ИЗВѢСТІЯ
Томскаго Технологическаго Института
Императора Николая II.
т. 18. 1910. № 2.

II.

А. В. Угаровъ.

КЪ ВОПРОСУ О ГРАФИЧЕСКОМЪ РАСЧЕТѢ МАХОВИКА.

НОВЫЙ МЕТОДЪ ОПРЕДѢЛЕНІЯ КАСАТЕЛЬНЫХЪ СИЛЪ.

1–20.

Новый методъ опредѣленія касательныхъ силъ.

Къ вопросу о графическомъ расчетѣ маховика.

Поршневыя машины (паровые и другіе тепловые двигатели), представляя собою механизмъ для превращенія прямолинейно-качательнаго движенія поршня въ непрерывно-круговое вращеніе главнаго вала машины, выполняютъ это превращеніе подъ дѣйствіемъ на поршень перемѣннаго давленія (пара или газа).

Преобразованіе движенія совершается при помощи шатунно-кривошипнаго механизма.

Получить при посредствѣ такого механизма вполнѣ равномѣрное (за одинъ оборотъ) вращеніе главнаго вала машины, какъ будетъ показано ниже, не возможно.

Для уменьшенія неравномѣрности необходимо устройство маховика, который, принимая на себя избытокъ живой силы въ періодъ ускореннаго движенія, отдаетъ этотъ избытокъ въ періодъ замедленія.

Для опредѣленія массы маховика, нужнаго для данныхъ условій работы машины, необходимо получить точную картину измѣненій живой силы маховика, а это обычно достигается нахожденіемъ такъ называемыхъ касательныхъ усилій, дѣйствующихъ на кривошипъ, для любого угла *поворота его отъ мертвыхъ положеній*. Слѣдовательно—величина этого угла колеблется отъ 0° до 180°.

Очевидно, что величина касательной силы зависитъ отъ давленія на поршень, и потому необходимо, для опредѣленія этой силы, знать положеніе поршня, соотвѣтствующее взятому углу поворота кривошипа. При нашемъ разсмотрѣніи мы предполагаемъ машину нормальныхъ размѣровъ, т. е. такую, у которой отношеніе длины кривошипа R къ длинѣ шатуна L равно $\frac{1}{5}$

$$\frac{R}{L}=\frac{1}{5}=\mu.$$

Чѣмъ больше длина шатуна при даннемъ кривошипѣ, тѣмъ меньше будетъ величина μ.

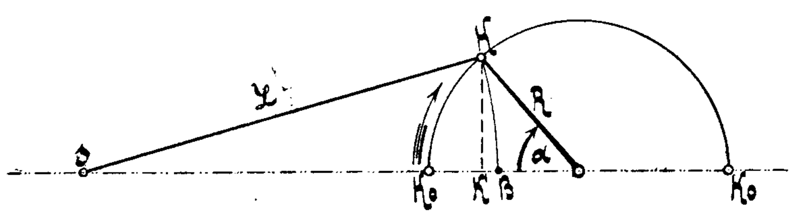
Какъ первое приближеніе, при подсчетахъ принимаютъ $\mu=0$ и говорятъ, что длина шатуна безконечно большая.

Второе приближеніе будетъ тогда, когда удерживаютъ значеніе величины μ, но считаютъ, что $\mu^2=0$, также какъ и всѣ высшія степени μ.

Получаемая при этомъ точность вполнѣ достаточна для техническихъ цѣлей.

Послѣ сказаннаго переходимъ къ вопросу объ опредѣленіи положенія поршня, или пути, пройденнаго имъ отъ начальнаго (мертваго) положенія.

Для нѣкотораго опредѣленнаго угла поворота кривошипа отъ его мертваго положенія соотвѣтственное положеніе поршня находится простымъ геометрическимъ построеніемъ (черт. 1).



Черт. 1.

Если для положенія пальца кривошипа въ точкѣ K ищется соотвѣтственное положеніе поршня, собственно — неразрывно связаннаго съ нимъ ползуна, то изъ точки K радіусомъ, равнымъ длинѣ шатуна L, засѣкаютъ путь поршня и находятъ точку S

Для сохраненія мѣста и наглядности чертежа желательно, чтобы положенія поршня на чертежѣ были въ непосредственной близости къ положеніямъ кривошипа. Этого достигаютъ передвиженіемъ положенія поршня по направленію къ центру кривошипной окружности на длину шатуна; тогда мертвыя точки пути поршня совпадаютъ съ мертвыми положеніями кривошипа, и искомое положеніе поршня B получится, если изъ точки S проведемъ дугу радіусомъ равнымъ L до пересѣченія съ діаметромъ кривошипной окружности, т. е. положеніе поршня получается при *дуговомъ* проектированіи радіусомъ L очки K на линію K_0 K_0.

т Отсюда сейчасъ же ясно *первое приближенное* построеніе положенія поршня для $\mu=0$, т. е для безконечно большого шатуна; дуга, служащая въ данномъ случаѣ для проектированія точки K, имѣетъ безконечный радіусъ, и положеніе поршня опредѣлится какъ ортогональная проекція точки K на линію мертвыхъ точекъ (на діаметръ кривошипной окружности).

Ясно, что, при разбираемомъ приближеніи, движеніе поршня является гармоничнымъ колебаніемъ около его средняго положенія.

Аналитически путь x, пройденный поршнемъ отъ его мертваго положенія при поворотѣ кривошипа на уголъ α, для $\mu = 0$ выразится такъ

$$x = R(1 - \cos\alpha).$$

Отрѣзокъ $K'B$, представляющій собою на чертежѣ 1-мъ разницу между истиннымъ и приближенно найденнымъ положеніями поршня, называется *погрѣшностью* пути поршня.

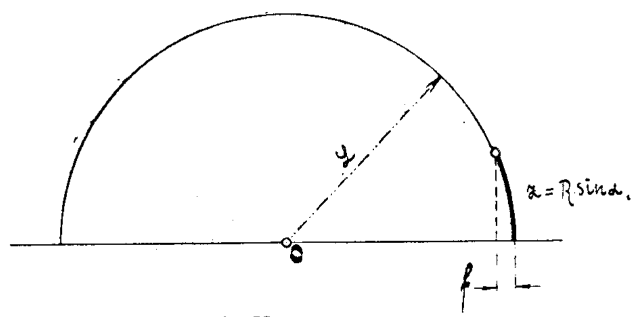
$$f = K'B = K_0B - K_0K$$

найдется изъ черт. 2, откуда видно, что

$$f \,.\, (2L - f) = z^2 = R^2 \sin^2\alpha;$$

или, такъ какъ f очень мало по отношенію къ $2L$, имѣемъ:

$$f \,.\, 2L = z^2 = R^2 \sin^2\alpha;$$



2 Черт.

слѣдовательно

$$f = \frac{R^2}{2L} \sin^2\alpha = \frac{1}{2} \frac{R}{L} R \sin\alpha,$$

или окончательно

$$f = \frac{\mu}{2} R \sin^2\alpha. \tag{1}$$

Такимъ образомъ истинный путь поршня опредѣлится такъ:

$$x = R(1 - \cos\alpha) + \frac{\mu}{2} R \sin\alpha. \tag{2'}$$

Уравненіе (2′) даетъ намъ положеніе поршня при *второмъ приближеніи*, и это, какъ увидимъ далѣе, болѣе чѣмъ удовлетворяетъ требованіямъ технической практики.

Такъ какъ направленіе дугового проектированія для полученія истинныхъ положеній поршня остается постояннымъ (ползунъ находится всегда по одну сторону вала машины), то, очевидно, для *об-*

ратнаго движенія поршня (отъ праваго мертваго положенія къ лѣвому), погрѣшности при дуговомъ проектированіи будутъ *вычитаться* изъ положеній поршня, найденныхъ ортогональныхъ проектированіемъ положенія пальца кривошипа, и мы получаемъ общую формулу:

$$x = R(1-\cos\alpha) \pm \frac{\mu}{2} R \sin\alpha. \tag{2}$$

Примѣчаніе. Наибольшая погрѣшность получается при $\alpha=90^0$.

$$f\max = \frac{\mu}{2} R.$$

Такимъ образомъ, пренебрегая величиною f по сравненію съ $2L$, при опредѣленіи погрѣшности пути поршня, мы дѣлаемъ наибольшую ошибку въ вычисленіи:

$$\frac{f}{2L} = \frac{\frac{\mu}{2}}{2L} R = \frac{\mu^2}{4};$$

съ точностью до этой ошибки мы и опредѣляемъ величину погрѣшности f.

При $\mu = \frac{1}{5}$ наибольшая ошибка вычисленія будетъ

$$\frac{f}{2L} = \frac{1}{5^2.4} = 0{,}01,$$

т. е. при опредѣленіи наибольшей погрѣшности мы получаемъ результатъ съ точностью до *0,01*.

Такъ какъ

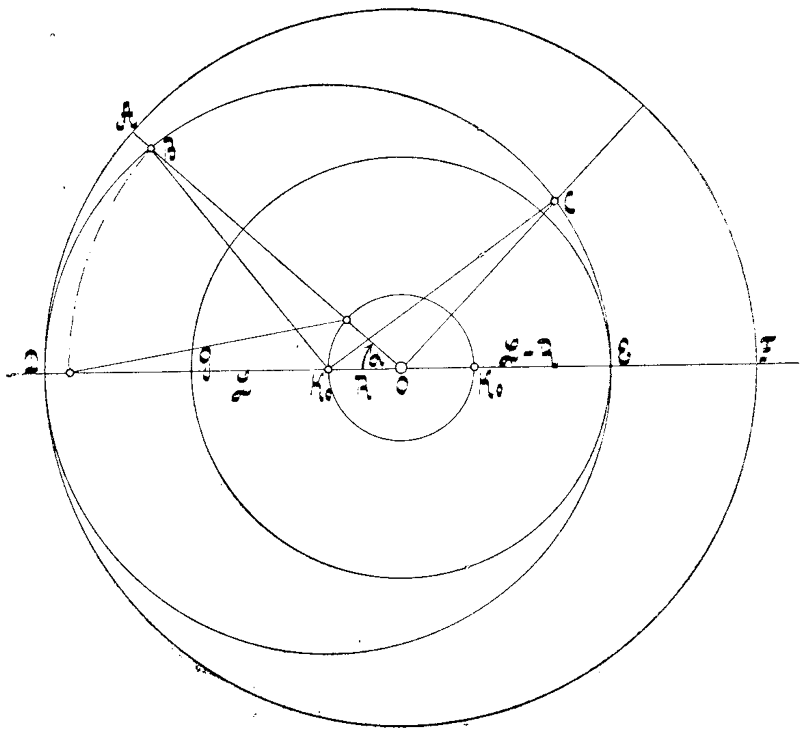
$$f\max = \frac{\mu}{2} R = 0{,}1R,$$

или $\frac{1}{20}$ всего хода поршня, то сдѣланная нами неточность подсчета равна $0{,}01 \cdot \frac{1}{20} = 0{,}0005$ хода поршня; отсюда ясно, что второе приближеніе даетъ намъ очень большую и вполнѣ достаточную степень точности.

Для нахожденія точныхъ положеній поршня среди прочихъ методовъ существуетъ методъ Мюллера.

Опишемъ (черт. 3) изъ центра O окружность радіусомъ, равнымъ длинѣ кривошипа, и изъ того же центра еще двѣ окружности радіусами, равными разстоянію ползуна до вала при одномъ и при другомъ мертвыхъ положеніяхъ.

Очевидно, что радіусъ одной окружности будетъ $L+R$, а другой $L-R$; отрѣзокъ любого радіуса между этими окружностями представитъ собою полный путь поршня.



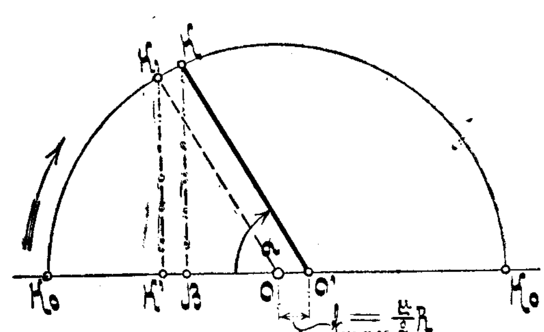
Черт. 3.

Если теперь изъ лѣваго мертваго положенія кривошипа K_0 провести окружность радіусомъ, равнымъ длинѣ шатуна, то, очевидно, что окружность эта будетъ касательной къ двумъ ранѣе проведеннымъ окружностямъ, и для любого угла поворота кривошипа α, соотвѣтственный путь поршня найдется какъ отрѣзокъ AB продолженнаго радіуса кривошипной окружности.

Правильность этого заключенія ясно видна изъ чертежа, стоитъ только вообразить кривошипъ оставшимся неподвижно въ положеніи OK_0, а радіусъ OA считать за линію мертвыхъ точекъ, повернутую по отношенію кривошипа въ сторону вращенія машины на уголъ α.

Методъ Мюллера даетъ точные результаты, но требуетъ вычерчиванія окружностей большихъ радіусовъ.

Для приближеннаго нахожденія положеній поршня Бриксъ*) далъ слѣдующее построеніе (черт. 4).



Черт. 4.

Положеніе поршня соотвѣтственно углу поворота кривошипа α получается, какъ ортогональная проекція точки K на діаметръ кривошипной окружности, если вершину угла передвинуть изъ центра окружности въ сторону *противоположную* ползуну на величину $f_{\max} = \frac{\mu}{2} R$. Это ясно видно изъ того,

*) Морской Сборникъ, 1890 г.

что проекція K' точки K отстоитъ отъ точки B какъ разъ на величину погрѣшности, соотвѣтствующей углу поворота кривошипа α.

Такъ какъ $\frac{\mu}{2}R$ величина небольшая, то дугу K_1K можно считать за прямую, перпендикулярную къ OK, и длина ея будетъ тогда равна $f_{\max}\sin\alpha$; $K'B$ будетъ въ свою очередь проекціей K_1K; слѣдовательно

$$K'B = K_1K\sin\alpha = f_{\max}\sin\alpha\,.\,\sin\alpha = f_{\max}\sin^2\alpha.$$

Но $f_{\max} = \frac{\mu}{2}R$, слѣдовательно

$$K'B = \frac{\mu}{2}R\sin^2\alpha,$$

что мы уже имѣли въ формулѣ (1).

Способъ Брикса чрезвычайно простъ и даетъ возможность легко рѣшать обратную задачу, т. е. отыскать положеніе кривошипа, соотвѣтствующее данному положенію поршня.

Преимущество способа Брикса передъ методомъ нахожденія положенія поршня дуговымъ проектированіемъ и методомъ Мюллера заключается не только въ простотѣ, но, какъ это не звучитъ странно по отношенію къ приближенномъ методу, въ его точности.

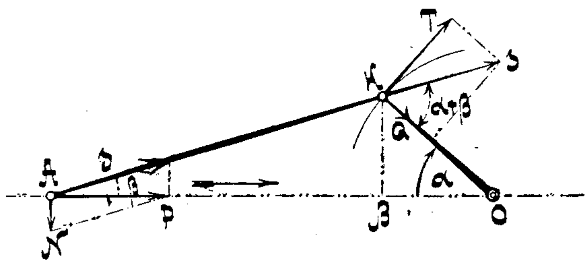
Вычерчиваніе окружностей радіуса равнаго длинѣ шатуна въ большомъ масштабѣ приводитъ къ ошибкамъ, происходящимъ отъ пружиненія ножекъ циркуля; при малыхъ же масштабахъ мы получаемъ вообще неточный чертежъ, именно по причинѣ малости масштаба.

Такимъ образомъ положенія *поршня*, соотвѣтствующія любому положенію кривошипа, могутъ быть опредѣлены легко и просто по методу Брикса; что же касается соотвѣтственныхъ положеній *шатуна*, которыя являются нужными при отысканіи касательныхъ силъ, скоростей и ускореній звеньевъ кривошипнаго механизма, то положенія эти приходится находить единственнымъ удобнымъ способомъ — засѣчкою изъ даннаго положенія пальца кривошипа радіусомъ, равнымъ длинѣ шатуна, линіи пути поршня.

Предметомъ настоящей статьи является изложеніе метода нахожденія касательныхъ силъ безъ посредства засѣчекъ большими радіусами.

Разсмотримъ сначала соотношеніе силъ, дѣйствующихъ въ кривошипномъ механизмѣ.

Если въ нѣкоторомъ опредѣленномъ положенiи кривошипа K (черт. 5), на поршень дѣйствуетъ нѣкоторая сила P, то по шатуну передается сила S, полученная отъ разложенiя силы P на два направленiя: перпендикулярное къ пути ползуна и по шатуну.



Черт. 5.

Первая изъ этихъ силъ N прижимаетъ ползунъ къ направляющей и не принимаетъ участiя во вращенiи кривошипа, вторая же S и является вращающею валъ силою.

Если шатунъ составляетъ уголъ β съ направленiемъ движенiя ползуна, то очевидно

$$S = \frac{P}{\cos\beta}, \qquad N = P\operatorname{tang}\beta.$$

Опредѣлимъ уголъ β, какъ функцiю угла α.

Опустимъ изъ K перпендикуляръ KB; изъ треугольниковъ AKB и KBO имѣемъ соотвѣтственно

$$KB = AK\sin\beta = L\sin\beta,$$

$$KB = OK\sin\alpha = R\sin\alpha,$$

откуда

$$\sin\beta = \frac{R}{L}\sin\alpha = \mu\sin\alpha.$$

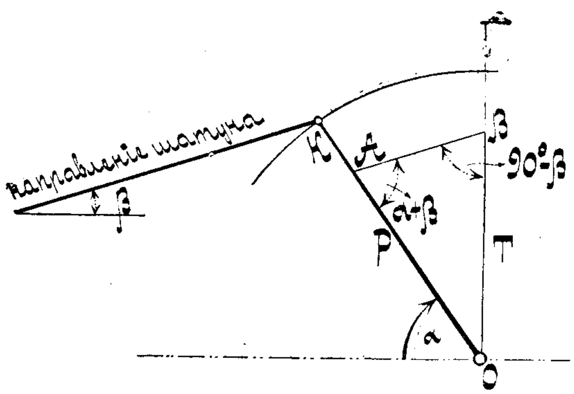
Такимъ образомъ мы видимъ, что уголъ $\beta = 0°$, когда $\alpha = 0°$ и $\alpha = 180°$, т. е. въ мертвыхъ положенiяхъ поршня. Когда $\alpha = 90°$, тогда β принимаетъ свое наибольшое значенiе $\sin\beta_{\max} = \mu$, что соотвѣтствуетъ приблизительно углу $11°,5$, при $\mu = \frac{1}{5}$.

Вернемся къ силѣ S (черт. 5). Передаваясь по шатуну, сила S въ точкѣ K разлагается на двѣ силы: такъ называемую касательную силу $T = S.\sin(\alpha+\beta)$ и радiальную $Q = S.\cos(\alpha+\beta)$. Первая изъ этихъ силъ производитъ вращенiя вала машины, т. е. производитъ работу, преодолѣвая полезныя сопротивленiя; вторая же во вращенiи вала участiя не принимаетъ.

Если мы выразимъ касательную силу черезъ величину силы P, дѣйствующей на поршень, то получимъ

$$T = S \,.\, \sin(\alpha+\beta) = \frac{P}{\cos\beta}\sin(\alpha+\beta) = P\,\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}. \qquad (3$$

Вмѣсто того, чтобы строить дважды параллелограммы силъ, силу T можно опредѣлить слѣдующимъ построеніемъ (черт. 6).



Черт. 6.

На положеніи кривошипа отъ точки O откладываемъ силу P, какъ отрѣзокъ OA; изъ точки A проводимъ линію AB параллельно направленію шатуна; отрѣзокъ OB, полученный такимъ образомъ на вертикали черезъ O, представитъ собою касательную силу T.

Дѣйствительно, изъ треугольника AOB имѣемъ:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(90-\beta)} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta},$$

откуда

$$OB = P\,\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta} = T.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что для графическаго опредѣленія величины касательной силы необходимо знать положеніе шатуна по отношенію къ линіи мертвыхъ точекъ.

Прежде чѣмъ перейти къ дальнѣйшему изслѣдуемъ формулу (3).

Изъ разсмотрѣнія ея видно, что даже при постоянномъ давленіи P на поршень (въ дѣйствительности оно является величиною перемѣнной), касательная сила является величиною перемѣнной, зависящей отъ угла поворота кривошипа.

Дѣйствительно, такъ какъ $\sin\beta = \mu\sin\alpha$, то $\cos\beta = \sqrt{1-\mu^2\sin^2\alpha}$

Тогда мы имѣемъ:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\beta} + \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\beta},$$

что послѣ пребразованій даетъ:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta} = \sin\alpha\left(1+\mu\sqrt{\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\mu^2\sin^2\alpha}}\right);$$

такимъ образомъ

$$T = P.\sin\alpha\left(1+\mu\sqrt{\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\mu^2\sin^2\alpha}}\right).$$

Если сила T является величиной перемѣнной, то и моментъ ея относительно оси вращенія O есть величина перемѣнная, а слѣдовательно вращающій моментъ на главномъ валу не есть величина постоянная. Очевидно, что этотъ вращающій моментъ временами долженъ быть больше момента полезныхъ сопротивленій машины, отнесенныхъ къ радіусу кривошипа, иначе было бы невозможно движеніе машины.

Наименьшая величина касательной силы $T_{\min} = 0$; это происходитъ, когда $\alpha + \beta = 0°$ и $\alpha + \beta = 180°$, такъ какъ $\beta = 0°$, когда $\alpha = 0°$ или $\alpha = 180°$.

При величинѣ α отличной отъ $0°$ или $180°$, β не равно $0°$, а слѣдовательно $\alpha + \beta$ не можетъ равняться $180°$, такъ какъ α и β углы одного и того же треугольника.

Отсюда мы видимъ, что касательная сила переходитъ черезъ нуль въ мертвыхъ точкахъ поршня. Это очевидно еще и потому, что сила P въ мертвыхъ точкахъ дѣйствуетъ цѣликомъ по направленію радіуса и не даетъ слагающей, къ нему перпендикулярной.

Слѣдовательно, если касательная сила равна нулю не въ мертвыхъ положеніяхъ механизма, то это можетъ происходить только отъ того, что $P = 0$, т. е.—когда сила дѣйствующая на поршень равна нулю, что и бываетъ въ дѣйствительности въ паровыхъ машинахъ.

Касательная сила $T = P$ при $\alpha = 90°$; дѣйствительно, тогда будемъ имѣть:

$$T = P\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta} = P\frac{\cos\beta}{\cos\beta} = P;$$

слѣдовательно, для этого положенія кривошипа излишне отыскивать касательную силу построеніемъ.

Примѣчаніе: Кромѣ того $T=P$, когда $\alpha=90° - 2\beta$; тогда

$$T=P\frac{\sin(90 - 2\beta+\beta)}{\cos\beta}=P\frac{\cos\beta}{\cos\beta}=P.$$

Опредѣлимъ уголъ поворота кривошипа α, соотвѣтствующій этому значенію силы T, предполагается $\mu = \frac{1}{5}$.

Если $\alpha=90°-2\beta$, то $\alpha+\beta=90°-\beta$; слѣдовательно

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(90°-\beta)=\cos\beta;$$

раскрываемъ здѣсь скобки

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\cos\beta$$

и подставляемъ вмѣсто $\sin\beta$ равную ему величину $\mu\cos\alpha$

$$\sin\alpha\cos\beta+\mu\cos\alpha\sin\alpha=\cos\beta,$$

$$\mu\cos\alpha\sin\alpha=\cos\beta\,(1-\sin\alpha),$$

откуда имѣемъ

$$\mu\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}=(1-\sin\alpha)\sqrt{1-\mu^2\sin^2\alpha};$$

освобождаясь отъ радикаловъ, получаемъ

$$\mu^2\sin^2\alpha\,(1-\sin^2\alpha)=(1-\sin\alpha)^2\,(1-\mu^2\sin^2\alpha);$$

раскрывая скобки и дѣлая приведеніе подобныхъ членовъ, получаемъ квадратное уравненіе

$$\sin^2\alpha+\frac{1}{2\mu^2}\sin\alpha-\frac{1}{2\mu^2}=0.$$

Подставляя сюда числовыя значенія μ, имѣемъ:

$$\sin^2\alpha+\frac{25}{2}\sin\alpha-\frac{25}{2}=0.$$

Рѣшая это уравненіе, получаемъ $\sin\alpha=0{,}9307$, что съ точностью до минутъ соотвѣтствуетъ углу $\alpha=68°32'$.

Предположивъ α равнымъ приблизительно $68°{,}5$ мы можемъ при посредствѣ обыкновеннаго транспортира нанести на кривошипной окружности соотвѣтственную точку.

Для полноты изслѣдованія остается еще добавить, что касательная сила T равна силѣ S, дѣйствующей по шатуну, въ томъ случаѣ, когда кривошипъ составляетъ съ шатуномъ прямой уголъ.

Дѣйствительно, мы имѣли ранѣе

$$T=S\sin(\alpha+\beta);$$

полагая $\alpha+\beta=90°$, имѣемъ $T=S$.

Какъ мы указывали ранѣе, сила S разлагается на двѣ силы, касательную T и радіальную Q.

Обѣ эти силы выражаются въ зависимости отъ силы P, дѣйствующей на поршень, слѣдующими формулами:

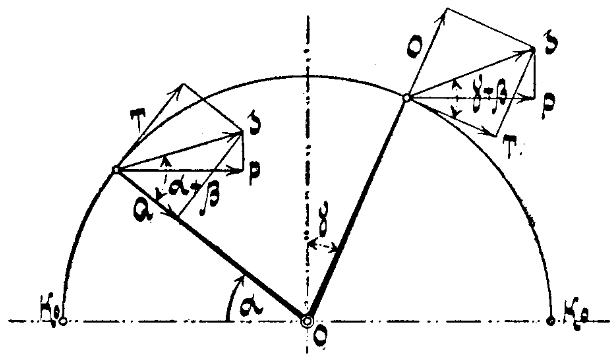
$$T=P\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta},\quad Q=P\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}.$$

Ясно, что эти формулы, представляющія собою два катета одного и того же треугольника, выраженныя черезъ гипотенузу $\frac{P}{\cos\beta}$, при углѣ поворота кривошипа $\alpha > 90^\circ$ мѣняютъ свой видъ.

Пусть $\alpha = 90^\circ + \gamma$, гдѣ γ можетъ въ свою очередь принимать всѣ значенія между 0° и 90°; тогда

$$\sin(90+\gamma+\beta)=\cos(\gamma+\beta),$$

$$\cos(90+\gamma+\beta)=-\sin(\gamma+\beta).$$



Черт. 7.

Такъ какъ для насъ нужны только абсолютныя величины T и Q, то знакъ минусъ не имѣетъ для насъ значенія; въ такомъ случаѣ

$$T=P\frac{\cos(\gamma+\beta)}{\cos\beta}, \quad Q=\frac{\sin(\gamma+\beta)}{\cos\beta},$$

т. е. въ прямоугольномъ треугольникѣ, составленномъ изъ силъ касательной, радіальной и дѣйствующей по шатуну, силы касательняя и радіальная взаимно перемѣстились (черт. 7). Это обстоятельство намъ придется учитывать въ дальнѣйшемъ изложеніи, къ которому мы теперь и переходимъ.

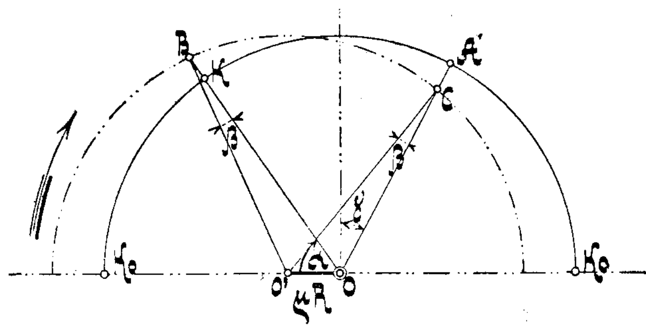
Для графическаго опредѣленія величины касательной силы, какъ видно изъ всего изложеннаго, необходимо знать, кромѣ угла поворота кривошипа отъ его мертваго положенія, еще и уголъ наклона шатуна къ линіи мертвыхъ точекъ.

Уголъ наклона шатуна легко найти посредствомъ слѣдующаго построенія *).

Отложимъ на діаметрѣ кривошипной окружности (черт. 8), по направленію отъ центра къ ползуну машины, отрѣзокъ равный μR и изъ полученной такимъ образомъ точки O', какъ изъ центра, опишемъ окружность радіусомъ, равнымъ длинѣ кривошипа.

*) Указаннаго мною въ статьѣ „Шатунный полюсъ“, см. „Извѣстія Томскаго Технологическаго Института“, *1909* г., № *1*.

Тогда для любого угла поворота кривошипа α, соотвѣтственный уголъ β найдется какъ уголъ при вершинѣ треугольника, составленнаго взятымъ направленіемъ радіуса кривошипа, при чемъ основаніе этого треугольника равно μR, а замыкающая сторона соединяетъ собою точку O' съ точкой пересѣченія направленія радіуса кривошипа съ вспомогательной окружностью.



Черт. 8.

Дѣйствительно, называя уголъпри вершинѣ буквою φ, имѣемъ изъ свойства сторонъ треугольника

$$O'B : O'O = \sin\alpha : \sin\varphi;$$

но $O'B = R$, $O'O = \mu R$; тогда

$$O'B : O'O = R : \mu R = 1 : \mu.$$

Слѣдовательно

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi},$$

откуда

$$\sin\varphi = \mu\sin\alpha$$

Но мы имѣли ранѣе зависимость между α и β такого же рода

$$\sin\beta = \mu\sin\alpha.$$

Такъ какъ μR всегда менѣе R, то на основаніи теоремы, что противъ меньшей стороны треугольника лежитъ и меньшій уголъ, мы можемъ сказать, что φ не можетъ быть болѣе 90°, а отсюда, имѣя $\sin\varphi = \sin\beta$, заключаемъ, что $\varphi = \beta$.

Для угловъ поворота кривошипа $\alpha = 90^\circ + \gamma$ имѣемъ соотвѣтственно

$$R : \mu R = \sin(90 + \gamma) : \sin\varphi, \quad \sin\beta = \mu\sin\ (90 + \gamma),$$

или

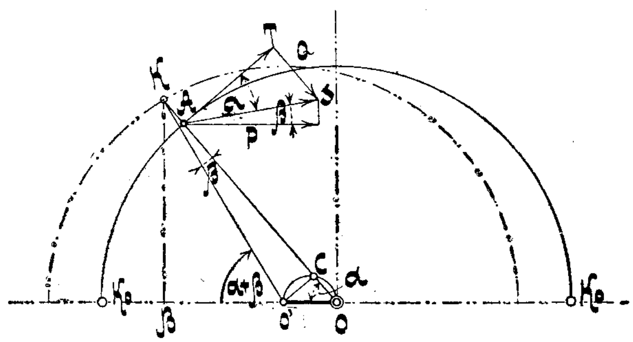
$$\frac{1}{\mu} = \frac{\cos\gamma}{\sin\varphi}, \quad \sin\beta = \mu\cos\gamma,$$

т. е. наше построеніе справедливо и для угловъ большихъ чѣмъ 90°.

Итакъ уголъ наклона шатуна къ линіи мертвыхъ точекъ находится весьма просто.

Слѣдовательно, для нахожденія касательной силы при точкѣ A (черт. 9) мы строимъ найденный уголъ и, пользуясь однимъ изъ извѣстныхъ намъ построеній, найдемъ силу T по данной силѣ P.

Построеніе при точкѣ A угла β, одна изъ сторонъ котораго должна быть параллельна линіи мертвыхъ точекъ (діаметру кривошипной окружности) и дальнѣйшее разложеніе силы P является довольно кропотливой работой, особенно—если принять во вниманіе, что для полученія представленія объ измѣненіяхъ силы T, ее опредѣляютъ для возможно бо̀льшаго числа различныхъ положеній кривошипа (для 24—32 положеній).



Черт. 9

При посредствѣ рейсшины и треугольника очень легко вычерчиваются линіи горизонтальныя и вертикальныя; обычный же методъ разложенія силы P требуетъ вычерчиванія большого числа линій различнаго наклона. Поэтому попробуемъ измѣнить методъ разложенія силы P на силы T и Q.

Замѣчая, что уголъ $BO'K$ (черт. 9), какъ внѣшній по отношенію къ треугольнику $O'KO$, будетъ равенъ $\alpha+\beta$, мы сейчасъ же получаемъ возможность упростить всѣ построенія.

Опустимъ изъ точки K перпендикуляръ на діаметръ кривошипной окружности; тогда величина его KB будетъ, очевидно, равна

$$KB=KO' \sin(\alpha+\beta).$$

Построимъ на отрѣзкѣ OO' полуокружность; тогда будемъ имѣть точку C—пересѣченіе взятаго радіуса кривошипа OA съ окружностью радіуса $\frac{\mu}{2}R$. Соединяя точку O' съ точкой C, мы получимъ, что $O'C$ перпендикулярно къ OK.

Ранѣе мы доказали, что уголъ $O'KO$ равенъ углу β; слѣдовательно, изъ прямоугольнаго треугольника $O'KC$ имѣемъ $KC=O'K\cos\beta$, откуда

$$O'K = \frac{KC}{\cos\beta};$$

послѣ подстановки этого значенія въ выраженіе для KB, мы получимъ

$$KB = KC\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}.$$

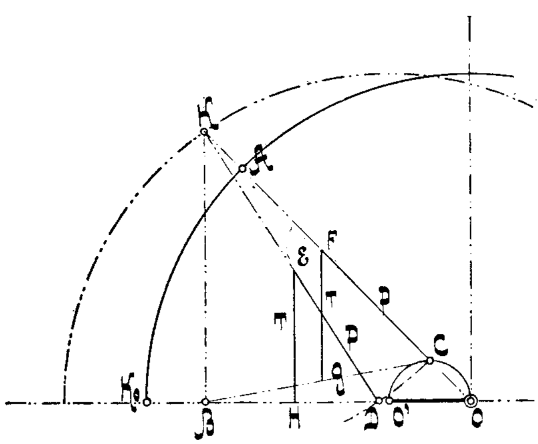
Полученная нами формула показываетъ, что *перпендикуляръ BK*, для даннаго угла поворота кривошипа, *представляетъ собою величину касательной силы T въ томъ же масштабѣ, въ которомъ отрѣзокъ KC представляетъ собою силу P, дѣйствующую на поршень.*

Этимъ разрѣшенъ вопросъ о нахожденіи касательной силы безъ вычерчиванія соотвѣтственныхъ положеній шатуна.

Такъ какъ векторъ $O'K$ (черт. 9) не играетъ никакой роли въ построеніи и введенъ нами лишь для доказательства правильности высказаннаго положенія, то при вычерчиваніи діаграммы въ немъ нѣтъ никакой надобности.

Такимъ образомъ все построеніе сводится къ вычерчиванію двухъ окружностей радіуса R и одной радіуса μR.

Для нахожденія истинной величины силы T по данному P надо строить подобные треугольники. Самый простой способъ построенія этихъ треугольниковъ будетъ заключаться въ слѣдующемъ.



Черт. 10.

Засѣчемъ радіусомъ равнымъ KC (черт. 10) линію мертвыхъ точекъ, полученную точку D соединимъ съ K и отложимъ отъ D на DK отрѣзокъ DE равный P. Перпендикуляръ изъ E на діаметръ кривошипной окружности представитъ собою касательную силу T для даннаго положенія кривошипа.

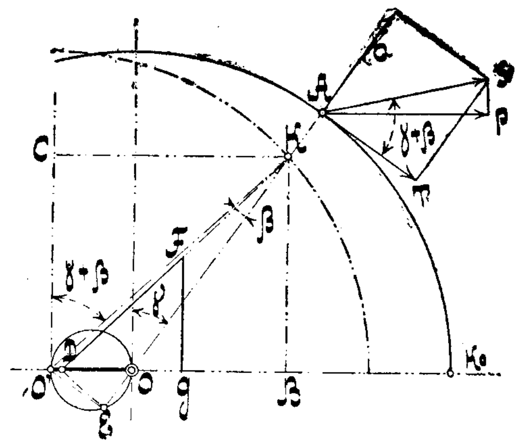
При указанномъ построеніи намъ даже нѣтъ надобности опускать перпендикуляръ KB, что еще болѣе упрощаетъ весь методъ.

Для угла кривошипа близкаго къ 90° можетъ случиться, что отрѣзокъ KC не пересѣчетъ линію мертвыхъ точекъ; въ такихъ случаяхъ величину силы T находимъ слѣдующимъ построеніемъ.

Соединяемъ основаніе перпендикуляра KB (черт. 10) съ точкою C: откладывая затѣмъ отъ C по CK отрѣзокъ CF равный P и опуская изъ F перпендикуляръ на OK_0, имѣемъ касательную силу FG, какъ отрѣзокъ перпендикуляра между линіями BC и KC.

До сихъ поръ мы разсматривали только касательную силу. Что касается радіальной силы, то на основаніи всего сказаннаго выше, величина ея выразится отрѣзкомъ $O'B$ въ томъ же масштабѣ, въ какомъ KB представляетъ собою касательную силу.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію предлагаемаго метода въ примѣненіи къ угламъ поворота кривошипа большимъ $90°$.



Черт. 11.

Возьмемъ (черт. 11) положеніе кривошипа OA подъ угломъ $90°+\gamma$ отъ лѣваго мертваго положенія и найдемъ для него уголъ β; затѣмъ произведемъ разложеніе силы P при точкѣ A; тогда касательная сила, какъ мы показали раньше, выразится формулой:

$$T=P\frac{\cos(\gamma+\beta)}{\cos\beta}.$$

Опустимъ изъ точки K перпендикуляръ на линію мертвыхъ точекъ; тогда уголъ OKB будетъ равенъ γ, какъ накрестъ лежащій; уголъ же $O'KB$ будетъ равенъ $\gamma+\beta$.

Проведя черезъ точку O' вертикальную ось, получимъ уголъ $CO'K$ также равный $\gamma+\beta$. Въ треугольникѣ $CO'K$, сторона

$$CO'=O'K\cos(\gamma+\beta).$$

Продолжимъ линію KO до пересѣченія съ окружностью радіуса $\frac{\mu}{2}R$ въ точкѣ E; тогда въ прямоугольномъ треугольникѣ $O'KE$ гипотенуза

$$O'K=\frac{EK}{\cos\beta}.$$

Подставляя величину $O'K$ въ выраженіе для CO', имѣемъ

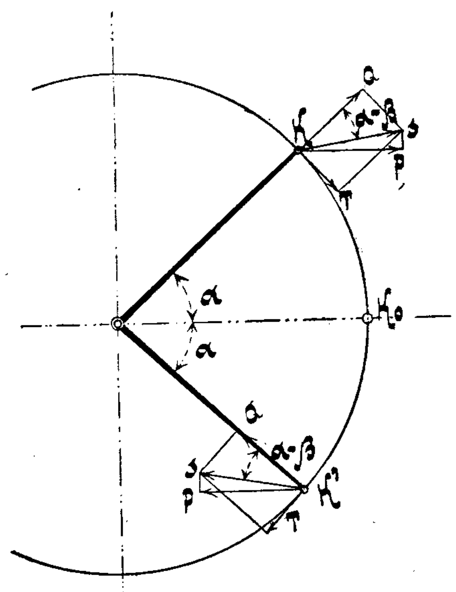
$$CO'=EK\frac{\cos(\gamma+\beta)}{\cos\beta},$$

т. е. *отрѣзокъ перпендикуляра длиною $O'C$ представляетъ собою касательную силу для угла поворота кривошипа $\alpha = 90° + \gamma$ въ томъ же масштабѣ, въ какомъ отрѣзокъ EK представляетъ собою силу P, дѣйствующую на поршень.*

Замѣчая, что KB равно $O'C$, какъ отрѣзки параллельныхъ между параллельными, мы приходимъ къ заключенію, что и для угловъ поворота кривошипа, бо́льшихъ $90°$, перпендикуляръ на линію мертвыхъ точекъ изъ точки пересѣченія вспомогательной окружности съ направленіемъ радіуса кривошипа является мѣрою касательной силы, т. е. излагаемый методъ примѣнимъ для всѣхъ угловъ α отъ $0°$ до $180°$.

Чтобы для $\alpha > 90°$ найти величину силы T возможно болѣе простымъ построеніемъ, поступаемъ такъ: изъ точки K радіусомъ равнымъ KE засѣкаемъ линію мертвыхъ точекъ; отложивъ на линіи DK отъ точки D отрѣзокъ DF, опускаемъ изъ точки F перпендикуляръ FG который и даетъ искомую силу T (черт. 11).

При этомъ построеніи намъ не надо проводить линіи $O'K$, $O'C$ и KB; онѣ были намъ нужны лишь для доказательства правильности пріема; приходится оперировать только съ отрѣзкомъ радіуса кривошипа, который, къ слову сказать, всегда пересѣкаетъ линію мертвыхъ точекъ.



Черт. 12.

Перейдемъ теперь къ опредѣленію касательныхъ силъ для обратнаго движенія поршня, т. е. для $\alpha > 180°$.

Докажемъ сперва, что для положеній кривошипа, симметричныхъ относительно линіи мертвыхъ точекъ, углы наклона шатуна къ этой линіи одинаковы.

Возьмемъ (черт. 12) два симметричныхъ положенія кривошипа K и K', которымъ соотвѣтствуютъ углы поворота кривошипа отъ лѣваго мертваго положенія $180° - \alpha$ и $180° + \alpha$; тогда имѣемъ

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha, \quad \sin\beta = \mu \sin\alpha;$$

далѣе

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha, \quad \sin\beta' = \mu \sin\alpha,$$

т. е. абсолютныя значенія угловъ β и β' одинаковы.

Предположимъ, что сила P, дѣйствующая на поршень, для избранныхъ двухъ положенiй кривошипа, одинакова. Найдемъ величину касательной силы обычнымъ построенiемъ; для положенiя кривошипа K будемъ имѣть

$$T = P\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta};$$

для положенiя же кривошипа K' соотвѣтственно

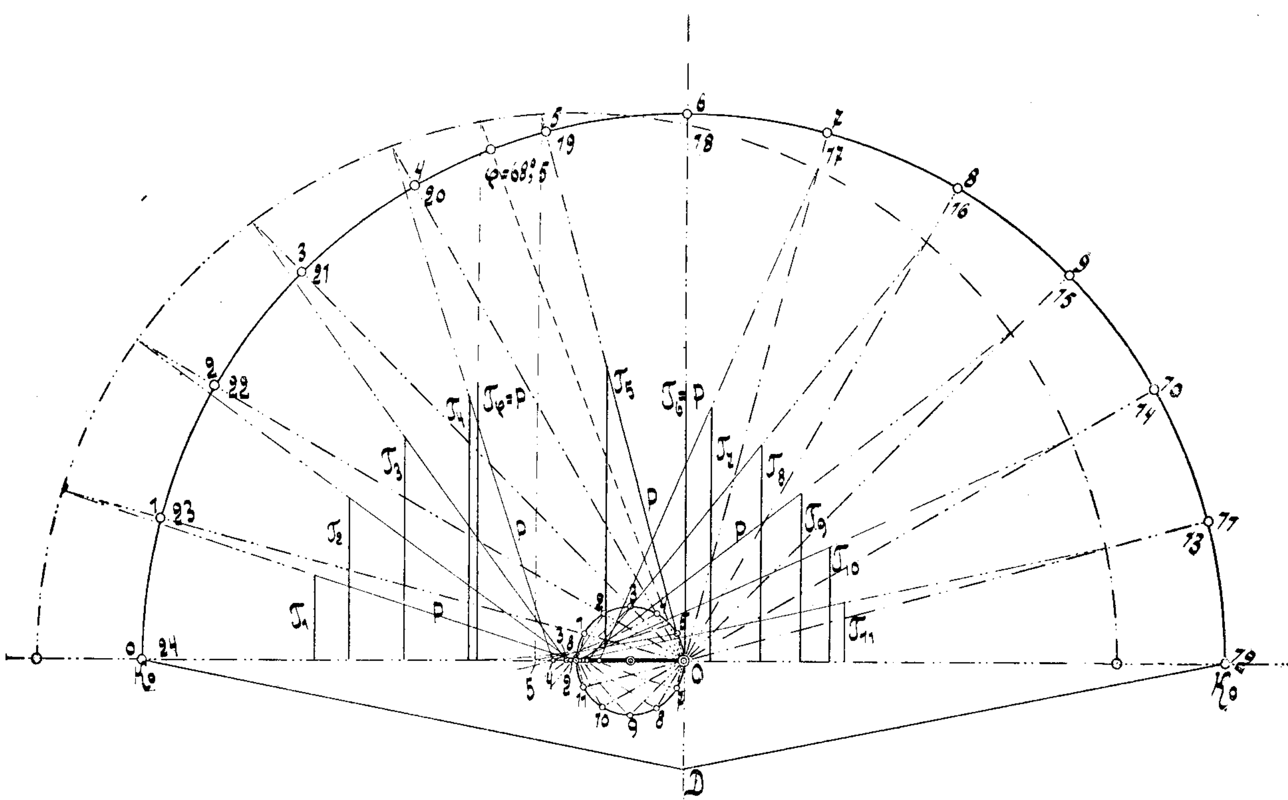
$$T' = P\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta},$$

т. е. $T = T'$.

Для различныхъ P мы будемъ, слѣдовательно, имѣть

$$T : T' = P : P'.$$

откуда заключаемъ, что для нахожденiя силы T', можно воспользоваться уже найденной ранѣе (черт. 11) линiей DK.



Черт. 13.

Такимъ образомъ, для нахожденiя касательныхъ силъ при обратномъ ходѣ поршня, мы можемъ воспользоваться всѣми сдѣланными ранѣе построенiями, придавая лишь точкамъ дѣленiя кривошипной окружности двойную нумерацію, какъ показано на чертежѣ 13-мъ, что значительно сокращаетъ работу *).

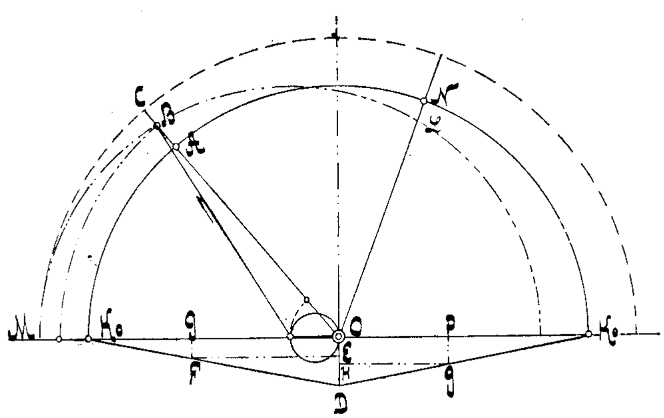
Для нахожденія величины касательной силы, дѣйствующей на палецъ кривошипа, необходимо знать давленіе P, дѣйствующее на поршень при данномъ положеніи кривошипа; эту силу до сихъ поръ мы предполагали постоянной, въ дѣйствительности же она является величиною перемѣнной, переходящей даже черезъ нулевое значеніе.

Величина силы P опредѣляется изъ такъ называемой діаграммы рабочихъ давленій; діаграмма эта, какъ извѣстно, получается (для паровыхъ машинъ) изъ преобразованныхъ индикаторныхъ діаграммъ для передняго и задняго хода поршня при учетѣ вліянія движущихся взадъ и впередъ массъ (поршня, штока, ползуна и шатуна).

Зная положеніе поршня, соотвѣтствующее взятому положенію кривошипа, мы получимъ силу P, какъ ординату упомянутой діаграммы.

Итакъ, для опредѣленія касательной силы, намъ надо знать положеніе поршня.

Если мы проведемъ (черт. 14) изъ центра O окружность радіусомъ равнымъ $R+\mu R$, то мы увидимъ, что эта окружность будетъ представлять собою внѣшнюю окружность діаграммы *Мюллера* (черт. 3) при условіи, что μR равно половинѣ хода поршня $\frac{S}{2}$.



Черт. 14.

Тогда, для положенія кривошипа A, величина отрѣзка CB представляетъ собою путь, пройденный поршнемъ отъ лѣваго мертваго положенія, а величина отрѣзка BA — путь, на который поршень *не дошелъ* до средины своего хода, причемъ эти пути изображены въ томъ масштабѣ, въ которомъ μR представляютъ собою половину хода поршня $\frac{S}{2}=R$.

Такимъ образомъ, для нахожденія истиннаго положенія поршня, мы должны отложить отъ центра O влѣво отрѣзокъ AB, увеличенный въ масштабѣ $\frac{R}{\mu R}=\frac{1}{\mu}$.

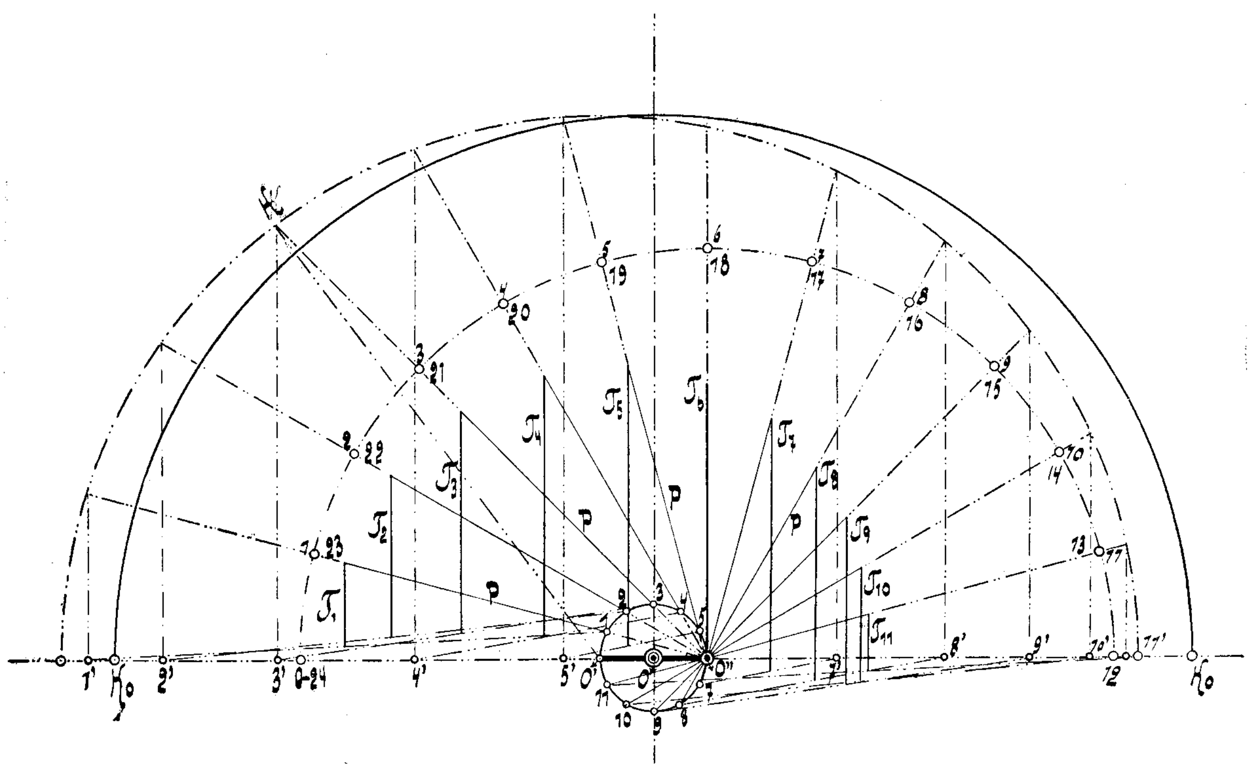
*) При вычерчиваніи діаграммы надо брать $R=10$ или 20 c/m, въ послѣднемъ случаѣ всѣ нужныя точки находятся особенно четко. Брать подобный радіусъ для обычнаго метода нахожденія касательныхъ силъ не удобно, такъ какъ тогда приходится для нахожденія положеній шатуна дѣлать засѣчки радіусомъ $L=5R=100$ c/m.

Для машинъ нормальнаго типа $\mu = \frac{1}{5}$, слѣдовательно $\frac{1}{\mu} = 5$.

При наличіи такъ называемаго пропорціональнаго циркуля, положеніе поршня находится простымъ измѣреніемъ отрѣзка AB.

При отсутствіи подобнаго циркуля можно поступать слѣдующимъ образомъ: отложимъ отъ центра O (черт. 14) внизъ по вертикали отрѣзокъ $OD = \mu R$; точку D соединимъ прямыми линіями съ точками K_0 и K_0; тогда откладывая отъ D вверхъ отрѣзокъ AB (или, соотвѣтственно, NL для $\alpha > 90^0$), проводя горизонтальную линію EF и вертикальную FG, имѣемъ соотвѣтственное положеніе поршня.

Разъ мы опредѣляемъ положенія поршня по отношенію къ серединѣ его хода, окружность радіуса, равнаго $R + \mu R$, становится излишней; слѣдовательно намъ достаточно добавить линію $K_0 D K_0$ къ чертежу 13-му, чтобы пользоваться имъ какъ для нахожденія истинныхъ положеній поршня, такъ и для опредѣленія касательныхъ усилій.



Черт. 15.

Можно воспользоваться и методомъ *Брикса*; для этого (черт. 15) окружность радіуса $\frac{\mu}{2} R$ проведемъ концентрично съ кривошипной окружностью. Проведя затѣмъ изъ точки O' вторую окружность радіусомъ R, мы получимъ, для произвольнаго угла поворота кривошипа α, треугольникъ $O'KO''$, совершенно тожественный съ треугольникомъ

$O'KO$ чертежа 9-го. Слѣдовательно, всѣ приведенныя выше разсужденія будутъ справедливы и для чертежа 15-го. Положенія поршня найдутся опусканіемъ перпендикуляра изъ точки K'. Такимъ образомъ одинъ и тотъ же векторъ OK будетъ служить для опредѣленія положенія поршня и соотвѣтствующей касательной силы. Надо только добавить еще одну эксцентричную окружность изъ центра O'', чтобы нанести на ней равныя дуги для опредѣленнаго числа дѣленій кривошипной окружности*).

Вопросъ исчерпанъ. Найдя величину касательныхъ усилій, обычнымъ порядкомъ строятъ ихъ діаграмму, беря за основаніе развернутую кривошипную окружность, и опредѣляютъ массу маховика, отнесенную къ радіусу кривошипа по извѣстной формулѣ

$$faO = Mv^2\delta,$$

гдѣ a—масштабъ діаграммы въ klg/mtr, f—вызывающая наибольшее измѣненіе живой силы площадка діаграммы, M—масса маховика, v—окружная скорость кривошипа, δ—заданный коеффиціентъ неравномѣрности хода машины.

Изложеннымъ въ настоящемъ очеркѣ методомъ легко рѣшается и обратная задача: по данной постоянной касательной силѣ найти перемѣнную силу, двигающую поршень,—вопросъ, встрѣчающійся въ области построенія насосовъ, воздуходувокъ, компрессоровъ и другихъ машинъ, получающихъ прямолинейно-качательное движеніе отъ непрерывно вращающагося приводнаго вала.

Въ заключеніе нелишне будетъ добавить, что указаннымъ же методомъ можно опредѣлить и скорость поршня c_x, соотвѣтствующую данному положенію кривошипа:

Какъ извѣстно, графическій методъ нахожденія скорости поршня основанъ на формулѣ:

$$c_x = v\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta},$$

(гдѣ c_x—перемѣнная скорость поршня, v—окружная скорость кривошипа, принимаемая постоянной, α и β—тѣ же самые углы, которые входятъ въ формулу касательной силы) формулѣ вполнѣ аналогичной съ только что приведенной и слѣдовательно все сказанное объ отысканіи касательныхъ силъ примѣнимо и для отысканія скорости поршня.

А. Угаровъ.

Томскъ. Январь, 1910 г.

*) На чертежѣ 15-мъ показано нахожденіе касательныхъ силъ, какъ отрѣзковъ перпендикуляровъ между двумя соотвѣтствующими наклонными линіями. Все построеніе получается быстро и легко.