Б. П. Вейнберг.

# К изучению гидродинамики спокойного движения вязкой жидкости.

## I. Опыт классификации различных случаев установившегося спокойного движения вязкой жидкости.

### 1. Выбор темы.

Посвящая с 1904 часть работ моих и моих сотрудников (список — ниже) вопросам, непосредственно относящимся или близким к гидродинамике спокойного движения вязких жидкостей, и приступая к разработке других теоретических и экспериментальных исследований в том же направлении, которые и составят предмет последующих статей этой серии, я столкнулся с вопросом, на изучении каких именно случаев надлежит направить усилия.

Когда работают в почти не разработанной области, представляющей обширное поле разнообразных задач для решения, то при выборе их руководствуются обычно либо соображениями о *возможности*, либо соображениями о *желательности*, т.е. выбирают либо те задачи, которые наиболее легко—при современном состоянии математических знаний или экспериментальной техники —разрешимы, либо же те, решение которых, хотя и более затруднительно, но является наиболее интересным с теоретической или с практической точки зрения.

В обоих случаях планомерному выбору задач должен предшествовать обзор различных случаев, подлежащих изучению, и степени их изученности в данное время и классификация их с возможно полным разбором тех теоретических и практических вопросов, к уяснению которых может привести решение той или другой задачи. Настоящая статья представляет попытку в таком направлении по отношению к гидродинамике установившегося спокойного движения вязкой жидкости и за сравнительно короткое время привела непосредственно к разработке вопросов, составляющих содержание работ №№ **41**, **42**, **43** и **51** последующего списка.

Подобную же попытку по отношению к методологии изучения близкого к гидродинамике спокойного движения вопроса о поведении твердого тела при действии сил, превышающих предел упругости, представляют работы №№ **28** и **30** того же списка. Исследования в последнем направлении составят другую серию работ, первая из которых уже напечатана, а вторая печатается ниже,—№№ **44** и **46** последующего списка—, и в целях экономии места и ввиду близости тем обеих серий список этот заключает в себе работы, относящиеся и к гидродинамике спокойного движения, и к поведению твердого тела за пределом упругости. Немногочисленные работы, относящиеся *только* ко второму вопросу, отмечены в этом списке звездочкой. Ссылки на все эти работы будут делаться указанием в скобках номера работы жирным шрифтом с присоединением, если надо, номеров страниц—обыкновенным шрифтом.

1. *Б. П. Вейнберг.* «Некоторые способы определения коэффициента внутреннего трения твердых тел (предварительное сообщение)».—Журн. Р. Физ. Общ. *36*, 47—48, 1904.

2. *Boris Weinberg.* «On Some Methods for Studying Viscosity of Solids». — Proc. R. Soc Lond., *19*, 291—292, 472—474, 1905.

3. *Boris Weinberg.* «Über die innere Reibung des Eises». Ann. d. Phys., *18*, 61—91, 1905.

4. *Б. П. Вейнберг.* «Заметка о влиянии температуры на внутреннее трение твердых тел». —Зап. Нов. Унив., *105*, 157—186, 1905.

5. *Б. П. Вейнберг.* «О внутреннем трении льда».—Журн. Р. Физ. Общ., *38*, 185—225, 250—282, 289—304, 1906.

6. *Boris Weinberg.* «Über den Koeffizienten der inneren Reibung des Gletschereises und seine Bedeutung für die Theorie der Gletscherbewegung»—Zeits. f. Gletscherkunde. 1, 321—347, 1906.

*7. *Boris Weinberg.* «Über die theoretische Möglichkeit der Existenz der flüssigen Kristallen».—Phys. Zeits. 7, 831—832, 1906.

8. *Boris Weinberg.* «Über die innere Reibung des Eises II» Ann. d. phys., *22*, 321—332, 1907.

9. *Б. П. Вейнберг.* «О скользкости льда».—Журн. Р. Физ. Общ. *32, II* ч., 164—165, 1907.

*10. *Е. А. Кириллов.* «Модуль Юнга, как функция растяжения проволоки».— Журн. Р. Физ. Общ., *39*, 62—80, 1907.

*11. *Б. П. Вейнберг.* «Заметка к статье Кириллова «Модуль Юнга, как функция растяжения проволоки». — Там же, 81—82.

12. *Б. П. Вейнберг.* «К вопросу о «спокойном» течении жидкости по каналу».—Журн. Р. Физ. Общ., *42*, 167—176, 1910.

13. *Boris Weinberg.* «Die wirbellose Strömung von Flüssigkeiten in Kanälen». — Phys-Zeits., *11*, 346—347, 1910.

14. *Boris Weinberg.* «Zur Theorie der Gletscherbewegung». — Zeits. f. Gletscherkunde, *4*, 308—310, 1910

15. *Б. П. Вейнберг.* «Об исследованиях над медленными деформациями твердых тел». — Дневн. 2-го Менд. съезда, № *3*, 24—25, 1911.

16. *Б. П. Вейнберг.* «К изучению тел с большими значениями коэффицента внутреннего трения». — Журн. Р. Физ. Общ., *44*, 1—2, 1912.

17. *Б. П. Вейнберг и Ин. Ал. Смирнов.* «Сравнение некоторых способов определения коэффициента внутреннего трения вара». — Журн. Р. Физ. Общ., *44*, 3—25, 1912.

*18. *Ан. В. Игнатьев.* «Определение капиллярной постоянной «твердого» вара по размерам капель». — Там же, 71—73.

19. *Б. П. Вейнберг.* «Влияние температуры на внутреннее трение вара и асфальта». — Там же, 201—229.

20. *М. П. Гостюнин и П. Я. Ледантю.* «Сопротивление вязкого тела движению внутри него твердого тела».—Там же, 241—251.

21. *Б. П. Вейнберг.* «Дальнейшие опыты над спокойным течением вязкой жидкости по каналу». — Там же, 252—256.

22. *С. И. Монстров.* «Попытка определения некоторых механических свойств асфальта». — Там же, 492—502.

23. *Б. П. Вейнберг.* «Добавление к предыдущей статье».— Там же, 505—513.

24. *А. А. Милорадов и П. А. Толмачев.* «Внутреннее трение асфальта». — Там же, 505—513.

25. *Б. П. Вейнберг.* «Изучение явлений в жидкостях при однородном сдвиге (предварительное сообщение)». — Там же, 514—515.

26. *В. Д. Кузнецов.* «Движение плоскости в жолобе с вязкою жидкостью». — Журн. Р. Физ. Общ., *45*, 499—518, 1913.

27. *В. Д. Дудецкий.* «Определение коэффициента внутреннего трения асфальта из однородного сдвига». — Там же, 519—533.

28. *Б. П. Вейнберг.* «Задачи физики твердого тела и успехи по некоторым ее вопросам за последние годы». — Там же, II ч., 67—115.

*29. *Б. П. Вейнберг* «О внутреннем трении двойных систем». — Журн. Р. Хим. Общ., *45*, 701—706, 1913.

30. *Boris Weinberg.* «Sur les méthodes d'étude des déformations lentes des solides». — Пригот. к печ., 1913; имеет появиться в Трудах Инст. прикл. физ.

31. *Boris Weinberg.* «Quelques résultats de l'étude des substances douées de grandes valeurs du coefficient de frottement interieur». — Пригот. к печ., 1913; имеет появиться в Трудах Инст. прикл. физ.

32. *Boris Weinberg.* «Etude expérimentale du mouvement lamellaire des liquides visqueux». — Пригот. к печ., 1913; имеет появиться в Трудах Инст. прикл. физ.

33. *В. Н. Алфимов и Б. П. Вейнберг.* «К постановке опытов над движением твердых тел в вязких жидкостях». — Журн. Р. Физ. Общ., *46*, 66—74, 1914.

34. *Ю. П. Резников.* «Коэффициент внутреннего трения растворов даммаровой смолы в скипидаре в зависимости от температуры и концентрации раствора». — Там же, 75—80.

35. *Б. П. Вейнберг.* „Вероятные очертания будущей теории деформаций твердого тела (на правах предварительного сообщения)“.—Труды Общ. ест. и врач. при Томск. Унив. за 1913 г., 175—187, 1915.

36. *Б. П. Вейнберг.* „Механические свойства глины“.— Пригот. к печ., 1915; реферат— Труды 3-го съезда Рос. Асс. Физ., 24, 1923; имеет появиться в Журн. Р. Физ. Общ.

37. *Б. П. Вейнберг.* „О влиянии примеси нейтральных твердых телец на внутреннее трение вязких жидкостей“.—Пригот. к печ., 1915; реферат—Труды 3-го съезда Рос. Асс. Физ., 24—25, 1923; имеет появиться в Журн. Р. Физ. Общ.

38. *Б. П. Вейнберг.* „Влияние трубки на скорость падения внутри нее шарика в вязкой жидкости“.—Пригот. к печ., 1915; имеет появиться в Журн. Р. Физ. Общ.

39. *Б. П. Вейнберг.* „О сопротивлении вязкой жидкости движению внутри нее цилиндра с коническими концами“.—Пригот. к печ., 1915; имеет появиться в Журн. Р. Физ. Общ.

40. *Б. П. Вейнберг.* „Устанавливающийся режим пластичного тела при действии постоянной силы с релаксационной точки зрения“.—Печатается ниже.

41. *Б. П. Вейнберг.* „Спокойное движение вязкой жидкости между двумя неподвижными параллельными и пересекающимися плоскостями. Часть теоретическая“.—Пригот. к печ., 1922; имеет появиться в Трудах Инст. прикл. физ.

42. *Б. П. Вейнберг.* „Две теоремы гидродинамики спокойного движения“.—Пригот. к печ., 1922.

43. *Б. П. Вейнберг.* „Спокойное течение вязкой жидкости между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями. Часть теоретическая“.—Пригот. к печ., 1922; имеет появиться в Изв. Росс. Гидр. Инст.

44. *Б. П. Вейнберг.* „К изучению поведения твердого тела за пределом упругости. I. Внутреннее трение исландского шпата и каменной соли“.—Изв. Томск. Техн. Инст., *43*, № 3, 39—46, 1923.

45. *Б. П. Вейнберг.* „Анаморфозы весовых и молекулярных процентов и приложение их к внутреннему трению двойных систем большой вязкости“.—Пригот. к печ., 1923; имеет появиться в Изв. Инст. физ.-хим. анализа.

46. *Б. П. Вейнберг.* „Внутреннее трение свинца“.—Печатается ниже.

47. *Б. П. Вейнберг.* „Процесс подъема и опускания вязкой жидкости в капилляре“.—Печатается ниже.

48. *В. Д. Кузнецов.* „Влияние температуры на внутреннее трение каменной соли“.—Изв. Томск. Техн. Инст., *43*, № 3, 47—52, 1923.

49. *В. Д. Кузнецов.* „Влияние температуры на внутреннее трение парафина“.—Пригот. к печ., 1923; имеет появиться в Трудах Инст. прикл. физ.

50. *В. Б. Вейнберг и К. Б. Вейнберг.* „Некоторые экспериментальные и теоретические данные о скользкости льда“.—Пригот. к печ., 1923; имеет появиться в Трудах Инст. прикл. физ.

51. *Ю. В. Грдина.* „О применимости асфальта для стыков водопроводных труб“.—Пригот. к печ., 1923; имеет появиться в Трудах Инст. прикл. физ.

## 2. Основания классификации различных случаев движения жидкости.

Наиболее существенным различием движений жидкости является отличие „спокойного“ или, иначе, „параллельноструйного“, „пластинчатого“, „ламеллярного“, „безвихревого“ движения от „неспокойного“, „вихревого“, „турбулентного“. Спокойное движение можно охарактеризовать, как такое, при котором траектории отдельных элементов жидкости не имеют точек пересечения ни друг с другом, ни сами с собою. Появление точек пересечения можно считать характерным признаком перехода спокойного движения в неспокойное.

Другой признак, по которому различаются движения жидкости, основан на сравнении скоростей у одной и той же частицы или в одной и той же точке пространства в последовательные моменты времени. Обыкновенно различают две основных группы движений: установившиеся или стационарные, при которых скорость во всякой данной точке пространства остается постоянной во все время движения, и неустановившиеся, при которых скорость в данной точке изменяется во время движения. Мы несколько детализируем эту классификацию по отношению к стационарным движениям и будем различать *строго стационарные*, *квази-стационарные* и *приблизительно стационарные* движения. Строго стационарными мы будем называть такие, при которых скорость *каждой частицы* сохраняет свою величину во все время движения и при которых тем более сохраняется постоянство скорости и по величине, и по направлению в каждой точке пространства. При квазистационарном движении скорость в каждой точке пространства остается постоянной, но—благодаря тому, что на место данной частицы, изменившей свою скорость при переходе в другие точки пространства, приходит новая частица, приобретающая скорость прежней. Наконец при приблизительно стационарных движениях изменяются и скорости в данной точке, и скорости каждой частицы, но первые изменения гораздо медленнее вторых или, точнее, изменение скорости в данной точке за некоторый промежуток времени весьма мало по сравнению с различиями между скоростью в данной точке и скоростями в точках, отстоящих от нее на расстояния, не превышающие произведения этой скорости на рассматриваемый промежуток времени.

Из четырех основных категорий движений, которые получаются из приведенных двух принципов классификации, а именно установившееся спокойное, неустановившееся спокойное, установившееся неспокойное и неустановившееся неспокойное, мы в этой серии будем заниматься исключительно спокойным и притом преимущественно установившимся. Замечу, что установившееся спокойное движение жидкости изучено, как теоретически, так и экспериментально, значительно менее, чем установившееся неспокойное, несмотря на то, что изучение его, как более простого явления, должно было бы предшествовать изучению более сложного явления установившегося неспокойного движения. Точно также неустановившееся спокойное движение почти совершенно не изучено, тогда как более сложное неустановившееся неспокойное было предметом весьма большого количества исследований.

За дальнейшие основы классификации примем:

1) число и форму поверхностей, ограничивающих движущуюся жидкость,

2) относительный покой или относительное движение и характер движения этих поверхностей,

а также 3) характер тех *постоянных* сил, которые вызывают движение жидкости: силы линейные (поверхностное натяжение на свободной поверхности жидкости), поверхностные (внешнее давление на свободную поверхность) или объемные (напр., сила тяжести).

Для детализации классифицируемых случаев полезно иметь в виду составные части теоретического или экспериментального исследования того или другого частного случая движения. Такая задача должна состоять в определении — в зависимости от заданной системы внешних сил (давления и поверхностного натяжения, действующих на свободной поверхности, и объемных сил, действующих на все точки жидкости):

1) распределение скоростей, вращений и тангенциальных и нормальных напряжений в различных точках жидкости,

2) распределение тангенциальных и нормальных напряжений в различных точках стенок,

3) формы линий тока — траекторий отдельных частиц жидкости,

4) количества жидкости, протекающей чрез ту или другую часть поверхности, нормальной к линиям тока.

Так как в задачу настоящей статьи входит не только выяснение различных случаев движения, подлежащих изучению, но и — степени их изученности, то не лишнее привести одно общее замечание (5, 196), связывающее гидродинамику спокойного движения вязкой жидкости с теорией упругости. Решение всякой задачи теории упругости относительно деформаций упругого твердого тела при приложении к ограничивающим его поверхностям определенной системы сил, если только эти силы не вызывают ни в одной точке тела объемного сжатия, непосредственно приводит к решению задачи относительно вязкой жидкости, ограниченной такими же поверхностями при приложении к ним такой же системы сил. Достаточно для этого в решении задачи упругости заменить угол сдвига в данной точке угловою скоростью сдвигания (или, что — тоже, градиентом скорости в данной точке) и модуль сдвига — коэффициентом внутреннего трения. Обратная замена может из решения задачи относительно спокойного движения вязкой жидкости дать решение соответствующей задачи теории упругости.

## 3. Случай безграничной жидкости.

Прежде, чем переходить к классификации отдельных случаев *установившегося спокойного* движения *вязкой* жидкости в зависимости от числа и формы ограничивающих ее поверхностей, укажу, что при *безграничности* жидкости и заполнении ею всего пространства такое движение *невозможно*.

Большой теоретический и особенно практический интерес представляло бы изучение того *неустановившегося спокойного* движения, какое должен представлять всякий вызванный каким либо внешним воздействием,—затем прекратившимся,—*одиночный вихрь*, который вследствие вязкости жидкости должен постепенно замедлять свое вращение, и далее *система вихрей*, распределенных в пространстве. Практическое значение этого вопроса видно из того, что каждый из тех вихрей, которые по теориям Прандтля, Жуковского, Кармана и др. [1]) образуются за поверхностью твердого тела движущегося достаточно быстро в достаточно мало вязкой жидкости, должен представлять собой случай *спокойного* движения, так как, если распределение скоростей в нем соответствовало бы условиям перехода из спокойного состояния в неспокойное или превышало эти условия, то этот вихрь должен был бы неминуемо разбиться на более мелкие, в каждом из которых движение было бы опять таки *спокойным* или же вызвало бы его дробление на еще более мелкие и т. д.

Последнее замечание показывает, что для *полной* теории вихревого движения и, в частности, сопротивления, оказываемого жидкостью в случае такого ее движения, неминуемо рассмотрение указанного выше вопроса о поглощении вследствие внутреннего трения энергии одиночных вихрей и системой правильно расположенных одиночных вихрей, а также выяснение тех условий, касающихся распределения скоростей внутри вязкой жидкости, которые вызывают появление нового вихря или дробление уже существующего.

### 4. Типы и формы поверхностей, ограничивающих жидкость.

Жидкость может граничить с твердыми, жидкими и газообразными телами. Характерным свойством поверхности твердого тела, ограничивающего жидкость, является возможность наличности—постоянных при установившемся и переменных при неустановившемся движении—тангенциальных напряжений на ней.

Такую поверхность—в зависимости от того, будет ли система действующих на нее сил удерживать ее в покое или сообщать ей движение с определенною скоростью,—мы будет называть „*неподвижною стенкою*" или же „*подвижною стенкою*" в отличие от „*свободной поверхности*",—поверхности, соприкасающейся с каким нибудь газом, или с парами той же жидкости, или же с какою нибудь другою жидкостью. Свободная поверхность характеризуется невозможностью существования на ней тангенциальных напряжений, если только та жидкость или газ, с которыми соприкасается изучаемая жидкость, не находится в установившемся движении; в последнем случае поверхность соприкосновения может до известной степени играть роль поверхности стенки.

Установившееся движение возможно лишь, если не вся поверхность рассматриваемой массы жидкость будет свободной, а часть ее будет представлять собою стенки, при чем при наличности той или другой системы сил, действующих на жидкость, характер движения жидкости будет определяться именно числом, формою и движением этих стенок.

Для упрощения мы ограничимся в последующем случаем вполне смачиваемых и абсолютно твердых, т. е. неизменяемых стенок.

Возможен наконец третий тип части поверхности, ограничивающей данную массу жидкости,—тип, который можно назвать „*свободною стенкою*". Это будет такая часть стенки, которая при движении жидкости движется вместе с прилегающим к ней слоем жидкости, не оказывая на него никаких тангенциальных сил. В частности, свободною стенкою можно считать такую часть свободной поверхности, которая перемещается, не изменяя своей формы и величины.

---

[1]) Прекрасный обзор их дан в курсе проф. А. А. Саткевича «Аэродинамика, как научная основа авиации», М., 1923.

В некоторых случаях решения задач о движении жидкости между двумя неподвижными стенками, между неподвижной и подвижной стенками и между неподвижной и свободной стенками связаны между собою, как это указано в третьей работе этой серии (**42**).

Что касается до формы поверхностей, то мы ограничимся простейшими и рассмотрим последовательно:

а) плоскости,

б) цилиндрические поверхности—, в частности, поверхности прямых круговых цилиндров,

в) конические поверхности—, в частности, поверхности прямых круговых конусов,

г) сферические,

и различные их комбинации.

Начнем рассмотрение с плоскостей, причем, так как наименьшее число плоскостей, какое может ограничивать жидкость (если в случае достаточно больших плоскостей пренебрегать боковой поверхностью по сравнению с площадью плоскостей), равно двум, то простейшими случаями будут движение жидкости между *двумя* параллельными плоскостями и движение между *двумя* пересекающимися плоскостями или, иными словами, в клине.

### 5. Две параллельных неподвижных плоскости.

Если стенки параллельны и неподвижны, то установившееся движение может происходить только по одному из направлений, параллельных этим плоскостям. Случай установившегося спокойного движения между неподвижными плоскостями изучен и теоретически, и экспериментально Хиль-Шо [1], а один из случаев неустановившегося движения—процесс поднятия или опускания вязной жидкости в «капиллярном плоскопараллельном пространстве»—разобран теоретически мною (**47**). Из случаев, в которых имеет место движение, близкое к этому, можно указать кирпичеделательные пресса, просачивание смазки близ золотника паровой машины, когда он неподвижен, выдавливание вбок воды из под полоза саней (**50**) и т. п.

### 6. Две параллельных плоскости, находящиеся в относительном движении.

Движение одной плоскости относительно другой, параллельной ей, может быть поступательным, вращательным или винтовым. Очевидно, что достаточно разобрать только первые два случая. Первый из них в свою очередь распадается на движение одной плоскости параллельно обоим плоскостям и на движение перпендикулярно им.

Движение одной плоскости параллельно другой может иметь место при определении коэффициента внутреннего трения твердых тел из сдвига параллелепипеда [2]) или двух соприкасающихся параллелепипедов (**27**), а также может выяснить роль смазки и величину трения при движении золотника и различных ползунов.

Задача движения жидкости в случае движения одной плоскости относительно другой в направлении, перпендикулярном к ним обеим, может быть разрешена лишь при ограниченных—по крайней мере, в одном направлении—их размерах, причем, конечно, движение жидкости между ними будет лишь *приблизительно стационарным*. Простейшим случаем будет ограничение взаимно приближающихся или взаимно удаляющихся плоскостей окружностями,

---

[1]) *Hele Shaw*, Phil. Trans., *196 A*, 303—327, 1901.

[2]) *Obermayer*, Sitzber. Wien. Akad., *75*, 665—679, 1877 и *113*, 511—566, 1904; *Andrade*, Proc. R. Soc. Lond., *85*, 448—469, 1911, а также **1, 2, 17, 36, 44** и **46**.

т. е. движение друг к другу или друг от друга двух кругов или колец. Задача таким образом сводится к нахождению распределения скоростей, вращений и напряжений (тангенциальных и нормальных), форм линий тока и количества жидкости, вытекающей из укорачивающегося (или входящей в удлиняющийся) вязкого цилиндра, усеченного конуса или тора с прямоугольным или трапецевидным сечением.

Случай сдавливаемого диска может иметь значение для определения коэффициента внутреннего трения его матерьяла [1]), хотя явление и осложняется наличностью всесторонних сжатий. Рассмотрение этого случая может дать подход к явлениям под плоскою пятою при ее покое относительно подпятника, к выжиманию жидкости при прессовании более или менее плоских листов, смоченных или пропитанных жидкостью, к естественному спрессовыванию стопок пластов или плоских листов, разделенных слоями жидкости или даже просто воздуха, к уменьшению прослойки воздуха между всякою плоскою горизонтальною подставкою и стоящим на ней предметом с плоским основанием. Видоизменение теории сдавливания диска путем замены внешнего давления объемными силами может дать теорию растекания тяжелого вязкого диска—в частности, теорию движения льда во многих полярных ледниках, представляющих собою боковые ответвления растекающегося щитообразного сплошного ледяного покрова (напр. в Гренландии).

Вращательное движение одной плоскости относительно другой может быть рассматриваемо точно также только при конечных их размерах, причем для стационарности процесса плоскости вращения должны быть ограничены окружностями, а ось вращения—ввиду того, что плоскости должны оставаться параллельными,—должна быть перпендикулярною к ним и проходить через центры этих окружностей. Таким образом задача сводится к определению распределения скоростей, напряжений и т. д. при закручивании цилиндра, усеченного конуса или тора с прямоугольным или трапецевидным сечением.

Такое «винтообразное» кручение применялось многими авторами для определения коэффициента внутреннего трения из кручения цилиндров [2]), цилиндрических трубок (**1**, **2**, **15**, **46**) и тора [3]), было предложено и испробовано для изучения явлений в жидкостях при почти однородном сдвиге (**25**) и может быть полезным для подхода к явлениям под плоскою пятою и для теории дисковых тормозов. Но, с другой стороны, самый факт различия угловых скоростей сдвигания у различных коаксиальных слоев закручиваемого диска вязкой жидкости можно использовать для выяснения условий перехода от спокойного движения к неспокойному, изученному подробно пока лишь для «спиралеобразного кручения»—см. § 11 (работы Куэтта)—и для протекания через капилляры («критическая скорость» Рейнольдса).

Замечу, что, если ограничиваться при изучении стационарного движения между двумя вращающимися друг относительно друга параллельными плоскостями весьма малыми углами поворота, то призмы и кольца можно ограничивать любыми контурами, для которых решена соответствующая задача теории упругости—задача Сен-Венана о кручении призмы. В частности, кручение призм использовано было мною и В. Д. Кузнецовым для определения коэффициента внутреннего трения каменной соли и парафина (**44**, **48** и **49**).

---

[1]) Случай этот разобран теоретически Обермайером (l. c.) и *Natanson*'ом (Bull. Acad. Crac., 1902, 494—512); применен на опыте для изучения внутреннего трения льда *Koch*'ом (Wied. Ann., *25*, 438—480, 1865) и *Mc Cnnell*'ем и *Kidd*'ом (Proc.R. Soc. Lond., *44*, 331—367, 1888). Сюда же можно отнести рассмотрение поступательного движения безграничной жидкости, встречающей препятствие в форме диска или в форме безграничной плоскости с круглым отверстием; см., напр., *Sampson*, Phil. Trans, *181 A*, 449—518, 1891.

[2]) Список работ в этом направлении—до 1906—см. **5**, 204—205, и **28**, 114; применение этого метода в работах моих и моих соработников—см. **1**, **2**, **3**, **5**, **8**, **17**, **22**, **23**, **24**, **34** и **45**.

[3]) **27** и *Grübler*, Zeits. Ver. deuts. Ing., *53*, 449—455, 1908.

### 7. Две неподвижных пересекающихся плоскости.

Стационарное движение жидкости между такими плоскостями возможно лишь, если линии тока:

а) параллельны линии пересечения этих плоскостей или, иначе, *ребру клина*;

б) перпендикулярны к этому ребру.

Для случая угла клина, равного $\frac{\pi}{2}$, точное решение первой задачи может быть получено из данного Гретцем[1]) решения задачи о течении вязной жидкости в трубе квадратного сечения при помощи связи[2]) между решением задачи о течении вязкой жидкости в трубе и решением задачи о течении вязкой жидкости в канале, получающемся путем рассечения трубы на две одинаковых части любою плоскостью симметрии, параллельною образующим поверхности трубы.

Для случая малого угла клина приближенное решение, полученное мною (**41**), может быть полезным для экспериментального изучения условий перехода спокойного движения в неспокойное. Изложенное там же приближенное решение (тоже для малых углов клина) второй задачи—движение жидкости по направлениям, перпендикулярным к ребру клина,—может дать величину сопротивления, испытываемого клином в потоке вязкой жидкости, а также может быть использовано для экспериментального освещения уже не раз указанного вопроса о критических условиях движения жидкости.

### 8. Две пересекающихся плоскости, находящихся в относительном движении.

Поступательное движение стенок друг относительно друга может происходить:

а) параллельно ребру клина,

б) перпендикулярно к биссекториальной плоскости клина,

в) перпендикулярно к ребру клина и параллельно плоскости одной из стенок.

Если первый случай имеет, повидимому, лишь теоретический интерес, то второй может иметь некоторое отношение к прессованию и к процессу накладывания листов друг на друга в вязкой жидкости и даже в воздухе. Третий же случай может найти приложение к явлениям при счистке жидких слоев с плоских поверхностей и при движении, как нижних, так особенно передних частей полозьев саней или коньков по поверхности льда, когда между полозьями и льдом благодаря отчасти понижению температуры плавления льда при повышении давления (**9**) и еще более, повидимому, за счет работы на преодоление сил трения (**50**) получается «естественная» жидкая смазка из слоя воды, замерзающей снова по проходе полозьев, а также при движении полозьев при неполной—вызываемой самою наличностью смазки—параллельности их направляющим плоскостям[3]).

Вращательное движение может быть рассматриваемо опять таки лишь для стенок, имеющих контурами окружности, т. е. формы круга или кольца, и для случая вращения вокруг оси, перпендикулярной к биссекториальной плоскости клина и проходящей чрез центры этих окружностей,—случая, который при очень малых углах клина может иметь значение для теории плос-

---

[1]) *Graetz*, Zeits. f. Math. u. Phys., *25*, 316—336, 375—404, 1880.

[2]) Связь эту я нашел в 1906 (**5**, 338 и **6**, 333), но недавно обнаружил, что она была указана еще в 1845 *Stokes*'ом. Trans. Cambr. Phil. Soc., *8*, 286—319, 409—414, 1848; Math. & Phys. Pap., *1*, 105, 1880.

[3]) *Reynolds*, Phil. Trans., *177*, 157—234, 1886; *Sommerfeld*, Zeits. f. Math. u. Phys, *50*, 97—155, 1903; *Michell*, ibid. *52*, 123—137, 1905.

кой пяты при отклонении оси вращения от перпендикулярности плоскости подпятника. Такое ограничение излишне при рассмотрении вращения вокруг ребра клина—явление, которое может также иметь значение для теории прессования, но которое может дать лишь приблизительно стационарное движение жидкости.

Что касается третьего случая вращения—вокруг оси, перпендикулярной к осям вращения в двух предыдущих случаях,—т. е. вокруг оси, лежащей в биссекториальной плоскости и перпендикулярной к оси клина, то, как бы мы ни ограничивали поверхность стенок, они при этом вращении, ось которых вращалась бы также в биссекториальной плоскости, непременно должны дойти до соприкосновения друг с другом, а затем и до внедрения друг в друга своими частями. Поэтому этот третий случай, поскольку речь идет об установившемся движении, рассмотрению не подлежит.

### 9. Цилиндрическая неподвижная поверхность.

Переходя к цилиндрическим поверхностям, начнем с простейшаго случая *одной* цилиндрической поверхности, заключающей жидкость внутри себя. Случай твердого цилиндрического тела, находящегося *внутри* безграничной жидкости, есть, в сущности, случай *двух* поверхностей, из которых вторую нужно считать лежащею на бесконечности и представлять себе, смотря по надобности, или в виде прямого кругового цилиндра с осью, параллельною образующим данного цилиндра, и с бесконечно большим радиусом, или в виде бесконечно удаленной плоскости, параллельной этим образующим. Поэтому этот случай относится либо к § 10, либо к § 13.

При наличности одной цилиндрической—, в частном случае, призматической—стенки возможно лишь одно стационарное движение—по направлению, параллельному ее образующим.

Задача эта разрешима для всех форм сечения цилиндрической поверхности, уравнение которых будет вида [1])

$$\varphi\,(x,\ y) - a\,(x^2 + y^2) = C \qquad (1),$$

где функция $\varphi\,(x\,,\,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0 \qquad (2);$$

в частности, для всех алгебраических кривых, уравнения которых получаются из общего вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x y + a_4 (y^2 - x^2) + a_5 (y^3 - 3 y x^2) + a_6 (3 y^2 x - x^3) + \\ + \ldots\ldots\ldots - a\,(x^2 + y^2) = 0 \qquad (3),$$

или может быть выражено одной из формул

$$\Sigma\, e^{mx} (A_m \cos my + A'_m \sin my) - a\,(x^2 + y^2) = C \qquad (4),$$

$$\Sigma\, e^{my} (B_m \cos mx + B'_m \sin mx) - a\,(x^2 + y^2) = C \qquad (5),$$

а также (5.340) для всех сечений, имеющих форму сечения плоскостью, перпендикулярною направлению движения жидкости, любой из поверхностей одинаковой скорости при движении жидкости в трубе любого из сечений (1), (3), (4) или (5). То же относится к задаче Сен-Венана.

Чтобы сделать ясным практическое значение разбираемого случая движение жидкости, достаточно напомнить классическую формулу Пуазейля и ее разнообразные приложения [2]).

---

[1]) *Graetz*, l. c. (§ 7).

[2]) Из ее применений к весьма вязким жидкостей отметим работы *Reiger'a* (Ann. d. Phys. **19**, 985—1006, 1906), а также **20**, **34**, **37** и **45**.

### 10. Две цилиндрических неподвижных поверхности.

Одна поверхность должна обхватывать другую, образующие обоих поверхностей должны быть параллельны между собою и траектории частиц жидкости должны быть параллельны общему направлению образующих.

Так как мне не встречалось решение этой задачи [1]), то я счел полезным найти ее решение хотя бы для простейшаго случая—двух коаксиальных прямых круговых цилиндров (**43**). Случай этот может иметь значение для выяснения просачивания смазки между поршнем и цилиндром при их относительном покое или при весьма медленном движении (как, напр., в гидравлическом прессе), некоторых подробностей выдавливания вязких и твердых тел в просвет между поршнем и цилиндром (напр., приготовление макарон, тюбочек для масляных красок), а также при движении жидкостей или газов между коаксиальными трубками, как, напр., в машине Линде для получения жидкого воздуха. Найденное мною решение применено Ю. В. Грдиной — на основании данных о внутреннем трении асфальта и влиянии на него температуры (**19**, **22**, **23**, **24** и **27**)—к выяснению вопроса о применимости асфальта в стыках водопроводных труб.

Ввиду возможности неполной коаксиальности во многих из указанных случаев представляло бы интерес рассмотрение движения жидкостей между двумя прямыми круговыми цилиндрами с параллельными, но не совпадающими осями.

Можно думать, что окажется возможным решение общей задачи о движении вязкой жидкости между двумя цилиндрическими поверхностями, если это будут две «*эквивелоцитные*» поверхности для течения жидкости внутри такой цилиндрической поверхности, для которой задача имеет решение.

### 11. Две цилиндрических поверхности, находящиеся в относительном движении.

Одна поверхность должна, как и в предыдущем случае, обхватывать другую и образующие их должны быть параллельны.

Ограничимся для простоты прямыми круговыми цилиндрами.

Случай *коаксиальных* цилиндров (**43**) допускает лишь две возможности их относительного движения для стационарности движения жидкости:

*а*) поступательное движение вдоль общей оси,

*б*) вращательное движение вокруг общей оси.

Первый случай распадается в свою очередь на два:

*α*) движущаяся цилиндрическая поверхность представляет собой *свободную стенку* (напр., стекание вязкой жидкости по внутренней стенке цилиндрической трубы или по наружной поверхности цилиндрического стержня: простейшие водосточные «трубы» в деревнях, наливание жидкостей в сосуды с узким горлышком по стеклянной палочке или металлической проволоке);

*β*) движущаяся стенка оказывает тангенциальное напряжение на жидкость (метод Сегеля [2]) для определения коэффициента внутреннего трения твердых тел; боковое сопротивление, испытываемое цилиндром при движении внутри цилиндрической трубки—**20** и **39**—, в частности, испытываемое поршнем при движении внутри цилиндра; сюда же можно отнести явление при покрывании кабелей слоем изоляции путем вытягивания или продавливания.

---

[1]) За недостатком в Томске литературы за прежние годы и почти полным отсутствием, за 1916—21 приводимые мною литературные справки, весьма возможно, не исчерпывающе полны.

[2]) *Segel*, Phys. Zeits., *4*, 493—494, 1903; см. также **17**.

Если радиус внешнего цилиндра безконечно или достаточно велик, то случай $\beta$ сводится к движению цилиндра вдоль его оси внутри практически безграничной жидкости (метод Тамманна [1]) для определения относительной вязкости переохлажденных жидкостей; поправка—**20** и **38**—на сопротивление проволоки при протаскивании цилиндров сквозь вязкую жидкость).

Вращение одного цилиндра относительно другого, с ним коаксиального, вызывает „спиралеобразное закручивание" жидкости между ними и изучение его может служить для определения коэффициента внутреннего трения жидкостей [2]) и твердых тел (**17** и **19**) и для выяснения сил трения между осью и втулкою в случае отсутствия сил, действующих на ось перпендикулярно ее геометрической оси.

Если прямые круговые цилиндры, ограничивающие жидкость, имеют параллельные оси, то возможны все три взаимноперпендикулярных поступательных движения одного из них относительно другого, а именно:

$\alpha$) вдоль оси;

$\beta$) в плоскости, проходящей чрез обе оси, перпендикулярно к оси;

$\gamma$) перпендикулярно к оси и к плоскости, проходящей чрез обе оси.

Рассмотрение первого вопроса может выяснить явления (строго стационарные) трения между поршнем и цилиндром при наличности силы, перпендикулярной к оси поршня; рассмотрение второго вопроса—явления (приблизительно стационарные) выдавливания слоя смазки между цилиндром и неподвижным—в направлении оси—поршнем в том же случае или между валом и неподвижною втулкою в аналогичном случае (этим движением может быть объяснено увеличение силы трения при пуске в ход после долговременного стояния); наконец, рассмотрение третьего вопроса—явления (квазистационарные) в слое жидкой смазки у передней части полозьев при движении по плоской ледяной поверхности (в этом случае радиус внешнего цилиндра надо принять безконечно большим). Второй случай—при начальной коаксиальности цилиндров—затронут Стоксом [3]).

В случае некоаксиальности цилиндров стационарное (и то—квазистационарное) движение при вращении одного из них возможно лишь при вращении вокруг одной из осей, параллельных оси цилиндра,—в частности, вокруг самой этой оси. Рассмотрение последнего случая [4]) дает решение весьма важного для теории машин вопроса—о трении между втулкою и вращающимся внутри нее валом при наличности силы, действующей на вал перпендикулярно его оси.

Комбинация такого вращения с поступательным движением, перпендикулярным к оси и к плоскости, содержащей обе оси, дает катание одного цилиндра по слою смазки на поверхности другого—катание со скольжением или без скольжения в зависимости от соотношения между скоростью поступательного и угловою скоростью вращательных движений. Из практических применений, относящихся к случаю бесконечнобольшого радиуса одного из цилиндров, укажу раскатывание краски вальком по литографскому камню, теста—скалкою, катки для уплотнения и трамбования мостовых, крановые тележки и т. п.

Замечу, что решение задачи о распределении скоростей и напряжений в случае катания одной цилиндрической поверхности по слою смазки на другой имеет тесную связь с задачей о движении вязкой жидкости между такими же неподвижными поверхностями под влиянием внешнего давления (**42**).

---

1) *Tammann*, Zeits. phys. Chem., *28*, 17—32, 1899.

2) *Couette*, Ann. chim. phys., *21*, 433—551, 1890; *Шведов*, Journ. de phys., *8*, 341—359, 1889, *9*, 34—46, 1890 и другие; теория дана еще *Stokes*'ом (Trans. Cambr. Phil. Soc., *8*, l. c. Math. Phys Pap., *1*, 102—103).

3) *Stokes*, Trans. Cambr. Phil. Soc., *8*, 105—154, 1843; Math. Phys. Pap., *1*, 35.

4) *Reynolds*, l. c.; *Sommerfeld*, l. c.

## 12. Три цилиндрических поверхности.

Случай двух цилиндрических поверхностей, находящихся одна вне другой внутри безграничной жидкости, надо рассматривать, в сущности, как случай трех цилиндрических поверхностей, радиус одной из которых равен бесконечности. Из разнообразных вопросов, сюда относящихся, заслуживает изучения случай поступательного движения цилиндров по направлению общего перпендикуляра к их осям и случай вращательных движений вокруг их осей и притом с скоростями, обратно пропорциональными их радиусам. Последний случай может разъяснить многие подробности явлений прокатки и вальцовки (выжимание белья, приготовление листового стекла, листовых металлов и т.п.).

Более сложные случаи могут привести к теории смазки в цилиндрических зубчатых колесах, ротативных колесах, роликовых цилиндрических подшипниках и т. д..

## 13. Цилиндрическая поверхность и плоскость.

Так как плоскость можно рассматривать, как частный случай цилиндрической поверхности, то на первый взгляд может показаться, что вопрос о движении жидкости, ограниченной цилиндрической поверхностью и плоскостью, уже решен выше в § 10 и 11. Но там была речь о двух *замкнутых* цилиндрических поверхностях; поэтому, если жидкость ограничена одной цилиндрической поверхностью и плоскостью, находящейся на конечном расстоянии от нее [1]), то необходимо представить себе в качестве замыкающей жидкость поверхности еще одну плоскость, параллельную первой и находящуюся на бесконечно большом расстоянии и от нее, и от цилиндрической поверхности, т. е. прийти к случаю, рассмотренному в предыдущем §.

Между тем возможен случай движения жидкости между *одной* цилиндрической поверхностью, но *незамкнутою*, и замыкающей ее плоскостью, а именно случай движения жидкости по каналу, дно которого представляет собою эту незамкнутую цилиндрическую поверхность, а замыкающая ее плоскость будет *свободная* поверхность движущейся по этому каналу жидкости.

Задачу эту, как уже указано в § 7, надо считать решенною для всех профилей каналов, какие получаются путем рассечения осью симметрии профилей трубки, для которой решена задача о течении по ней вязкой жидкости.

Применение этой связи дало теорию движения льда в ледниках (**5**, **6**, **14**), а также может служить для определения коэффициента внутреннего трения твердых тел (**12**, **13** и **21**).

Возможен и обратный случай, когда неподвижною стенкою будет отрезок плоскости, ограниченной двумя параллельными прямыми, а свободная поверхность будет иметь форму примыкающей к нему незамкнутой цилиндрической поверхности, а именно случай стекающей по наклонной плоскости струйки жидкости. Точно так же можно рассматривать и стекание струйки жидкости по отрезку незамкнутой цилиндрической поверхности.

## 14. Одна коническая поверхность.

Установившимся может быть только такое движение вязкой жидкости, при котором траектории отдельных частиц — прямые, проходящие при своем про-

---

[1]) Случай цилиндра в безграничной жидкости разобран *Stokes*'ом (Trans. Cambr. Phil. Soc., *9*, 8—184, 1850, Math. Phys. Pap., *2*, 62—67; см. также *Edwardes*, Quart. Journ. of Math., *26*, 70—78, 1893. Случай цилиндра между двумя параллельными плоскостями рассмотрен *Lamb*'ом—см. *Hele Shaw*, Trans. Inst. Nav. Archit., *40*, 21—38, 1898.

должении чрез вершину данной конической поверхности, а самая поверхность представляет собой боковую поверхность *усеченного* конуса.

Решение задачи даже для случая прямого кругового конуса [1]) могло бы иметь значение для внесения поправки на коничность капилляра при определении коэффициента внутреннего трения по способу Пуазейля, для рассмотрения движения крови в суживающихся кровеносных сосудах, для изучения процесса поднятия жидкостей в конических капиллярах и движения капли жидкости — смачивающей или несмачивающей — в конической трубке, для теории вытекания вязкой жидкости чрез воронку и т. д. Из значений напряжения на стенках сужающегося конуса при протекании по нему вязкой жидкости можно сделать некоторые выводы относительно скорости стекания вязкой жидкости внутри конуса, образованного из нее самое, процесса образования капель очень вязких жидкостей и процесса вытягивания стеклянных, кварцевых и т. п. нитей.

### 15. Две конических неподвижных поверхности.

Ограничимся двумя прямыми круговыми конусами, один из которых находится внутри другого.

Если оси их совпадают, то при установившемся движении траектории всех частиц должны пересекать окружность, по которой пересекаются эти конусы; если же оси не параллельны, то—эллипс, по которому пересекаются эти поверхности. Задача эта может иметь некоторое отношение к вопросу о конических регуляторах.

### 16. Две конических поверхности, находящиеся в относительном движении.

Поступательное относительное движение при коаксиальности конусов (если, по прежнему, ограничиться двумя прямыми круговыми конусами) может быть стационарным — и то не строго стационарным, а приблизительно, — лишь, если оно будет направлено вдоль их общей оси, как это будет, напр., при регулировке конических вентилей. При отсутствии коаксиальности конусов возможны также поступательные движения и по другим направлениям — в частности, по двум взаимно перпендикулярным направлениям, перпендикулярным к оси одного из конусов. Так, напр., если оси конусов параллельны, то возможны приблизительно стационарные движения $\alpha$) вдоль оси одного из конусов, $\beta$) перпендикулярно к плоскости, заключающей обе оси, и $\gamma$) в плоскости, заключающей обе оси, и перпендикулярно к оси данного конуса.

Что касается вращательного движения, то при коаксиальности конусов оно возможно лишь вокруг их общей оси (применения: коническая пята и подпятник), а при отсутствии коаксиальности возможны и более разнообразные случаи. Наибольший практический интерес представляло бы рассмотрение случая катания — без скольжения или со скольжением — одной конической поверхности по слою смазки между нею и другою коническою поверхностью, как для двух прямых круговых конусов (подшипники с коническими роликами), так и для других конических поверхностей, применяемых, напр., при зубчатых конических зацеплениях.

### 17. Коническая поверхность и плоскость.

Этот случай может быть рассматриваем, как частный случай двух конических поверхностей, одна из которых—прямой круговой конус с углом раструба, равным $\pi$.

---

[1]) *Gibson*, Phil. Mag., *18*, 35 — 38, 1909.

Рассмотрение поступательного движения конуса к безконечно удаленной плоскости дало бы решение вопроса о сопротивлении конуса при движении его в безграничной жидкости.

### 18. Коническая и цилиндрическая поверхности.

Этот случай может быть рассматриваем, как частный случай двух конических поверхностей, у одной из которых вершина лежит на бесконечности

Рассмотрение поступательного движения прямого кругового конуса внутри прямого кругового цилиндра, с ним коаксиального, может дать значение сопротивления, встречаемого носовой частью тела с коническим концом внутри цилиндра, наполненного вязкой жидкостью (как, напр., в опытах работ 20 и 39).

### 19. Три конических поверхности.

Этот случай выяснил бы движение жидкости, окружающей две конических поверхности, лежащие вне друг друга, так как здесь надо представить себе третью коническую поверхность (в частности, плоскую или цилиндрическую), которая была бы бесконечно удалена от первых двух и играла бы роль неподвижной стенки.

### 20. Две сферических поверхности, находящихся в относительном движении.

Переходя теперь к вполне замкнутым поверхностям, заметим прежде всего, что, если вязкая жидкость ограничена *одною* замкнутою поверхностью, то никакое стационарное движение ее не возможно (сравн. § 3). Точно также в случае *двух* замкнутых поверхностей, которые ограничивают вязкую жидкость и одна из которых заключает, конечно, другую внутри себя, установившееся—строго или приблизительно—движение этой жидкости возможно только при относительном движении этих поверхностей.

Ограничиваясь в настоящей статье *сферическими* поверхностями, начну с простейшего случая двух сферических поверхностей, находящихся в относительном движении.

Если эти поверхности концентричны (пример: шарниры Кардановского сочленения), то единственное возможное движение—вращение одной из сферических поверхностей вокруг оси, проходящей через общий их центр[1]). Если радиус внешней сферы бесконечно велик, это будет случай вращения шара внутри безграничной жидкости[2]).

Если сферические поверхности не концентричны, то возможно два поступательных движения:

a) вдоль линии, соединяющей центры сфер,—приблизительно стационарное,

b) перпендикулярно к этой линии—квазистационарное.

Первый случай—при начальной концентричности сфер—разобран Стоксом[3]), как для конечного, так и для бесконечного радиуса внешней сферы и во втором варианте имеет массу разнообразных приложений. Если радиус внешней сферы достаточно велик по сравнению с радиусом внутренней сферы и вместе с тем по сравнению с ее удалением от поверхности этой внешней сферы, то первый случай дает нам движение сферы к плоскости, тоже разобранное уже Стоксом и позволяющее, напр., вводить поправку на влияние дна

[1]) См. *Edwardes*, Quart. Journ. of Math., *26*, 157—168, 1898

[2]) См *Whitehead.*, Quart. Journ. of Math., *23*, 78—91, 1888.

[3]) *Stokes*, 1843, l. c.—Math. &. Phys. Pap., *1*, 41; 1850, l. c.—Math. & Phys. Pap., *2*, 55—60.

при падении шара в вязкой жидкости внутри достаточной широкой трубки [1]), а второй—движение шара по слою смазки на плоскости, которое разобрано Лорентцем [2]), и может иметь отношение, напр., к вопросу о растирании красок пестиком с полусферическою головкою.

Что касается вращательных движений, то рассмотрению при неконцентричности сферических поверхностей подлежат два случая стационарного движения жидкости, вызываемого вращением внутреннего шара:

$\alpha$) вокруг линии, проходящей чрез центры обоих шаров,

$\beta$) вокруг линии, перпендикулярной к линии, соединяющей центры.

Квазистационарным будет движение, вызываемое вращением внутреннего шара,

$\gamma$) вокруг какой либо линии, соединяющей центр внешней сферы с какою нибудь точкою внутренней сферы или с точкою, скрепленною с этой сферой, но не совпадающей с ее центром,

$\delta$) вокруг какой либо линии, перпендикулярной к линии соединения центров обоих сфер, но не проходящей чрез центр внутренней сферы.

Укажу еще на комбинацию поступаний и вращений, которая давала бы катание одной сферы внутри другой,—случай, могущий иметь связь с теорией шариковых подшипников.

## 21. Три сферических поверхности.

Если две сферических поверхности лежат одна вне другой, то для рассмотрения движения окружающей их жидкости при их относительном движении надо принимать, что эта жидкость заключена в сферу бесконечно большого радиуса, так что на лицо будет, в сущности, случай *трех* сфер.

Относительные поступательные движения, подлежащие рассмотрению,—следующие:

а) по линии, проходящей чрез центры обоих сфер [3]),

б) по линии, перпендикулярной к линии, проходящей чрез центры.

Вращательные движения одной из сфер относительно другой, подлежащие рассмотрению,—следующие:

а) вокруг линии, проходящей чрез центры,

б) вокруг линии, проходящей чрез центр данной сферы и перпендикулярной к линии, проходящей чрез центры,

в) вокруг линии, проходящей чрез центр второй сферы, но минующей центр данной сферы,

г) вокруг линии, не проходящей ни чрез центр данной сферы, ни чрез центр второй сферы.

## 22. Сферическая и цилиндрическая неподвижные поверхности.

Ограничимся прямым круговым цилиндром и будем считать, что его радиус больше радиуса сферы, центр которой может лежать:

а) на оси цилиндра,

б) вне оси цилиндра.

---

[1]) *Stokes*, 1849, l. c., Math. & Phys. Pap., *1*, 43; подробнее *Lorentz*, Abhand. üb. theor. Phys., *1*, 27—42, 1906; *Ladenburg*, Ann. d. Phys., *23*, 447 458, 1907 (у последнего есть и опытные данные); *Stock*, Bull. Acad. Crac. 1911, 18—27.

[2]) *Lorentz*, l. c.

[3]) *Cunningham*, Proc. R. Soc. Lond., *83A*, 357—365, 1910; *Smoluchowski*, Bull. Acad. Crac. 1911, 28—39; Intern. Congr. Math. 1912, pp. 10.

Движение в обоих случаях будет стационарным—и притом квазистационарным—, если градиент давления и объемная сила будут направлены параллельно оси цилиндра.

### 23. Сферическая и цилиндрическая поверхности, находящиеся в относительном движении.

Если центр сферы находится на оси цилиндра, то возможны следующие три случая стационарного движения:

а) сфера движется поступательно вдоль оси цилиндра—квазистационарное движение, исследованное на опыте и теоретически Ладенбургом для малых значений отношения радиуса сферы к радиусу цилиндра [1]) и на опыте при весьма разнообразных значениях этого отношения в физической лаборатории Томского Технологического Института (33 и 38); случай этот может иметь значение для рассмотрения явлений в Кардановских муфтах,

б) сфера вращается вокруг оси цилиндра,

в) сфера вращается вокруг оси, проходящей чрез ее центр и перпендикулярной к оси цилиндра.

Последние два случая дают строго стационарное движение жидкости.

Точно также можно указать степень стационарности трех взаимно перпендикулярных (по линии, параллельной оси цилиндра, по линии, проходящей чрез центр сферы и перпендикулярной к оси цилиндра, и по линии, проходящей чрез центр сферы и перпендикулярной к двум предыдущим) поступательных движений и трех вращательных движений вокруг тех же трех осей или вокруг осей, им параллельных.

Рассмотрение этих девяти случаев представило бы особый интерес при условии, что силы, вызывающие движение шара, будут такими же, какие действуют и на всю остальную жидкость, т. е. что кроме давления на свободную поверхность последней действуют лишь объемные силы, величина которых на единицу объема движущейся сферы—та же, что и на единицу объема жидкости. В случае, если объемные силы будут силы тяготения, такое ограничение сводится к рассмотрению движения сферы, которая имеет тот же удельный вес, что и жидкость, и движется лишь под влиянием сил внутреннего трения в слоях, прилегающих к ее поверхности.

При действии таких сил возможны лишь поступательные движения такого „свободно увлекаемого" шара и при том—только по направлению, параллельному оси цилиндра. Если при этом центр шара будет находиться на оси цилиндра, то такое поступание не будет сопровождаться никаким вращением; если же шар будет своим центром эксаксиален, то поступание шара будет сопровождаться его вращением вокруг мгновенной оси, перпендикулярной к оси цилиндра и к перпендикуляру из центра сферы на эту ось—подобно тому, как река катит камушки близ дна.

### 24. Сферическая и коническая неподвижные поверхности.

Ограничимся прямым круговым (конечно, усеченным) конусом и случаем, когда поверхность сферы лежит внутри конуса.

Вдали от сферы траектории частиц жидкости должны представлять собой прямые, проходящие чрез вершину конуса. Рассмотрению подлежат два случая (оба—квазистационарного движения):

а) центр сферы лежит на оси конуса (возможное применение—некоторые типы клапанов),

б) центр сферы лежит вне оси конуса.

---

[1]) *Ladenburg*, l. c. (стр. 15, прим. 1).

### 25. Сферическая и коническая поверхности, находящиеся в относительном движении.

Здесь возможны те же случаи, что при относительном движении сферы и цилиндра (§ 23) с тем различием, что вместо поступания по линии, параллельной оси, или вращения вокруг такой же линии надо рассматривать поступание по линии или вращения вокруг линии, проходящей чрез вершину конуса. Типы движения в девяти случаях, аналогичных указанным в § 23, будут те же—за исключением поступания вдоль оси конуса или по линии, проходящей чрез его вершину, которое будет не квази, а приблизительно стационарным.

### 26. Одна или несколько сфер и две плоскости.

Переходя к превышающему два числу поверхностей, ограничивающих жидкость и не находящихся на бесконечности, мы не будем рассматривать отдельно все возможные виды относительного движения этих поверхностей, а по преимуществу противопоставим случаи относительного покоя и относительного движения.

Если даны сфера и две пересекающихся (в частном случае—параллельных) плоскости, то возможны следующие категории случаев:

а) сфера и плоскости неподвижны — движение жидкости в клине (в частном случае между параллельными плоскостями), в котором находится неподвижная сфера,

б) одна плоскость и сфера неподвижна, другая плоскость находится в движении,

в) неподвижны плоскости, движется сфера,

г) одна плоскость неподвижна, сфера и другая плоскость находятся в движении.

В двух последних категориях особое внимание должно быть обращено на случай, когда на сферу действуют такие же силы, как на остальную жидкость,—на свободное увлечение шара жидкостью, текущею между двумя пересекающимися или параллельными плоскостями, и на движение жидкости со свободно подвешенным в ней шаром, вызываемое движением одной плоскости относительно другой.

Особую важность представляло бы решение таких же вопросов о свободном увлечении жидкостью—в тех же двух категориях случаев—ряда одинаковых шаров, центры которых расположены на одной прямой на равных расстояниях друг от друга; пласта равноотстоящих и одинаковых шаров; объема, заполненного одинаковыми и первоначально равноотстоящими шарами, и объема, заполненного весьма большим количеством одинаковых шаров, хаотически распределенных по нему, а также решение задачи о движении жидкости сквозь такой ряд, пласт или слой шаров, находящийся между двумя пересекающимися или параллельными плоскостями.

Если бы такие вопросы получили хотя приближенное решение, это помогло бы выяснить теоретическую сторону влияния примеси нейтральных твердых телец на коэффициент внутреннего трения вязких жидкостей (37) и зависимости этого коэффициента от отношения компонентов растворов друг в друге двух вязких тел весьма различной вязкости (22, 24, 26, 34, 45). Исследование таких вопросов на опыте и особенно в теории могло бы, в свою очеред, явиться подходом к теории действия сил, превышающих предел упругости, на твердые тела, у которых кристаллиты обладают более высоким пределом упругости, чем промежуточная между ними спайка (35, 44).

Если ограничивающие плоскости бесконечно удалены, то получится теория [1]) движения в безграничной вязкой жидкости пласта равноотстоящих и одинаковых шаров и объема, равномерно или хаотически заполненного одинаковыми шарами под действием равных и одинаково направленных (перпендикулярно к ограничивающим бесконечно удаленным плоскостям) сил. Теория эта может быть весьма полезною для выяснения явления при опускании густого тумана, при отмучивании и т. д. Изучение же движения жидкости сквозь безграничный пласт или объем, равномерно или хаотически заполненный одинаковыми шарами, дало бы подход к теории фильтров—формы пластинок или объемных—,к теории движения грунтовых вод чрез песчаную почву и т. п.

## 27. Несколько сфер и коническая (в частном случае—цилиндрическая) поверхность.

Из различных возможностей здесь наиболее важны те же, какие были указаны в предыдущем §, а именно ряд равноотстоящих расположенных по одной линии и равных шаров, пласт равноотстоящих и равных шаров и объем, равномерно или хаотически заполненный равными шарами.

Возможны следующие основные категории случаев:

а) коническая (цилиндрическая) поверхность и сферы неподвижны,

б) коническая, цилиндрическая поверхность и сферы находятся в относительном движении.

Наибольшее теоретическое и практическое значение имело бы рассмотрение случая течения по цилиндрической трубе жидкости, свободно увлекающей ряд расположенных по оси трубы, равноотстоящих и одинаковых шаров или же совокупность равномерно или хаотически распределенных по жидкости весьма малых по сравнению с радиусом трубы одинаковых шаров. Из такого рассмотрения можно было бы получить существенные данные для выяснения явлений при течении по трубам пульп, эмульсий, суспенсий, жидких глин, незастывшего цемента и т. п.

## 28. Заключение.

Из того, какая ничтожная доля указанных выше случаев, относящихся к простейшим геометрическим формам ограничивающих жидкость поверхностей и потому далеко не безнадежных при современном развитии математики [2]), решена, видно, как много остается еще сделать в гидродинамике спокойного движения вязкой жидкости. Вместе с тем изучение этих вопросов может, как указывалось во многих местах выше, иметь и большое практическое значение помимо того, что путь к рациональной постановке теории неспокойного движения лежит чрез изучение соответствующих случаев спокойного движения [3]). Подчеркну еще раз важность выяснения условий перехода от спокойного движения к неспокойному, так как только тогда можно будет безошибочно прилагать выводы гидродинамики спокойного движения к действительным случаям или же знать, насколько неточно такое применение. Характерным примером в этом отношении можно считать приложение теории спокойного движения вязкой жидкости к сопротивлению среды движению тела *маятника*, тогда как при действительном движении маятников (то же относится и к колебанию весов) имеет, весьма вероятно, место неспокойное движение воздуха вокруг тела маятника.

Февр. 1922./Окт. 1923.

---

[1]) *Cunningham* и *Smoluchowski*, l. c. (§ 21).

[2]) Довольно много случаев разрешено для эллипсоидов, как вращения, так и трехосных, но я не привожу списка известной мне литературы по тем же соображениям, какие приведены в прим. 1 к § 10.

[3]) Сравн. **32** и **33** и Бюлл. Росс. Гидр. Инст., № 3, стр. 4, 1922, а также § 3 настоящей работы.

## II. Процесс подъема и опускания вязкой жидкости в капилляре.

### 1. Выбор темы.

После того, как проделанный мною [1]) опыт Плато с кусками вара, помещавшимися в раствор селитры одинаковой с ними плотности, дал через десяток лет положительный результат (продолговатые призмы приблизились к форме шара), ясно обнаружив наличность в «твердом» варе сил поверхностного натяжения, а † А. В. Игнатьев [2]) непосредственно измерил для него капиллярную постоянную по методу плоских капель, стало желательным проследить зависимость коэффициента поверхностного натяжения от состава растворов друг в друге двух тел, весьма сильно различающихся по величине коэффициента внутреннего трения (вар и керосин, даммарова смола или канифоль и скипидар и т. д.).

В качестве первых шагов по направлению к разработке методологии определения коэффициента поверхностного натяжения жидкостей самой различной вязкости я предложил осенью 1913 г. студ. С. М. Воинову и А. М. Мочалину в качестве дипломной работы разработать для жидкостей довольно значительной, но еще не слишком большой вязкости $\left(\eta \text{ порядка } 10^0—10^2 \frac{\text{гр.}}{\text{см. сек.}}\right)$ метод подъема в капиллярных трубках путем наблюдения самого *процесса* поднятия или опускания жидкости в них. Высота жидкости должна, очевидно, стремиться асимптотически к некоторой предельной величине, соответствующей равновесию сил поверхностного натяжения и гидростатического давления. Выведенная мною тогда же формула—см. § 3—для высоты подъема $h$ в момент $t$ после начала опыта показала возможность получить из серии отчетов $h$ не только величину коэффициента поверхностного натяжения $\alpha$, но и коэффициента внутреннего трения $\eta$, а весьма тщательные наблюдения Воинова и Мочалина показали применимость этой формулы. Недостаток времени не позволил мне тогда же разработать удобный способ находить из ряда значений $h$ окончательную высоту $H$—максимальную—в случае поднятия—и минимальную—в случае опускания—и я обратился к окончательной обработке этих наблюдений лишь в связи с возобновлением работ по гидродинамике спокойного движения.

Просматривая в бытность мою в Москве в марте 1923 литературу за 1916—1921—годы, когда Томск был совершенно оторван от остального научного мира,—я нашел работу *Lucas* («Ueber Zeitgesetz des kapillaren Aufstieges von Flüssigkeiten», Kolloid. Zeits. *23*, 15—22, 1918), пришедшего к формуле того же типа, как я, и проделавшего ряд наблюдений над жидкостями сравнительно малой вязкости. Так как метод обработки этого автора менее полон, чем тот, какой применяю я, то я изложу здесь, как наблюдения Воинова и Мочалина, так и примененный мною способ обработки их, и приведу получающиеся из них результаты.

### 2. Постановка опытов.

Изучаемая жидкость наливалась в небольшую фарфоровую чашечку почти до верху и в нее опускалась подвешенная вертикально капиллярная трубка. К поверхности жидкости подводилось нижнее острие штифта с микрометрическою нарезкою до соприкосновения с этой поверхностью, о чем судили по совпадению этого острия с его зеркальным изображением. В подвижной микроскоп с окулярным микрометром (1 деление барабана $= 7.84 \cdot 10^{-2}$ мм.) наблюдались положения мениска в различные моменты (по секундной стрелке

[1]) Б. П. Вейнберг. Общий курс физики. *1*. стр. 291. М, 1908.

[2]) Работа № 18 списка, который помещен в предыдущей статье и по которому будут делаться все дальнейшие ссылки.

карманных часов), причем, когда медленно двигавшийся мениск уходил из поля зрения, труба микроскопа быстро перемещалась вверх или вниз и для контроля записывалось показание нониуса на вертикальной колонке микроскопа. В конце опыта делались отчеты нониуса при наведении на мениск, на верхний конец (тоже заостренный) штифта и на черточку на капилляре. Расстояние от этой черточки до нижнего конца капилляра и длина штифта микрометренного винта были измерены тем же подвижным микроскопом.

Первоначально предполагалось вести наблюдения одновременно с двумя капиллярами, переводя микроскоп с одного на другой, но предварительные опыты показали меньшую точность отчетов при этом. Поэтому каждая серия наблюдений велась затем лишь с одним из двух капилляров ($r_1 = 0.297$ мм., $r_2 = 0.504$—по взвешиванию столбика ртути).

Исследованию были подвергнуты 50%, 60% и 65%-ные растворы даммаровой смолы в скипидаре, причем для предотвращения испарения их весь прибор помещался под колпак из плоскопараллельных стекол, под который ставилась также открытая чашечка со скипидаром. Эта предосторожность при длительных опытах оказалась недостаточной, так как на поверхности жидкости в чашечке и, повидимому, в капилляре образовывался с течением времени слой, менее подвижный, чем внутренние,—вероятно, вследствие различия упругости пара раствора смолы в скипидаре и *чистого* скипидара. Это обстоятельство, а также изменяемость температуры за большой промежуток времени опыта, еще более утвердили нас в необходимости для определения коэффициента поверхностного натяжения таких вязких жидкостей не выжидать втечение многих часов и даже нескольких суток установки жидкости на окончательной высоте, а находить эту высоту из наблюдений самого процесса подъема или опускания жидкости.

Приведу для примера протокол одной из серий со сравнительно небольшим (для сокращения места) числом отчетов—наблюдений над опусканием 60%-ного раствора 22.10.13. Температура в начале и в конце опыта—20°.5. Отчеты по нониусу до опыта: на штифт = 54.7, на черту = 48.5, на нижний край трубки = 9.2.

| t | h | h прив. | Примечания. | t | h | h прив. | Примечания. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 ч. 40 м. | 90.0 | 90.0 | Отчет по нониусу = 33.3 | 11 ч. 58 м. | 67.0 | — 85.0 | |
| 41 | 75.0 | 75.0 | | 12 ч. 00 м. | 58.0 | — 84.0 | |
| 42 | 59.5 | 59.0 | | 04 | 44.0 | — 108.0 | |
| 43 | 44.8 | 44.0 | | 08 | 34.0 | — 118.0 | |
| 44 | 32.5 | 32.0 | | 12 | 27.5 | — 124.5 | |
| 45 | 19.0 | 19.0 | | 20 | 19.2 | — 132.8 | |
| 46 | 8.0 | 8.0 | переставлено, | | 91.0 | — 132.8 | переставлено, отчет = 14.8 |
| | 90.0 | 8.0 | отчет = 25.8 | 28 | 87.0 | — 136.3 | |
| 47 | 80.0 | — 2.0 | | 36 | 85.0 | — 138.3 | |
| 48 | 70.0 | — 12.0 | | 44 | 84.0 | — 139.8 | |
| 49 | 60.0 | — 22.0 | | ч. 00 | 83.5 | — 140.3 | |
| 50 | 51.0 | — 31.0 | | 16 | 83.0 | — 140.8 | |
| 52 | 35.0 | — 47.0 | | 32 | 83.0 | — 140.8 | Отчеты: |
| 54 | 20.0 | — 62.0 | переставлено, | 23.10.3 | | | на мениск = |
| | 90.0 | — 62.0 | отчет = 20.3 | 10 ч. 00 м. | 83.0 | — 140.8 | 16.6, на черту |
| 56 | 78.0 | — 74.0 | | | | | = 22.7, на штифт = 28.6. |

С каждым из трех растворов было проделано по две серии наблюдений —над поднятием и над опусканием—в каждом из двух капилляров (кроме 50%-ного раствора в более широком капилляре), причем некоторые серии были повторены.

Большинство построенных график не оставляют желать ничего лучшего в смысле плавности хода—в особенности для серий наблюдений над опусканием.

### 3. Вывод формулы.

Если кроме введенных обозначений обозначим еще плотность жидкости через $\triangle$, ускорение силы тяжести чрез $g$ и длину погруженной части трубки чрез $l$, то для силы поверхностного натяжения $f_I$, тянущей жидкость в капилляре вверх, для силы тяжести $f_{II}$, тянущей ее вниз, и для количества жидкости $\frac{dq}{dt}$, протекающей (по формуле Пуазейля) *вверх*, получаем:

$$f_I = 2\pi r.\ \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$f_{II} = \pi r^2 h.\ \triangle g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

$$2\,\pi r\alpha = \pi r^2 H \triangle g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\ (\pi r^2 h)}{dt} = \frac{\pi r^4}{8\eta} \cdot \frac{f_I - f_{II}}{\pi r^2 (h + l)} \quad \ldots\ldots (4),$$

причем в случае опускания жидкости в формуле (4) $f_{II} > f_I$ и след. $\frac{dh}{dt} < 0$.

Из (1), (3) и (4) находим

$$v = \frac{dh}{dt} = \frac{r^2 . \pi r^2 \triangle g\ (H - h)}{8\eta .\ \pi r^2\ (h + l)} = \frac{r^2 \triangle g}{8\eta} \cdot \frac{H - h}{h + l} \quad \ldots (5).$$

Обозначая

$$\frac{r^2 \triangle g}{8\eta} = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

и отделяя переменные, получаем

$$C\,dt = \frac{h + l}{H - h}\,dh = -(H + l)\frac{d\,(H - h)}{H - h} - dh \quad \ldots\ldots (7),$$

откуда

$$C\,(t - t_0) = (H + l) \lg \frac{H - h_0}{H - h} - (h - h_0) \quad \ldots\ldots (8),$$

$$h = H - (H - h_0)\, e^{-\frac{C\,(t - t_0) + h - h_0}{H + l}} \quad \ldots\ldots (9).$$

Форма уравнения (9) лишает возможности найти из него $H$ по наблюденым $h$, а, след., нельзя найти и $C$ из уравнения (8). Точно так же уравнение (9) неудобно и для поверки теории, так как из него нельзя найти $h$. Поэтому, убедившись на нескольких сериях, что, если принять за $H$ *наблюденную* окончательную высоту, то правые части уравнения (8) дают значения, близко пропорциональные времени от начала опыта, я решил использовать формулу (5). Определенные из опытных данных значения скорости $v$ изменения высоты в различные моменты времени могли бы на основании этой формулы быть использованы для нахождения—из ряда наблюдений над высотами подъема в различные моменты—той окончательной высоты $H$, к которой эти высоты асимптотически стремятся и из которой можно найти коэффициент поверхностного натяжения $\alpha$, а также коэффициента $C$, который, служа своего рода мерой количества протекающей по капилляру в этих условиях жидкости, может дать величину коэффицента внутреннего трения $\eta$.

*Lucas* же, выведя формулу (5), интегрирует ее при помощи ряда, что представляется и менее удобным, и менее точным, чем изложенный ниже способ обработки, хотя и представляет значительный шаг вперед по сравнению с цитируемыми этим автором его предшественниками—*Cameron & Bell* (Bull. Bureau of Soils U. S. Dep. of Agriculture, 1908) и *Wo. Ostwald* (Kolloid Zeits., *2*, Suppl. Heft II, 1908), применявшими эмпирические формулы показательного типа, дающие невозможное для H значение $H = \infty$ при $t = \infty$.

Если обозначим скорости $V_m$ и $V_n$ в моменты, когда высоты жидкости равны $h_m$ и $h_n$, то, вводя формулою (11) обозначение $K_{mn}$, получим из формулы (5) последовательно

$$V_m = C\frac{H - h_m}{h_m + l}, \quad V_n = C\frac{H - h_n}{h_n + l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10),$$

$$\frac{H - h_m}{H - h_n} = \frac{V_m(h_n + l)}{V_n(h_m + l)} = K_{mn} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11),$$

$$H = \frac{h_m K_{mn} - h_n}{K_{mn} - 1} = h_m + \frac{h_m - h_n}{K_{mn} - 1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12).$$

Для наиболее точного определения H надо, очевидно, выбирать такие значения $V_m\,(h_m + l)$ и $V_n\,(h_n + l)$, отношение которых возможно близко 2; из полученных из различных комбинаций произведений $V_i\,(h_i + l)$ значений H надо взять среднее, а отсюда по формуле (3) найти $\alpha$. Найденное значение H позволит затем из каждой пары значений $h_i$ и $V_i$ найти значение коэффициента C по формуле

$$C = \frac{V_i\,(h_i + l)}{H - h_i} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (13).$$

откуда по среднему C из этих значений мы по формуле (6) найдем $\eta$.

## 4. Случай плоскопараллельного капиллярного пространства.

Совершенно таким же способом можно получить формулу, выражающую изменение высоты подъема жидкости в пространстве между двумя параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии 2 a. Если длину их, достаточно большую по сравнению с расстоянием, обозначить чрез b, то вместо уравнений (1)—(4), пользуясь формулой для количества жидкости, протекающей между двумя плоскостями [1]), получаем

$$f_I = 2b.\,\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (14),$$

$$f_{II} = b.\;2ah\triangle g \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (15),$$

$$2b.\alpha = 2baH\triangle g \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (16),$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\,(2\,ab\,h)}{dt} = \frac{a^3}{3\eta}\cdot\frac{f_I - f_{II}}{2\,ab\,(h + l)} \quad \ldots \ldots (17),$$

$$v = \frac{dh}{dt} = \frac{a^2\triangle g}{6\,\eta}\cdot\frac{H - h}{h + l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (18).$$

Последняя формула отличается от формулы (5) только видом коэффициента пропорциональности, так что вся последующая обработка этого случая отличается от случая цилиндрического капилляра только значением этого коэффициента.

## 5. Обработка наблюдений.

Указанным выше способом были обработаны все наблюдения Воинова и Мочалина, причем наибольшую трудность представляло получение значений V, которые находились или из графики—проведением касательных, или вы-

---

[1]) См, напр., **41**.

числением из отчетов h. Первый способ дает мало удовлетворительные результаты в местах, где кривая поднимается вверх очень круто или очень полого, так что приходится строить различные графики с различными масштабами абсцисс, выражающих время. Для вычислении по второму способу я брал за значение $V_i$ в момент, когда высота равна $h_i$, величину

$$\frac{2}{3}\frac{h_{i+1}-h_{i-1}}{t_{i+1}-t_{i-1}}+\frac{1}{3}\frac{h_{i+2}-h_{i-2}}{t_{i+2}-t_{i-2}} \quad \ldots\ldots (19).$$

причем в тех случаях, когда значения v не обнаруживали достаточной плавности, я прибегал к выводу средних из нескольких соседних значений и к сглаживанию этих средних по Гауссу[1]).

Как пример обработки, приведу обработку серии, приведенной в § 2, причем для этой серии значения $v_i$ были определены, как графически—столбец $v'_i$, —, так и по формуле (19—столбец $v''_i$. Значение $v_i$ выражены в делениях микрометра в минуту, а значения h (от нижнего конца штифта) и l— в делениях микрометра.

*Таблица 20.*

| i | $h_i$ | $V'_i$ | $V''_i$ | $V'_i\,(h_i+l)$ | $V''_i\,(h_i+l)$ | C | $t_{набл.}$ | $t_{выч.}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 493.2 | — | — | — | — | — | 0 | 0 |
| 1 | 478.2 | 16.8 | 15.2 | 10582 | 9574 | 49.1 | 1.00 | 1.03 |
| 2 | 462.7 | 14.6 | 14.9 | 8973 | 9158 | 44.8 | 2.00 | 2.12 |
| 3 | 448.0 | 13.8 | 13.7 | 8276 | 8216 | 44.6 | 3.00 | 3.22 |
| 4 | 435.7 | 12.8 | 12.9 | 7519 | 7577 | 43.4 | 4.00 | 4.20 |
| 5 | 422.2 | 12.0 | 12.1 | 6887 | 6944 | 43.1 | 5.00 | 5.31 |
| 6 | 411.2 | 10.3 | 10.7 | 5798 | 6023 | 39.0 | 6.00 | 6.26 |
| 7 | 401.2 | 10.0 | 10.1 | 5529 | 5584 | 39.9 | 7.00 | 7.20 |
| 8 | 391.2 | 9.90 | 9.93 | 5375 | 5391 | 41.8 | 8.00 | 8.17 |
| 9 | 381.2 | 8.85 | 9.33 | 4716 | 4972 | 39.7 | 9.00 | 9.21 |
| 10 | 372.2 | 8.60 | 8.33 | 4506 | 4364 | 41.1 | 10.00 | 10.20 |
| 11 | 356.2 | 7.90 | 7.64 | 4012 | 3880 | 42.8 | 12.00 | 12.14 |
| 12 | 341.2 | 6.40 | 6.42 | 3155 | 3165 | 40.1 | 14.00 | 14.22 |
| 13 | 329.2 | 5.60 | 5.79 | 2693 | 2784 | 40.4 | 16.00 | 16.14 |
| 14 | 318.2 | 5.00 | 4.87 | 2350 | 2288 | 42.2 | 18.00 | 17.97 |
| 15 | 309.2 | 4.06 | 3.75 | 1875 | 1728 | 40.1 | 20.00 | 20.13 |
| 16 | 295.2 | 2.92 | 2.91 | 1305 | 1300 | 39.9 | 24.0 | 24.1 |
| 17 | 285.2 | 2.14 | 2.04 | 935 | 891 | 41.2 | 28.0 | 27.8 |
| 18 | 278.7 | 1.45 | 1.22 | 624 | 525 | 38.5 | 32.0 | 31.3 |
| 19 | 270.4 | 0.830 | 0.763 | 350.4 | 322.1 | 44.4 | 40.0 | 38.6 |
| 20 | 266.4 | 0.412 | 0.426 | 172.2 | 178.1 | 44.2 | 48.0 | 46.6 |
| 21 | 264.4 | 0.235 | 0.188 | 97.8 | 78.2 | (51.5) | 56.0 | 52.8 |
| 22 | 263.4 | 0.104 | 0.062 | 43.2 | 25.7 | (48.0) | 64.0 | 60.2 |

[1]) *Б. П. Вейнберг.* Изв. Инст. иссл. Спб. 5, 1—8, 1921; Terr. Magn. & Atm. Electr., 27, 137—155, 1922; Труды 3-го С'езда Росс. Асс. Физ., 78, 1923.

*Таблица (21).*

| m | n | $K'_{mn}$ | $K''_{mn}$ | $H'$ | $H''$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 1.925 | 2.244 | (303.2) | (276.3) |
| 2 | 10 | 2.098 | 1.992 | (281.2) | (290.0) |
| 3,4,5 | 11 | 1.953 | 1.882 | 267.7 | 273.2 |
| 6 | 12 | 1.903 | 1.869 | 257.6 | 263.7 |
| 7,8 | 13 | 1.971 | 2.024 | 263.8 | 260.3 |
| 9,10 | 14 | 2.044 | 1.962 | 257.2 | 262.0 |
| 11,12 | 15 | 2.026 | 1.916 | 266.0 | 271.1 |
| 13,14 | 16 | 1.949 | 1.932 | 264.7 | 265.2 |
| 15 | 17 | 1.939 | 2.001 | 261.3 | 259.6 |
| 16 | 18 | 2.474 | 2.092 | 263.6 | 267.5 |
| 17,18 | 19 | 2.198 | 2.221 | 261.0 | 260.8 |
| 19 | 20 | 1.808 | 2.035 | 262.8 | 261.7 |
| 20 | 21 | 2.278 | 1.761 | 261.8 | 262.8 |
| 21 | 22 | 3.043 | 2.264 | 262.6 | 262.9 |

Средние значения $H'$ и $H''$ со средними погрешностями результата и одного определения равны

$$\overline{H'} = 262{\cdot}5 \mp 0{\cdot}8 \mp 2{\cdot}7,\ \overline{H''} = 264{\cdot}2 \mp 1{\cdot}2 \mp 4{\cdot}3 \quad \ldots\ldots \quad (22).$$

Отдавая в этом случае предпочтение значениям $\overline{H'}$, я вычислил по формуле (13) приведенные выше в таблице (20) значения C и откидывая два последних значения, получил в среднем

$$\overline{C} = 0{\cdot}42 \mp 0{\cdot}6 \mp 2{\cdot}5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23).$$

При помощи значений (22) и (23) для $\overline{H'}$ и $\overline{C}$ были затем вычислены по формуле (8) из наблюденных значений $h_i$ моменты времени, когда такая высота должна была бы быть; значения эти, помещенные в таблице (20) в столбце «$t_{выч.}$», достаточно близки к моментам «$t_{набл.}$»

## 6. Результаты обработки.

Результаты обработки всех окончательных серий дает таблица (24), в которой помещены также время опыта и та высота—$H_{набл.,\infty}$ на которой к концу опыта устанавливалась жидкость. Высоты даны в делениях микрометра, значения коэффициента C—в $\frac{\text{дел.}}{\text{мин.}}$

*Таблица (24).*

| Раствор. | $\frac{dh}{dt}$ | Капиляр. | H выч. | Время опыта. | H набл. | C. | $\alpha\ \frac{\text{дин.}}{\text{см.}}$ | $\eta\ \frac{\text{гр.}}{\text{см.сек.}}$ | $\theta^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 65% | + | I | 259·1 ∓ 1·0 | 23 ч. | 271·6 | 8·2 ∓ 0·1 | 30·8 | 101 | 20·3 |
| » | — | I | 273·7 ∓ 0·9 | 24 | 269·0 | 23·0 ∓ 0·2 | | 36 | 20·5 |
| » | + | II | 144·0 ∓ 1·1 | 5 | 149·2 | 37·8 ∓ 0·7 | 29·4 | 65 | 21·7 |
| » | — | II | 149·7 ∓ 2·1 | 21 | 149·2 | 46·7 ∓ 0·5 | | 53 | (21·7) |
| 60% | + | I | 250·1 ∓ 2·6 | 4 | 251·2 | 30·2 ∓ 0·9 | 28·7 | 27 | 19·5 |
| » | — | I | 262·5 ∓ 0·8 | 22 | 262·4 | 42·0 ∓ 0·6 | | 19 | 20·5 |
| » | + | II | 143·2 ∓ 3·3 | 2 | 153·0 | 52 ∓ 3 | 29·5 | 47 | 22·0 |
| » | — | II | 156·3 ∓ 1·5 | 1 | 154·3 | 133 ∓ 2 | | 18 | (22·0) |
| 50% | + | I | 260 1 ∓ 1·1 | 2 | 261·7 | 68 ∓ 8 | 28·6 | 11·5 | 20·1 |
| » | — | I | 266·0 ∓ 3·7 | 1 | 265·2 | 313 ∓ 46 | | 2·5 | 20·0 |

При выводе значений $\alpha$ значениям $H_{выч.}$ из поднятий приданы были веса, в 3 раза меньшие, чем значениям $H_{выч.}$ из опусканий и чем значениям $H_{набл.}$

Рассмотрение, как этой таблицы, так и тех отдельных значений H и C, средние из которых приведены в ней, приводит к некоторым общим замечаниям, подтверждаемым также деталями наблюдений Воинова и Мочалина.

Значение окончательной высоты вязкой жидкости в капилляре, какое получается из наблюдений процесса *поднятия*, заметно меньше непосредственно наблюдаемой предельной высоты, а значение, какое получается из наблюдений процесса *опускания*, несколько больше предельной. Обнаруживается также различие между самими предельными высотами при поднятии и при опускании, особенно заметное при малой продолжительности опыта, но не уничтожающееся—, вероятно, вследствие образования своего рода „корочки"—даже, если наблюдения ведутся настолько долго, что высота прекратила изменяться.

Еще резче разница между значениями коэффициента C, являющегося мерилом скорости протекания по капилляру при градиенте давления, равном единице (что пропорционально отношению $\frac{H-l}{h+l}$). Коэффициент этот меньше —в некоторых случаях значительно—при процессе поднятия, чем при процессе опускания, и, повидимому, без особых предосторожностей в постановке опыта не может служить для определения из таких опытов коэффициента внутреннего трения жидкости. В самом деле, другие опыты (**34**) дали для тех же растворов значения $\eta$, равные 53, 12.5 и 1.19 $\frac{\text{гр.}}{\text{см.сек.}}$ при 22°, и отличия их от значений (24), какие получились из значений C, нельзя объяснить только измененениями концентрации, какие могли произойти за промежуток времени (около года) между теми и другими опытами.

При процессе поднятия меньшие величины H и C стоят в связи с неполным смачиванием стенок капилляра жидкостью—обстоятельством, непосредственно наблюдавшимся в микроскоп и сказывавшимся также в меньшей плавности кривых поднятия по сравнению с кривыми опускания. Если краевой угол будет в некоторый момент равен $\beta$, то, как легко вывести, формулу (13) надо было было бы заменить формулою

$$C=\frac{v_i\,(h_i+l)}{H\cos\beta-h_i} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (25).$$

которая должна давать бо̀льшие значения C, чем формула (13). Это различие должно сказываться резче всего в средних частях опытов, когда жидкость поднимается еще довольно быстро и потому не успевает достаточно хорошо смочить стенки и когда вместе с тем $H-h$ уже не велика и может быть весьма заметно больше $H\cos\beta-h$, тогда так в начале опыта отношение $\frac{H\cos\beta-h}{H-h}$ будет лишь немного отличаться от $\cos\beta$, а в конце опыта угол $\beta$, благодаря медленности поднятия, будет близок к 0. Ход вычисленных значений C для разных моментов соответствует сказанному.

При процессе же опускания происходит (что также ясно наблюдалось в микроскоп) очень медленное стекание избытка жидкости, хорошо смочившей его стенки, со стенок [1]),—и это обстоятельство должно весьма усложнить высказанную выше теорию. В самом деле, если бы поверхностного натяжения не было, то поверхность жидкости в капилляре должна была бы при опускании ее получать форму параболоида вращения, постепенно вытягивающегося вниз,

[1]) То же отчетливо видно на широких трубках, из которых вытекали втечение ряда лет капли 90%-и 95%-ных растворов даммара в скипидаре (**37**).

тогда как, если бы не было внутреннего трения, то поверхность жидкости имела бы все время форму полусферы, постепенно опускающейся вниз. На самом же деле форма будет промежуточной между сферической и параболоидальной, и без специального теоретического исследования, основанного на совокупном применении формул Лапласа и Пуазейля, нельзя определенно сказать, как отразится отклонение мениска от полусферической формы на законе опускания. С одной стороны, силы внутреннего трения в приставшем к стенкам слоя будут вызывать задержку движения вниз, а, с другой стороны, в формуле (1) для силы $f_I$ надо вместо $r$ взять несколько меньшее значение $\rho$, между тем как для силы $f_{II}$ останется значение, даваемое формулой (2). Так как при этом $v_i$, как и $H—h_i$, будут отрицательными, то и истинное значение $C$, равное

$$C = \frac{v_i\,(h_i + l)}{-(h_i - H)} = -\pi r^2 \triangle g \frac{v_i\,(h_i + l)}{f_{II} - 2\pi\rho\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (26),$$

будет меньше того, какое вычисляется по формуле (13) или по равнозначущей ей

$$C = -\pi r^2 \triangle g \frac{v_i\,(h_I + l)}{f_{II} - 2\pi r\alpha} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (27).$$

Различием формул (26) и (27),—как и различием формул (1) и (25),—можно объяснить большие значения $C$ при опускании, чем при поднятии, а также то, что значения $C$ при опускании оказываются больше в начале опытов, когда уже успел образоваться, но еще не успел стечь, слой на стенках, т. е. $\rho$ заметно меньше $r$, но остается необъясненным превышение,—правда, незначительное,—$H_{выч.}$ над $H_{набл.}$ при опускании.

Из теоретических и экспериментальных результатов настоящей работы вытекают следующие следствия:

1. Процессами поднятия и опускания жидкости в капилляре можно пользоваться для определения коэффициента поверхностного натяжения в тех случаях, когда по тем или другим причинам нельзя выждать достаточно времени, чтобы высота это перестала изменяться, или когда есть основания думать, что причина прекращения изменений высоты зависит от изменений, происшедших в поверхностном слое.

2. Предпочтительнее в этих случаях пользоваться процессом опускания, чем—поднятия.

3. Величина коэффициента внутреннего трения, получающаяся из таких наблюдений, может служить лишь для ориентировки в порядке его величины, которую предпочтительнее определять обыкновенными приемами измерения количества протекающей по капилляру жидкости.

4. Желательно исследовать теоретически и на опыте процесс изменения формы поверхности вязкой жидкости при опускании ее в узкой трубке.

23 . 10 . 23