

УДК 532.5

**ЕСТЕСТВЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ КУБИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ  
ПРИ НЕОДНОРОДНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПРОФИЛЕ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКЕ**

С.А. Михайленко

Научный руководитель: доцент, д.ф.-м.н. М.А. Шеремет

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: [stepanmihaylenko@gmail.com](mailto:stepanmihaylenko@gmail.com)

**NATURAL CONVECTION IN A ROTATING CUBIC CAVITY UNDER THE NON-UNIFORM  
TEMPERATURE PROFILE AT VERTICAL WALL**

S.A. Mikhailenko

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Dr. M.A. Sheremet

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: [stepanmihaylenko@gmail.com](mailto:stepanmihaylenko@gmail.com)

**Abstract.** *Natural convective heat transfer in a rotating cubic cavity under an effect of non-uniform temperature profile at vertical wall has been investigated numerically. The cavity is subjected to counterclockwise rotation around the z-axis with a constant angular velocity. One vertical wall of the cavity is cooled, while the opposite wall is heated unevenly. Other cavity walls are adiabatic. The working fluid is Newtonian, heat-conducting and satisfying the Boussinesq approximation. The basic equations formulated using the vector potential functions and vorticity vector have been solved by the finite difference method. The effects of non-uniform heating and rotating on heat transfer have been investigated.*

**Введение.** Естественная конвекция представляет интерес для решения широкого круга технических и инженерных задач. Теплообмен в условиях вращения является не менее интересной областью исследования. Задачи, связанные с вращающимися системами [1, 2], часто встречаются, например, при разработке роторных теплообменников, газовых турбин, выращивании кристаллов, в космической промышленности, при проектировании систем охлаждения электронной аппаратуры.

**Математическая постановка.** На рисунке 1 изображена кубическая полость размера  $H$ . Полость вращается против часовой стрелки вокруг оси  $\bar{z}$ . Стенка при  $(\bar{x} = -0.5H)$  нагревается при температуре  $T_w(\bar{y}) = T_c + (T_h - T_c)\cos(\pi\bar{y}/H)$ , в то время как противоположная стенка  $(\bar{x} = 0.5H)$  охлаждается при температуре  $T_c$ . Остальные стенки являются теплоизолированными. Полость заполнена теплопроводной жидкостью, удовлетворяющей приближению Буссинеска. При этом ее физические параметры не зависят от температуры. Течение является ламинарным.

Система уравнений, основанная на законах сохранения массы, импульса и энергии, записана с помощью безразмерных преобразованных переменных [3] «векторный потенциал» –

$$\left( \bar{u} = \frac{\partial \bar{\psi}_z}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial z}, \bar{v} = \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial z} - \frac{\partial \bar{\psi}_z}{\partial x}, \bar{w} = \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial y} \right) \quad \text{и} \quad \text{«вектор завихренности»} \quad -$$

$$\left( \bar{\omega}_x = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}, \bar{\omega}_y = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}, \bar{\omega}_z = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \quad \text{и} \quad \text{выглядит следующим образом:}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} &= -\omega_x \\ \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} &= -\omega_y \\ \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial z^2} &= -\omega_z \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_x}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} = \\ = \frac{1}{\sqrt{Ta}} \left( \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} \right) - \frac{Ra}{Pr \cdot Ta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \cos(\tau) + \frac{Ra_\xi}{Pr \cdot Ta} y \frac{\partial \theta}{\partial z} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_y}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_y}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial v}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial v}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial v}{\partial z} = \\ = \frac{1}{\sqrt{Ta}} \left( \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial z^2} \right) + \frac{Ra}{Pr \cdot Ta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \sin(\tau) - \frac{Ra_\xi}{Pr \cdot Ta} x \frac{\partial \theta}{\partial z} + 2 \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_z}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_z}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial w}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial w}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial w}{\partial z} = \\ = \frac{1}{\sqrt{Ta}} \left( \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right) + \frac{Ra}{Pr \cdot Ta} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos(\tau) - \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin(\tau) \right\} - \frac{Ra_\xi}{Pr \cdot Ta} \left\{ y \frac{\partial \theta}{\partial x} - x \frac{\partial \theta}{\partial y} \right\} + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{Pr \cdot \sqrt{Ta}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

Здесь  $\tau$  – безразмерное время,  $\theta$  – безразмерная температура;  $x, y, z$  – безразмерные координаты;  $u, v, w$  – безразмерные проекции скорости;  $\psi_x, \psi_y, \psi_z$  – безразмерные компоненты векторного потенциала;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – безразмерные компоненты вектора завихренности. В уравнениях присутствуют такие безразмерные комплексы как:  $Pr$  – число Прандтля;  $Ra$  – тепловое число Рэлея;  $Ra_\xi$  – вращательное число Рэлея;  $Ta$  – число Тейлора.

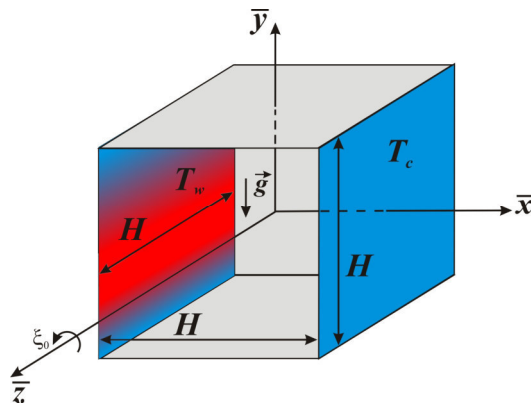


Рис. 1. Область решения задачи

В соответствии с поставленной задачей определяются следующие начальные и граничные условия:

$\tau = 0$  :

$$\psi_x = \psi_y = \psi_z = \omega_x = \omega_y = \omega_z = \theta = 0 \quad \text{и} \quad -0.5 \leq x \leq 0.5, -0.5 \leq y \leq 0.5 \text{ и} -0.5 \leq z \leq 0.5;$$

$\tau > 0$  :

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \psi_y = \psi_z = 0, \quad \bar{\omega} = -\nabla^2 \bar{\psi}, \quad \theta = \cos(\pi y) \quad \text{при} \quad x = -0.5, \quad -0.5 \leq y \leq 0.5 \text{ и} -0.5 \leq z \leq 0.5;$$

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \psi_y = \psi_z = 0, \quad \bar{\omega} = -\nabla^2 \bar{\psi}, \quad \theta = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.5, \quad -0.5 \leq y \leq 0.5 \text{ и} -0.5 \leq z \leq 0.5;$$

$$\psi_x = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = \psi_z = 0, \quad \bar{\omega} = -\nabla^2 \bar{\psi}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5, \quad -0.5 \leq x \leq 0.5 \text{ и} -0.5 \leq z \leq 0.5;$$

$$\psi_x = \psi_y = \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = 0, \quad \bar{\omega} = -\nabla^2 \bar{\psi}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm 0.5, \quad -0.5 \leq y \leq 0.5 \text{ и} -0.5 \leq x \leq 0.5;$$

Для решения сформулированной краевой задачи математической физики применяется метод конечных разностей на равномерной сетке. При аппроксимации уравнения Пуассона для векторного потенциала (1) используется семиточечная разностная схема. Решение полученной системы линейных алгебраических уравнений произведено с помощью метода последовательной верхней релаксации. При аппроксимации уравнений движения (2)–(4) и энергии (5) используется локально-одномерная схема А.А. Самарского совместно с центральными разностями для диффузионных слагаемых и монотонной схемой А.А. Самарского для конвективных членов. Полученные системы уравнений решались методом прогонки.

Для анализа интенсивности теплообмена используется среднее число Нуссельта на нагреваемой стенке:

$$\overline{Nu} = \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=-0.5} dydz$$

**Результаты.** Численное исследование конвективного теплопереноса в кубической вращающейся полости с неоднородным температурным профилем на вертикальной стенке проведено в широком диапазоне изменения определяющих параметров:  $Pr = 0.7$ ,  $Ra = 10^5$ ,  $Ta = 10^3$ – $10^6$  и  $Ra = 1.8 \cdot 10^3$ – $1.8 \cdot 10^4$ . Получены и проанализированы поля температуры в области решения в течение полного оборота полости. Исследовано влияние неоднородного температурного профиля и числа Тейлора на интенсивность теплообмена. Проведено сравнение с результатами двумерного моделирования.

*Работа выполнена в рамках реализации проекта Российского научного фонда (соглашение № 17-79-20141).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kumar M., Pundarika G., Narasimha K.R., Seetharamu K.N. Effect of Rayleigh Number with Rotation on Natural Convection in Differentially Heated Rotating Enclosure // Journal of Applied Fluid Mechanics. – 2017. – Vol. 10. – P. 1125-1138.
2. Yu G., Lian Z., Gan W., Ji J. Numerical investigation on the effect of harmonic horizontal-axis rotation on laminar natural convection in an air-filled enclosure, International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2020. – Vol. 152. – 119533.
3. Gibanov N.S., Sheremet M.A. Natural convection in a cubical cavity with different heat source configurations // Thermal Science and Engineering Progress. – 2018. – Vol. 7 – P. 138–145.