

Инж. В. К. НЕЧАЕВ.

(К вопросу о крутильных колебаниях валов.)

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ.

Определение частот собственных крутильных колебаний валопровода является первым и важнейшим этапом каждого расчета силовых установок с поршневыми двигателями на крутильные колебания.

Во многих случаях практики знания частот одноузловых и двухузловых колебаний приведенной системы достаточно для суждения об эксплуатационной надежности работы данной силовой установки с точки зрения крутильных колебаний ее вала. Такое положение обычно имеет место в установках, работающих при постоянном числе оборотов.

Более глубокие расчеты, включающие в себя определение амплитуд вынужденных колебаний и напряжений скручивания в валу, возникающих при различных критических оборотах, необходимы в установках, работающих в широком диапазоне оборотов, так как здесь не всегда представляется возможным избежать тех или иных резонансов, хотя бы и слабых порядков.

Общий прием определения частот собственных (свободных) крутильных колебаний вала, имеющего ряд укрепленных на нем ма-ховых масс, как известно, сводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений.

Решение этой системы уравнений в общем виде, вплоть до окончательной готовой формулы для подсчета частот собственных колебаний системы, имеется только для вала с двумя и тремя ма-ховыми массами. Для систем с большим числом масс этот путь приводит к крайне громоздким детерминатам, развертывание которых ведет к выражениям, едва ли пригодным для практических вычислений в виду их сложности¹⁾.

В настоящее время имеется ряд более практических методов определения частот собственных крутильных колебаний многомассо-

¹⁾ Решение системы дифференц. уравнений для многомассовой системы исследовал в общем виде Н. Holzer, Schiffbau, 1907, стр. 823 и след.

Некоторые усовершенствования методики решения указаны академиком А. Крыловым в его работе „О численном решении уравнения, которым в техн. вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем“ 1932 г.; см. также П. Папкович „К вопросу о нахождении форм и периодов главных свободно крутильных колебаний“ в приложении к брошюре Н. Урванцева „Критические числа оборотов в дизельных установках“. См. также статью W. Tuplin в журнале Engineering, 1934, pp. 582, 611.

вой системы¹⁾. Все они дают искомое решение в результате ряда проб и последовательных приближений. Общим недостатком всех этих методов приходится считать необходимость проведения большой вычислительной работы. Это обстоятельство затрудняет их широкое внедрение в практику.

В большинстве установок с двигателями внутреннего сгорания имеется ряд одинаковых по величине и равномерно расположенных по валу масс (массы шатунно-кривошипных механизмов цилиндров двигателя). В этих случаях решение задачи может быть упрощено. Для этого имеется ряд методов более быстрого определения частот собственных колебаний системы²⁾. В большинстве из них все маховые массы всех цилиндров двигателя заменяются одной массой, равномерно распределенной по всей длине коленчатого вала. Этот прием, являясь известным допущением, несколько упрощает определение искомых частот, но приводит к отысканию корней трансцендентных уравнений. Лишь Behrens обходится без этого допущения. Но Behrens решил задачу только для частного случая, когда многоцилиндровый двигатель имеет на валу еще только одну большую маховую массу (маховик).

Мы изложим здесь более общий прием, позволяющий определить частоты собственных колебаний вала с n равными маховыми массами и двумя большими маховиками (такой случай мы имеем напр. в системе бескомпрессорный дизель маховик-динамо и в ряде винтовых судовых установок) графическим путем, без длительных пробных подсчетов.

В основе этого приема лежит метод приведения всех масс колеблющейся системы в одну точку, в одно сечение вала.

I.

Рассмотрим упругую колеблющуюся систему, состоящую из ряда маховых масс, связанных между собою отрезками упругого вала (фиг. 1). Вал лежит в абсолютно гладких подшипниках.

Обозначим:

$\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ — моменты инерции маховых масс каждого цилиндра двигателя относительно оси вала,

1) H. Holzer. Die Berechnung der Drehschwingungen. Berlin 1921.

H. Wydler. Drehschwingungen in Kolbenmaschinenanlagen. Berlin 1922.

M. Tolle. Regelung der Kraftmaschinen. Berlin. 1921.

J. Geiger. Mechanische Schwingungen. Berlin 1927.

F. Lewis. Torsional Vibrations in the Diesel Engine. Trans. Soc. Nav. Arch. and Mar. Eng. 1925.

F. Porter. The range and severity of torsional vibration in Diesel engine. Transactions A. S. M. E., Vol. 49—50, 1927—28, а также статьи Gümibel, Dreves и др. в Z. d. V. D. I.; А. Черевков. О вычислении колебаний кручения на валах, Вестник инженеров, 1933, № 7.

2) W. Benz. Automobil—Techn. Zeitschrift, 1930 Heft 27, 1934 Heft 5,

Göller. Z. d. V. D. J., 1930, № 16.

Behrens. Z. d. V. D. J., 1930, № 20.

Porter. Transactions A. S. M. E. Vol. 53 (1931); Vol. 51 (1929),

Gorfinkel. Le Génie Civil. 1932, № 15, 16.

Θ_1, Θ_{II} — моменты инерции масс маховиков I и II относительно той же оси,

$m_1, m_2, \dots, m_n, m_i, m_{II}$ — величины соответствующих масс, приведенных к радиусу кривошипа r ¹⁾;

$c_{12}, c_{23}, \dots, c_{n-1, n}, c_{nI}, c_{II}$ — жесткости участков вала между соседними маховыми массами; индексы при c означают номера масс, лежащих по концам данного участка вала²⁾,

$\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_n, \varphi'_I, \varphi'_{II}$ — соответственно углы отклонения масс $m_1, m_2, \dots, m_n, m_I, m_{II}$ в данный момент времени, от их среднего, равновесного положения,

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_I, \varphi_{II}$ — угловые амплитуды колебания соответствующих масс.

Для всех масс колеблющейся системы по фиг. 1 можно написать следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1 \frac{d^2 \varphi'_1}{dt^2} + c_{12} (\varphi'_1 - \varphi'_2) &= 0 \\ \Theta_2 \frac{d^2 \varphi'_2}{dt^2} - c_{12} (\varphi'_1 - \varphi'_2) + c_{23} (\varphi'_2 - \varphi'_3) &= 0 \\ \dots &\dots \\ \Theta_{n-1} \frac{d^2 \varphi'_{n-1}}{dt^2} - c_{n-2, n-1} (\varphi'_{n-2} - \varphi'_{n-1}) + c_{n-1, n} (\varphi'_{n-1} - \varphi'_n) &= 0 \\ \Theta_n \frac{d^2 \varphi'_n}{dt^2} - c_{n-1, n} (\varphi'_{n-1} - \varphi'_n) + c_{nI} (\varphi'_n - \varphi'_I) &= 0 \\ \Theta_I \frac{d^2 \varphi'_I}{dt^2} - c_{nI} (\varphi'_n - \varphi'_I) + c_{II} (\varphi'_I - \varphi'_{II}) &= 0 \\ \Theta_{II} \frac{d^2 \varphi'_{II}}{dt^2} - c_{II} (\varphi'_I - \varphi'_{II}) + R &= 0 \end{aligned} \right\} .(1)$$

где R — так называемый остаточный момент. При вынужденных колебаниях системы он обозначает внешний возбуждающий момент, приложенный к массе II.

1) Величины Θ и m связаны между собою соотношением: $\Theta = mr^2$, так напр. $\Theta_1 = m_1 r^2$; $\Theta_2 = m_2 r^2$ и т. д.

2) Жесткость отрезка вала постоянного поперечного сечения вообще определяется формулой: $c = \frac{G J_p}{l}$ кгсм/радиан, где G — модуль упругости второго рода, J_p — полярный момент инерции сечения вала, l — длина вала. Для вала переменного поперечного сечения c может быть подсчитано аналитическим или графическим путем.

При свободных колебаниях системы:

$$R = 0.$$

Как известно, мгновенные углы отклонения колеблющихся масс могут быть определены следующими выражениями:

$$\varphi'_1 = \varphi_1 \sin \omega t,$$

$$\varphi'_2 = \varphi_2 \sin \omega t,$$

* * * * *

$$\varphi_{n-1} = \varphi_{n-1} \sin \omega t,$$

$$\varphi'_n = \varphi_n \sin \omega t,$$

где ω — угловая скорость колебания.

Вставляя эти значения ω в систему уравнений (1) мы для всех n масс двигателя получим:

$$\Theta_1 \omega^2 \varphi_1 - c_{12} (\varphi_1 - \varphi_2) = 0,$$

$$\Theta_2 \omega^2 \varphi_2 + c_{1,2} (\varphi_1 - \varphi_2) - c_{2,3} (\varphi_2 - \varphi_3) = 0,$$

$$\Theta_{n-1} \omega^2 \varphi_{n-1} + c_{n-2,n-1} (\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}) - c_{n-1,n} (\varphi_{n-1} - \varphi_n) = 0,$$

$$\Theta_n \omega^2 \varphi_n + c_{n-1,n} (\varphi_{n-1} - \varphi_n) - c_{n1} (\varphi_n - \varphi_1) = 0$$

В бескомпрессорных дизелях, рядовых авто и авиа-двигателях приведенные моменты инерции масс шатунно-кривошипных механизмов всех цилиндров одинаковы (фиг. 2):

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \dots = \dots = \Theta_n = \Theta,$$

а также одинаковы и жесткости участков коленчатого вала между ними:

$$c_{12} = c_{23} = \dots = c_{n-1, n} = c$$

Теперь из (2), отбрасывая индексы, получим:

$$\Theta \omega^2 \varphi_1 - c (\varphi_1 - \varphi_2) = 0,$$

$$\Theta \omega^2 \varphi_2 + c(\varphi_1 - \varphi_2) - c(\varphi_2 - \varphi_3) = 0,$$

• • • • • • • • • • • • • • • •

$$\Theta \omega^2 \varphi_{r-1} + c(\varphi_{r-2} - \varphi_{r-1}) - c(\varphi_{r-1} - \varphi_r) = 0,$$

$$\Theta \omega^2 \varphi_+ + c(\varphi_+, -\varphi_-) = c_{++}(\varphi_+ - \varphi_-) \equiv 0$$

откуда после сокращения на s :

$$\left. \begin{aligned} A\varphi_1 - (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0, \\ A\varphi_2 + (\varphi_1 - \varphi_2) - (\varphi_2 - \varphi_3) &= 0, \\ \dots &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ A\varphi_{n-1} + (\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}) - (\varphi_{n-1} - \varphi_n) &= 0 \\ A\varphi_n + (\varphi_{n-1} - \varphi_n) - \frac{c_{n1}}{c} (\varphi_n - \varphi_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (4)$$

где:

$$A = \frac{\Theta \omega^2}{c} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (5)$$

Теперь амплитуды колебания масс двигателя определяются следующими выражениями:

Из первых двух выражений системы (6):

$$\varphi_3 = \varphi_1 - A\varphi_1 - A(\varphi_1 - A\varphi_1) = \varphi_1(1 - 3A + A^2), \quad \dots \quad (7)$$

и далее, подобным же образом:

$$\varphi_4 = \varphi_1 (1 - 6A + 5A^2 - A^3), \dots \quad \quad (8)$$

$$\varphi_5 = \varphi_1 (1 - 10A + 15A^2 - 7A^3 + A^4), \quad \dots \quad (9)$$

$$\varphi_6 = \varphi_1 (1 - 15A + 35A^2 - 17A^3 + 8A^4 - A^5), \quad .(10)$$

И Т. Д.

Просуммируем последовательно амплитуды колебаний отдельных масс двигателя:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 &= \varphi_1 (2 - A), \\ \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 &= \varphi_1 (3 - 4A + A^2) \\ \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 &= \varphi_1 (4 - 10A + 6A^2 - A^3), \\ \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_5 &= \varphi_1 (5 - 20A + 21A^2 - 8A^3 + A^4), \\ \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_6 &= \varphi_1 (6 - 35A + 56A^2 - 25A^3 + 9A^4 - A^5) \end{aligned} \right\} (11)$$

и т. д., или в общем виде:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_1^2 \varphi = B_2 \varphi_1, \\ \sum_1^3 \varphi = B_3 \varphi_1, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \sum_1^n \varphi = B_n \varphi_1, \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (12)$$

где:

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= 2 - A, \\ B_3 &= 3 - 4A + A^2, \\ B_4 &= 4 - 10A + 6A^2 - A^3, \\ B_5 &= 5 - 20A + 21A^2 - 8A^3 + A^4, \\ B_6 &= 6 - 35A + 56A^2 - 25A^3 + 9A^4 - A^5 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (13)$$

Таким образом, суммы амплитуд колебания всех масс $m_1 \dots m_n$ двигателя могут быть выражены через амплитуду ϕ колебания первой массы и коэффициент B , зависящий только от параметра A . В общем случае для n масс двигателя:

$$\varphi_n = \varphi_1 \cdot f(A),$$

$$\sum_1^n \varphi = B_n \varphi_1.$$

Вычислим далее соотношения:

$$D_2 = \frac{\varphi_2}{\sum \limits_1^2 \varphi} = \frac{1-A}{2-A},$$

$$D_3 = \frac{\varphi_3}{\sum \varphi} = \frac{1 - 3A + A^2}{3 - 4A + A^2},$$

$$D_4 = \frac{\varphi_4}{\sum \varphi} = \frac{1 - 6A + 5A^2 - A^3}{4 - 10A + 6A^2 - A^3},$$

$$D_5 = -\frac{\varphi_5}{\sum \varphi} = -\frac{1 - 10A + 15A^2 - 7A^3 + A^4}{5 - 20A + 21A^2 - 8A^3 + A^4},$$

$$D_6 = \frac{\Phi_6}{\sum_{k=1}^6 e_k} = \frac{1 - 15A + 35A^2 - 17A^3 + 8A^4 - A^5}{6 - 35A + 56A^2 - 25A^3 + 9A^4 - A^5},$$

$$D_n = \frac{\varphi_n}{\sum_1^n \varphi} =$$

Коэффициенты D зависят только от A , следовательно меняются при изменениях ω_1 .

На участке между последней массой m_n двигателя и первым маховиком вал скручивается моментом, равным сумме инерционных моментов всех n масс двигателя¹⁾:

$$M = \sum_1^n \Theta \omega^2 \varphi = \Theta \omega^2 \sum_1^n \varphi, \dots \dots \dots \dots \quad (15)$$

или, так как:

$$\sum_1^n \varphi = \frac{\varphi_n}{D_n},$$

то:

$$M = \frac{\Theta \omega^2 \varphi_n}{D_n} \dots \dots \dots \dots \quad (16)$$

Инерционный момент одной n -ой (последней) массы двигателя очевидно равен:

$$M_n = \Theta \omega^2 \varphi_n \dots \dots \dots \dots \quad (17)$$

Из сравнения (16) и (17):

$$M = \frac{M_n}{D_n} = \left(\frac{\Theta}{D_n} \right) \omega^2 \varphi_n.$$

Отсюда следует, что сумма инерционных моментов всех n равных масс m двигателя равна инерционному моменту некоторой фиктивной массы, имеющей момент инерции $\frac{\Theta}{D_n}$ и приложенной на место последней, n -й массы. Все маховые массы m двигателя можно заменить одной, эквивалентной им динамически массой $\frac{\Theta}{D_n}$.

Коэффициент D_n является переменной величиной и при заданных Θ и c зависит только от угловой скорости колебания (при заданном так же числе цилиндров двигателя). Величина D_n для каждого числа цилиндров двигателя определяется формулами (14)²⁾.

При свободных колебаниях системы (фиг. 1), для двух больших масс m_1 и m_{11} из (1) имеем:

$$\Theta_1 \frac{d^2 \varphi'_1}{dt^2} - c_{n1} (\varphi'_{11} - \varphi'_1) + c_{11} (\varphi'_1 - \varphi'_{11}) = 0,$$

$$\Theta_{11} \frac{d^2 \varphi'_{11}}{dt^2} - c_{11} (\varphi'_1 - \varphi'_{11}) = 0.$$

1) Как известно, максимальный момент сил инерции массы m относительно оси вращения равен $\Theta \omega^2 \varphi$, где φ — амплитуда колебания массы, ω — угловая скорость колебания, $\Theta = mr^2$ — ее момент инерции относительно этой оси.

2) Индекс при D означает число цилиндров двигателя.

Подстановкой:

$$\varphi'_1 = \varphi_1 \sin \omega t,$$

$$\varphi'_{II} = \varphi_{II} \sin \omega t,$$

эти уравнения приводятся к виду:

$$\Theta_1 \omega^2 \varphi_I + c_{n-1} (\varphi_n - \varphi_I) - c_{I,II} (\varphi_I - \varphi_{II}) = 0.$$

$$\Theta_{II} \omega^2 \varphi_{II} + c_{I,II} (\varphi_I - \varphi_{II}) = 0.$$

Отсюда:

$$\Theta_I \omega^2 \varphi_I + \Theta_{II} \omega^2 \varphi_{II} + c_{n_1} (\varphi_n - \varphi_1) = 0,$$

$$\varphi_n = \varphi_1 - \frac{\Theta_1 \omega^2 \varphi_1 + \Theta_{II} \omega^2 \varphi_{II}}{c_{nI}} \quad \dots \quad .(19)$$

На участке между последней (n -й) массой двигателя и первым маховиком вал скручивается моментом, равным сумме инерционных моментов масс m_1 и m_{II} :

$$M' = \Theta_I \omega^2 \varphi_I + \Theta_{II} \omega^2 \varphi_{II}$$

Маховики I и II можно заменить одной новой массой, имеющей момент инерции:

$$\frac{\Theta_I + \Theta_{II}}{K_*} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (20)$$

и помещенной в точке приложения последней, n -ой массы двигателя. Коэффициент K определяется из следующего соотношения, выражающего необходимое равенство инерционных моментов обоих маховиков I и II и заменяющей их массы, имеющей момент инерции $\frac{\Theta_1 + \Theta_n}{K}$:

$$\Theta_i \omega^2 \varphi_i + \Theta_{ii} \omega^2 \varphi_{ii} = \frac{\Theta_i + \Theta_{ii}}{K} \omega^2 \varphi_n \quad \dots \quad (2)$$

Отсюда:

$$K = \frac{(\Theta_I + \Theta_{II}) \varphi_n}{\Theta_I \varphi_I + \Theta_{II} \varphi_{II}} = \frac{(\Theta_I + \Theta_{II}) \varphi_n}{\Theta_I \left(\varphi_{II} - \frac{\Theta_{II} \omega^2}{c_{I,II}} \varphi_I \right) + \Theta_{II} \varphi_{II}}$$

Но из (18) и (19):

$$\varphi_n = \varphi_{II} \left(1 - \frac{\Theta_{II}\omega^2}{c_{I,II}} - \frac{\Theta_I\omega^2}{c_{nI}} - \frac{\Theta_n\omega^2}{c_{nI}} + \frac{\Theta_I\Theta_n\omega^4}{c_{I,II} \cdot c_{nI}} \right),$$

следовательно:

$$K = (\Theta_I + \Theta_{II}) \frac{\left(1 - \frac{\Theta_{II}\omega^2}{c_{I,II}} - \frac{\Theta_I\omega^2}{c_{nI}} - \frac{\Theta_{II}\omega^2}{c_{nI}} + \frac{\Theta_I\Theta_{II}\omega^4}{c_{I,II} \cdot c_{nI}}\right)}{\Theta_I + \Theta_{II} - \frac{\Theta_I \cdot \Theta_{II} \cdot \omega^2}{c_{I,II}}}$$

Отсюда, вводя обозначения:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\Theta_1}{\Theta} = \alpha_1; \quad \frac{\Theta_{II}}{\Theta} = \alpha_2 \\ \frac{c_{nI}}{c} = \beta_1 \quad \frac{c_{I, II}}{c} = \beta_2 \end{array} \right\} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (22)$$

и принимая во внимание обозначения (5), имеем:

$$K = \frac{1 - A \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1} \right) + A^2 \cdot \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_1 \beta_2}}{1 - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_2 (\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot A}.$$

Наконец, обозначая:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_2 (\alpha_1 + \alpha_2)} = \gamma, \\ \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1} = \delta, \\ \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_1 \beta_2} = \varepsilon \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (23)$$

получаем окончательно:

$$K = \frac{1 - \delta A + \varepsilon A^2}{1 - \gamma A} \quad \dots \quad (24)$$

Таково соотношение для случая двух больших маховиков I и II. Если же установка имеет только один маховик (фиг. 3), то:

$$\left. \begin{array}{l} \Theta_{ii} = 0, \\ \alpha_2 = 0, \quad \gamma = 0, \quad \epsilon = 0, \\ \delta = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (22a)$$

И

При свободных колебаниях системы отсутствуют внешние возбуждающие силы и инерционные моменты масс в каждое мгновение уравновешиваются с упругими моментами скручиваемого вала.

При этом сумма инерционных моментов всех масс системы в каждый момент времени равна нулю:

$$\sum_1^n \Theta \omega^2 \varphi + \Theta_1 \omega^2 \varphi_1 + \Theta_n \omega^2 \varphi_n = 0,$$

или:

$$\sum_1^n \Theta \varphi + \Theta_1 \varphi_1 + \Theta_n \varphi_n = 0 \dots \dots \dots \quad (26)$$

(к этому легко притти, суммируя все уравнения (1) при $R = 0$).

Но согласно (15), (17) и (20) это выражение можно написать также в следующем виде:

$$\left(\frac{\Theta}{D_n} \right) \omega^2 \varphi_n + \frac{\Theta_1 + \Theta_n}{K} \omega^2 \varphi_n = 0,$$

или

$$\frac{\Theta}{D_n} + \frac{\Theta_1 + \Theta_n}{K} = 0 \dots \dots \dots \quad (27)$$

Отсюда следует, что при свободных колебаниях системы, сумма моментов инерции всех ее масс, приведенных в одну точку, в одно сечение на валу, равна нулю.

Соотношение (27) может быть положено в основу следующего графического приема для определения частот собственных колебаний многомассовой системы по фиг. 2.

Вводя относительные значения:

$$\alpha_1 = \frac{\Theta_1}{\Theta}, \quad \alpha_2 = \frac{\Theta_n}{\Theta},$$

перепишем выражение (27), удовлетворяющееся при свободных колебаниях системы (и только при них) в следующем виде:

$$\frac{1}{D_n} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{K} = 0.$$

Отсюда:

$$\frac{1}{D_n} = - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{K},$$

или:

$$D_n = L, \dots \dots \dots \dots \quad (28)$$

где:

$$L = - \frac{K}{\alpha_1 + \alpha_2} \dots \dots \dots \dots \quad (29)$$

Для системы с двумя большими маховиками I и II по фиг. 2 согласно (24):

$$L = \frac{1 - \delta A + \epsilon A^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\gamma A - 1)} \dots \dots \dots \dots \quad (30)$$

и для системы с одним маховиком (фиг. 3) на основании (25):

$$L = \frac{\delta A - 1}{\alpha_1} \dots \dots \dots \dots \quad (31)$$

Величина D_n , как установлено выше, зависит только от числа n цилиндров двигателя и параметра A . Для каждого числа цилиндров можно раз и навсегда построить кривые $D_n = f(A)$ в координатах D_n и A , пользуясь выражением (14).

Величина L , согласно (30) и (31) зависит от параметра A , а также и от относительной величины моментов инерции Θ_1 и Θ_n обоих маховиков и жесткостей участков вала между ними и двигателем.

Для каждой конкретно-заданной системы можно подсчитать числовые значения коэффициентов α_1 , α_2 , γ , δ и ε , входящих в выражения (30) и (31) и определить L как функцию одного A :

$$L = F(A).$$

В величину A , определяемую формулой (5):

$$A = \frac{\Theta \omega^2}{c}$$

входят, как известные по числовой величине значения Θ и c для каждого цилиндра двигателя, так и неизвестное пока числовое значение угловой скорости ω собственных колебаний системы.

Придавая ω некоторое произвольное числовое значение, можно подсчитать величину A , а по нему определить и соответствующие числовые значения D_n и L , пользуясь формулами (14), (30) или (31). Эти найденные значения D_n и L вообще окажутся неравными друг другу, т. к. равенство $D_n = L$, согласно (28), может иметь место только при тех значениях ω , которые являются угловыми скоростями собственных колебаний рассматриваемой системы. Предугадать же заранее величины угловых скоростей собственных колебаний достаточно точно едва ли возможно.

Для того, чтобы найти те значения ω (а следовательно и параметра A), при которых выполняется соотношение

$$D_n = L$$

следует на построенной ранее диаграмме $D_n = f(A)$ для данного числа цилиндров двигателя, по точкам построить кривую $L = F(A)$, придавая здесь A различные числовые значения и откладывая по оси ординат подсчитываемые значения L . Абсциссы точек пересечения этой кривой с кривой D_n дадут очевидно те значения A (а следовательно и ω), при которых выполняется равенство $D_n = L$. Эти величины A_1, A_2, \dots определяют собою теперь, на осно-

вании (5) и соответствующие угловые скорости собственных колебаний системы:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{A_1 c}{\Theta}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{A_n c}{\Theta}}, \dots \dots \quad (32)$$

Из изложенного выше следует, что для определения частот собственных колебаний многомассовой системы по фиг. 2 и 3, необходимо заранее заготовить кривые D_n для соответствующего числа цилиндров. Каждая такая кривая полностью пригодна для любой установки с двигателем, имеющим данное число цилиндров. Построение этих кривых производится по выведенным выше уравнениям (14).

На каждом двигателестроительном заводе такие кривые могут быть выстроены раз навсегда, для каждой марки выпускаемых им машин. В этом случае, для еще большего ускорения расчетов, можно на оси абсцисс наравне с значениями A нанести так же и соответственные значения ω , вычисленные по соотношению (5). Эти кривые будут пригодны для быстрого определения угловых скоростей собственных колебаний любой силовой установки с данным типом двигателя.

Необходимо отметить, что изложенный метод графического определения частот собственных колебаний системы является принципиально совершенно точным, включая в себя лишь известные ошибки, неизбежные при любом графическом построении. При выборе достаточного размера чертежа эти ошибки могут быть сделаны ничтожно малыми.

Этот метод может быть применен также и для установок, имеющих кроме двигателя еще целый ряд маховых масс с различными моментами инерции $\Theta_1, \Theta_n, \Theta_{nn}$ и т. д. К этому вопросу автор предполагает вернуться в другой статье.

Покажем применение изложенного метода на примере.

Определим угловые скорости собственных колебаний установки на фиг. 4, состоящей из четырехцилиндрового дизеля, маховика и динамо, соединенных одним общим валом и имеющей следующие основные данные, полученные после приведения масс и длин системы¹⁾.

Момент инерции маховых масс каждого цилиндра двигателя

$$\Theta = 3,0 \text{ кг м сек}^2,$$

момент инерции массы маховика $\Theta_1 = 30,0 \text{ кг м сек}^2$,
момент инерции массы динамо $\Theta_n = 21,0 \text{ кг м сек}^2$,
жесткости участков вала между массами:

$$c = 5,0 \cdot 10^6 \text{ кг м/радиан},$$

$$c_{n1} = 3,0 \cdot 10^6 \text{ кг м/радиан}.$$

$$c_{1n} = 2,0 \cdot 10^6 \text{ кг м/радиан}.$$

¹⁾ Здесь взяты округленные (для удобства подсчетов) данные одной действительной установки. Все дальнейшие расчеты произведены на 25-сантиметровой счетной линейке.

На фиг. 5 вычерчена заранее кривая D_4 для четырехцилиндровых двигателей, по соответствующему уравнению (14).

Для нашей установки подсчитываем коэффициенты, согласно обозначениям (22) и 23):

$$\alpha_1 = \frac{\Theta_1}{\Theta} = \frac{30,0}{3,0} = 10,0$$

$$\alpha_2 = \frac{\Theta_{II}}{\Theta} = \frac{21,0}{3,0} = 7,0$$

$$\beta_1 = \frac{c_{I, II}}{c} = \frac{3,0 \cdot 10^6}{5,0 \cdot 10^6} = 0,60$$

$$\beta_2 = \frac{c_{I, II}}{c} = \frac{2,0 \cdot 10^6}{5,0 \cdot 10^6} = 0,40$$

$$\gamma = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{\beta_2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{10,7}{0,4 \cdot (10,0 + 7,0)} = 10,30$$

$$\delta = \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \frac{\alpha_2}{\beta_1} + \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{7,0}{0,4} + \frac{7,0}{0,6} + \frac{10,0}{0,6} = 45,8$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{\beta_1 \cdot \beta_2} = \frac{10,0 \cdot 7,0}{0,6 \cdot 0,4} = 291,7$$

Теперь по ф-ле (30)

$$L = \frac{1 - 45,8 A + 291,7 A^2}{17,0 \cdot (10,3 A - 1)}.$$

Придавая здесь параметру A различные значения, начиная с $A=0$ и вычисляя из предыдущего уравнения соответствующие значения L , выстраиваем по точкам кривую $L=F(A)$ на диаграмме D_4 ; на фиг. 5 эта кривая обозначена через I. Пересечение этой кривой с кривой D_4 дает точки, абсциссы которых получились равными следующим величинам:

$$A_1 = 0,0720,$$

$$A_2 = 0,1512,$$

$$A_3 = 0,870,$$

(на фиг. 6 часть кривой D_4 дающая величины A_1 и A_2 , для большей точности вычерчена в увеличенном масштабе).

Теперь по формулам (32) определяем угловые скорости собственных крутильных колебаний системы:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{A_i c}{\Theta}} = \sqrt{\frac{0,0720 \cdot 5 \cdot 10^6}{3,0}} = 346,0 \text{ сек.}^{-1},$$

$$\omega_{\text{II}} = \sqrt{\frac{A_2 c}{\Theta}} = \sqrt{\frac{0,1512 \cdot 5 \cdot 10^6}{3,0}} = 502 \text{ сек.}^{-1},$$

$$\omega_{\text{III}} = \sqrt{\frac{A_3 c}{\Theta}} = \sqrt{\frac{0,8705 \cdot 5 \cdot 10^6}{3,0}} = 1203 \text{ сек.}^{-1},$$

и соответственные числа собственных колебаний системы в минуту

$$n_1 = \frac{30 \omega_1}{\pi} = \frac{30 \cdot 346}{3,14} = 3305 \text{ колеб/мин.}$$

$$n_{\text{II}} = \frac{30 \omega_{\text{II}}}{\pi} = \frac{30 \cdot 502}{3,14} = 4795 \text{ колеб/мин.}$$

$$n_{\text{III}} = \frac{30 \omega_{\text{III}}}{\pi} = \frac{30 \cdot 1203}{3,14} = 11500 \text{ колеб/мин.}$$

Заметим, что практически нет необходимости выстраивать всю кривую L , как это было показано на фиг. 5; вполне достаточно ограничиться построением только участков этой кривой около точек пересечения ее с кривой D .

Аналитический подсчет угловых скоростей собственных колебаний нашей установки по методу Tolle¹⁾ дал следующие значения

$$\omega_1 = 346,1 \text{ сек}^{-1},$$

$$\omega_{\text{II}} = 502 \text{ сек}^{-1},$$

$$\omega_{\text{III}} = 1205 \text{ сек}^{-1}.$$

Мы приводим здесь таблицы этих подсчетов для следующих значений ω ²⁾ (см. приложение):

Одноузловые колебания $\omega = 345; 346; 347 \text{ сек}^{-1}$,

двуухзловые колебания $\omega = 501; 502; 503 \text{ сек}^{-1}$,

трехузловые колебания $\omega = 1204; 1205 \text{ сек}^{-1}$.

(При подсчете табл. Tolle мы пользовались таблицами логарифмов).

Обращая здесь внимание на перемену знака остаточного момента R , можно на основании этих таблиц написать следующие соотношения для угловых скоростей собственных колебаний:

$$345 < \omega_1 < 347$$

$$501 < \omega_{\text{II}} < 503$$

$$1204 < \omega_{\text{III}} < 1205$$

Отсюда интерполяцией (пользуясь указанными в таблицах значениями R) получаем указанные выше величины $\omega_1, \omega_{\text{II}}, \omega_{\text{III}}$.

1) M. Tolle. Regelung der Kraftmaschinen. 1921.

2) В этих таблицах e — упругий момент в данном участке вала, φ — амплитуды колебания соответствующих масс, c и Θ — имеют прежние значения.

Амплитуда колебания первой массы φ_1 принята равной одному радиану.

Сопоставление результатов, полученных графическим методом, изложенным в настоящей статье, с данными, полученными по методу Tolle, показывает полное их совпадение в отношении угловых скоростей одноузловых и двухузловых колебаний. Незначительное расхождение в величине $\omega_{\text{пп}}$ возникло вследствие неизбежных погрешностей графического построения. Но это расхождение ничтожно и практически не имеет никакого значения.

В качестве иллюстрации определим теперь угловые скорости собственных колебаний той же установки, но без динамо ($\Theta_{\text{n}} = 0$). В этом случае мы приходим к схеме по фиг. 3. Для нее по формулам (22-а) и (25):

$$\alpha_1 = \frac{\Theta_1}{\Theta} = 10,0,$$

$$\beta_1 = \frac{c_{\text{пп}}}{c} = 0,6,$$

$$\delta = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{10}{0,6} = 16,67,$$

и

$$L = \frac{\delta A - 1}{\alpha_1} = 1,667 \quad A = 0,1.$$

По этому уравнению строим прямую L на диаграмме D_4 (на фиг. 5 и 6 она обозначена через II). Она пересекает кривую D_4 в двух точках, абсциссы которых:

$$A_1' = 0,127$$

$$A_2' = 0,870$$

Теперь угловые скорости собственных колебаний:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{A_1' c}{\Theta}} = \sqrt{\frac{0,127 \cdot 5 \cdot 10^6}{3,0}} = 460 \text{ сек}^{-1},$$

$$\omega_{\text{пп}} = \sqrt{\frac{A_2' c}{\Theta}} = \sqrt{\frac{0,870 \cdot 5 \cdot 10^6}{3,0}} = 1203 \text{ сек}^{-1},$$

и соответственные числа собственных колебаний в минуту:

$$n_1 = 4390 \text{ колеб/мин.}$$

$$n_{\text{пп}} = 11500 \text{ колеб/мин.}$$

Аналитический подсчет, проведенный для этой системы по методу Tolle, дал те же значения:

$$\omega_1 = 460 \text{ сек}^{-1},$$

$$\omega_{\text{пп}} = 1203 \text{ сек}^{-1},$$

II.

Еще F. Porter¹⁾ показал, что для двигателей с достаточно большим числом цилиндров вполне возможна замена всех маховых масс двигателя одной массой, равномерно распределенной по всей длине коленчатого вала. Получающаяся при такой замене ошибка в определении частот собственных колебаний установок с многоцилиндровыми двигателями практически ничтожна, составляя доли процента и уменьшаясь с увеличением числа цилиндров²⁾. Так например, для шестицилиндрового двигателя эта ошибка меньше 0,5% и для десятицилиндрового—меньше 0,1%.

F. Porter дал метод аналитического определения частот собственных колебаний такой системы с равномерно распределенной по всему коленчатому валу маховой массой двигателя. Но этот метод все же достаточно громоздок и требует проведения ряда табличных вычислений.

Мы применим и здесь изложенный выше графический метод определения частот собственных колебаний. Ниже будет установлено, что для всех многоцилиндровых двигателей, с достаточно большим числом цилиндров (начиная примерно с шести цилиндров и выше) пригодна одна и та же кривая D.

Обозначим (фиг. 7):

Θ — момент инерции движущихся масс каждого цилиндра двигателя, относительно оси вращения вала,

m — масса движущихся частей каждого цилиндра, приведенная к радиусу кривошипа r ,

Θ_1 и Θ_{11} — как и ранее, моменты инерции масс обоих маховиков относительно той же оси,

l_0 — длина вала между осями соседних цилиндров, приведенная к определенному полярному моменту инерции J_p его поперечного сечения,

l_{m1}' — длина вала между концом распределенной массы двигателя и маховиком I, приведенная к тому же J_p ,

l_{111} — длина вала между маховиками I и II, приведенная к тому же J_p .

При обычном приведении масс и длин системы, каждый n — цилиндровый двигатель разбивается на n отдельных маховых масс, находящихся на расстоянии l_0 одна от другой. Полная упругая длина l_1 всего коленчатого вала равна расстоянию между обоями крайними массами двигателя.

Для того, чтобы иметь возможность приближенно рассматривать все маховые массы двигателя равномерно распределенными по всей длине его вала, необходимо, как показано на фиг. 7, к длине l_1 с обеих сторон добавить по $\frac{l_0}{2}$.

1) F. Porter, Transactions A. S. M. E., Vol. 52 (1931).

2) Предложенный I. Geiger'ом метод замены всех масс двигателя одной суммарной массой, приложенной на середине длины коленчатого вала, часто ведет к очень большим ошибкам в определении Φ и потому не может быть рекомендован.

Теперь суммарную приведенную массу $\sum_1^n m$ шатунно-кривошипных механизмов всех цилиндров считаем равномерно распределенной по длине $l = nl_0$ коленчатого вала. На единицу длины вала теперь приходится масса с моментом инерции:

$$\frac{\Theta_n}{l},$$

где

$$\Theta_n = \sum_1^n \Theta = n \Theta.$$

Участок вала l , длиною dx (фиг. 8) несет массу dm с моментом инерции:

$$d\Theta_n = \frac{\Theta_n}{l} dx$$

Жесткость вала l очевидно равна:

$$c_n = \frac{G \cdot I_p}{l}$$

и соответственно:

$$c'_{n1} = \frac{G \cdot I_p}{l'_{n1}},$$

$$c_{1, n} = \frac{G \cdot I_p}{l_{1, n}}.$$

При колебательном движении системы, мгновенный угол поворота φ каждого сечения вала l зависит от времени (t) и положения данного сечения (x) (фиг. 8):

$$\varphi = f(x, t).$$

При этом инерционный момент, создаваемый элементарной массой dm вала l определяется выражением:

$$dM = -d\Theta_n \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\Theta_n}{l} dx \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Проведем в валу l сечение, удаленное на расстояние x от левого конца системы. Сумма инерционных моментов всех элементарных масс dm , лежащих слева от сечения x , равна моменту, скручивающему вал в этом сечении, т. е.

$$\int_0^x -\frac{\Theta_n}{l} dx \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + G \cdot I_p \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

(второе слагаемое в этом выражении означает упругий момент вала в сечении x ; производная $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ очевидно является мерой скручивания вала на участке dx).

Возьмем частную производную по x от обеих частей этого выражения:

$$\frac{\Theta_n}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = G \cdot I_p \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Обозначая:

$$\frac{G \cdot J_p l}{\Theta_n} = a^2 \dots \dots \dots \quad (34)$$

получим так, наз. дифференциальное уравнение колебания струны:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Общий интеграл этого дифференциального уравнения в частных производных, как известно, может быть написан в следующем виде: ¹⁾

$$\varphi = (A_1 \cos akt + A_2 \sin akt) \cdot (A_3 \cos kx + A_4 \sin kx), \dots \quad (35)$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 и k — постоянные интегрирования, определяемые начальными и граничными условиями.

Полагая:

$$\begin{aligned} &\text{при } t=0 \text{ и } x=0 \quad \varphi=0, \\ &\text{при } t=0 \text{ и } x=l \quad \varphi=0, \end{aligned}$$

из (35) получим:

$$\varphi = A_2 \sin akt \cdot (A_3 \cos kx + A_4 \sin kx). \dots \quad (36)$$

При свободных колебаниях системы левый конец вала свободен и не подвергается действию скручивающих моментов, т. е.:

$$\text{при } x=0, \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

При этом условии из (36):

$$A_4 = 0$$

и

$$\varphi = A_2 \sin akt \cdot A_3 \cos kx,$$

или:

$$\varphi = \varphi_0 \sin akt \cdot \cos kx, \dots \quad (37)$$

Здесь φ_0 очевидно является амплитудой колебания левого свободного конца вала l . Произведение

$$ak = \omega$$

¹⁾ См. напр. А. Н. Крылов. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. 1932.

означает угловую скорость колебания вала. Отсюда

$$\kappa = \frac{\omega}{a},$$

и следовательно:

$$\varphi_x = \varphi_0 \sin \omega t \cdot \cos \frac{\omega}{a} x \dots \dots \dots \quad (38)$$

Мы ставим при φ индекс x , так как выражение (38) дает величину мгновенного угла отклонения сечения x вала l .

Инерционный момент всей массы $\sum^n m$ двигателя, скручивающий вал на участке l_n равен:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^l -d\Theta_n \cdot \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} = \int_0^l \frac{\Theta_n}{l} dx \cdot \varphi_0 \omega^2 \sin \omega t \cdot \cos \frac{\omega}{a} x = \\ &= \frac{\Theta_n}{l} \varphi_0 a \sin \omega t \cdot \sin \frac{\omega l}{a} \dots \dots \dots \quad (39) \end{aligned}$$

Всю массу $\sum^n m$ двигателя, равномерно распределенную по валу l можно заменить некоторой сосредоточенной массой с моментом инерции $\frac{\Theta_n}{D}$, приложенной в конечном ($x = l$) сечении вала двигателя. Эквивалентность этих масс будет осуществлена, если инерционные моменты, создаваемые ими будут равны между собою, т. е. необходимо:

$$\frac{\Theta_n}{l} a \varphi_0 \omega \sin \omega t \cdot \sin \frac{\omega l}{a} = \frac{\Theta_n}{D} \omega^2 \varphi_l \sin \omega t, \dots \dots \quad (40)$$

где φ_l — амплитуда колебания правого конца вала.

Из (38) при $x = l$:

$$\varphi_l = \varphi_0 \cos \frac{\omega l}{a}.$$

Подставляя в равенство (40) это значение φ_l найдем:

$$D = \frac{\omega l}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\omega l}{a}}.$$

Но на основании (34) и (35), заменяя в (5) Θ через Θ_n :

$$\frac{\omega l}{a} = \sqrt{\frac{G \cdot I_p l}{\Theta_n}} = \sqrt{\frac{\Theta_n \omega^2}{c_n}} = \sqrt{A}.$$

Теперь окончательно:

$$D = \frac{\sqrt{A}}{\operatorname{tg} \sqrt{A}} \quad \dots \quad (41)$$

Коэффициент D здесь имеет совершенно тот же смысл и значение, как и в рассмотренном выше случае графического определения частот собственных колебаний системы с рядом одинаковых средоточенных масс. Отличие только в том, что в формуле (5) для A :

$$A = \frac{\Theta_n \omega^2}{c_n}$$

теперь необходимо понимать под Θ_n — суммарный момент инерции всех маховых масс двигателя и под c_n жесткость всего вала двигателя длиною l .

Кривая D по уравнению (41) построена на фиг. 9 в координатах D и A . Она, очевидно, пригодна теперь для любого двигателя с достаточно большим числом цилиндров. Конечно, этой кривой можно пользоваться и для двигателей с малым числом цилиндров, но при этом погрешность в определении частот собственных колебаний системы несколько возрастает.

Для каждой заданной расчитываемой установки с известными массами и приведенными длинами или жесткостями валов, пользуясь соотношениями (22) и (23) подсчитываем величину L по формулам (24) или (25) в виде алгебраической функции от A . Здесь под Θ и c согласно сказанному выше, понимаем суммарный момент инерции всех маховых масс двигателя и соответственно жесткость всего вала l . Длина l определяется соответственно указаниям на стр. 18.

Теперь на графике $D = f(A)$ выстраиваем по точкам кривую $L = F(A)$, откладывая по ординатам значения L , подсчитанные для различных принимаемых значений A . Пересечение этой кривой с кривой D дает точки, абсциссы которых A позволяют определить угловые скорости ω собственных колебаний системы по формуле:

$$\omega = \sqrt{\frac{A \cdot c_n}{\Theta_n}},$$

как и ранее.

Для системы с одним маховиком построения значительно упрощаются, так как здесь кривая L обращается в прямую, определяемую уравнением (25).

Применим изложенный метод к рассмотренной выше, на стр. 14 установке: четырехцилиндровый дизель-маховик. Заменим эту установку системой по фиг. 7. Согласно указаниям на стр. 18 подсчитываем для нее следующие данные:

Величина момента инерции равномерно распределенной массы:

$$\Theta_n = n \Theta = 4,3,0 = 12,0 \text{ кг м сек}^2.$$

Жесткость вала длиною $l = nl_0$ (фиг. 7) несущего эту массу:

$$c_n = \frac{c}{n}$$

где c — жесткость участка вала между осями соседних цилиндров, n — число цилиндров; в нашем случае:

$$c_n = \frac{5 \cdot 10^6}{4} = 1,25 \cdot 10^6$$

Жесткость c_{n1}' вала l_{n1}' между концом распределенной массы двигателя и маховиком I может быть найдена из выражения:

$$\frac{1}{c'_{n1}} = \frac{1}{c_{n1}} - \frac{1}{2c},$$

где c_{n1} — жесткость участка вала между осью последнего цилиндра и маховиком I (см. фиг. 4), $2c$ — жесткость участка коленчатого вала длиной $\frac{l_0}{2}$ равной половине расстояния между осями соседних цилиндров. Отсюда, при (согласно данным на стр. 14):

$$C_{n1} = 3 \cdot 10^6 \text{ кгм/радиан},$$

$$C = 5 \cdot 10^6 \text{ кгм/радиан},$$

получаем:

$$c_{n1}' = 4,28 \cdot 10^6 \text{ кгм/радиан}.$$

В соответствии со сказанным на стр. 22 подсчитываем коэффициенты по формулам (22-а):

$$\alpha_1 = \frac{\Theta_1}{\Theta_n} = \frac{30,0}{12,0} = 2,5$$

$$\beta_1 = \frac{c_{n1}'}{c_n} = \frac{4,28 \cdot 10^6}{0,25 \cdot 10^6} = 3,43$$

$$\delta = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{2,5}{3,43} = 0,729.$$

Теперь по (25) получаем уравнение для L :

$$L = \frac{0,729 A - 1}{2,5} = 0,291 A - 0,4.$$

Построив эту прямую на диаграмме D (фиг. 9), получаем следующие значения абсцисс точек пересечения ее с кривой D ¹⁾.

$$\begin{aligned} A_1 &= 2.07 \\ A_2 &= 15.23 \end{aligned}$$

Отсюда угловые скорости собственных колебаний системы:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{\frac{A_1 \cdot c_n}{\Theta_n}} = \sqrt{\frac{2,07 \cdot 1,25 \cdot 10^6}{12,0}} = 464,0 \text{ сек}^{-1}, \\ \omega_{II} &= \sqrt{\frac{A_2 \cdot c_n}{\Theta_n}} = \sqrt{\frac{15,13 \cdot 1,25 \cdot 10^6}{12,0}} = 1260 \text{ сек}^{-1},\end{aligned}$$

и соответственные числа колебаний в минуту

$$n_1 = \frac{30 \omega_1}{\pi} = 4430 \text{ колеб/мин.}$$

$$n_{II} = \frac{30 \omega_{II}}{\pi} = 12030 \text{ колеб/мин } ^2).$$

Из сравнения этих значений с приведенными выше данными, полученными в результате аналитического расчета по методу Tolle:

$$\omega_1 = 460 \text{ сек}^{-1}, \text{ и } \omega_{II} = 1205 \text{ сек}^{-1},$$

можно подсчитать величину погрешности в определении ω , возникающей при замене всех масс двигателя одной, равномерно—распределенной массой. Эта погрешность получилась равной 0,86% для ω_1 и 4,56% для ω_{II} .

Такая ошибка в определении угловых скоростей собственных колебаний еще допустима во многих случаях практики, тем более, что для двигателей с большим, нежели четыре, числом цилиндров, она получается еще меньше.

Необходимо отметить, что применение метода замены всех масс двигателя одной равномерно-распределенной массой, может быть оправдано только при отсутствии готовых кривых D для данного числа цилиндров.

При многократном проведении расчетов на крутильные колебания наиболее целесообразно заранее вычертить в достаточно большом масштабе кривые D по уравнениям (14) для всех требуемых чисел цилиндров и пользоваться ими согласно сказанному в разделе I настоящей статьи. *

¹⁾ На фиг. 9 прямая L обозначена цифрой I.

¹⁾ Совершенно аналогично можно было бы определить значения ω_1 , ω_{II} и т. д. и для системы с двумя большими массами по фиг. (7), выстраивая на диаграмме D (фиг. 9) кривую L , по уравнению (24). Мы не приводим здесь пример такого расчета ввиду недостатка места.

Табл. 1

Приложение

 $\omega = 345$ сек.

	e	c	$-\Theta \omega^2$	φ
	$-3.5707 \cdot 10^5$	=	$-3.5707 \cdot 10^5$	+ 1.00000
1,2	-3.5707	: $5 \cdot 10^6$		- 0.07141
	-3.3157	=	-3.5707	+ 0.92859
2,3	-6.8864	: $5 \cdot 10^6$		- 0.13773
	-2.8239	=	-3.5707	+ 0.79086
3,4	-9.7103	: $5 \cdot 10^6$		- 0.19421
	-2.1305	=	-3.5707	+ 0.59665
4,5	-11.8408	: $3 \cdot 10^6$		- 0.39427
	-7.2264	=	-35.707	+ 0.20238
5,6	-19.0672	: $2 \cdot 10^6$		- 0.95386
	$+18.7833$	=	-24.995	- 0.75148
$R = -0.2839 \cdot 10^5$				6

Табл. 2

 $\omega = 346$ сек.

	e	c	$-\Theta \omega^2$	φ
	$-3.5915 \cdot 10^5$	=	$-3.5915 \cdot 10^5$	+ 1.00000
1,2	-3.5915	: $5 \cdot 10^6$		- 0.07183
	-3.3335	=	-3.5915	+ 0.92817
2,3	-6.9250	: $5 \cdot 10^6$		- 0.13850
	-2.8361	=	-3.5915	+ 0.78967
3,4	-9.7611	: $5 \cdot 10^6$		- 0.19522
	-2.1315	=	-3.5915	+ 0.59445
4,5	-11.8961	: $3 \cdot 10^6$		- 0.39614
	-7.1223	=	-35.915	+ 0.19831
5,6	-19.0184	: $2 \cdot 10^6$		- 0.95092
	$+18.9200$	=	-25.139	- 0.75261
$R = -0.0384 \cdot 10^5$				6

$\omega = 347 \text{ сек.}^{-1}$

Табл. 3

	e	c	$-\Theta \omega^2$	φ	
	$-3.6123 \cdot 10^5$	=	$-3.6123 \cdot 10^5$	$+1.00000$	1
1,2	-3.6123	$: 5 \cdot 10^6$		-0.07225	
	-3.3513	=	-3.6123	$+0.92775$	2
2,3	-6.9636	$: 5 \cdot 10^6$		-0.13927	
	-2.8482	=	-3.6123	$+0.78848$	3
3,4	-9.8118	$: 5 \cdot 10^6$		-0.19624	
	-2.1393	=	-3.6123	$+0.59224$	4
4,5	-11.9511	$: 3 \cdot 10^6$		-0.13170	
	-5.7992	=	-3.6123	$+0.16054$	5
5,6	-17.7503	$: 2 \cdot 10^6$		-0.88751	
	$+18.1290$	=	-25.286	-0.71697	6
$R = +0.3787 \cdot 10^5$					

 $\omega = 501 \text{ сек.}^{-1}$

Табл. 4

	e	c	$-\Theta \omega^2$	φ	
	$-7.5300 \cdot 10^5$	=	$-7.530 \cdot 10^5$	$+1.00000$	1
1,2	-7.5300	$: 5 \cdot 10^6$		-0.15060	
	-6.3989	=	-7.530	$+0.84940$	2
2,3	-13.9289	$: 5 \cdot 10^6$		-0.27858	
	-4.2983	=	-7.530	$+0.57082$	3
3,4	-18.2272	$: 5 \cdot 10^6$		-0.36454	
	-1.5453	=	-7.530	$+0.20528$	4
4,5	-19.7725	$: 3 \cdot 10^6$		-0.65842	
	$+34.1215$	=	-75.30	-0.45314	5
5,6	$+14.3490$	$: 2 \cdot 10^6$		$+0.71745$	
	-13.9318	=	-52.710	$+0.26431$	6
$R = +0.4172 \cdot 10^5$					

Табл. 5

 $\omega = 502 \text{ сек.}$

	<i>e</i>	<i>c</i>	$-\Theta \omega^2$	φ
	$-7.5601 \cdot 10^5$	=	$-7.5601 \cdot 10^5$	+ 1.0000 1
1,2	-7.5601	: $5 \cdot 10^6$		- 0.15120
	-6.4170	=	-7.5601	+ 0.84880 2
2,3	-13.9771	: $5 \cdot 10^6$		- 0.27954
	-4.3036	=	-7.5601	+ 0.56926 3
3,4	-18.2807	: $5 \cdot 10^6$		- 0.36561
	-1.5396	=	-7.5601	+ 0.20365 4
4,5	-19.8203	: $3 \cdot 10^6$		- 0.66000
	$+34.5005$	=	-75.601	- 0.45635 5
5,6	$+14.6802$: $2 \cdot 10^6$		+ 0.73401
	-14.6940	=	-52.921	+ 0.27766 6
$R = -0.0138 \cdot 10^5$				

 $\omega = 503 \text{ сек.}$

Табл. 6

		<i>c</i>	$-\Theta \omega^2$	φ
		$-7.5903 \cdot 10^5$	$-7.5903 \cdot 10^5$	+ 1.00000 1
1,2	-7.5903	: $5 \cdot 10^6$		- 0.15181
	-6.4380	=	-7.5903	+ 0.84819 2
2,3	-14.0283	: $5 \cdot 10^6$		- 0.28057
	-4.3084	=	-7.5903	+ 0.56762 3
3,4	-18.3367	: $5 \cdot 10^6$		- 0.36673
	-1.5248	=	-7.5903	+ 0.20089 4
4,5	-19.8615	: $3 \cdot 10^6$		- 0.66139
	$+34.9530$	=	-75.903	- 0.46050 5
5,6	$+15.0915$: $2 \cdot 10^6$		+ 0.75457
	-15.6244	=	-53.132	+ 0.29407 6
$R = -0.5329 \cdot 10^5$				

Табл. 7

 $\omega = 1204 \text{ сек.}$

	e	c	$-\Theta \omega^2$	φ	
	$-43.488 \cdot 10^5$	=	$-43.488 \cdot 10^5$	+ 1.0000	1
1,2	-43.488	$: 5 \cdot 10^6$		- 0.86976	
	-5.664	=	-43.488	+ 0.13024	2
2,3	-49.152	$: 5 \cdot 10^6$		- 0.98304	
	$+37.087$	=	-43.488	- 0.85280	3
3,4	-12.065	$: 5 \cdot 10^6$		- 0.24130	
	$+47.580$	=	-43.488	- 1.09410	4
4,5	$+35.515$	$: 3 \cdot 10^6$		+ 1.18265	
	-38.509	=	-434.88	+ 0.08855	5
5,6	-3.094	$: 2 \cdot 10^6$		0.15470	
	$+2.014$	=	-304.42	- 0.06615	6
$R = -1.080 \cdot 10^5$					

Табл. 8

 $\omega = 1205 \text{ сек.}$

	e	c	$-\Theta \omega^2$	φ	
	$-43.560 \cdot 10^5$	=	$-43.560 \cdot 10^5$	+ 1.00000	1
1,2	-43.560	$: 5 \cdot 10^6$		- 0.87121	
	-5.610	=	-43.560	+ 0.12879	2
2,3	-49.170	$: 5 \cdot 10^6$		- 0.98342	
	$+37.228$	=	-43.560	- 0.85463	3
3,4	-11.942	$: 5 \cdot 10^6$		- 0.23884	
	$+47.634$	=	-43.560	- 1.09347	4
4,5	$+35.692$	$: 3 \cdot 10^6$		+ 1.18854	
	-41.414	=	-435.60	+ 0.09507	5
5,6	-5.722	$: 2 \cdot 10^6$		- 0.28610	
	$+5.825$	=	-304.93	- 0.19103	6
$R = +0.103 \cdot 10^5$					

SUMMARY.

The determination of frequencies of natural vibrations of a shaft forms the first and the most important stage of every calculation of power plants with piston engines.

It is known that a general way for determining the frequencies of natural torsional vibrations of a shaft having several masses fixed over it consists in the solution of a system of linear differential equations. The solution of this system of equations for a shaft with many masses is very cumbersome and does not suit to the purposes of practice.

The existing more practical methods for determining the frequencies of natural vibrations give the solution sought for, as a result of a series of tests and of successive approximations, and require a great amount of calculations.

This article describes a graphical method permitting to determine without long trial estimates the frequencies of natural vibrations of a shaft with n equal masses being an equal distance apart and with one or two large fly wheels (this being the case in Diesel Fly Wheel Dynamo and in a series of ship screw installations).

This method is based on the following statement proved in this article: the sum of moments of inertia of all the masses of the system reduced to one point and to one section of the shaft, the vibrations of the system being free, is equal to zero.

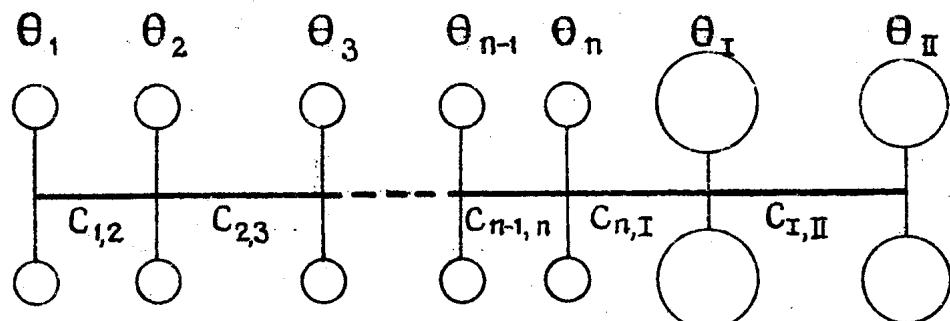
For the determination of frequencies of natural vibrations by the given method, it is necessary to find the points of intersection of two curves $D_n = f(A)$ and $L = F(A)$ constructed in the coordinates A (the axle of abscissas), and D, L the axle of ordinates). The value D_n depends only on n —number of cylinders of the engine and on the parameter A . A curve $D_n = f(A)$ may be constructed once and for all for each n . Every such curve is entirely suitable for any installation with an engine having a given number of cylinders.

The value L depends on the parameter A , and also on the relative value of the moments of inertia of the masses of the system and on the stiffness of the sections of the shaft between them. The parameter A is a function of the angular speed of natural torsional vibrations.

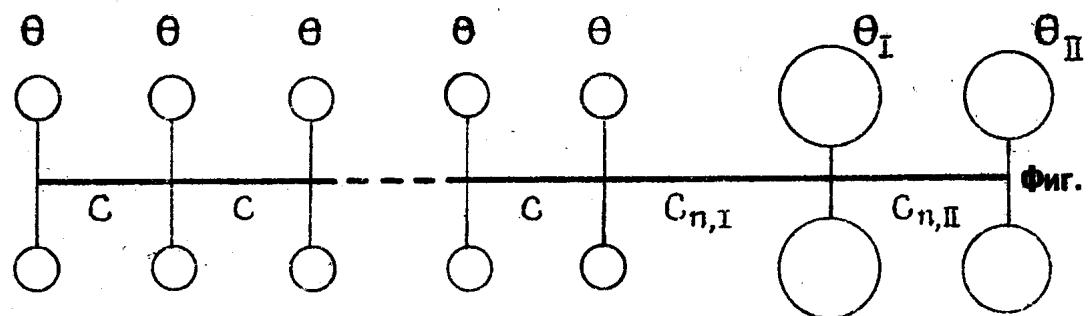
The method of determining the natural frequencies of vibrations given in the first part of the article proves to be quite precise including only those mistakes which are unavoidable with any graphical construction.

A comparison of the results of the estimate of one exemplary installation by the given method with those of the estimate by the Tolle method shows their total coincidence.

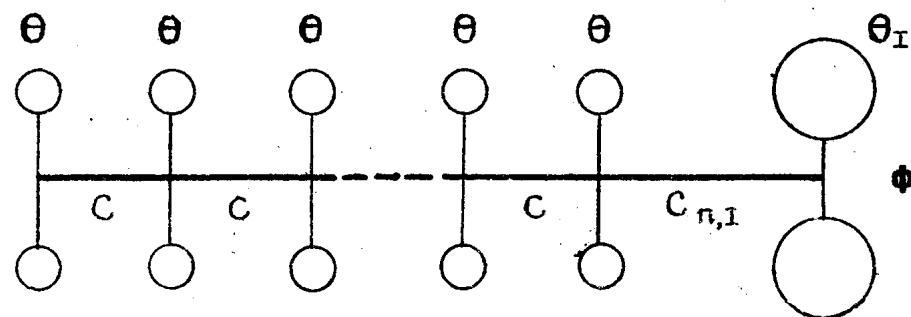
In the second part of the article the author shows the possibility of a still further simplification of the solution of the problem of determining the frequencies of natural vibrations by replacing all the concentrated masses of the engine by one mass uniformly distributed over its shaft. In this case for engines with any (but not a too small) number of cylinders the same curve $D_n = F(A)$ is suitable.



Фиг. 1.



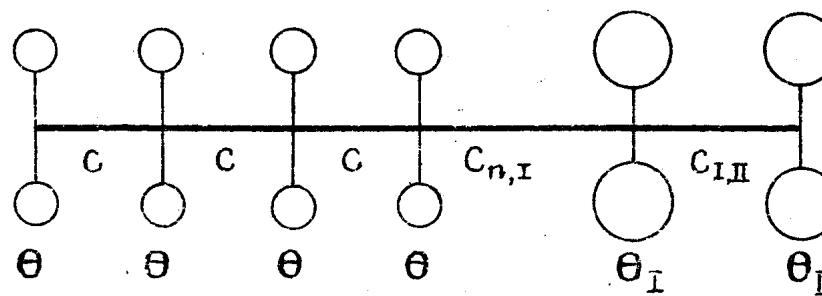
Фиг. 2.



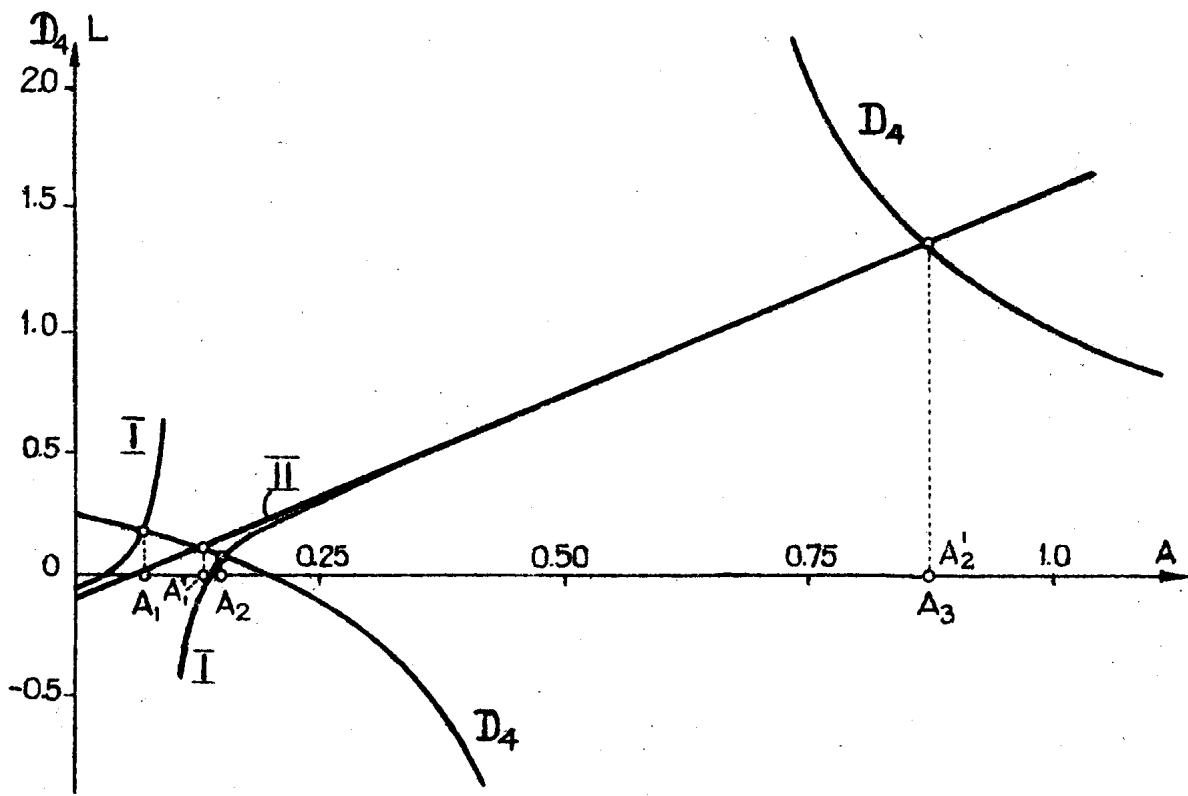
Фиг. 3.

Двигатель

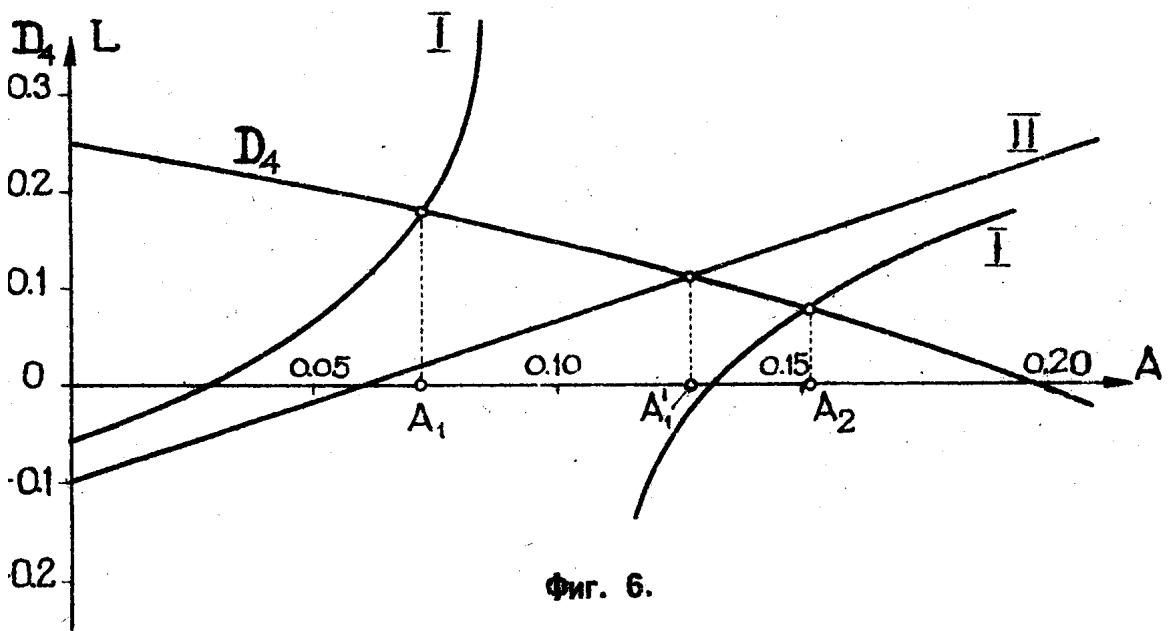
Маховик Динамо



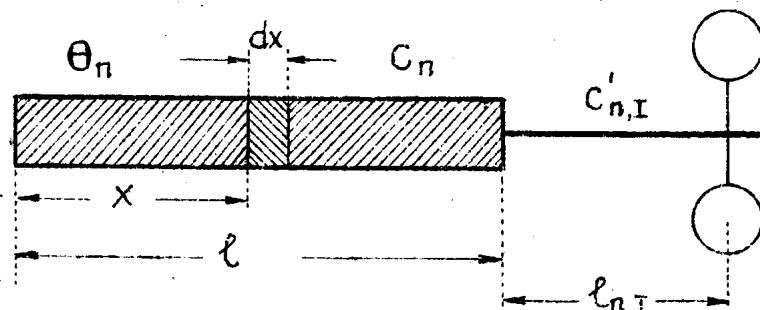
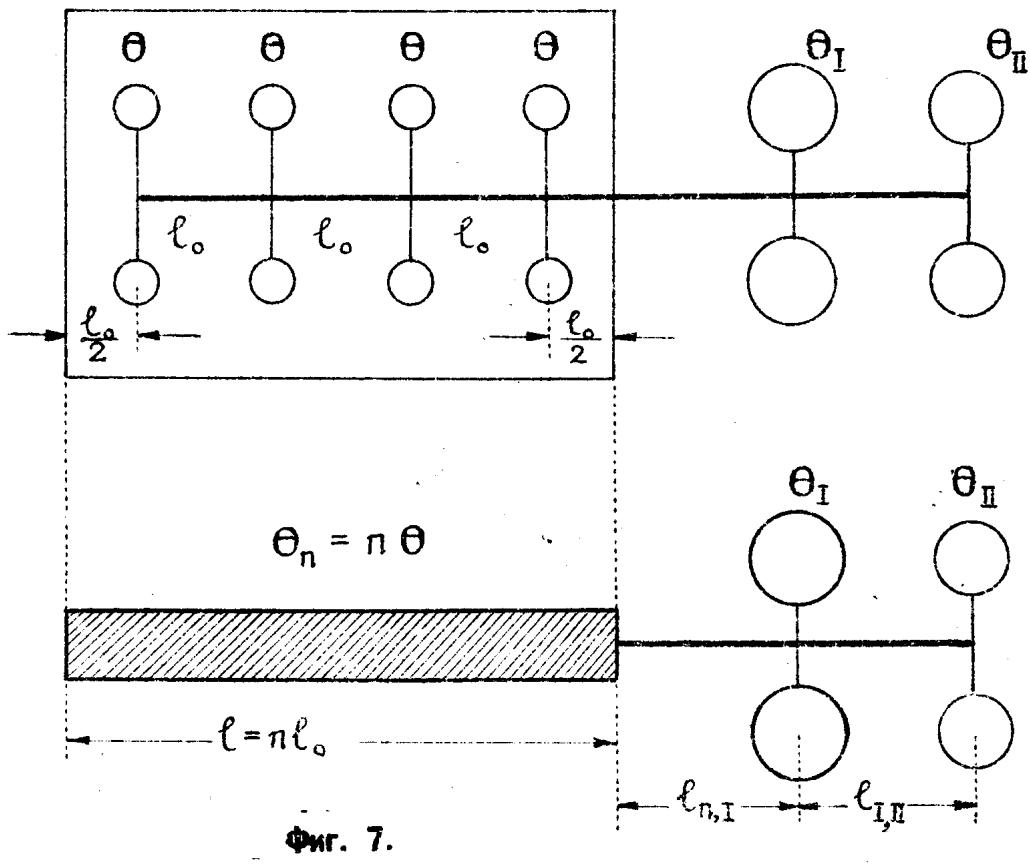
Фиг. 4.

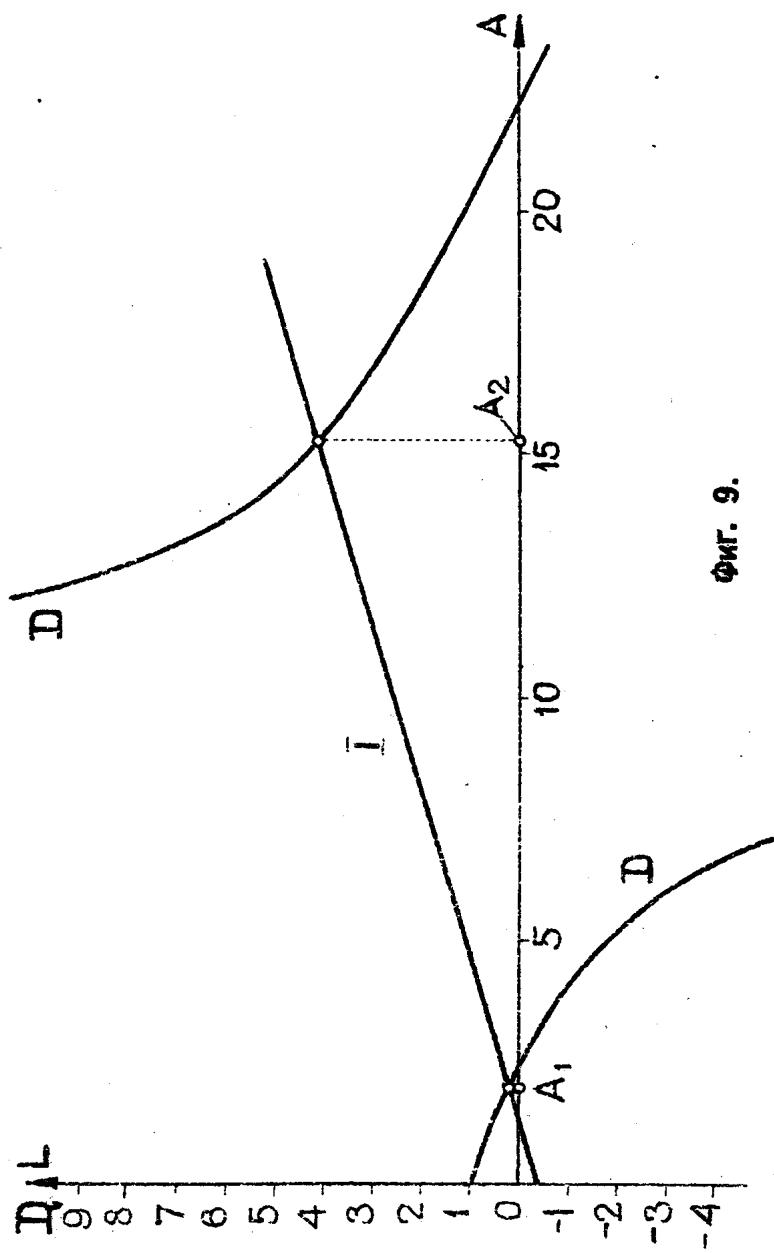


Фиг. 5.



Фиг. 6.





Фиг. 9.