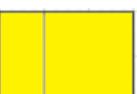
1) Если стрелка идет влево из ИЛИ-узла с меткой n , то n -я плитка, которая вложена в прямоугольник $(n-1) \times 2$, будет 1×2 . В результате останется доложить плиткой прямоугольник $(n-2) \times 2$. Данное перемещение в дереве И/ИЛИ закодируем числом 0, что будет упрощать поиск всех вариантов.

2) Если стрелка идет вправо из ИЛИ-узла с меткой n , то плитка выкладывается в прямоугольник $(n-1) \times 2$ одним из двух возможных способов: горизонтально две плитки 2×1 или одна плитка 2×2 . В результате останется доложить плиткой прямоугольник $(n-3) \times 2$. Первому способу соответствует выбор листа с меткой 1 в ИЛИ-узле с меткой 2, второму способу – выбор листа с меткой 2 в ИЛИ-узле с меткой 2. Данные перемещения в дереве И/ИЛИ закодируем числами 1 и 2, соответственно, что будет упрощать поиск всех вариантов.

В таблице 1 представлен пример применения разработанной биекции для комбинаторного множества, определяемого числом Якобсталя $P_4 = 5$.

Таблица 1

Биекция для комбинаторного множества, определяемого числом Якобсталя $P_4 = 5$

№	Переход по узлам дерева И/ИЛИ	Комбинаторный объект	Комбинация номеров
1	$P_4 \rightarrow P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1$		0,0,0
2	$P_4 \rightarrow P_3 \rightarrow 2P_1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow P_1$		0,1
3	$P_4 \rightarrow P_3 \rightarrow 2P_1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow P_1$		0,2
4	$P_4 \rightarrow 2P_2 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1$		1,0
5	$P_4 \rightarrow 2P_2 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1$		2,0

Заключение. В рамках данной работы были изучены способы получения правил биекции между деревьями И/ИЛИ и комбинаторными множествами. Разработаны правила биекции между деревом И/ИЛИ и комбинаторным множеством, определяемым числами Якобсталя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Холл М. Комбинаторика: Учебное пособие. – М.: МИР. – 1970. – 421 с.
2. Шабля Ю.В. Алгоритмическое обеспечение комбинаторной генерации на основе применения теории производящих функций: Дис. ... канд. техн. наук. – Томск, 2019. – 123 с.
3. Shablya Y.V., Kruchinin D.V., Kruchinin V.V. Method for developing combinatorial generation algorithms based on AND/OR trees and its application // Mathematics. – 2020 – Vol. 8, no. 6. – P. 962.
4. Wikipedia: Jacobsthal number [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobsthal_number (дата обращения: 01.03.2022).
5. OEIS: Jacobsthal sequence (or Jacobsthal number) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://oeis.org/A001045> (дата обращения: 01.03.2022).

УДК 004.896

**РАЗРАБОТКА КОНФИГУРАТОРА НЕЙРО-НЕЧЁТКОЙ СЕТИ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ
КОЭФФИЦИЕНТА ЗАГРУЗКИ ОБОРУДОВАНИЯ**

С.А. Ильина

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. М.Е. Семенов

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: sai8@tpu.ru

**DEVELOPMENT OF A CONFIGURATOR OF A NEURAL-FUZZY NETWORK FOR PREDICTING
THE LOAD FACTOR OF EQUIPMENT**

S.A. Ilina

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., PhD M. E. Semenov

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin ave., 30, 634050

E-mail: sai8@tpu.ru

***Abstract.** In this article, the creation of network configurator based on adaptive neuro-fuzzy inference system (ANFIS) has been described. The proposed network used to predict the load factor of production equipment based on data from sensors (SCADA), operational reports and simulation model. The load factor of production equipment has been predicted with error less than 5%.*

Введение. В условиях производства на оборудование влияет множество внешних факторов, при этом оборудование не всегда используется равномерно, что приводит к постепенному ухудшению технического состояния и может привести к неисправности или даже поломке. Для диагностики и прогнозирования потенциальных неисправностей оборудования применяются различные методы и модели проактивной поддержки принятия решений. Предложенные решения можно разделить на три класса: а) подходы, основанные на физических моделях (physical-based methods, PhM), б) использовании формализованных знаний (knowledge-based methods, KBM), в) анализе данных (data-driven methods, DDM) [1, 2]. В данный момент, на производствах часто применяют экспертный подход, при котором не всегда удаётся учесть фактические режимы работы и, как следствие, реальную загрузку оборудования. В этой работе мы предлагаем использовать нечёткие нейронные сети для организации планово-предупредительного ремонта, чтобы уточнить фактическую загрузку оборудования и учесть динамические режимы его работы. Данная интеллектуальная система позволит реализовать прогнозирование остаточного ресурса на основе анализа данных, но с учётом правил, применяющихся при экспертном подходе диагностики технического состояния оборудования.

Структура сети и алгоритм. Разработанная нейро-нечёткая сеть (ННС) имеет нечёткую и линейную части. Некоторые параметры сети настраиваются пользователем на основании его данных. Нечёткая часть представлена ANFIS моделью, состоящей из пяти слоёв (рис. 1, слева).

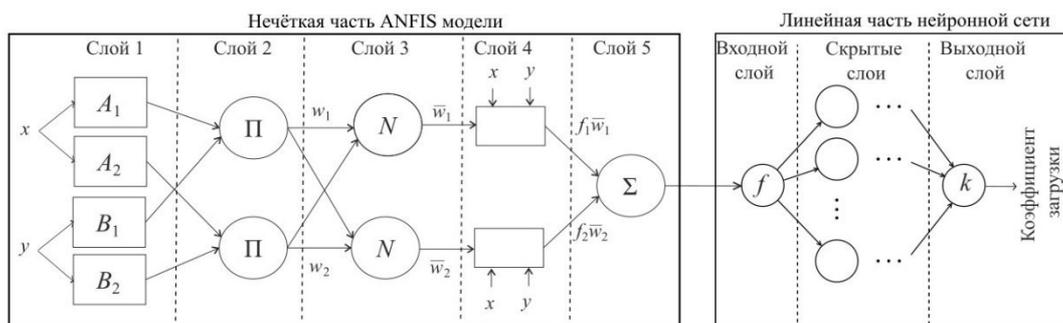


Рис. 1. Общая схема нейро-нечёткой сети на основе ANFIS модели

Слой 1 получает входные параметры x , y , каждый из которых представлен отдельным нейроном и вводит их в модель ANFIS. Этот слой считается входом нечёткой системы. Выход *Слоя 1* становится входом *Слоя 2*, несущего предыдущие значения функций принадлежности Π , которые распределяются на основе входных значений. Узлы *Слоя 2* определяют нечёткие правила и передают их на *Слой 3* сети с соответствующей степенью активности w_1 , w_2 . Затем, *Слой 3* нормализует степени активности правил, \bar{w}_1 , \bar{w}_2 . *Слой 4* (слой консеквентов) принимает узлы и функции и представляет модель первого порядка на основе производных параметров, отправляя их на выходной *Слой 5* (сумматор Σ) [3]. Заметим, что на этапе слоя консеквентов (*Слой 4*) используются следствия Такаги-Сугено-Канга. Линейная часть (рис. 1, справа) содержит *Входной слой* с одним нейроном, несколько *Скрытых слоёв* с произвольным количеством нейронов на каждом из них, и *Выходным слоём* с одним нейроном. Входной слой принимает выход с сумматора на *Слое 5* и вводит данные на первый *Скрытый слой*. Каждый скрытый слой применяет различные преобразования к входным данным и передаёт результаты на следующий. Выходной слой принимает выход с последнего *Скрытого слоя* и преобразовывает данные в одномерный вектор.

В линейной части настраиваемыми параметрами является количество скрытых слоёв и нейронов на них, а также тип функций активации (сигмоидальная, ReLU или GeLU) для каждого внутреннего слоя. Также пользователь может задать количество эпох обучения.

Для обучения нечёткой и линейно частей разработанной ННС в данной работе используется алгоритм обратного распространения ошибки. В алгоритме обратного распространения различают два прохода, выполняемых в процессе вычислений: первый проход называют прямым (forward pass), второй – обратным (back pass). При прямом проходе (forward pass) синаптические веса остаются неизменными во всей сети, но последовательно вычисляются функциональные сигналы. Реализован алгоритм обратного распространения с использованием среднеквадратичной ошибки для настройки параметров. В качестве оптимизатора используется устойчивый алгоритм обратного распространения (реализация Rprop из библиотеки PyTorch).

Вычислительные эксперименты и их обсуждение. Для демонстрации возможностей выбранной модели проведён подбор параметров, обучена и протестирована модель на наборе данных, состоящем из векторов взвешенной суммы: а) данных с системы датчиков SCADA, б) данных оперативных отчётов, и в) данных имитационной модели, а также из вектора соответствующих коэффициентов неравномерности загрузки. Для оценки качества результатов тестирования мы использовали среднеквадратичную ошибку (MSE) и ошибку обучения (PE):

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2, PE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{Y_i - \hat{Y}_i}{\hat{Y}_i} \right|$$

где n – величина выборки, \hat{Y}_i – спрогнозированная величина, Y_i – действительное значение.

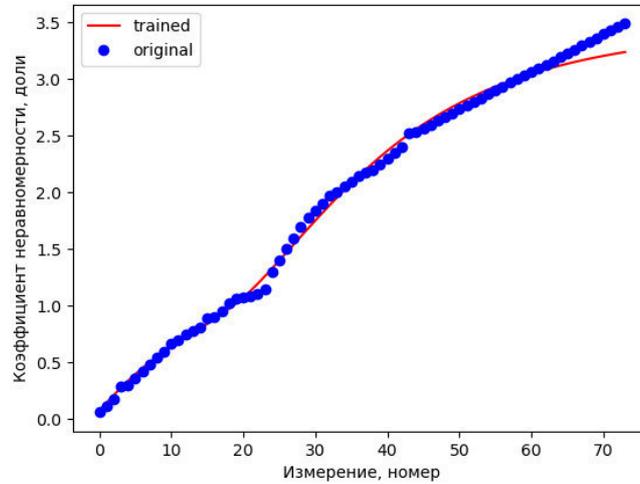


Рис. 2. Сравнительный график спрогнозированных при тестировании значений с реальными данными:

$$MSE = 0,00581, PE = 3,9\%.$$

Заключение. В ходе вычислительного эксперимента мы продемонстрировали результаты обучения и тестирования разработанной нейро-нечёткой сети. Представленная ННС позволяет спрогнозировать коэффициент загрузки производственного оборудования с достаточной точностью (ошибка не более 5%). На основе полученного коэффициента можно статистически вычислить остаточный ресурс оборудования и спланировать график проведения предупредительных ремонтных работ, а также определить оптимальное количество и время закупки запасных частей, необходимых для ремонта. Всё это может помочь производствам ощутимо сократить свои эксплуатационные расходы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lei Y. Intelligent Fault Diagnosis and Remaining Useful Life Prediction of Rotating Machinery. – Butterworth-Heinemann, 2017. – 366 p.
2. Сай Ван Квонг. Модели и методы проактивной поддержки принятия решений при управлении техническим состоянием оборудования: Дис. канд. тех. наук / Волгоградский государственный технический университет – Волгоград, 2020. – 152 с.
3. Najafi B., Ardabili S.F. Application of ANFIS, ANN, and logistic methods in estimating biogas production from spent mushroom compost // Resources, Conservation and Recycling. – 2018. – Vol. 133. – P. 169-178.
4. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. —СПб.: БХВ Петербург, 2005. – 736 с.
5. Ильина С.А., Семенов М.Е. Разработка конфигуратора прогноза планово-предупредительных ремонтов с применением нейро-нечётких систем // Материалы докладов XVII Международной научно-практической конференции «Электронные средства и системы управления». – 2021. - ч. 2. - С. 308-310.

УДК 519.233

**ОБНАРУЖЕНИЕ РОБОТОВ В КОМПЬЮТЕРНЫХ ИГРАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ**Е.А. Задорожных

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. М.Е. Семенов

Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: caz28@tpu.ru**DETECTION OF ROBOTS IN COMPUTER GAMES USING NEURAL NETWORKS**

E.A. Zadorozhnykh

Scientific Supervisor: PhD, Associate Professor M.E. Semenov

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin avenue, 30, 634050

E-mail: caz28@tpu.ru

***Abstract.** Computer games occupy a huge share in the field of entertainment, so it is important to improve methods to combat cheating. In this paper, we have used the own Targetman game to collect and analyze the data. The neural network model has been proposed and we solved the classification binary task "bot/not-bot" with one hot encoding of outcome variable.*

Введение. Развитие соревновательной составляющей в игровой индустрии привело к появлению игроков, которые стали создавать и использовать специальные программы - *роботы*, позволяющие получить преимущество, недостижимое при честной игре. Автоматизируя игровой процесс, роботы стали уменьшать сложность игры для пользователя. В зависимости от жанра игры роботы выполняют разные функции. В данной работе мы рассматриваем два типа роботов, которые чаще всего используются в играх жанра «стрельба от первого лица» (first-person shooter, FPS-игры): aimbot – предназначен для автоматического прицеливания и triggerbot – автоматического выстрела. Aimbot определяет местоположение других игроков и прочих целей вне зависимости от того, может ли реальный игрок видеть их. При этом робот прицеливается существенно точнее и быстрее, чем игрок. Triggerbot используется для автоматического выстрела при наведении на цель. Данные типы роботов часто используются вместе. При этом поведение игрока становится неестественным, поэтому игроки практикуют мимикрию, например, задержка между прицеливанием и выстрелом или случайное отклонение от центра мишени. Использование таких роботов дает несправедливое преимущество игроку и нарушает баланс игры.

Цель работы – разработка методов обнаружения роботов в компьютерных играх для дальнейшего выявления игроков, пользующихся роботами. Один из способов обнаружения роботов – использование моделей нейронных сетей для решения задачи бинарной классификации: 0 – игрок, 1 – робот. В статье [1] авторы приводят классификацию методов выявления использования роботов в компьютерных онлайн играх, в частности указаны: анализ поведения пользователей, анализ интернет трафика и анализ распознавания капча (captcha). Далее в работе [2] авторы продолжают исследования и описывают

подходы для обнаружения роботов в FPS-играх. Они выделяют методы, основанные на прямом анализе игровых действий пользователя (например, скорость наведения на цель, точность попадания), а также методы, основанные на косвенном анализе игрового процесса (например, время жизни цели, число фальшивых целей). В данной работе мы использовали авторскую игру TargetMan, разработанную в жанре «стрельба от первого лица».

Входные данные. Для обучения и тестирования модели нейронной сети мы использовали набор данных, собранных с помощью игры TargetMan [3]. Набор содержит девять признаков, а также целевой категориальный признак Running, идентифицирующий использование робота (True/False). Собранные данные были нормализованы и отображены на интервал [0,1] по правилу: $(x - \min(x))/(\max(x) - \min(x))$. Приведем описание признаков: Lives – количество оставшихся жизней игрока, Level – текущий уровень в игре, Points – количество очков, набранных игроком на текущий момент, Suspicion – уровень подозрительности игрока, TargetLifeTime – время жизни цели, Missed Shots – количество пропущенных выстрелов, TotalTargets – общее количество целей, TotalFakeTargets – общее количество фальшивых целей, $\exists \text{TotalTargets} \leq \text{TotalFakeTargets}$, TotalApprovedTargets – общее число пораженных целей. Матрица корреляций между независимыми признаками (категориальные признаки Lives, Level, представленные с помощью целых и вещественных значений, не учитывались) показала, переменные Total Targets, Total Fake Targets, Total Approved Targets имеют сильную положительную зависимость, в то время как Points и Target Life Time – сильную отрицательную. В игровом процессе на значения признаков наложены вероятностные условия: $P(\text{Suspicion}=0 \mid \text{Running}=\text{False})=1$, $P(\text{Missed Shots}>0 \mid \text{Running}=\text{False})>0$, $P(\text{TotalApprovedTargets}>0 \mid \text{TotalTargets}=\text{TotalFakeTargets}=0)>0$. Для вычисления значений Suspicion мы предложили использовать рекурсивную функцию от количества пораженных фальшивых целей:

$$f(x) = f(x - 1) + x^2 = x(x+1)(2x+1)/6 = \sum_{i=1}^x i, \quad f(0) = 0, \quad x \in \mathbb{N}$$

$f'(x) = x^2 + x + 1/6 > 0, \forall x \in \mathbb{N}$, следовательно, подозрительность игрока возрастает с ростом количества пораженных целей.

Набор данных для обучения нейронной сети содержит 5 249 записей, среди которых в 1 518 записях Running=False, в 3 731 – Running=True (отношение классов 0,4). В наборе для тестирования находится 515 записей, из которых в 139 записях Running=False, в 376 Running=True (отношение классов 0,36). На рис. 1 приведена структура нейронной сети, где параметры x_1, x_2, \dots, x_9 формируют входной слой и соответствуют девяти вышеописанным признакам. Сеть состоит из трёх скрытых слоёв, в каждом из которых находится три нейрона $N_{ij}, i, j = 1, 2, 3$. Выходной слой связан с признаком Running и содержит два нейрона: $N_{4,1}$ соответствует Running=True, а нейрон $N_{4,2}$ – Running=False.

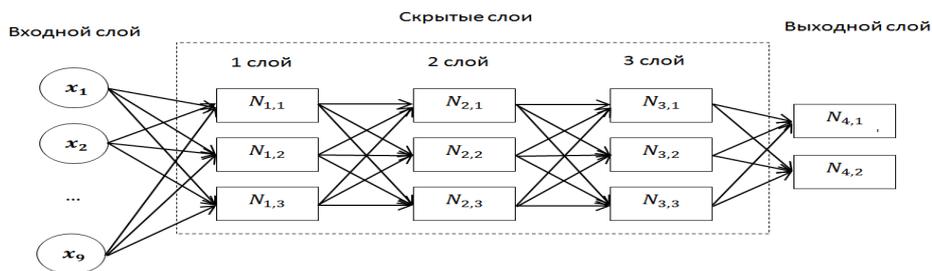


Рис. 1. Структура нейронной сети

Для создания модели нейронной сети мы использовали библиотеку Python Keras. Сначала был создан массив скрытых слоев `hidden_neurons`, где элементы массива – количество нейронов в данном слое. Затем создан входной слой с 9 нейронами по количеству независимых переменных, после чего написан цикл создания скрытых слоев, где задействован массив `hidden_neurons`. После цикла был добавлен выходной слой с двумя нейронами для прогнозирования целевой переменной `Running`.

Для обучения модели нейронной сети мы конвертировали (`one hot encoding`) категориальную целевую переменную `Running` в упорядоченные пары по правилу: `True := (1, 0)`, `False := (0, 1)`. Для всех слоев была выбрана функция активации – сигмоида

$$S(x) = 1 / (1 + \exp(-x)),$$

в качестве оптимизатора выбран метод Adam, средняя квадратическая ошибка была использована в качестве функции потерь:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2,$$

здесь $y_i = \{a, b\}$: $a, b \in (0, 1)$ – прогнозируемое значение, x_i – истинное значение, n – размер вектора x_i . Выходной массив y_i формируется нейронной сетью и представляет собой упорядоченные пары, принимающие вещественные значения. Для построения матрицы ошибок мы округляем полученные значения до ближайшего целого.

Результаты работы нейронной сети. Количественными критериями, позволяющими оценить работу сети, является параметр *MSE* и матрица ошибок. Для обучения нейронной сети было выполнено 40 эпох, после которых значение параметра ошибки вышло на стационарное поведение и достигло значения $MSE=0,0256$. По результатам вычислительных экспериментов на тестовом наборе мы провели симуляцию Монте-Карло с 500 итерациями и построили матрицу ошибок, усредненные значения которой равны: $\begin{bmatrix} 118,129 & 1,648 \\ 20,608 & 373,640 \end{bmatrix}$. Из матрицы видно, что в среднем почти все 376 случаев использования роботов были выявлены, при этом в среднем в 21 случае мы получили ошибку 1-го рода, в 2 случаях – ошибку 2-го рода.

Заключение. По результатам симуляции методом Монте-Карло видно, что матрица ошибок устойчива к случайному изменению входных значений тестовой выборки. Таким образом, предложенная модель нейронной сети показала свою работоспособность на использованном наборе данных. Дальнейшие шаги проведения исследований будут направлены на изучение способов мимикрии роботов и их идентификации с использованием методов машинного обучения и математической статистики. В частности стоит учесть факт корреляционной зависимости и рассмотреть категориальную корреляцию Крамера разных уровней признаков `Lives`, `Level` или применить использованный метод кодирования (`one hot encoding`).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kang A. R., Woo J., Park J., Kim H.K. Online game bot detection based on party-play log analysis. *Computers and Mathematics with Applications*. – 2013. Vol. 65. – pp. 1384–1395.
2. Han M.L., Park J.K., Kim H.K. Online Game Bot Detection in FPS Game // *Proceedings of the 18th Asia Pacific Symposium on Intelligent and Evolutionary Systems*. – 2018. Vol. 2, – pp. 479-491.

УДК 519.876.2

**АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАФИКА ПЛАНОВО-
ПРЕДУПРЕДИТЕЛЬНЫХ РЕМОНТНЫХ РАБОТ**

Р.Р. Исмагилов¹, Е.А. Миронченко², А.Л. Руцков²

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н., М.Е. Семёнов¹

¹Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050,

²Филиал АО «УК ЭФКО» в Воронеже,

Россия, г. Воронеж, ул. Таранченко, 40, 394018

E-mail: rri10@tpu.ru

OPTIMAL PREVENTIVE MAINTENANCE SCHEDULE CREATING ALGORITHM

R.R. Ismagilov¹, E.A. Mironchenko², A.L. Rutskov²

Scientific Supervisor: Ass. Prof., PhD, M.E. Semenov¹

¹Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin ave., 30, 634050,

²Branch of JSC "UK EFKO" in Voronezh, Russia, Voronezh, Taranchenko St., 40, 394018

E-mail: rri10@tpu.ru

***Abstract.** This article provided a formal statement and algorithm of solving preventive maintenance schedule optimization problem. The algorithm output is the preventive maintenance schedule minimizing the sum of depreciated cost of repaired technological units and machine downtimes. The computational complexity of the proposed algorithm is polynomially dependent on the size of the input data - number of technological units and number of planned repairs.*

Введение. Система планово-предупредительного ремонта (ППР) является наиболее надёжным подходом к организации и планированию технического обслуживания и ремонтов оборудования на производственных площадках [1]. Данный метод позволяет поддерживать заданный уровень исправности и работоспособности оборудования, т.к. предполагает проводить замены деталей оборудования без учёта его реального состояния. Однако существенным недостатком системы ППР является высокая стоимость обслуживания и рост эксплуатационных расходов, что делает метод экономически неэффективным при отсутствии должного обоснования.

Целью работы является постановка задачи оптимизации для формирования графика ППР и разработка алгоритма ее решения.

Формализация задачи. Для постановки задачи оптимизации выделим сущности, фигурирующие при планировании ремонтных работ: а) *функциональный элемент* – полнофункциональный агрегат в составе технологического объекта (например, насос, электродвигатель, теплообменник), б) *деталь* – составная часть оборудования, обеспечивающая его корректную работу (например, подшипник, торцевое уплотнение, ротор электродвигателя), в)

ремонт – дата ППР, назначенная лицом, принимающим решение. Далее введём следующие обозначения. Пусть N – множество всех деталей секции производственной площадки, $|N|=n$. Элементы множества N обладают следующими атрибутами:

1. $N_{T_{critical}} \in R$ – количество часов до прогнозной выработки ресурса;
2. $N_{T_{current}} \in R_+$ – текущая наработка ресурса (в часах);
3. $N_{status} \in \{0;1\}$ – индикатор, указывающий на принадлежность детали сборке;
4. $N_{T_{group}} \in R_+$ – время ремонта детали вместе с другими деталями агрегата;
5. $N_{T_{alone}} \in R_+$ – время одиночного ремонта детали, причём $N_{T_{alone}} > N_{T_{group}}$;
6. $N_p \in R_+$ – стоимость детали без учёта инфляции;
7. $N_\Delta \in R_+$ – допустимая задержка замены детали (в часах).

Пусть $M \in R_+$ – множество часов от текущего времени до плановой даты ремонта, $|M|=m$; $A = (N_{i_{critical}} - M_j)_{i,j=1}^{n,m} \in R$ – матрица остаточного ресурса на момент ремонта; $B = (N_{i_{critical}} - N_{i_{current}})_i^n \in R_+$ – вектор полного ресурса; $K = \begin{pmatrix} A_{ij} \\ B_i \end{pmatrix}_{i,j=1}^{n,m} \in R$ – матрица остаточной ресурсности (в процентах), $z = \{z_i | K_{z_i} = \min(|K_i|), i = \overline{1, n}\} \in N$ – вектор индексов столбцов с минимальной остаточной ресурсностью, $I = (\delta_{z_j})_{i,j=1}^{n,m}$ – матрица бинарного отношения на $N \times M, I_{ij} \in \{0;1\}$; $C = (N_{i_{status}})_{i=1}^n$ – вектор-индикатор режима ремонта, где 0 – одиночный, 1 – групповой, $T = (I_{ij} \cdot C_i \cdot N_{i_{group}})_{i,j=1}^{n,m} + (I_{ij} \cdot (1 - C_i) \cdot N_{i_{alone}})_{i,j=1}^{n,m} \in R$ – матрица простоя оборудования (в часах), $T_{lim} \in R_+$ – верхний порог суммарного простоя оборудования за один ремонт (в часах), $k_d \in R_+$ – коэффициент дефляции, соответствующий году ремонта, $X = k_d (K \circ I) \cdot (N_{i_p})^T \in R, i = \overline{1, n}$ – матрица остаточной стоимости детали, \circ – поэлементное произведение матриц; $P_{hour} \in R_+$ – стоимость часа простоя оборудования.

Далее введем операторы: $W_{ij}[I] = I \circ (1 - \delta_{ki} \delta_{ij})_{k,j=1}^{n,m} + (\delta_{ki} \delta_{j-1})_{i,j=1}^{n,m}$ – оператор, сдвигающий дату ремонта i -ой детали на предыдущую дату. Область определения оператора W – множество матриц I , для которых $\exists I_{kj-1} = 1, k = \overline{1, n}$ такое, что $N_i \in U_{N_i}, N_k \in U_{N_i}, U_{N_i} \subseteq N$, здесь U – подмножество деталей одного агрегата. Оператор $V_i[C] = (\delta_{ii})_{i=1}^n - C$ – оператор смены режима ремонта для i -ой детали с одиночного на групповой.

Тогда задача оптимизации формирования графика ППР: требуется найти минимум функции суммарной стоимости простоя оборудования и остаточной стоимости деталей

$$F = \sum_{i=1}^n X_i + P_{hour} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m T_{ij} \rightarrow \min \tag{1}$$

$$\begin{cases} A_j > N_\Delta \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n T_{ij} \leq T_{lim}, \forall j \in [1; m] \end{cases} \tag{3}$$

Алгоритм решения задачи. Поставленную задачу (1)-(3) можно отнести к классу комбинаторных задач, подобных “задаче об упаковке в контейнеры” и “задаче о рюкзаке”;

які можуть бути розв'язані аналітично або асимптотично [2, 3]. Ключове відміння поставленої задачі від згаданих вище заключається в особливостях якісних критеріїв, а також зміні характеристик об'єктів в залежності від варіанта розміщення. На даному етапі дослідження ми пропонуємо наступний алгоритм розв'язання задачі (1)-(3):

1. Сформувати матрицю I : рядки відповідають *деталям* обладнання, а стовпці – *датам* ППР. Заміна деталі проводиться в дату ППР з найменшим по модулю значенням залишкового ресурсу.
2. Сформувати матрицю A : рядки відповідають деталям обладнання, а стовпці – датам ППР.
3. Якщо умова (2) не виконана, то застосувати оператори W і V для елементів матриці I . Повторити кроки 2-3. Якщо умова (2) виконана, то на крок 4.
4. Сформувати матрицю T : рядки відповідають *деталям* обладнання, а стовпці – *датам* ППР.
5. Якщо умова (3) вірна, то на крок 6, інакше застосувати оператори W і V до матриці I : для стовпців матриці T знайти мінімальний елемент в відповідному стовпці матриці A . Повторити кроки 2-5.
6. Сформувати матрицю X : рядки відповідають деталям обладнання, а стовпці – датам ППР.
7. Визначити значення цільової функції $F(1)$.
8. Застосувати оператор W до матриці I : виконати зсув заміни i -ої деталі на попередню дату ППР, якщо в попередньому плані є деталі з такого ж агрегату, що і i -а деталь. Якщо в початковому плані режим ремонту був одиночний, то для i -ої деталі застосувати оператор V .
9. Повторити кроки 2-7.
10. Якщо значення F зменшилося, то оптимальним рішенням вважається отримана матриця I , в протилежному випадку – початкова матриця I .

Висновок. Представлений алгоритм має складність $O(n^2m^2)$ і дозволяє сформувати графік планово-прогнозного ремонту з найменшою суммою витрат простору обладнання і залишкової вартості заміняємих деталей.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Баскакова Н.Т., Дорман В.Н. К вопросу эффективности аутсорсинга ремонтных работ на промышленном предприятии // Экономический анализ: теория и практика. – 2017. – Т. 16, вып. 2. – С. 351–363
2. Pereira J. Procedures for the bin packing problem with precedence constraints. European Journal of Operational Research. 2016. – V. 250(3). – P. 794-806.
3. Фуремс Е.М. Обратная задача об упаковке в контейнеры при наличии качественных критериев – постановка и обзор применяемых методов // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2016. № 3. – С. 31–43.

УДК 51-74

**ТЕСТИРОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ
КЛАССИФИКАЦИИ И РЕГРЕССИИ ПОРЯДКОВОГО ПРИЗНАКА**Д.А. Редько

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н., М.Е. Семенов

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: dar27@tpu.ru**MACHINE LEARNING ALGORITHMS TESTING FOR CLASSIFICATION AND REGRESSION
PROBLEMS ON ORDINAL RESPONSE**D.A. Redko

Scientific Supervisor: Ass. Pr., PhD, M.E. Semenov

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: dar27@tpu.ru

Abstract. *Optimal features selection for predictions play a key role in machine learning. In this paper, the main machine learning algorithms are analyzed on binary and ordinal classification and regression tasks. The Wine Quality DataSet has been used for numerical experiments.*

Введение. Машинное обучение является ведущей тенденцией развития промышленной сферы деятельности человека. Одной из ключевых проблем машинного обучения является выбор алгоритма обучения модели для решения задач классификации или регрессии в случае порядкового результирующего признака. Эта проблема связана с тем, что алгоритмы не учитывают возможность использования операции порядка и работают фактически как с бинарными (дихотомическими) данными.

Цель работы – изучение и практическое применение алгоритмов машинного обучения для решения задач классификации и регрессии для объектов, измеренных в порядковой шкале. Для проведения численных экспериментов использован набор данных Wine Quality Data Set [1].

Исходные данные. Исходный набор содержит 1599 записей, без пропусков и NaN ячеек и включает 11 вещественных признаков красного вина: fixed acidity (фиксированная кислотность), volatile acidity (летучая кислотность), citric acid (лимонная кислота), residual sugar (остаточный сахар), chlorides (хлориды), free sulfur dioxide (свободный диоксид серы), total sulfur dioxide (общий диоксид серы), density (плотность), pH (кислотность), sulphates (сульфаты), alcohol (содержание спирта, %), а также интегральный экспертный признак – quality (*качество*), приведенный в порядковой шкале: 0 – худшее, 10 – лучшее качество. Анализ данных показал, что в наборе признак *качество* принимает значения 3, 4, 5, 6, 7, 8 с частотами 10, 53, 681, 638, 199, 18 соответственно. При этом отношение $10/681=0,0146$, что позволяет говорить о дисбалансе классов.

В работе проведены численные эксперименты с а) исходным набором, а также с б) бинаризованным набором: 0 – плохое, 1 – хорошее качество. Для отображения порядкового признака *качество* (quality) в бинарный мы использовали порог, равный 5. При этом доли элементов выборки с

метками 0/1 существенно не отличаются и равны 0,465/0,535 соответственно, что позволяет утверждать, что бинаризованные данные сбалансированы.

Предварительный анализ исходных данных с использованием матрицы корреляции (рис. 1) показал, что данные слабо коррелированы. Наибольшая зависимость для признака *качество* (quality) наблюдается с признаками *летучая кислотность* (volatile acidity), *сульфаты* (sulphates), *содержание спирта* (alcohol) и равна соответственно $-0,39$; $0,25$; $0,48$. После бинаризации данных корреляция незначительно уменьшилась и составила $-0,32$; $0,22$; $0,43$ соответственно. Хи-квадрат тест на независимость показал, что признаки free sulfur dioxide и total sulfur dioxide зависимы с результирующим признаком, а распределение значений *содержание спирта* (alcohol) отличается от нормального распределения (Shapiro-Wilk normality test, $W = 0,92884$, $p\text{-value} < 2,2e-16$).

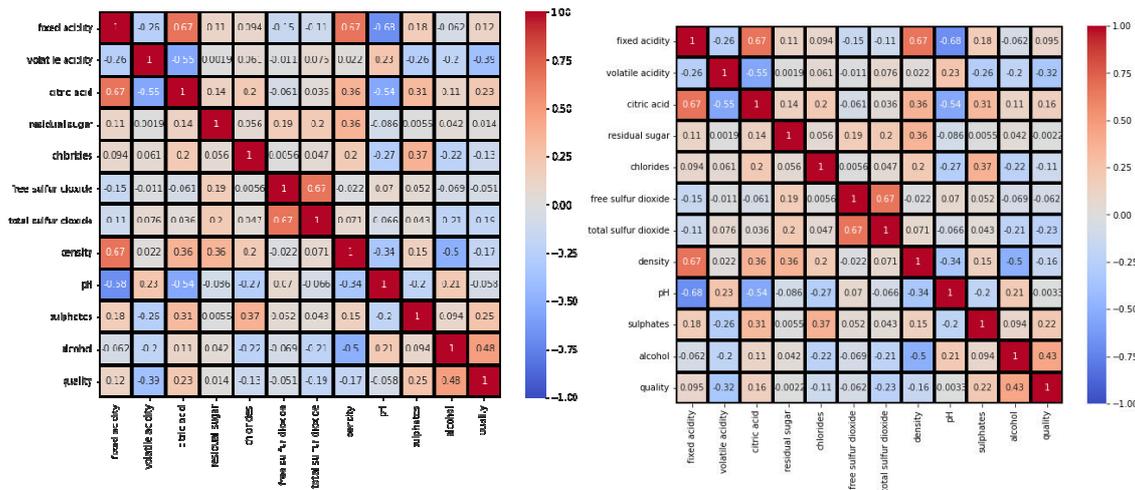


Рис. 1. Матрица корреляций для исходного набора данных (слева) и бинаризованного набора (справа)

Таблица 1

Доля правильно классифицированных значений признака “quality” для различных классификаторов

Классификатор	Бинарный признак		Порядковый признак		Кластеризация	
	Test	Train	Test	Train	Test	Train
ExtraTrees	0,7804	0,8339	0,6191	0,9559	0,9975	1,0000
Bagging	0,7767	0,9821	0,6097	0,7514	0,9975	1,0000
RandomForest	0,7729	0,8724	0,5984	0,7382	0,9925	1,0000
KNeighbors	0,7467	0,8095	0,5872	0,7091	0,9925	1,0000
DecisionTree	0,7410	0,8921	0,5816	0,7138	0,9875	1,0000
GradientBoosting	0,7410	0,7720	0,5590	0,8217	0,9625	0,9799
AdaBoost	0,7073	0,7485	0,5290	0,5684	0,9350	0,9599

Вычислительные эксперименты. Мы разделили исходный набор данных на обучающую (train) и тестовую (test) выборки в пропорции 70/30 и применили различные классификаторы. Результаты работы классификаторов приведены в Таблице 1. Бинарная классификация показывает удовлетворительные результаты: доля правильно классифицированных объектов на тестовой выборке не опускается ниже 0,7.

При этом качество классификации исходного набора данных на обучающей выборке колебался от 0,5684 (AdaBoost) до 0,9559 (ExtraTrees) и существенно падает на тестовой выборке, вплоть до 0,5290. Возможные причины – недостаточный объем данных для обучения и неспособность классификаторов учитывать наличие порядка в интегральном признаке. Для улучшения результатов классификации мы применили к исходным данным метод k -средних и выделили два кластера с 1179 и 420 элементами соответственно. Как видно из Таблицы 1 многие классификаторы показали абсолютное качество на тренировочной выборке, что свидетельствует о переобучении модели. Дальнейшие эксперименты были проведены с вариацией количества кластеров. Результаты экспериментов с выделением 3, 4, ..., 15, 25, 30, 50 кластеров показали, что данная стратегия качественно не влияет на решение задачи классификации.

Развивая идею использования кластеров, мы проделали серию экспериментов с использованием случайного леса для решения регрессионной задачи для порядкового признака. Анализ показал, что три самых значимых признака – *содержание спирта* (alcohol), *летучая кислотность* (volatile acidity), *сульфаты* (sulphates). Для построения квантильной регрессии на основании леса [2, 3] мы использовали в качестве регрессора – *содержание спирта* (alcohol), который принимает вещественные значения из интервала [8,4; 14,9], $M=10,42$, $SD=1,06$ (рис. 2а). Анализ влияния выбранного регрессора на порядковую переменную *качество* показал, что качественное изменения распределения происходит в квантильных точках 0,1, 0,4 и 0,7 (рис. 2б).

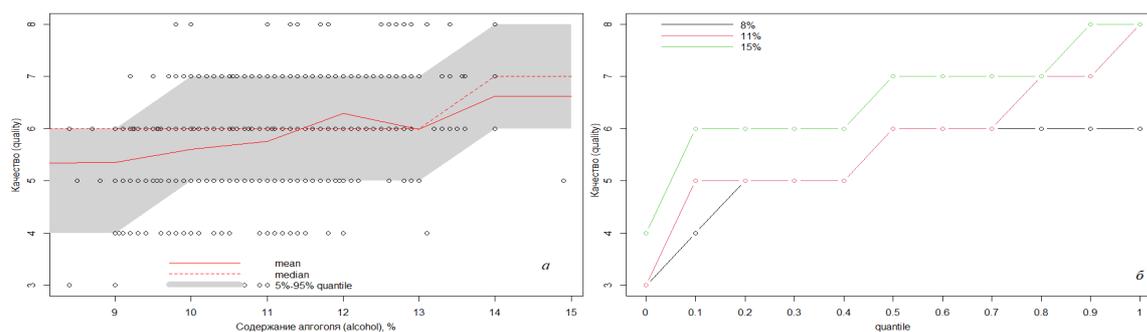


Рис. 2. Квантильная регрессия на основании леса из 500 деревьев с доверительным интервалом (а) и зависимость качества для различных уровней регрессора – содержание спирта: 8, 11, 15 % (б)

Закключение. Решение задач классификации и регрессии для результирующего признака, измеренного в порядковой шкале имеет свои особенности, которые нужно учитывать при выборе моделей машинного обучения. Для настройки параметров классификаторов и моделей регрессии требуется проведение дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cortez P., Cerdeira A., Almeida F., Matos T. and Reis J. Modeling wine preferences by data mining from physicochemical properties. In Decision Support Systems // Elsevier. – 2009. – V. 47(4). – P. 547-553.
2. Strobl C., Malley J., Tutz G. An introduction to recursive partitioning: rationale, application, and characteristics of classification and regression trees, bagging, and random forests // Psychol Methods. – 2009. – V. 14(4). – P. 323-48.
3. Meinshausen N., Ridgeway G. Quantile Regression Forests // J. Mach. Learn. Res. – 2006. – 7. – P. 984-987.

УДК 519.178

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СУПЕРГРАФА

Е.М. Сухова

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н., М.Е. Семенов

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: ems16@tpu.ru

ALGORITHMS FOR CONSTRUCTING A SPATIAL SUPERGRAPH

E.M. Suhova

Scientific Supervisor: Ass. Pr., PhD, M.E. Semenov

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: ems16@tpu.ru

***Abstract.** In the paper, we proposed two algorithms for constructing a supergraph in order to identify key relations in data with a network structure. On the Brightkite dataset, we have obtained the data compression by 3 and 9 times, respectively. The software implementation of the algorithms have been made using the NetworkX Python library.*

Введение. Граф представляет собой математическую абстракцию реальных систем любой природы, поэтому теория графов, как раздел математики, используется в самых разных предметных областях. Экспоненциальный рост объемов информации предопределяют необходимость разработки эффективных алгоритмов для преобразования исходных с сетевой структурой в графовые модели. Под *суперграфом* $SG(V', E')$ будем понимать подмножество вершин и ребер исходного графа $G(V, E)$, которые выявлены или заданы по определенному правилу, например, через функцию расстояния, учитывающую топологические отношения пространственных объектов [1, 2]. На таких моделях можно применять различные алгоритмы для решения задач кластеризации, выявления мостов, узлов сочленений, поиска покрытий, в том числе кликовых, имеющих прикладное значение в различных предметных областях.

Цель работы – создание и программная реализация алгоритма построения пространственного суперграфа для выявления ключевых отношений в данных, имеющих сетевую структуру.

Материалы и методы исследования. Для вычислительных экспериментов мы использовали набор данных с сетевой структурой Brightkite [3]. Данный набор содержит $m=214\,078$ рёбер и $n=58\,228$ вершин, а также атрибутивную информацию вершин: идентификатор пользователя (id), время регистрации в сети (check-in-time), координаты местонахождения пользователя (latitude – широта, longitude – долгота). Анализ исходных данных показал, что граф содержит 547 компонент связности, средняя степень вершин равна 7,353. В работе мы использовали максимальную компоненту связности с 56739 вершинами.

Алгоритм 1 (пространственный порог). Каждой вершине были присвоены декартовы координаты местонахождения пользователя, для всех ребер определен вес, как евклидово расстояние.

Далее для построения суперграфа мы ввели пространственный порог $R = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_i$, где p_i – длина ребра, m – количество ребер. Если вес ребра графа больше R , то ребро исходного графа удаляем, при этом это ребро запоминаем для дальнейшего использования (рис. 1, красные ребра). В итоге, мы получаем группу географически близко находящихся друг к другу вершин, которую будем называть *компонентой связности* (рис. 1, центр). Каждую компоненту стягиваем в одну вершину – эта вершина и будет вершиной суперграфа. Координаты супервершины находим как географический центр компоненты связности. Соединяем компоненты связности учитывая ранее помеченные ребра.

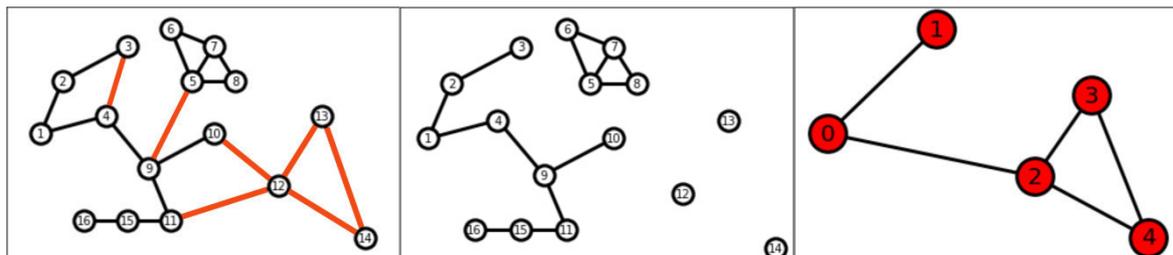


Рис. 1. Исходный граф, красным отмечены ребра с весом больше R (слева), расположение компонент связности (по центру), суперграф (справа)

Алгоритм 2 (мосты). Для проведения процедуры стягивания мы предлагаем использовать мосты (рис. 2, слева выделены красным). После удаления мостов получаем компоненты связности, которые затем стягиваем в одну вершину. Если в графе встречается цепь из двух и более мостов подряд, например, ребра (11, 15) и (15, 16), то мы удаляем только последнее ребро (11, 15), которое соединено с другой компонентой связности.

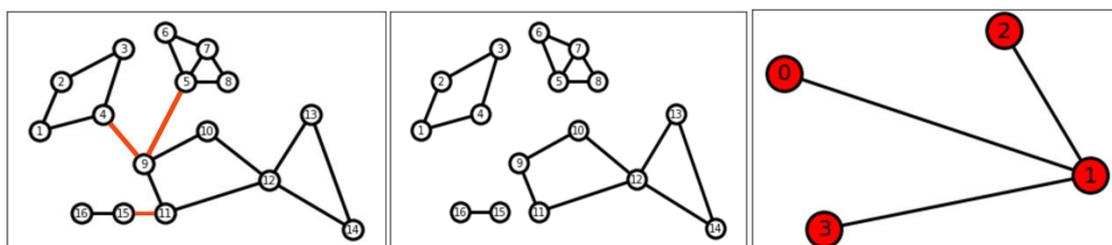


Рис. 2. Исходный граф, красным отмечены ребра-мосты (слева), расположение компонент связности (по центру), суперграф (справа)

Таким образом, Алгоритм 1 позволяет получить граф, в котором возможен цикл, а Алгоритм 2 позволяет получить дерево.

Результаты. С использованием пространственные характеристик (θ, φ) мы отобразили вершины графа на сферу (рис. 3 слева) в декартовой системе координат по формулам:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta,$$

где θ, φ координаты широты и долготы соответственно, $r = 6371$ км – радиус Земли. Для определения расстояние между всеми вершинами u и v мы использовали евклидово расстояние:

$$d = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}, i \neq j.$$

Залежність кількості вершин в суперграфі від порога R приведена на рис. 3. Видно, що при $R=100$ км кількість вершин 28276, яке плавно знижується до 24113 з збільшенням до $R=1000$ км, а потім претерпує якісне змінення.

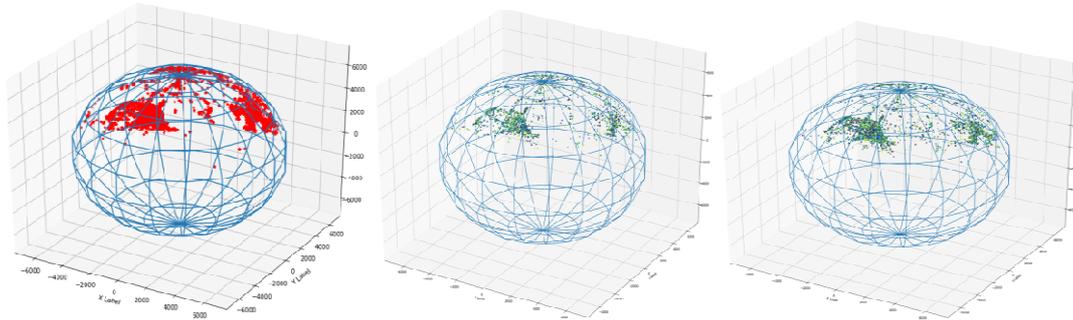


Рис. 3 Исходный граф (слева), результат работы 1 алгоритма (по центру), результат работы 2 алгоритма (справа)

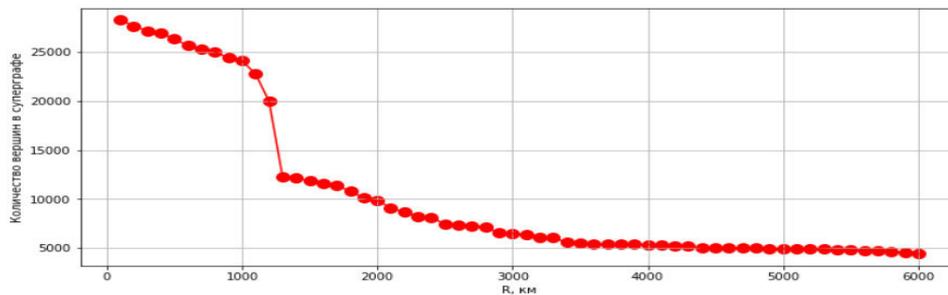


Рис. 4. Кількість вершин графа в залежності від просторового порога

Заключення. Предложенные алгоритмы имеют практическое значение для выявления сообществ [4]. Таким образом, было разработано и программно реализовано два алгоритма построения суперграфа с использованием атрибутов вершин исходного графа. Алгоритм 1, на основе среднееарифметического расстояния, позволил нам сократить количество вершин в 9 раз, в то время как Алгоритм 2 с мостами позволил сократить в 3 раза. Использование данных алгоритмов значительно упрощает работу с сетевыми структурами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Mukherjee S.S., Chakrabarti S. Graphon Estimation from Partially Observed Network Data. 2019., p. 1-12
2. Еремеев С.В. Алгоритм построения моделей пространственных отношений на основе темпоральных графов // Сборник трудов III международной конференции и молодежной школы «Информационные технологии и нанотехнологии» – Самара: Новая техника, 2017. – С. 482-489.
3. Cho E., Myers S. A., Leskovec J.. Friendship and Mobility: Friendship and Mobility: User Movement in Location-Based Social Networks ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD), 2011. <https://snap.stanford.edu/data/loc-brightkite.html>
4. Scripps J., Tan P., Esfahanian A. Node Roles and Community Structure in Networks. New York: ACM, 2007. 36 p.

УДК 519.218.6:519.257:330.4

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОВЕДЕНИЯ РЫНОЧНЫХ ТОРГОВ НА НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ
ВРЕМЕННЫХ РЯДАХ С ПОДКЛЮЧЕНИЕМ СИСТЕМЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ**

В.К. Захаров, М.Е. Семенов

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. О.Л. Крицкий

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: zakharovseva@mail.ru

**MODELING OF MARKET TRADING ON NON-EQUIDISTANT TIME SERIES WITH THE
CONNECTION OF A DECISION-MAKING SYSTEM**

V.K. Zakharov, M.E. Semenov

Scientific Supervisor: Associate Professor, Ph.D. O.L. Kritsky

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: zakharovseva@mail.ru

***Abstract.** In this article, a simulator of trading in the market on non-equidistant time series was developed with the possibility of introducing additional metrics and a convenient graphical interface. The data for the received trades on simple decision systems was verified at each stage of model development by automated testing. The resulting speed of the model was maximized by converting stable time series into hash tables, which allows working with this model as fast as the decision system works.*

Введение. Для проверки современных гипотез относительно рыночной торговли и создания различных систем принятия решения появляется острая необходимость в разработке быстрого и надежного метода апробации данных моделей, независимую от качества принимаемых решений на рынке. При создании симулятора рыночной торговли, необходимо учитывать множество гиперпараметров, которые прямо или косвенно будут влиять на принятие решений, а также разделение участников рынка на 3 части: обычный игрок (система принятия решения), брокер и сам рынок.

Целью работы является разработка полноценной библиотеки на языке Python для моделирования и симуляции торгов на рынке, учитывающей транзакционные издержки, балансы счетов, независимость участников торговли, неэквилибристические размеры общего времени торговли ценной бумагой и временные интервалы сессий на бирже. Данная модель позволяет исследовать различные методы для автоматизированного принятия решения о покупке или продаже той или иной бумаги при кратко-, средне- и долгосрочной торговле на рынке. В качестве временных рядов для торговли были взяты данные из открытых источников.

Материалы и методы исследования. Для сбора исторических данных была написана программа сбора данных торгов: цен открытия, закрытия и временных меток по каждому выбранному индексу [1] (DAX, Dow Jones, HIS, MDAX, NASDAQ 100, NYSE MKT, S&P 100, S&P 500, UK100). Важно отметить, что пересекающиеся листинги для некоторых бирж могут отличаться ввиду различных торговых периодов, что не позволяет одновременно использовать одни и те же данные для нескольких индексов.

Для хранения данных и удобства обращения к ним был разработан класс, позволяющий считать время жизни каждой бумаги равным, изменяющимся в пределах границ интервала $P = [0;1]$, привязав к нему временную метку о состоянии биржи. В связи с этим будем считать, что каждое значение, находящееся между двумя ближайшими друг к другу датами, между которыми отсутствует какое-либо значение, а именно набор точек $(N, N+1) \in P$, равным предыдущему значению. Таким образом, перед самым первым значением временного ряда будет возвращаться «None», а за последним значением всегда будет использоваться только крайнее по времени наблюдение из данного листинга (рис 1). Это позволит полностью загрузить котировками торговый сервер биржи, исключить возможные ошибки загрузки данных по каждому листингу в выбранный день, а также контролировать состояние биржевых торгов в определенное время.

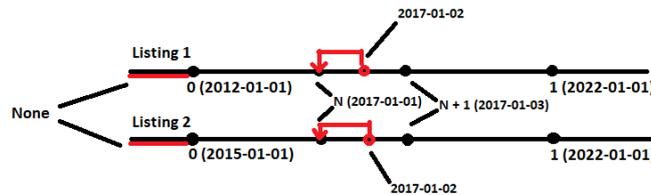


Рис. 1. Вид временного ряда с привязанными данными к каждой метке времени (собственные данные)

Для проведения операций между брокером, рынком и игроком была разработана торговая модель, которая максимально дистанцировала участников рынка друг от друга. Она задает отдельные параметры состояния каждого из них, что позволяет создать полноценную симуляцию торгов (рис. 2). В нашей модели каждый участник представляет собой отдельный класс; он взаимодействует с другими участниками и отправляет данные, не имея доступ к возможности изменения информации. Так, клиент (Client) создает ордер (Order), который может быть выполнен брокером (Broker) при выполнении некоторых условий на рынке (Market), при наличии денег или купленных тикетов в портфеле клиента (Portfolio). Далее брокер отправляет клиенту отчет о сделке (Deal), о ее частичном выполнении или неисполнении, если в течение заданного жизни тикета (TTL) сделка не произошла.

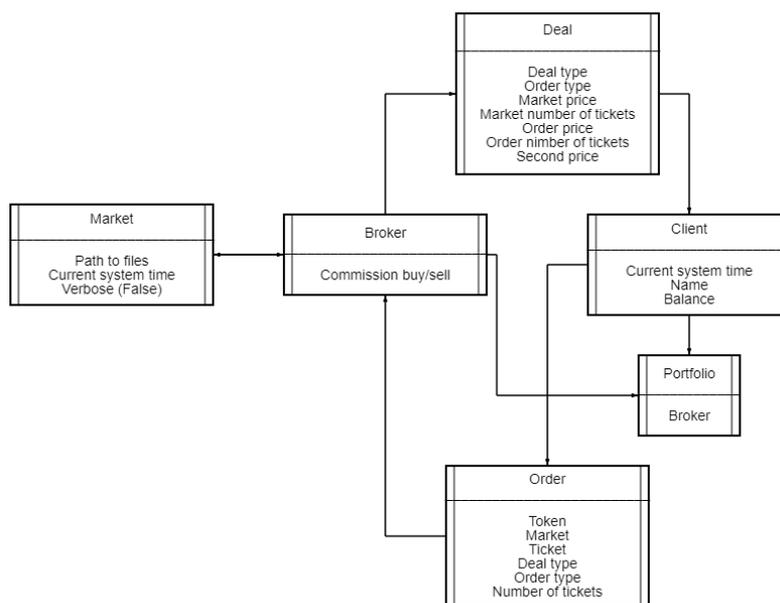


Рис. 2. Блок-схема взаимодействия участников рынка (собственные данные)

Был разработан класс, позволяющий объединить воедино представление и создающий метод, к которому привязывается система принятия решений, а также метрики, необходимые для определения степени удачности стратегии (табл. 1), рассчитанные по окончанию симуляции по данным о каждой сделке и по каждой ценной бумаге. В табл. 1 приняты следующие обозначения: P – максимальное значение стоимости портфеля, V – минимальное значение, следующее после максимума, P_0 – начальное значение, P_1 – конечное, PD – прибыль сделки, ND – убыток сделки, NR – доход от безрискового актива.

Таблица 1

Виды применяемых метрик

Максимальная просадка	$P - V$	Профит-фактор	$\frac{\sum PD_N}{\sum ND_N}$
Относительная чистая прибыль	$\frac{P_1 - P_0}{P_1}$	Абсолютная просадка	$\frac{P - V}{P}$
Абсолютная чистая прибыль	$P_1 - P_0$	Относительная просадка	$P - V$
Средняя глубина просадки	$\frac{\sum_0^1 P_N - V_N }{\sum N}$	Фактор восстановления	$\frac{P_1 - P_0}{P - V}$
Отдача на вложенный капитал	$\frac{P_1 - P_0}{\text{Min}(P) * 100}$	Коэффициент Калмара	$\frac{P_1 - P_0 - NR}{P - V}$

При проведении тестов данной системы использовались две устойчивые стратегии. При первой стратегии проводится покупка по N различным котировкам с корреляцией больше заданного уровня P , вычисленной за последние 60 дней. При второй стратегии проводится покупка по K любым котировкам с продажей через T дней. Результаты моделирования полностью совпадали со значениями, полученными после преобразования из биржи напрямую. Таким образом, система была протестирована на каждом этапе реализации, что позволяет судить о ее надежности. Так же для каждого отдельного класса были разработаны уникальные тесты для проверки надежности и качества модели во избежание ошибок, которые могут появиться.

В дальнейшем планируется ускорение, за счет хэширования большего объема данных, что позволит обращаться к данным за счет быстрого расчета хэш-имени.

Заключение. В ходе работы спроектирована и реализована библиотека, позволяющая оценивать и проверять работоспособность различных стратегий на финансовом рынке, был использован новый подход к рассмотрению временных рядов, введены метрики для проверки работоспособности стратегий и их прибыльности. Во время симуляций на тестовых выборках и стратегиях, система показала бесперебойную и быструю работу, ввиду распределения вычислений и хэширования данных во время запусков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tomasz Kulawik. Биржевой и новостной агрегатор [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://stooq.pl/>. (дата обращения: 25.02.2022)

Научное издание

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУК

Том 3. Математика

Сборник научных трудов
XIX Международной конференции студентов, аспирантов
и молодых ученых

Компьютерная верстка *С.А. Поробова*

Зарегистрировано в Издательстве ТПУ
Размещено на корпоративном портале ТПУ
в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета



Издательство

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ