УДК 539.376

РАСЧЕТ ИЗГИБА ВЯЗКОУПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Д.Д. Дубровский
Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.А. Светашков
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: ddd6@tpu.ru

CALCULATION OF THE BENDING OF A VISCOELASTIC ISOTROPIC PLATE ON AN ELASTIC BASE

D.D. Dubrovskiy
Scientific Supervisor: Prof, Dr. Sc. (Phys.-Math.) A.A. Svetashkov
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: ddd6@tpu.ru

Abstract. *The problem of bending a viscoelastic plate on an elastic base is considered and its solution in displacements and stresses is obtained. Displacements and stresses are calculated using the Volterra method and the method of separation of variables. A comparative analysis of the listed methods for solving the viscoelastic problem based on relative errors for displacements and stresses is carried out.*

Введение. Несмотря на огромную востребованность анализа механических свойств вязкоупругих композитов, прогнозирования прочности и долговечности конструкций, задачи механики вязкоупругих тел недостаточно полно проработаны в современной литературе. Практически единственным аналитическим методом решения граничных задач остается принцип Вольтерра [1]. Главным препятствием широкого использования данного метода, помимо вычислительной сложности, является необходимость иметь соответствующее упругое аналитическое решение. В данной работе рассмотрен метод разделения переменных [2, 3], далее МРП, и проведено сравнение МРП с аналитическим методом Вольтерра [1] на примере задачи изгиба вязкоупругой плиты на упругом основании. Упругое решение данной задачи представлено в [4].

Расчетно-аналитическая часть. Упругое решение. К исследуемой упругой плите приложена равномерно распределенная нагрузка q. Уравнение равновесия для случая изгиба плиты, лежащей на Винклеровом основании, представляет собой выражение

$$\nabla^2\nabla^2 w + \frac{k}{D} w = \frac{q}{D}, \tag{1}$$

где D – цилиндрическая жесткость плиты, k – модуль упругости основания (коэффициент постели), w – перемещения, q – внешняя распределенная нагрузка. Упругое решение контактной задачи представлено в перемещениях (формула нахождения прогиба) имеет вид

$$w = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{2}$$

где w_{mn} – коэффициент разложения прогиба, *a* и *b* – длина и ширина плиты. По прогибу могут быть рассчитаны напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy}, возникающие в плите. Цилиндрическая жесткость, входящая в состав выражения для прогиба плиты имеет вид

$$D = \frac{Kh^3}{4}\left(\frac{3}{4} + \frac{G}{6K} - \frac{3}{4}g_2\right),\ g_2 = \frac{1}{1 + 2\dfrac{2G}{3K}}, \tag{3}$$

где *K* – модуль объемного сжатия, *G* – модуль сдвига, *h* – толщина плиты.

Для нахождения нормальных напряжений σ_x, σ_y, и касательных напряжений τ_{xy} необходимо воспользоваться известными выражениями для определения напряжений через перемещения:

$$\sigma_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\ \tau_{xy} = -G \cdot h\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \tag{4}$$

где μ – коэффициент Пуассона.

Поскольку исследуемая плита является симметричной по направлениям *X* и *Y*, то напряжения σ_x и σ_y принимаем равными друг другу.

<u>Вязкоупругое решение.</u> *Решение по методу Вольтерра* заключается в замене упругих постоянных *G* и g_2 на операторы упругой наследственности G^* и g^*_2. Выражение для функции прогиба рассчитывается через ряд Фурье и принимает вид:

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} w_{mn}(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{5}$$

Применяя алгебру метода Вольтерра, описанную в работе Работнова [5], можно представить дробно-рациональную функцию операторов G^* и g^*_2 через сумму этих операторов. Итоговое выражение для величины w_{mn} выглядит следующим образом

$$w_{mn}(t) = \frac{q}{C}\cdot\left(1 + a_1Э^*_{r1} + a_2Э^*_{r2}\right), \tag{6}$$

где *C*, a_1, a_2, r_1, r_2 – рассчитанные на основании алгебры Вольтерра константы, $Э^*_{r1}$, $Э^*_{r2}$ – преобразованные операторы упругой наследственности G^* и g^*_2. Для нахождения нормальных напряжений σ_x, σ_y, и касательных напряжений τ_{xy} по методу Вольтерра необходимо вычислить производные для функции прогиба, согласно (4).

Решение задачи по МРП заключается в замене упругих констант на эффективные по времени модули. Вывод выражений для эффективных по времени модулей представлен в работе Светашкова А. А. [3]. В данном случае необходимо заменить модуль сдвига *G* (в том числе в составе g_2) на эффективный по времени модуль $g_c(t)$. Выражения для функции прогиба рассчитывается через ряд Фурье и будет иметь вид

$$w_{(c)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} w_{mn(c)}(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{7}$$

Тогда выражения для величины w_{mn}, прогиба и напряжений будут иметь вид

$$w_{mn(c)}(t) = \frac{q}{D_c(t)\pi^4\left(\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2}\right)^2 + k}. \tag{8}$$

Преобразованное выражение для *D* представляет собой

$$D_c(t)=\frac{Kh^3}{4}\left(\frac{3}{4}+\frac{g_c(t)}{6K}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1+2\dfrac{2\cdot g_c(t)}{3K}}\right),\quad \text{где } g_c(t)=\frac{q(t)}{\dfrac{1}{G}\left(1+\lambda\cdot\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau\right)q(t)}. \tag{9}$$

Результаты. На рисунке 1 видно, что погрешность нахождения прогиба по МРП относительно метода Вольтерра, которая рассчитывается по формуле

$$\delta_w=\frac{w(t)-w_{(c)}(t)}{w(t)}\cdot 100\% \tag{10}$$

составляет не более 0,0015 %, что говорит о точности проведенных расчетов и эффективности применения МРП в подобных задачах.

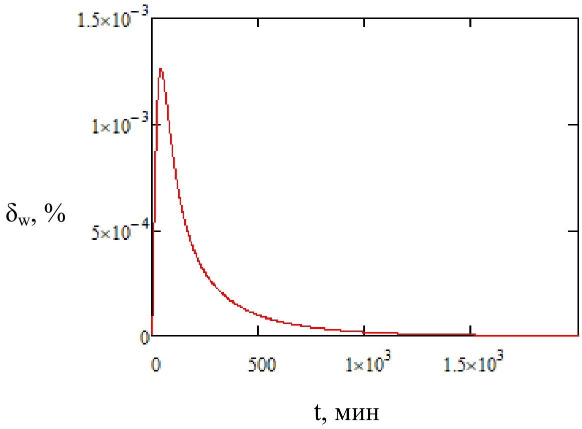

Рис. 1. Относительная погрешность МРП от метода Вольтерра при нахождении прогиба плиты

Формулы относительной погрешности напряжений выглядят аналогично (10). Погрешность определения напряжений логично совпадает с погрешностью прогиба плиты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Volterra V. Theory of Functionals and of Integral and integro-differential Equations. – London; Glasgos: Blackie and Son Limited, 1930. – 226p.
2. Svetashkov A., Kupriyanov N.A., Pavlov M.S., Vakurov A.A. Variable separation method for solving boundary value problems of isotropic linearly viscoelastic bodies // Acta Mechanica. – 2020. – 231(9) P.3583–3606.
3. Svetashkov A., Fok S.C., Kupriyanov N.A., Manabaev K.K., Pavlov M.S., Vakurov A.A. Modification of the Time-Effective Moduli of Viscoelastic Bodies // Mechanics of Composite Materials. - 2019. - Vol. 55, Iss. 5. - P. 667-686.
4. Александров А.В., Потапов В.Д., Основы теории упругости и пластичности: Учебник для строит. спец. Вузов. – М.:Высш. шк., 1990. – 400 с;
5. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.:Наука, 1966. – 752 с.