

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

**Хожаев Иван Валерьевич**

**СИНТЕЗ АДАПТИВНОГО И РОБАСТНОГО РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ  
МОДАЛЬНОГО ДВУХРЕЖИМНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ  
НЕОБИТАЕМОГО ПОДВОДНОГО АППАРАТА**

2.3.1 – Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Научный руководитель:  
кандидат технических наук, доцент  
Гайворонский Сергей Анатольевич

Томск – 2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
1 АНАЛИЗ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ НЕОБИТАЕМЫХ ПОДВОДНЫХ АППАРАТОВ .....	16
1.1 Классификация необитаемых подводных аппаратов.....	16
1.2 Анализ проблем применения необитаемых подводных аппаратов для проведения подводных исследований .....	18
1.3 Анализ подходов к проектированию систем автоматического управления движением необитаемых подводных аппаратов.....	23
1.3.1 Проектирование структуры системы управления движением НПА .....	23
1.3.2 Исполнительный уровень системы управления движением НПА .....	26
1.3.2.1 Особенности элементов системы управления движением НПА .....	26
1.3.2.2 Анализ подходов к синтезу регуляторов системы управления движением НПА .....	30
1.4 Постановка проблемы исследования .....	32
1.5 Основные результаты .....	35
2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО УРОВНЯ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ НЕОБИТАЕМОГО ПОДВОДНОГО АППАРАТА .....	37
2.1 Математическое моделирование ДРК НПА.....	40
2.1.1 Математическое моделирование двигателя постоянного тока .....	41
2.1.2 Математическое моделирование работы гребного винта.....	42
2.1.3 Математическая модель движителя с гребным винтом.....	44
2.2 Математическое моделирование процесса движения НПА .....	46
2.3 Модель системы управления движением НПА в вертикальной плоскости .	54
2.3.1 Оценка параметров системы .....	55

2.3.1.1	Оценка параметров ДРК НПА .....	55
2.3.1.2	Оценка параметров НПА.....	59
2.3.2	Структура и модель системы управления движением НПА в вертикальной плоскости.....	67
2.4	Основные результаты .....	70
3	ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ПРОВЕРОЧНЫХ ВЕРШИН ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО МНОГОГРАННИКА ДЛЯ РАСПОЛОЖЕНИЯ ПОЛЮСОВ СИСТЕМЫ В СООТВЕТСТВИИ С ПРИНЦИПОМ ДОМИНИРОВАНИЯ.....	72
3.1	Интервальное расширение фазовых уравнений теории корневого годографа .....	75
3.1.1	Фазовое уравнение корневого годографа.....	75
3.1.2	Многогранник коэффициентов интервального характеристического полинома и устойчивость систем автоматического управления с интервальными параметрами.....	76
3.1.3	Интервальные фазовые неравенства корневого годографа.....	79
3.2	Наборы проверочных вершин для размещения доминирующих полюсов системы автоматического управления с интервальными параметрами.....	81
3.2.1	Набор вершин для размещения одного доминирующего полюса в заданном отрезке вещественной оси.....	81
3.2.2	Набор вершин для размещения пары комплексно-сопряженных доминирующих полюсов.....	84
3.3	Наборы проверочных вершин для размещения свободных полюсов системы автоматического управления с интервальными параметрами .....	93
3.3.1	Наборы проверочных вершин для обеспечения заданной степени доминирования путем размещения пары свободных комплексно-сопряженных полюсов.....	93

3.3.2	Наборы вершин для обеспечения желаемой степени робастной колебательности свободного полинома.....	104
3.4	Основные результаты .....	110
4	МЕТОДИКИ СИНТЕЗА МОДАЛЬНЫХ РОБАСТНЫХ И АДАПТИВНО-РОБАСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ Пониженного порядка на основе принципа доминирования полюсов .....	112
4.1	Формализация задачи синтеза модального регулятора пониженного порядка с применением принципа доминирования полюсов для систем автоматического управления с интервальными параметрами .....	112
4.2	Размещение свободных полюсов системы автоматического управления с интервальными параметрами в желаемой области комплексной плоскости ...	114
4.3	Размещение доминирующих полюсов системы автоматического управления с интервальными параметрами в желаемых областях и точках комплексной плоскости .....	118
4.4	Методики синтеза модальных робастных и адаптивно-робастных регуляторов пониженного порядка и примеры их применения.....	122
4.4.1	Методика синтеза робастного ПИД-регулятора, обеспечивающего расположение доминирующих полюсов в заданных областях .....	123
4.4.1.1	Пример расположения одного доминирующего полюса в заданном отрезке вещественной оси.....	124
4.4.1.2	Пример расположения двух комплексно-сопряженных доминирующих полюсов в заданных областях .....	129
4.4.2	Методика синтеза адаптивно-робастного регулятора для расположения вещественного доминирующего полюса в заданной точке.....	132
4.4.2.1	Пример расположения вещественного доминирующего полюса в заданной точке.....	134



4.4.2.2	Пример расположения двух комплексно-сопряженных доминирующих полюсов в заданных точках .....	138
4.5	Основные результаты .....	142
5	СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ И ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ НПА В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ .....	144
5.1	Синтез регуляторов системы управления движением НПА в вертикальной плоскости .....	144
5.1.1	Синтез робастных регуляторов по задающему воздействию .....	144
5.1.2	Синтез адаптивно-робастных регуляторов по задающему воздействию .....	154
5.1.3	Синтез регуляторов по возмущающему воздействию .....	164
5.2	Имитационное моделирование двухрежимной системы управления движением НПА в вертикальной плоскости .....	171
5.2.1	Имитационное моделирование работы двухрежимного канала управления скоростью движения НПА маршем .....	171
5.2.2	Имитационное моделирование двухрежимной трехсвязной системы управления движением НПА в вертикальной плоскости .....	180
5.3	Основные результаты .....	185
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	187
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	189
	ПРИЛОЖЕНИЕ 1 .....	202

## ВВЕДЕНИЕ

Решение многих промышленных и исследовательских задач требует выполнения подводных работ. Длительность и условия выполнения таких работ часто не позволяют производить их людям и требуют применения телеуправляемых или автономных необитаемых подводных аппаратов (НПА). Актуальность развития подводной робототехники в России закреплена в Морской доктрине Российской Федерации и Стратегии научно-технического развития Российской Федерации. В свою очередь эффективная работа НПА невозможна без качественного управления его движением.

Проанализировав практику применения НПА [1-29] и проблемы управления его движением [30-92], можно утверждать, что управление движением НПА осложняется особенностями самого НПА и свойствами окружающей его водной среды. Авторы [30, 31, 40, 47, 56, 58, 62, 64] отмечают, что движители, составляющие движительно-рулевой комплекс (ДРК) НПА, характеризуются нелинейностью, описываемой квадратичной зависимостью упора гребного винта от частоты его вращения, а также нестационарностью передаточного коэффициента в этой зависимости. В работах [30, 31, 62] также показана нелинейность зависимостей гидродинамических сил и моментов от скорости движения НПА в вязкой жидкости и нестационарность коэффициентов в этих зависимостях. Таким образом, актуальна задача синтеза систем автоматического управления движением НПА, учитывающих особенности НПА как объекта управления. Известны различные варианты структур таких систем, однако во всех них выделяют исполнительный уровень, осуществляющий непосредственное управление ДРК НПА, и обеспечивающий таким образом необходимые значения параметров движения НПА. На решение задачи синтеза исполнительного уровня системы автоматического управления движением НПА (далее – *системы управления движением*) и направлена данная работа.

Исследуя степень разработанности данной темы, можно сделать вывод, что в зависимости от сложности используемой модели системы управления движением для синтеза ее регуляторов применяются несколько подходов:

адаптивное управление [41, 42, 44, 55, 59, 88], управление на основе нечеткой логики [44, 72, 77-80] и управление на основе нейронных сетей [44, 82-86]. Перечисленные подходы позволяют обеспечить желаемые показатели качества системы с учетом ее особенностей, однако, ее синтез и реализация являются сложными задачами, требующими большого объема экспериментальных данных. В свою очередь системы управления движением на основе типовых линейных регуляторов просты в синтезе и реализации, однако не учитывают нестационарность параметров и нелинейность НПА, а также связность каналов управления движением в различных степенях свободы. Также известно, что качество траекторного и группового управления НПА может зависеть напрямую от стабильности значений корневых показателей качества системы управления движением [90, 92], что делает логичным применение модального подхода к синтезу.

Описание системы с помощью интервальных параметров позволило бы учесть перечисленные ранее особенности НПА и организовать управление движением НПА с помощью типовых регуляторов пониженного порядка. Известны подходы к модальному управлению системами с интервальными параметрами [93-98], однако, они либо предназначены для синтеза систем низкого порядка, либо не обеспечивают достаточной стабильности робастного качества. Предлагается разработать на основе принципа доминирования полюсов методики синтеза робастных регуляторов, обеспечивающих желаемые квазипостоянные значения корневых показателей робастного качества путем расположения соответствующим образом областей локализации доминирующих полюсов, и адаптивно-робастных регуляторов, обеспечивающих постоянные значения корневых показателей робастного качества путем стабилизации доминирующих полюсов в заданных точках комплексной плоскости. С учетом того, что измерительная информация, необходимая для подстройки коэффициентов адаптивно-робастного регулятора, может быть недоступна, логично будет организовать в системе управления движением два режима, соответствующих типам синтезируемых регуляторов: адаптивно-робастный с подстройкой

параметров и робастный с постоянными параметрами. Кроме того, исходя из сложной нелинейной формы зависимостей гидродинамических параметров от углов атаки и дрейфа, логично использовать робастный режим управления для больших значений этих углов, на которых линеаризация упомянутых зависимостей затруднительна. На прочих значениях углов атаки и дрейфа предлагается использовать линеаризованные зависимости гидродинамических параметров НПА для подстройки параметров адаптивно-робастного регулятора системы. Исходя из вышесказанного, можем сформулировать цель и задачи работы.

Цель работы: разработка и экспериментальное исследование математического аппарата для синтеза двухрежимной системы управления движением, имеющей желаемые значения корневых показателей робастного качества в условиях интервальности параметров НПА и окружающей его водной среды.

Для достижения поставленной цели необходимо решить ряд задач:

- сформулировать требования к системе по результатам анализа проблем применения НПА и их особенностей как объекта управления;
- разработать математическую модель системы с интервальными параметрами, включающую в себя передаточные функции каналов управления движением НПА в отдельных степенях свободы;
- определить набор вершин многогранника коэффициентов интервального характеристического полинома, определяющих положение доминирующих и свободных полюсов в различных вариантах их расположения на комплексной плоскости;
- разработать методики синтеза типовых робастных или адаптивно-робастных регуляторов пониженного порядка, обеспечивающих желаемые квазипостоянные или постоянные значения корневых показателей робастного качества за счет расположения областей локализации полюсов системы в соответствии с принципом доминирования;

– синтезировать двухрежимную систему управления движением в вертикальной плоскости, применив разработанные методики синтеза и математическую модель, и исследовать ее работоспособность на моделях разной сложности: на линейной модели с интервальными параметрами, использованной для синтеза модальных регуляторов; на модели одного из синтезированных каналов, учитывающей нелинейность элементов системы; на трехсвязной модели системы управления движением НПА в вертикальной плоскости для случая его движения по типовой траектории.

Научная новизна работы:

1. Предложена интервально-линеаризованная математическая модель нестационарной системы управления движением НПА в шести степенях свободы, декомпозированная заменой кинематических параметров движения в перекрестных связях на интервалы их значений.

2. Разработано правило поиска наборов вершин многогранника коэффициентов интервальных характеристических полиномов различных порядков, включающих в себя прообразы заданных комплексно-сопряженных доминирующих полюсов и граничных свободных полюсов систем управления.

3. Предложена и экспериментально проверена методика параметрического синтеза робастных модальных регуляторов пониженного порядка с постоянными параметрами, гарантирующих желаемые квазипостоянные значения корневых показателей робастного качества систем управления на основе известных принципа доминирования полюсов и метода вершинного D-разбиения.

4. Предложена и экспериментально проверена методика параметрического синтеза адаптивно-робастных модальных регуляторов пониженного порядка, гарантирующих желаемые постоянные значения корневых показателей робастного качества систем управления на основе известных принципа доминирования полюсов и метода вершинного D-разбиения.

Результаты работы позволяют синтезировать систему управления движением НПА с квазипостоянными или постоянными показателями робастного качества на основе типовых ПИ-регуляторов и ПИД-регуляторов. Такой подход

требует меньшего объема экспериментальных исследований НПА при идентификации, что упрощает разработку таких систем. Также применение разработанных методик синтеза регуляторов снимает необходимость учитывать параметрическую неопределенность НПА на вышестоящих уровнях системы и, соответственно, упрощает постановку задачи их синтеза. Предлагаемый подход может быть использован для синтеза систем управления движением мобильных роботов различных типов.

Результаты диссертационного исследования применены при выполнении НИР по грантам Госзадание «Наука» (проектная часть) №4.1751.ГЗП.2017 «Программно-измерительный комплекс для управления движением необитаемых подводных аппаратов в условиях нестационарности параметров» и РФФ №18-79-00264 «Разработка многорежимной системы управления движением необитаемого подводного аппарата с нестационарными параметрами на основе анализа взаимовлияния каналов регулирования».

Результаты работы используются в научно-исследовательской лаборатории телекоммуникаций, приборостроения и морской геологии Инженерной школы информационных технологий и робототехники ТПУ при разработке систем автоматического управления движением необитаемых подводных аппаратов.

Также результаты работы внедрены в учебный процесс Отделения автоматизации и робототехники Инженерной школы информационных технологий и робототехники ТПУ и используются при проведении лабораторных работ по дисциплинам «Теория автоматического управления» и «Моделирование систем управления» для студентов направлений 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств» и 15.03.06 «Мехатроника и робототехника». Кроме того, результаты работы использованы в научно-исследовательской деятельности ООО «50ом Тех.» для оценки устойчивости радиоэлектронных схем к технологическому разбросу параметров в условиях неустойчивости номиналов ее элементов в пределах известных допусков.

Для решения поставленных задач применялись методы математического анализа, теории автоматического управления, основы интервального анализа,

метод корневого годографа и его интервальное расширение. Для автоматизации расчетов по разработанным методикам параметрического синтеза регуляторов и имитационного моделирования движения НПА под управлением синтезированной системы применялись пакеты Mathcad и Matlab.

На защиту выносятся следующие положения.

1. Декомпозированная и линеаризованная математическая модель системы управления движением НПА, учитывающая параметрическую неопределенность элементов системы за счет ввода интервальных параметров, обеспечивает возможность синтеза системы с типовыми регуляторами пониженного порядка при сохранении работоспособности при имитационном моделировании работы в условиях нелинейности, многосвязности и нестационарности.

2. Выведенное на основе интервального расширения метода корневого годографа правило поиска координат проверочных вершин многогранника коэффициентов интервального характеристического полинома определяет вершины, образы которых составляют правые границы областей локализации пары комплексно-сопряженных доминирующих полюсов и свободных полюсов с учетом желаемой степени робастной колебательности системы.

3. Разработанная методика параметрического синтеза робастного ПИД-регулятора позволяет за счет расположения областей локализации одного вещественного или пары комплексно-сопряженных доминирующих полюсов и размещения свободных полюсов в соответствии принципом доминирования обеспечить желаемые значения корневых показателей робастного качества систем с интервальными параметрами.

4. Разработанная методика параметрического синтеза адаптивно-робастных регуляторов позволяет за счет расположения в желаемых точках комплексной плоскости одного вещественного (ПИ-регулятором) или пары комплексно-сопряженных (ПИД-регулятором) доминирующих полюсов и размещения свободных полюсов в соответствии с принципом доминирования обеспечить желаемые постоянные значения корневых показателей робастного качества систем с интервальными параметрами.

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректным применением перечисленных ранее теоретических методов, а также подтверждается данными вычислительных экспериментов.

Результаты исследований обсуждались в ходе следующих конференций: Технические проблемы освоения Мирового океана, 2017, Владивосток (Россия); International Conference on Mechanical, System and Control Engineering, 2017, Санкт-Петербург (Россия); 14th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics, 2017, Мадрид (Испания); International Conference on Robotics, Control and Automation Engineering, 2018, Пекин (Китай); Системный анализ, управление и навигация, 2019, Евпатория (Россия); 8th International Conference on Mechatronics and Control Engineering, 2019, Париж (Франция); 12th IFAC Conference on Control Applications in Marine Systems, Robotics, and Vehicles, 2019, Тэджон (Республика Корея); International Russian Automation Conference, 2019, Сочи (Россия); International Automatic Control Conference, 2019, Цзилун (Тайвань); IEEE International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, 2020, Сочи (Россия).

Основные результаты диссертационного исследования отражены в 19 работах: 8 статей в ведущих научных журналах и изданиях, рекомендуемых ВАК, все проиндексированы в базах Scopus и (или) Web of Science; 11 статей в сборниках трудов международных и российских конференций, 9 из которых проиндексированы в базе данных Scopus.

*Публикации в рецензируемых журналах из перечня ВАК*

1. Хожаев, И.В. Адаптивно-робастная стабилизация корневых показателей качества интервальных систем на основе метода доминирующих полюсов / И.В. Хожаев, С.А. Гайворонский, Т.А. Езангина // Проблемы управления. – 2019. – № 6. – С. 22-31 (Khozhaev, I.V. Adaptive-Robust Stabilization of Interval Control System Quality on a Base of Dominant Poles Method/ Khozhaev I.V., Gayvoronskiy S.A., Ezangina T.A. // Automation and Remote Control. – 2021. – Vol. 82. – P. 132-144) (WoS, Scopus).



2. Хожаев И.В., Определение вершинных полиномов для анализа степени робастной устойчивости интервальной системы / С.А. Гайворонский, Т.А. Езангина, И.В. Хожаев, А.А. Несенчук // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2019. – Т. 20, № 5. – С. 266-273 (Scopus).

3. Хожаев И.В., Параметрический синтез робастного регулятора на основе метода доминирующих полюсов / С.А. Гайворонский, Т.А. Езангина, И.В. Хожаев // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2020. – Т. 21, № 1. – С. 14-20 (Scopus).

4. Khozhaev, I.V. Motion control system for a remotely operated vehicle with interval parameters / S.A. Gayvoronskiy, I.V. Khozhaev, T.A. Ezangina // International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research. – 2017. – Vol. 6, No. 5. – P. 378-384 (Scopus).

5. Khozhaev I.V. Adaptive Robust Stabilization of an Aperiodic Transient Process Control Quality in Systems with Interval Parametric Uncertainty // IFAC-PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, No 32. – P. 826-831 (Scopus).

6. Khozhaev I.V., Multivariable control system of vertical motion for an unmanned underwater vehicle with interval parameters / I.V. Khozhaev, T.A. Ezangina, S.A. Gayvoronskiy, M.S. Sukhodoev // International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research. – 2018. – Vol. 7, No. 6. – P. 679-683 (Scopus).

7. Khozhaev I.V., Determination of Vertices and Edges in a Parametric Polytope to Analyze Root Indices of Robust Control Quality / S. Gayvoronskiy, T. Ezangina, I. Khozhaev, V. Kazmin // International Journal of Automation and Computing. – 2019. – Vol. 16, No. 6. – P. 828-837 (Scopus).

8. Khozhaev I.V., Parametrical synthesis of linear controllers in aperiodical systems on basis of decomposition approach / S.A. Gayvoronskiy, I. Khozhaev, M. Pushkarev, T. Ezangina // International Review of Automatic Control. – 2019. – Vol. 12, No. 4. – P. 192-199 (Scopus).

*Публикации в трудах конференций, проиндексированных в Scopus*

9. Khozhaev, I.V. Method of interval system poles allocation based on a domination principle / S.A. Gayvoronskiy, I.V. Khozhaev, T.A. Ezangina // 2017

International Conference on Mechanical, System and Control Engineering, ICMSC 2017, St. Petersburg, 19–21 May 2017. – St. Petersburg, 2017. – P. 245-249.

10. Khozhaev, I.V. Parametric synthesis of a robust controller on a base of interval characteristic polynomial coefficients / S.A. Gayvoronskiy, T. Ezangina, I. Khozhaev // ICINCO 2017 - Proceedings of the 14th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics : 14, Madrid, 26–28 July 2017. Vol. 2. – Madrid, 2017. – P. 411-416.

11. Khozhaev, I.V. Providing an aperiodicity of transient process in a interval control system on a base of pole domination principle / T. Ezangina, S.A. Gayvoronskiy, I. Khozhaev // ACM International Conference Proceeding Series, Beijing, 26–28 December 2018. – Beijing, 2018. – P. 122-126.

12. Khozhaev, I. V. Parametric synthesis of a robust PID-controller for interval control system with aperiodic transient process / T.A. Ezangina, S.A. Gayvoronskiy, I.V. Khozhaev // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering : 8, Paris, 23–25 July 2019. – Paris, 2019. – P. 012009.

13. Khozhaev, I.V. Robust Controllers Synthesis and Order Reduction of Unmanned Underwater Vehicle Submerging Control System with Interval Parametric Uncertainty / I.V. Khozhaev, S.A. Gayvoronskiy, T.A. Ezangina // IFAC-PapersOnLine : 12th, Daejeon, 18–20 September 2019. Vol. 52. – Daejeon, 2019. – P. 224-229.

14. Khozhaev, I.V. Placing Poles Allocation Areas of Interval Control System with Desired Root Quality Indices / S.A. Gayvoronskiy, T. Ezangina, I. Khozhaev // Proceedings - 2019 International Russian Automation Conference, RusAutoCon 2019, Sochi, 08–14 September 2019. – Sochi: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2019. – P. 8867591.

15. Khozhaev, I.V. The synthesis of a linear controller of the interval control system on the basis of robust D-partition / S.A. Gayvoronskiy, T. Ezangina, I. Khozhaev // 2019 International Automatic Control Conference, CACS 2019, Keelung, 13–16 November 2019. – Keelung, 2019. – P. 9024737.

16. Khozhaev, I.V. Parametric synthesis of a robust controller on a base of D-partition and method of dominant poles / S.A. Gayvoronskiy, T. Ezangina, I. Khozhaev

// 2019 International Automatic Control Conference, CACS 2019, Keelung, 13–16 November 2019. – Keelung, 2019. – P. 9024735.

17. Khozhaev, I.V. Adaptive stabilization of certain dominant poles of control system with interval parametric uncertainty for providing constant indices of control quality / S. Novokshonov, T. Ezangina, I. Khozhaev // Proceedings - 2020 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2020, Sochi, 18–22 May 2020. – Sochi: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2020. – P. 9112058.

*Публикации в других изданиях*

18. Хожаев, И.В. Трехсвязная система управления движением необитаемого подводного аппарата в вертикальной плоскости в условиях интервальности его параметров / И.В. Хожаев, Т.А. Езангина, С.А. Гайворонский // Технические проблемы освоения Мирового океана. – 2017. – Т. 7. – С. 374-379.

19. Хожаев, И.В. Многосвязное управление движением необитаемого подводного аппарата в продольно-вертикальной плоскости в условиях интервальной неопределенности параметров аппарата и окружающей среды // Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов, Евпатория, 30 июня – 07 июля 2019 года. – Евпатория: Издательство МАИ-Принт, 2019. – С. 170-171.

# 1 АНАЛИЗ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ НЕОБИТАЕМЫХ ПОДВОДНЫХ АППАРАТОВ

## 1.1 Классификация необитаемых подводных аппаратов

Необитаемый подводный аппарат (НПА) – совокупность технических средств, объединенная в единый, способный свободно передвигаться под водой конструктив, выполняя при этом некоторый спектр задач на глубинах и в условиях недоступных людям. Практика применения одиночных НПА и подводных робототехнических комплексов для выполнения различных подводных миссий подробно освещена в работах [1-20].

Согласно [2, 6, 13, 14, 16] можно утверждать, что основные признаки классификации НПА заданы ГОСТ Р 56960-2016 «Аппараты необитаемые подводные. Классификация» [20]; остальные работы дополняют [20] узконаправленными классификациями, которые характерны для отдельных отраслей применения НПА. Анализ перечисленных источников позволил сформулировать список признаков классификации НПА:

- по назначению;
- по способу питания;
- по способу управления;
- по массогабаритным характеристикам;
- по мощности системы электроснабжения;
- по способу передвижения в воде;
- по типу движительно-рулевого комплекса (ДРК);
- по особенностям формы несущей конструкции;
- по среде действия;
- по типу движителей.

Рассмотрим далее классификации, определяющие значимые для процесса разработки системы управления движением характеристики НПА. По назначению НПА делятся на поисковые, обследовательские, рабочие, океанологические и многоцелевые. Поисковые НПА предназначены для обнаружения затонувших объектов по их физическим полям с возможностью их дальнейшего обозначения

буями, гидроакустическими маяками и прочими техническими средствами. Обследовательские НПА предназначены для допоиска указанных объектов с помощью телевизионной системы, а также для обследования рельефа дна. Океанологические НПА, кроме съемки рельефа дна, предназначены для мониторинга параметров водной среды, изучения грунта, подводной флоры и фауны. Рабочие НПА предназначены для осуществления подводных работ с использованием манипуляторных устройств и инструментов. Далее не будем рассматривать влияние работающих манипуляторных устройств на динамику НПА и, соответственно, исключим НПА рабочего класса.

По способу питания НПА подразделяются на телеуправляемые НПА, получающие электропитание с носителя, автономные НПА, имеющие собственные источники питания, а также полуавтономные НПА. Результаты дальнейших исследований будем обобщать для телеуправляемых НПА (ТНПА) и автономных НПА (АНПА).

По способу передвижения в воде НПА подразделяются на буксируемые; самоходные, оснащенные движительной установкой; донные, перемещающиеся по грунту; дрейфующие, перемещающиеся в толще воды под действием течения. Далее будем рассматривать самоходные НПА.

По типу ДРК НПА подразделяются на НПА с активным и пассивным ДРК. Далее будем рассматривать НПА с активными ДРК, генерирующими пропульсивные силы и моменты, а не использующие для маневрирования силы реакции водной среды, как НПА с пассивными ДРК.

Также НПА можно классифицировать по типу используемых движителей: винтовые движители; водометные движители; движители, имитирующие способы движения живых существ (бионические). Далее будем рассматривать НПА с винтовыми движителями.

Таким образом, далее будем рассматривать практику применения и проблемы управления движением самоходных НПА с активными ДРК, оснащенными винтовыми движителями. Для определения требований к системе

управления движением таких НПА рассмотрим далее практику их применения для подводных работ.

## 1.2 Анализ проблем применения необитаемых подводных аппаратов для проведения подводных исследований

На основе работ [1, 2, 4-6, 12, 14-16] можно сделать вывод, что НПА исследуемого типа применяются для решения исследовательских задач, задач промышленности, оборонных задач. Исходя из результатов анализа перечисленных работ, был сформулирован следующий перечень выполняемых НПА исследуемого типа задач:

- поиск и обнаружение одиночных и протяженных объектов, позиционирование вблизи объектов;
- детальное обследование обнаруженных объектов;
- мониторинг морских акваторий при обслуживании инженерных инфраструктур и отдельных сооружений;
- фотосъемка рельефа дна;
- гидрофизические исследования в придонном пространстве;
- выполнение топографо-геодезических работ;
- выполнение гидролокационного обследования морского дна;
- выполнение морской магнитной съемки;
- выполнение акустического профилирования донных отложений;
- синоптические наблюдения;
- изучение литодинамических процессов;
- оценка современного состояния окружающей водной среды, отбор проб почвогрунтов, воды, донных отложений, гидробионтов;
- экологическое обследование экосистем территории изысканий, оценка степени их антропогенной нарушенности, выявление источников и признаков загрязнения;

- предварительная оценка экологических последствий строительства и эксплуатации подводных инженерных сооружений и получение исходных данных для прогноза изменений состояния окружающей среды;
- обнаружение, сопровождение и уничтожение подводных лодок и прочих подводных целей;
- охрана акваторий, связанных с мобильными или стационарными объектами;
- постановка, снятие и нейтрализация минных заграждений;
- ведение гидроакустической, радиотехнической и оптоэлектронной разведки.

Исходя из результатов анализа [1, 2, 4-6, 12, 14-16, 18, 19], был составлен перечень оборудования, которым оснащаются исследуемые НПА для выполнения задач из ранее составленного списка:

- акустические профилографы;
- гидролокаторы кругового, бокового, секторного обзора (ГКО, ГБО и ГСО, соответственно);
- эхолоты однолучевые и многолучевые;
- системы электромагнитного и магнитометрического поиска;
- фотографические системы;
- датчики гидрохимического состояния воды, измеряющие содержание кислорода, кислотность, соленость, температуру, электропроводность и мутность воды;
- тралы, драги, дночерпатели, ловушки для забора образцов грунта и гидробионтов. Определив перечень устанавливаемого на исследуемые НПА оборудования, изучим зависимость качества измерений от качества процесса движения НПА.

Изучение руководств по эксплуатации различных моделей акустических профилографов [21, 22] показало, что наибольшее качество измерительных данных с профилографа достигается при движении подводного аппарата с малой скоростью (до 2 узлов). При этом имеется в виду скорость движения НПА

относительно потока жидкости, то есть при выборе скорости и направления движения НПА следует учитывать направление и скорость подводных течений. Кроме скорости движения НПА к наиболее значительному снижению качества измерительных данных, поступающих с профилографов, приводит нестабильность ориентации НПА. Нестабильность курса и крена мало влияют на качество измерительных данных или легко компенсируются, однако нестабильность дифферента НПА критична и резко снижает точность измерений.

Изучение практики применения гидролокаторов и рекомендаций производителей по их применению показало, что для достижения достаточной точности измерений необходимо обеспечивать скорость НПА меньшую, либо равную некоторому пороговому значению. Такое значение зависит от характеристик микрорельефа и гидролокатора и может быть рассчитано по следующей формуле, приведенной в [23]:

$$V = \frac{L + B_w}{t \cdot N},$$

$$t = \frac{1}{F}, F = \frac{C}{2 \cdot R_m}, B_w = R_s \cdot \varphi,$$

где  $t$  – период следования импульсов, с;  $N$  – количество импульсов, облучающих объект;  $F$  – частота следования импульсов, имп/с;  $V$  – скорость судна относительно дна, м/с;  $C$  – скорость распространения звука в воде, м/с;  $R_m$  – диапазон шкалы записи, м;  $B_w$  – ширина пятна облучения в горизонтальной плоскости, м;  $R_s$  – наклонная дальность до объекта, м;  $\varphi$  – угол излучения ГБО в горизонтальной плоскости, рад. Согласно [23] для различения форм микрорельефа размером не более 1 м при  $t = 0.5$  с и  $\varphi = 1^\circ$  максимальная скорость движения НПА не должна превышать 1.45–1.81 м/с или 2.90–3.62 узла. Рекомендации по применению ГБО для батиметрической съемки [24] от производителей такой аппаратуры также свидетельствуют о том, что в большей части случаев скорость движения НПА лежит в пределах 1–4 узлов и также ограничена сверху. Те же рекомендации предписывают снижать скорость при



больших значениях углов крена и дифферента, что снижает производительность при выполнении съемки.

Применение эхолотов, исходя из [25, 26], невозможно при килевой или бортовой качке  $\pm 10\text{--}15^\circ$ . Таким образом, значения углов ориентации НПА должны быть стабилизированы в указанных пределах. Также необходимо ограничить скорость движения НПА 10 узлами.

Применение магнитометров различных конструкций, исходя из [27, 28], предполагает движение на стабильной скорости, не превышающей 5 узлов. В отличие от акустического оборудования, качество измерительных данных с магнитометра мало зависит от стабильности ориентации НПА.

Качество работы телевизионных систем, устанавливаемых на НПА, мало зависит от качества его движения. В процессе изучения ранее перечисленных работ удалось найти рекомендации по стабилизации положения НПА при исследовании гидробионтов методом подводной видеосъемки. В работе [5] предлагается дополнительно утяжелять НПА, сообщая ему отрицательную плавучесть, и размещать НПА на грунте в предполагаемом месте съемки. Исходя из этого, можно утверждать, что повысить качество подводной фото- и видеосъемки возможно, стабилизировав НПА по положению и ориентации.

Использование датчиков гидрохимического состояния воды, а также различные инструменты для забора образцов грунта и гидробионтов не требует более высокого качества управления движением НПА, чем ранее рассмотренные устройства.

Для выполнения перечисленных задач с помощью описанных технических средств НПА движется по ряду типовых траекторий. Проанализируем [1, 3, 5, 7-10, 12, 15, 29] и рассмотрим такие траектории для формулировки требований к исследуемой системе. Типовые элементы покрытия акваторий изображены на рисунке 1.1.

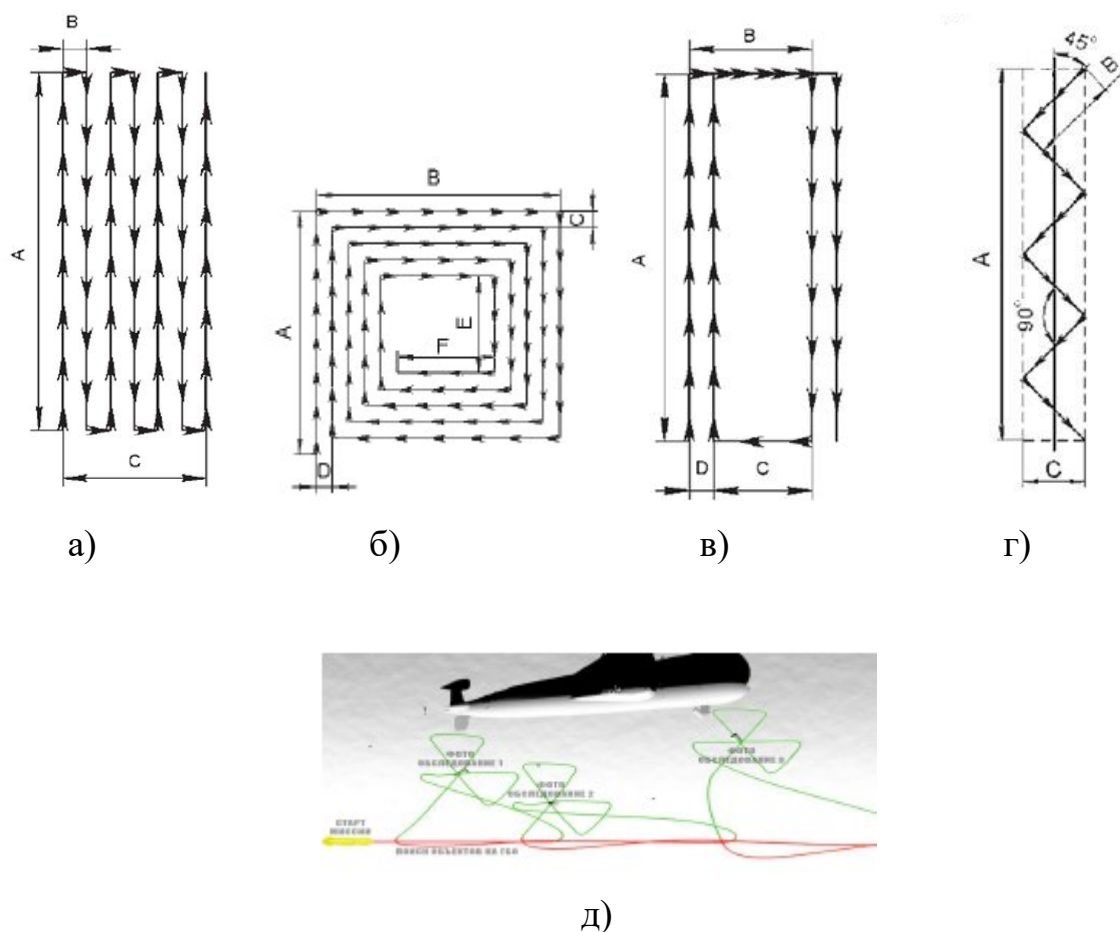


Рисунок 1.1 – Типовые элементы покрытия акватории: а) меандр, б) сходящаяся прямоугольная спираль, в) прямоугольная циклоида, г) зигзаг, д) «цветок»

Траектория «прямоугольный меандр», изображенная на рисунке 1.1а, и траектория «сходящаяся прямоугольная спираль», изображенная на рисунке 1.1б, используются для площадной съемки дна. Траектория «циклоида», изображенная на рисунке 1.1в, используется для досмотра точечных объектов. Часто движением по циклоиде выполняется досмотр объектов, найденных в центре сходящейся прямоугольной спирали. Траектория «зигзаг», изображенная на рисунке 1.1г, применяется для обследования протяженных объектов. Траектория «цветок», изображенная на рисунке 1.1д, используется для обследования точечных объектов с разных сторон для получения наиболее полной информации о них.

Кроме общей формы траектории в горизонтальной плоскости, следует рассмотреть также движение НПА в продольно-вертикальной плоскости. В зависимости от выполняемой задачи НПА либо движется с заданной глубиной и

нулевым дифферентом, либо выполняет эквидистантное движение относительно дна на заданной высоте с дифферентом равным углу склона дна.

Также в работах [6, 10-13, 15, 17-19] рассматриваются возмущающие воздействия, действующие на НПА со стороны водной среды. Основным таким воздействием можно считать подводные течения. Такие течения описываются скоростью движения потока жидкости, а также углами атаки и дрейфа, задающими его направление относительно направления движения НПА.

Таким образом, анализ практики применения самоходных НПА с активными ДРК, оснащенными винтовыми движителями, показал, что наиболее требовательным к динамическим характеристикам НПА является акустическое оборудование: гидролокаторы, эхолоты, профилографы. В частности, акустическое оборудование требует, что скорость НПА не превышала некоторого порогового значения, лежащего в пределах от 1 до 4 узлов в зависимости от типа оборудования. Кроме того, такое оборудование чувствительно к нестабильности ориентации НПА. Исходя из этого, можно утверждать, что исследуемая система должна автоматически управлять движением НПА во всех шести степенях свободы, обеспечивая в каналах регулирования аperiodические переходные процессы с нулевым перерегулированием и статической ошибкой регулирования в условиях внешних возмущающих воздействий в виде подводных течений. Для проверки работоспособности такой системы достаточно симитировать движение НПА по типовым траекториям со скоростью от 1 до 4 узлов под влиянием подводных течений.

1.3 Анализ подходов к проектированию систем автоматического управления движением необитаемых подводных аппаратов

1.3.1 Проектирование структуры системы управления движением НПА

Рассмотрим далее существующие подходы к проектированию систем управления движением НПА. Исходя из анализа работ [32-37], можно утверждать, что в настоящее время преобладают два подхода к построению таких систем: иерархический и поведенческий.

Иерархический подход к построению таких систем предполагает, что разработчик на основе личного опыта разделяет задачи системы по уровню абстракции, выделяет для каждой группы задач со схожим уровнем абстракции свой уровень в системе и затем прорабатывает взаимодействие выделенных уровней. В указанных работах описаны системы управления движением, состоящие из двух, трех и четырех уровней.

В работах [33, 35] описаны системы из двух уровней: верхнего и нижнего. При этом согласно [33] верхний уровень выполняет задачи выбора траектории движения, выбора цели и подобные; а нижний уровень выполняет непосредственно задачу управления ДРК НПА. В свою очередь в [35] описана двухуровневая система управления движением с более развитым верхним уровнем. Структура такой системы показана на рисунке 1.2.



Рисунок 1.2 – Структура двухуровневой системы управления движением НПА

Из рисунка 2 очевидно, что нижний уровень системы представляет собой внутренний контур управления и включает в себя регуляторы, формирующие управляющие сигналы для ДРК НПА на основе расхождения измерительной информации с пилотажных датчиков и уставок, выработанных планировщиком траектории, а также контрольно-аварийную систему (КАС) с функцией логирования информации.

В свою очередь верхний уровень системы, структура которой изображена на рисунке 2, представляет собой внешний контур управления и включает в себя планировщик траектории, вырабатывающий задания для нижнего уровня системы

на основе программы-задания и данных о внешней среде, поступающих с бортовых измерительных устройств НПА, а также управление этими устройствами.

Исходя из рисунка 2, можно сделать вывод, что любая неопределенность динамических свойств внутреннего контура управления системы усложняет постановку задачи синтеза алгоритма планировщика траектории НПА.

В работах [32, 34, 37] описаны варианты структуры системы управления движением, включающей в себя три уровня: верхний – стратегический, средний – тактический и нижний – исполнительный.

При этом стратегический уровень осуществляет управление миссией НПА в целом и содержит программу-планировщик миссии, которая упорядочивает цели миссии НПА. Тактический уровень в таком случае организует выполнение одной из целей миссии НПА, заданной ему стратегическим уровнем, управляя при этом полезной нагрузкой НПА. Исполнительный уровень осуществляет управление параметрами движения НПА на основе измерительной информации с пилотажных датчиков, а также осуществляет контроль их состояния и состояния ДРК с помощью КАС.

В том случае, если НПА содержит большое количество устройств, входящих в полезную нагрузку, логично выделить отдельный четвертый уровень системы для управления ими – обслуживающий уровень [36]. Основная задача данного уровня состоит в предоставлении вышестоящим уровням системы доступа к измерительным устройствам, инструментам, приборам и прочей бортовой аппаратуре через универсальные интерфейсы.

В свою очередь поведенческий подход к построению структуры системы управления движением [37] основывается на построении совокупности поведений или агентов, которые формируют желаемые внешние проявления функциональности НПА. Действие каждого из этих агентов направлено на решение определенной задачи с учетом требуемой измерительной информации, при этом объектом действия агентов являются некоторые исполнительные устройства НПА.

Сравнивая иерархический и поведенческий тип структуры, можно сделать вывод, что иерархическая система более предсказуема, процесс ее разработки в значительной степени формализован. Однако системы поведенческого типа характеризуются значительной гибкостью и масштабируемостью. Ввиду наличия преимуществ у каждого из перечисленных типов систем управления движением была разработана комбинированная структура [37]. В таком варианте система управления движением разделена на три уровня: стратегический, тактический и исполнительный. Для каждого из этих уровней поведение задано набором агентов.

Таким образом, анализируя работы [32-37], можно сделать вывод о том, что непосредственное управление параметрами движения НПА и ДРК НПА реализуется на исполнительном уровне системы управления движением. При этом для упрощения постановки задачи синтеза вышестоящих уровней такой системы необходимо обеспечить стабильность динамических свойств исполнительного уровня. В дальнейшей работе будут рассматриваться вопросы анализа и синтеза исполнительного уровня системы управления движением НПА.

### 1.3.2 Исполнительный уровень системы управления движением НПА

В исследуемой системе можно выделить объект управления, исполнительное устройство, регулятор и измерительное устройство. Далее рассмотрим работы [38-95] и определим особенности этих элементов системы управления движением НПА и существующие подходы к управлению движением.

#### 1.3.2.1 Особенности элементов системы управления движением НПА

Объектом управления исследуемой системы является НПА, движущийся в вязкой жидкости. Рассмотрим особенности математического моделирования такого движения, проанализировав работы [38-82, 88]. Применяется три подхода к описанию движения НПА [38]: на основе углов Эйлера, на основе кватернионов и на основе направляющих косинусов. Далее будем использовать традиционный подход, основанный на углах Эйлера. В таком случае движение НПА описывается

системой из шести дифференциальных уравнений, связывающих кинематические параметры движения – скорости движения НПА вдоль каждой из трех координатных осей и углы курса, крена и дифферента – с пропульсивными силами и моментами, формируемыми исполнительным устройством системы управления движением НПА.

Кроме пропульсивных сил и моментов на НПА во время движения действуют также гидродинамические и гидростатические силы и моменты [30, 31]. Гидростатические силы и моменты обусловлены наличием силы Архимеда и несовпадением центра масс и центра водоизмещения. Такие силы и моменты компенсируются корректировкой распределения масс внутри объема корпуса НПА и при математическом моделировании часто принимаются равными нулю [38, 40, 42, 44, 48, 55].

Гидродинамические силы и моменты прямо пропорциональны квадрату скорости движения НПА и вызваны сопротивлением движению НПА со стороны вязкой жидкости. Известно, что коэффициенты пропорциональности в таких зависимостях нестационарны и зависят от значения углов атаки и дрейфа. Пример зависимости гидродинамических сил и моментов АНПА МТ-2012 от угла атаки представлен на рисунке ниже [47].

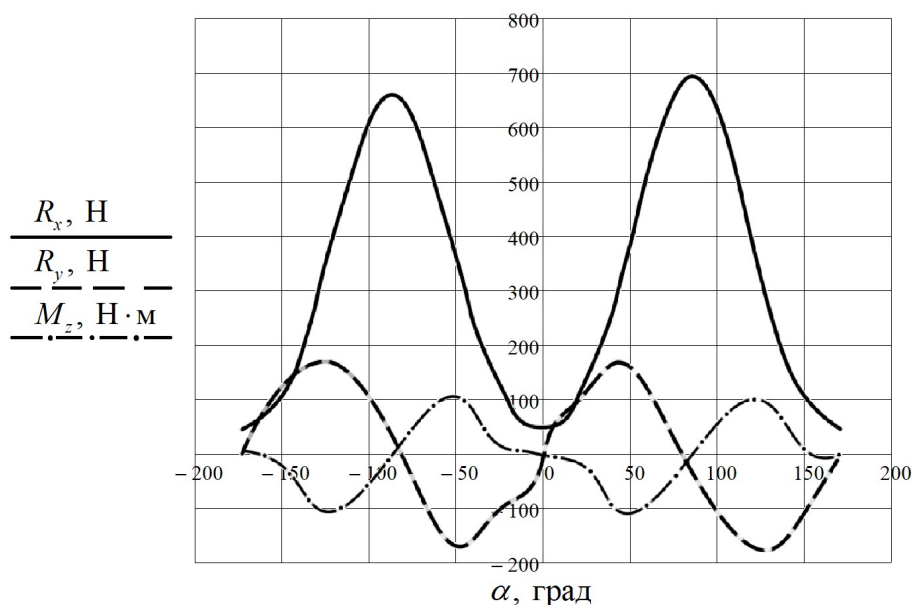


Рисунок 1.3 – Пример зависимости силы лобового сопротивления  $R_x$ , подъемной силы  $R_y$  и момента  $M_z$  от угла атаки  $\alpha$  для АНПА МТ-2012

Исходя из этих зависимостей, можно утверждать, что величины гидродинамических сил и моментов для одних и тех же значений скорости движения НПА могут быть различными. Это можно объяснить зависимостью ранее упомянутых гидродинамических коэффициентов от углов атаки и дрейфа. При этом, несмотря на то, что в целом эти зависимости нелинейны, можно утверждать, что они могут быть с некоторой точностью линеаризованы в определенном диапазоне значения углов атаки и дрейфа.

Таким образом, движение НПА происходит под действием пропульсивных сил и моментов, гидродинамических сил и моментов и гидростатических сил и моментов. Компенсация гидростатических сил и моментов может быть выполнена за счет корректировки плавучести и положения центра тяжести НПА и рассматриваться далее не будет. Гидродинамические силы и моменты имеют квадратичную зависимость от скорости движения НПА, при этом коэффициенты в таких зависимостях нестационарны и могут нелинейно зависеть от углов атаки и дрейфа. Рассмотрим далее особенности формирования пропульсивных сил и моментов с помощью исполнительного устройства системы.

Исполнительным устройством системы управления движением является ДРК НПА. ДРК НПА – совокупность технических средств, формирующих пропульсивные силы и моменты, обеспечивающие движение НПА. Ранее класс рассматриваемых движителей был ограничен винтовыми движителями. Гребной винт имеет ряд особенностей. По результатам анализа работ [30, 31, 43, 50, 59, 58, 60-62, 64, 68] можно утверждать, что коэффициенты в зависимостях упора и момента сопротивления вращению винта от квадрата частоты вращения нестационарны.

В [40, 60, 61, 62] приведены зависимости упора движителя от угла атаки – угла между направлением движения НПА и направлением набегающего потока жидкости. Пример такой зависимости представлен на рисунке ниже [60].



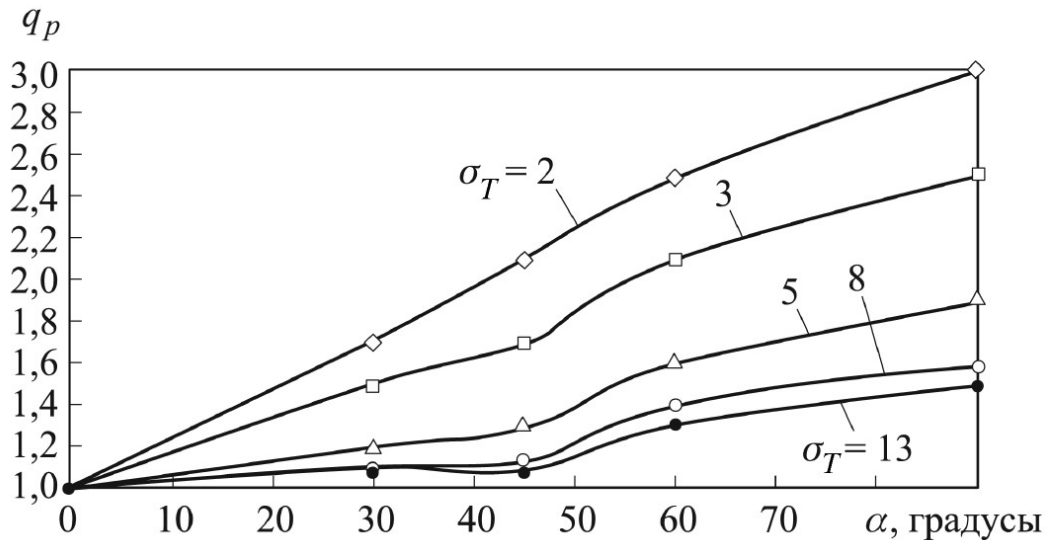


Рисунок 1.4 – Зависимости нормированного упора движителя от угла атаки при разных значениях коэффициента загрузки винта

Однако, исходя из [61], можно утверждать, что даже при постоянных значениях углов атаки наблюдается пульсация упора движителя. График таких пульсаций приведен на рисунке ниже.

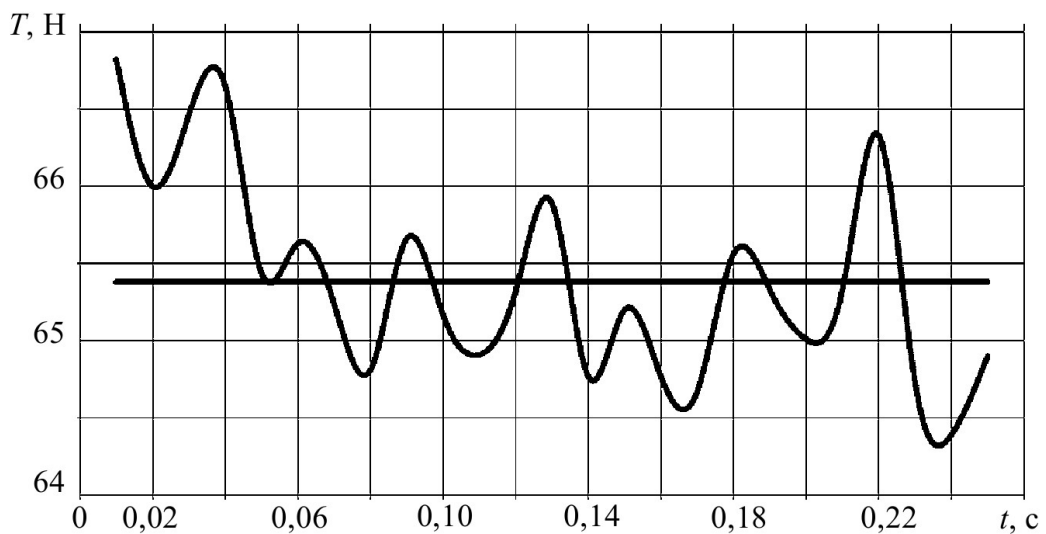


Рисунок 1.5 – Зависимость упора движителя при нулевом угле атаки

Зависимость упора движителя от угла атаки теоретически может быть аппроксимирована некоторой функцией [43, 50, 64]. Однако пульсация упора движителя, хотя и объясняется законами гидродинамики, не может быть аппроксимирована какой-либо удобной для синтеза регуляторов моделью. Иначе говоря, пульсации значений упора на постоянных значениях угла атаки подходит

под определение немоделируемой динамики, существующие подходы к синтезу регуляторов систем управления движением их не учитывают.

Рассмотрим далее особенности последней составляющей исследуемой системы – измерительного устройства в виде навигационной системы (НС) НПА. Известно, что в состав современных НС входят бортовая автономная навигационная система (БАНС), гидроакустическая навигационная система (ГАНС) и дополнительные вычислительные устройства для обработки измерительной информации. В состав БАНС входят инерциальная навигационная система, эхолокационная система, навигационно-пилотажные датчики, индукционные и доплеровские лаги, датчики угловых скоростей. ГАНС включает в себя гидроакустические навигационные системы с ультракороткой и длинной базой. Проанализировав работы [34, 62, 73-75], можно утверждать, что современная НС НПА способна измерять все параметры движения НПА: углы ориентации [34, 62], угловые скорости [34, 62], линейные скорости, ускорения и координаты [34, 62], а также углы атаки и дрейфа [34, 73-75]. Следует обратить внимание, что измерение значений углов атаки и дрейфа дает возможность выполнить подстройку параметров регуляторов системы под изменяющиеся значения гидродинамических коэффициентов.

#### 1.3.2.2 Анализ подходов к синтезу регуляторов системы управления движением НПА

Перечисленные особенности элементов системы управления движением, а именно нелинейность и нестационарность параметров, осложняют синтез регуляторов. Для управления объектами с такими свойствами применяются три подхода: нейросетевое управление, управление на основе нечеткой логики и адаптивное управление. Также актуальны их комбинации. Оценим далее опыт применения перечисленных подходов для решения задачи управления мобильными роботами и прочими техническими объектами с неопределенностями.

Управление движением НПА с помощью регуляторов на основе нечеткой логики описано в работах [44, 72, 77-80]. Согласно перечисленным работам синтез нечеткого регулятора включает в себя этапы определения функций принадлежности нечетких переменных, алгоритма обработки правил нечеткого вывода, базы правил. Эти этапы мало формализованы, качество их выполнения зависит от квалификации специалиста, синтезирующего регулятор. При этом синтезированный регулятор, хоть и может быть основан на регуляторах пониженного порядка, имеет более сложную по сравнению с ними структуру и требует больших вычислительных затрат на расчет управляющего сигнала.

Синтез нейросетевых регуляторов для управления движением мобильных роботов и прочих технических систем описан в работах [44, 82-86]. Исходя из анализа приведенных работ, можно утверждать, что нейронные сети в большинстве случаев применяются либо для генерации параметров типовых регуляторов в соответствии с входными данными сети, либо генерации управляющего сигнала напрямую на основе тех же данных. Синтез нейросетевого регулятора требует большого количества данных для обучения нейронной сети. Полученный регулятор может обеспечивать стабильные показатели качества переходных процессов в системах с нелинейными объектами и объектами с нестационарными параметрами и структурой. В то же время отмечают [83], что нейросетевые регуляторы сложны и дороги в реализации.

С учетом иерархической структуры системы управления движением НПА и прочих мобильных роботов представляется рациональным применять нейросети для решения задач траекторного, группового управления, то есть на уровнях выше исполнительного [89, 90]. Качество работы нейросетевых регуляторов в таком случае зависит от качества работы регуляторов локальных систем, к которым относятся и регуляторы исследуемой системы, в частности – от стабильности значений корневых показателей качества [90].

Применение адаптивного подхода к управлению движением мобильных роботов в целом и НПА в частности описано в работах [41, 42, 44, 55, 59, 88]. Исходя из анализа этих работ, можно утверждать, что процедура синтеза

адаптивных регуляторов предельно формализована, однако получаемый в результате закон регулирования сравнительно сложен. В указанных работах отмечается достаточность измерительной информации, получаемой с современных НС, для работы контуров самонастройки системы. При этом отмечается, что значения параметров НПА лежат в интервалах, пределы которых могут быть оценены экспериментально [88], что делает логичным применение для синтеза регуляторов методов теории систем управления с интервальными параметрами. Изученные методы управления системами с интервальными параметрами [93-97] либо подходят для систем малого порядка, либо не обеспечивают достаточной стабильности показателей робастного качества управления.

#### 1.4 Постановка проблемы исследования

Исходя из всего вышесказанного, сформулируем научную проблему исследования. Известно, что применение телеуправляемых и автономных НПА, оснащенных активным ДРК с винтовыми движителями, в большинстве случаев предполагает движение по сложным траекториям со скоростями до 4 узлов в условиях подводных течений. Такое движение управляется исполнительным уровнем системы управления движением НПА, элементы которого характеризуются параметрической неопределенностью, нелинейностью и многосвязностью.

Необходимость учета этих особенностей при синтезе регуляторов осложняет работу с математической моделью системы. Так, например, нелинейность объекта управления учитывается при синтезе путем выбора рабочей точки, описывающей наихудший режим работы системы [35, 36, 39, 41, 52, 55, 56, 59, 61, 64]. Нелинейностью исполнительных устройств – движителей с гребным винтом – часто пренебрегают, описывая их апериодическими звеньями первого порядка [36, 39, 59, 62, 66]; часто пренебрегают и их инерционностью, описывая движители их передаточными коэффициентами [35, 37, 38, 41, 42, 45, 48-52, 55, 72, 80, 84, 88].

Взаимовлияния каналов управления движением в различных степенях свободы учитываются за счет различной степени декомпозиции модели системы. Так, например, в работах [35-37, 39-41, 50, 52, 54, 56, 61, 64, 80, 84] для упрощения синтеза принимается допущение, что движение выполняется в одной степени свободы, следовательно, скорости и перемещения по другим степеням свободы равны нулю. В работах [45-47, 51, 55, 72] рассматривается по отдельности движение НПА в горизонтальной и продольно-вертикальной плоскостях.

Перечисленные свойства НПА учитываются при синтезе адаптивных регуляторов [41, 42, 44, 55, 59, 88] и регуляторов, основанных на нейронных сетях [44, 82-86] или нечеткой логике [44, 72, 77-80]. В то же время ради упрощения системы управления движением НПА и процедуры ее синтеза от перечисленных типов регуляторов отказываются в пользу типовых регуляторов пониженного порядка [35-37, 39, 40, 45, 46, 49, 51, 52, 56, 59, 63, 66, 84]. Таким образом, возникает противоречие между необходимостью реализовывать систему управления движением НПА на базе максимально простых регуляторов и необходимостью учесть ее нелинейность, нестационарность и многосвязность при синтезе. Исходя из этого, сформулируем проблему исследования следующим образом: отсутствуют методы синтеза систем управления движением НПА на основе типовых регуляторов пониженного порядка, обеспечивающих стабильное качество переходных процессов в условиях нестационарности, нелинейности и многосвязности неизменяемой части таких систем.

Для решения сформулированной проблемы предлагается использовать методы управления объектами с интервальными параметрами. Ввод интервальных параметров в математическую модель системы позволит воспользоваться интервальной секторной линеаризацией, учесть интервальную параметрическую неопределенность системы и более корректно декомпозировать многосвязную модель для подготовки к синтезу регуляторов.

Учитывая существование методов построения верхнего уровня систем управления движением НПА на основе нейронных сетей [90] и адаптивных

регуляторов [92], качество работы которых зависит от стабильности значений корневых показателей качества исполнительного уровня системы, будем использовать модальный подход к управлению и принцип доминирования полюсов. В частности, предлагается разработать методы синтеза регуляторов пониженного порядка, обеспечивающих допустимые значения корневых показателей робастного качества работы систем с интервальными параметрами. Также предлагается разработать методики синтеза адаптивно-робастных регуляторов, обеспечивающих постоянные значения корневых показателей робастного качества за счет подстройки коэффициентов регулятора на основе измерительной информации с датчиков НС. Разработка таких методик также потребует исследования параметрического многогранника систем с интервальными параметрами и различными вариантами расположения областей локализации их полюсов.

На основе адаптивно-робастных и робастных регуляторов, синтезируемых по разработанным методикам, предлагается создать двухрежимную систему управления движением НПА. В таком случае робастные типовые регуляторы пониженного порядка с постоянными параметрами смогут сохранить квазистабильные значения корневых показателей робастного качества при значениях углов атаки и дрейфа, на которых функции гидродинамических параметров нелинейны. Для значений углов атаки и дрейфа, на которых функции гидродинамических параметров линейны, и при наличии измерительной информации об этих значениях адаптивно-робастные регуляторы обеспечат постоянство значений корневых показателей робастного качества за счет стабилизации положения доминирующих полюсов.

Цель работы: разработка и экспериментальное исследование математического аппарата для синтеза двухрежимной системы управления движением, имеющей желаемые значения корневых показателей робастного качества в условиях интервальности параметров НПА и окружающей его водной среды.

Для достижения поставленной цели необходимо решить ряд задач:

- сформулировать требования к системе по результатам анализа проблем применения НПА и их особенностей как объекта управления;
- разработать математическую модель системы с интервальными параметрами, включающую в себя передаточные функции каналов управления движением НПА в отдельных степенях свободы;
- определить набор вершин многогранника коэффициентов интервального характеристического полинома, определяющих положение доминирующих и свободных полюсов в различных вариантах их расположения на комплексной плоскости;
- разработать методики синтеза типовых робастных или адаптивно-робастных регуляторов пониженного порядка, обеспечивающих желаемые квазипостоянные или постоянные значения корневых показателей робастного качества за счет расположения областей локализации полюсов системы в соответствии с принципом доминирования;
- синтезировать двухрежимную систему управления движением в вертикальной плоскости, применив разработанные методики синтеза и математическую модель, и исследовать ее работоспособность на моделях разной сложности: на линейной модели с интервальными параметрами, использованной для синтеза модальных регуляторов; на модели одного из синтезированных каналов, учитывающей нелинейность элементов системы; на трехсвязной модели системы управления движением НПА в вертикальной плоскости для случая его движения по типовой траектории.

### 1.5 Основные результаты

В ходе выполнения анализа текущего состояния предметной области были изучены особенности применения НПА для выполнения различных подводных исследований, варианты структуры системы управления движением НПА, особенности проектирования ее исполнительного уровня.

В результате анализа практики применения НПА были сформулированы требования к системе управления движением. Такая система должна

- управлять движением НПА в шести степенях свободы,
- иметь апериодические переходные процессы с минимальным перерегулированием и нулевую статическую ошибку регулирования,
- учитывать влияние подводных течений;
- учитывать нелинейность и параметрическую неопределенность элементов системы.

Дальнейший анализ подходов к проектированию исследуемых систем показал, что актуальна задача разработки методов синтеза простых по структуре регуляторов, обеспечивающих желаемые значения показателей качества системы в условиях ее нелинейности, многосвязности и параметрической неопределенности. Была поставлена проблема исследования и предложен двухрежимный подход к управлению движением НПА, основанный на модальном управлении движением НПА с интервальной неопределенностью параметров с помощью модальных адаптивно-робастных и робастных типовых регуляторов пониженного порядка. Исходя из проблемы исследования и предлагаемого подхода к ее решению, сформулированы цель и задачи исследования.



## 2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО УРОВНЯ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ НЕОБИТАЕМОГО ПОДВОДНОГО АППАРАТА

Для решения задачи синтеза регуляторов исполнительного уровня системы управления движением НПА необходимо построить математическую модель исследуемой системы, учитывающую нестационарность параметров элементов системы, их нелинейность, а также влияние возмущающих воздействий в виде подводных течений. В данном разделе рассмотрим построение полносвязной математической модели системы для шести степеней свободы. Из полученной модели выделим модель системы управления движением в вертикальной плоскости и на ее примере продемонстрируем применение модели к конкретному НПА.

Движение НПА происходит в трехмерном пространстве и, соответственно, описывается координатами НПА по трем осям и углами поворота относительно них. При этом используются две системы координат: глобальная неподвижная система координат и связанная система координат, оси которой совпадают с осями корпуса НПА. Пример взаимного расположения НПА и перечисленных систем координат представлен на рисунке 2.1.

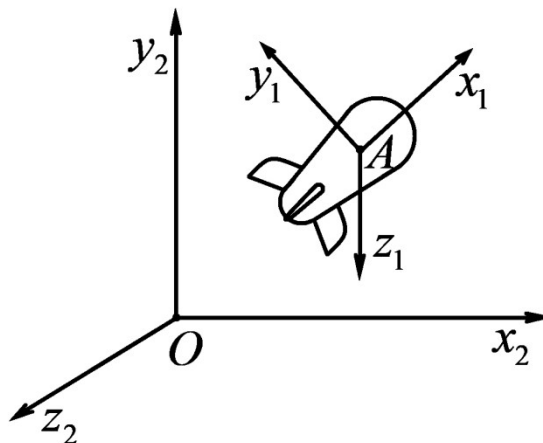


Рисунок 2.1 – Пример взаимного расположения НПА и используемых для описания его движения систем координат

Как показано на рисунке 2.1, система координат  $x_2 y_2 z_2$  – глобальная система координат. Начало связанной системы координат совпадает с центром

водоизмещения НПА  $A$ . Ось  $Ax_1$  направлена в сторону носовой оконечности НПА и является продольной осью аппарата; ось  $Ay_1$  совпадает с прямой пересечения продольно-вертикальной и поперечно-вертикальной плоскостей НПА и направлена вверх. Направление оси  $Az_1$  выбирается из условия получения правой системы координат.

Для решения задач траекторного управления необходимо использовать глобальную систему координат. В то же время для управления линейными и угловыми скоростями движения НПА достаточно использовать связанную систему координат [30, 31, 76]. Положение НПА в глобальной системе координат описывается вектором  $\mathbf{x} = (x \ y \ z \ \varphi \ \psi \ \theta)^T$ , где  $x, y, z$  – координаты НПА в глобальной системе координат,  $\varphi, \psi, \theta$  – углы курса, дифферента и крена. Определим также вектор линейных и угловых скоростей НПА в связанной системе координат  $\mathbf{v} = (v_x \ v_y \ v_z \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z)^T$ , где  $v_x, v_y, v_z$  – линейные скорости движения НПА вдоль соответствующих осей связанной системы координат,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – угловые скорости вращения НПА вокруг соответствующих осей связанной системы координат. С учетом введенных обозначений переход от связанной системы координат к глобальной системе координат выполняется в соответствии с выражением ниже [76]:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) & \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) - \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\theta) & \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) \cdot \sin(\theta) + \sin(\varphi) \cdot \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \cdot \cos(\theta) & -\cos(\psi) & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) & \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\theta) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) & \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) \cdot \sin(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\operatorname{tg}(\psi) \cdot \cos(\theta) & \operatorname{tg}(\psi) \cdot \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\cos(\theta)}{\cos(\psi)} & -\frac{\sin(\theta)}{\cos(\psi)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Для обратного перехода необходимо воспользоваться матрицей, обратной матрице  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ . Далее будем считать, что все расчеты, связанные с переходами между системами координат, происходят на более высоком уровне системы, а на вход рассматриваемого в данной работе исполнительного уровня приходят

уставки параметров движения НПА в связанной системе координат. С учетом вышесказанного рассмотрим далее построение математической модели системы управления движением НПА.

Обобщенная структура системы показана на рисунке 2.1. На рисунке 2.1 приняты следующие обозначения:  $\mathbf{v}_0$  – вектор уставок параметров движения НПА;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – вектор рассогласований;  $\mathbf{u}$  – вектор сигналов управления;  $\mathbf{T}$  – вектор пропульсивных сил и моментов, генерируемых ДРК НПА;  $\mathbf{v}$  – вектор текущих значений параметров движения НПА;  $\mathbf{v}_1$  – вектор измеренных значений параметров движения НПА;  $\mathbf{f}$  – вектор возмущающих воздействий, действующих на НПА; 1 – блок задатчика, формирующий уставки скоростей НПА; 2 – блок регуляторов; 3 – блок ДРК НПА; 4 – блок процесса движения НПА; 5 – НС НПА.

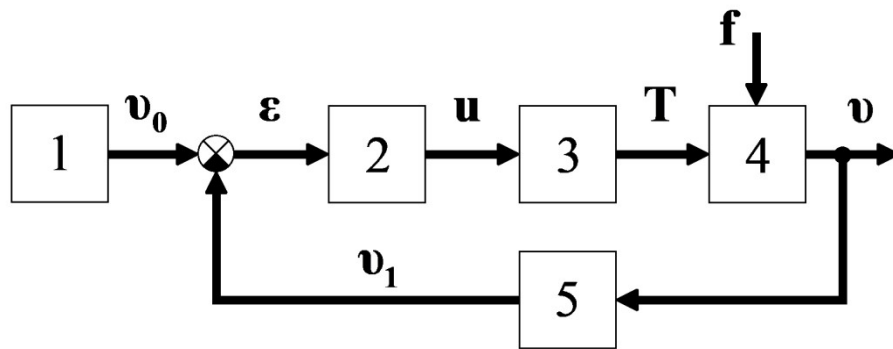


Рисунок 2.2 – Обобщенная структура системы управления движением НПА

Принцип работы исследуемой системы аналогичен любой САУ. Задатчик 1, входящий в состав одного из верхних уровней системы, формирует уставки линейных и угловых скоростей  $\mathbf{v}_0$  в соответствии с желаемой траекторией движения НПА. Главный сумматор реализует отрицательную обратную связь, вычисляя вектор рассогласований  $\boldsymbol{\varepsilon}$  между соответствующими элементами вектора уставок  $\mathbf{v}_0$  и вектора текущих значений  $\mathbf{v}_1$  скоростей НПА, измеряемых НС 5. Блок регуляторов 2 формирует вектор управляющих сигналов  $\mathbf{u}$  для ДРК НПА 3, который генерирует вектор пропульсивных сил и моментов  $\mathbf{T}$ . Блок 4 описывает процесс движения НПА под действием пропульсивных сил и моментов  $\mathbf{T}$  и рассчитывает текущие значения скоростей НПА  $\mathbf{v}$ .

В дальнейших расчетах примем инерционность НС НПА пренебрежимо малой и опишем блок 5 единичной матрицей так, чтобы  $v_1 = v$ . Структура блока регуляторов зависит от особенностей конкретного аппарата и будет определена ниже. Таким образом, задача построения математической модели исследуемой системы сводится к построению моделей ДРК НПА и процесса движения НПА.

Логично будет провести построение математической модели в два этапа. Целью первого этапа будет построение математической модели с минимумом упрощений. Второй этап будет заключаться в приведении модели к пригодной для синтеза регуляторов форме. В таком случае первая модель будет использоваться для имитационного моделирования работы системы управления движением под управлением регуляторов, синтезированных на основе второй модели.

Рассмотрим далее вывод математических моделей ДРК НПА и процесса движения НПА.

## 2.1 Математическое моделирование ДРК НПА

Математическая модель ДРК НПА должна связывать между собой управляющие сигналы, вырабатываемые блоком регуляторов, и значения пропульсивных сил и моментов. Пропульсивные силы обеспечиваются соответствующими проекциями упоров движителей, входящих в состав ДРК. Пропульсивные моменты в таком случае равны произведению равнодействующих упомянутых проекций на соответствующие плечи. Таким образом, моделирование ДРК НПА сводится к моделированию движителя и расчету пропульсивных сил и моментов на основе расположения движителей, определяемого конструкцией НПА.

Ранее мы сузили круг рассматриваемых движителей до движителей, состоящих из двигателя постоянного тока и гребного винта. Рассмотрим математические модели этих элементов и построим модель движителя в целом.

### 2.1.1 Математическое моделирование двигателя постоянного тока

Математическая модель двигателя постоянного тока должна описывать зависимость частоты вращения выходного вала от входного управляющего сигнала. Стоит учесть, что разрабатываемая модель должна корректно описывать лишь динамические свойства двигателя. Исходя из этого, пренебрежем его внутренними процессами, например переключением фаз в бесколлекторном электродвигателе постоянного тока и подобными. Рассмотрим далее построение такой модели.

Динамика электродвигателя постоянного тока описывается следующим уравнением:

$$u_{\text{я}} = e + I_{\text{я}} \cdot R_{\text{я}} + L_{\text{я}} \cdot \frac{dI_{\text{я}}}{dt}, \quad (2.1)$$

где  $u_{\text{я}}$  – напряжение, подаваемое на якорь электродвигателя, В;  $e$  – противо-ЭДС, В;  $I_{\text{я}}$  – ток якоря электродвигателя, А;  $R_{\text{я}}$  – активное сопротивление якоря, Ом;  $L_{\text{я}}$  – индуктивность якоря, Гн. Также известно, что противо-ЭДС связана с частотой вращения вала двигателя следующей зависимостью:

$$e = c_e \cdot \omega, \quad (2.2)$$

где  $c_e$  – передаточный коэффициент двигателя по противо-ЭДС, определяемый конструкцией двигателя;  $\omega$  – частота вращения вала двигателя, рад/с. Частота вращения вала двигателя в свою очередь связана моментом на валу следующим выражением:

$$J_{\text{общ}} \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{э}} - M_{\text{с}}, \quad (2.3)$$

где  $J_{\text{общ}}$  – суммарный момент инерции электродвигателя и нагрузки на валу,  $\text{Н} \cdot \text{м} / \text{с}^2$ ;  $M_{\text{э}}$  – электромагнитный момент,  $\text{Н} \cdot \text{м}$ ;  $M_{\text{с}}$  – момент сопротивления вращению вала со стороны нагрузки,  $\text{Н} \cdot \text{м}$ . Электромагнитный момент может быть рассчитан в соответствии со следующим выражением:

$$M_{\text{э}} = c_m \cdot I_{\text{я}}, \quad (2.4)$$

где  $c_m$  – передаточный коэффициент двигателя по моменту, определяемый конструкцией электродвигателя.

На основе выражений (2.1)-(2.4) можно сделать вывод, что динамика электродвигателя постоянного тока описывается следующим дифференциальным уравнением в операторной форме:

$$(J_{\text{общ}} \cdot L_{\text{я}} \cdot s^2 + J \cdot R_{\text{я}} \cdot s + c_e \cdot c_m) \cdot \omega = c_m \cdot u_{\text{я}} - (R_{\text{я}} + L_{\text{я}} \cdot s) \cdot M_{\text{с}}.$$

Зная дифференциальное уравнение электродвигателя в операторной форме, запишем его передаточные функции по управляющему и возмущающему воздействиям:

$$W_{\text{vu}}(s) = \frac{c_m}{(J_{\text{общ}} \cdot L_{\text{я}} \cdot s^2 + J \cdot R_{\text{я}} \cdot s + c_e \cdot c_m) \cdot 2\pi};$$

$$W_{\text{vM}}(s) = \frac{L_{\text{я}} \cdot s + R_{\text{я}}}{(J_{\text{общ}} \cdot L_{\text{я}} \cdot s^2 + J \cdot R_{\text{я}} \cdot s + c_e \cdot c_m) \cdot 2\pi}.$$
(2.5)

Таким образом, выходной величиной полученной модели, как и требовалось, является частота вращения вала электродвигателя, входной величиной – напряжение, возмущающим воздействием является момент сопротивления вращению со стороны нагрузки. Представленная модель была представлена в форме двух линейных передаточных функций и может в виде (2.5) использоваться для синтеза регуляторов. Для имитационного моделирования будем использовать последовательное соединение модели (2.5) с нелинейным элементом типа «насыщение».

### 2.1.2 Математическое моделирование работы гребного винта

Гребной винт преобразует вращательное движение вала электродвигателя в поступательное движение НПА за счет отбрасывания от лопастей масс жидкости, создающего реактивные гидродинамические силы. Очевидно, что математическая модель гребного винта должна описывать зависимость упора, создаваемого винтом, от частоты его вращения. Также необходимо учесть зависимость момента сопротивления вращению от частоты вращения.

Известно, что взаимосвязь перечисленных параметров описывается следующими зависимостями [62]:

$$\begin{aligned} T &= K_1 \cdot \rho \cdot D^4 \cdot v^2; \\ M &= K_2 \cdot \rho \cdot D^5 \cdot v^2; \end{aligned}$$

где  $T$  – упор, создаваемый винтом;  $K_1$  – передаточный коэффициент винта между квадратом частоты его вращения и создаваемым упором;  $\rho$  – плотность воды;  $D$  – диаметр винта;  $v$  – частота вращения винта;  $M$  – момент сопротивления вращению, создаваемый винтом;  $K_2$  – передаточный коэффициент винта между квадратом частоты его вращения и моментом сопротивления вращению.

Также известно, что эффективность работы гребного винта снижается при отклонении набегающего на движитель потока жидкости от продольной оси движителя. Зависимость тяги гребного винта с постоянной поступью от углов атаки и дрейфа можно записать по аналогии с [99]:

$$T_e = K_1 \cdot \rho \cdot D^4 \cdot v^2 - K_v \cdot v,$$

где  $v$  – проекция скорости обтекающего движитель потока жидкости на ось вращения гребного винта,  $K_v$  – коэффициент пропорциональности между данной проекцией и тягой движителя.

Коэффициент  $K_v$  определяется экспериментально путем исследования зависимости тяги винта от скорости набегающего потока жидкости при различных частотах вращения винта. Исходя из этого, будет справедливо считать этот коэффициент функцией частоты винта  $K_v(v)$ .

Исходя из вышесказанного, для имитационного моделирования работы винта будем использовать следующую математическую модель:

$$\begin{aligned} T_e &= K_1 \cdot \rho \cdot D^4 \cdot v^2 - K_v(v) \cdot v; \\ M &= K_2 \cdot \rho \cdot D^5 \cdot v^2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Данная модель действительно подходит для имитационного моделирования с учетом того, что параметры винта известны, а зависимость  $K_v(v)$  будет найдена экспериментально.

Для использования (2.6) при синтезе регуляторов данную модель необходимо линеаризовать и дополнить интервальными параметрами. Выполним для (2.6) секторную линеаризацию путем замены  $v^2$  на  $[k_v] \cdot v$ , где  $[k_v]$  – интервальный коэффициент линеаризации, определяемый из характеристик электродвигателя. Также заменим  $K_v(v)$  интервальным коэффициентом  $[K_v]$ , пределы которого определяются значениями  $K_v(v)$  на исследуемом диапазоне частот вращения вала электродвигателя. С учетом описанных преобразований получим

$$\begin{aligned} T_e(v) &= K_1 \cdot \rho \cdot D^4 \cdot [k_v] \cdot v - [K_v] \cdot v; \\ M(v) &= K_2 \cdot \rho \cdot D^5 \cdot [k_v] \cdot v. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Модель гребного винта (2.7) будем применять при составлении модели системы для синтеза регуляторов.

### 2.1.3 Математическая модель движителя с гребным винтом

Ранее была приведена математическая модель электродвигателя в виде дифференциального уравнения, связывающего частоту вращения вала с управляющим сигналом и моментом сопротивления вращению со стороны нагрузки, а также модель гребного винта в виде зависимостей, связывающих тягу и момент сопротивления вращению гребного винта с частотой его вращения и скоростью потока жидкости, обтекающего движитель. Связав входные и выходные величины этих двух моделей, можно получить математическую модель движителя в целом.

Схема математической модели движителя, подготовленной для имитационного моделирования его работы, приведена на рисунке ниже.



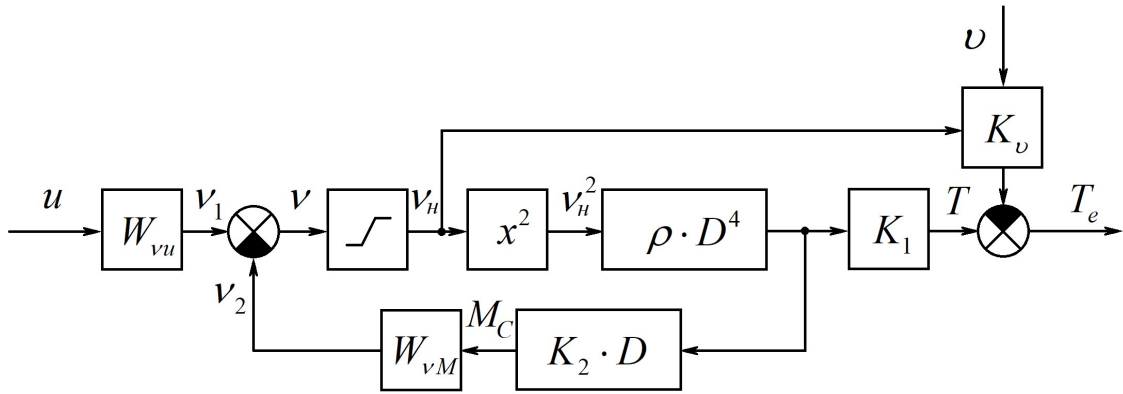


Рисунок 2.3 – Схема модели движителя с гребным винтом для имитационного моделирования

На рисунке 2.3 использованы следующие обозначения:  $u$  – управляющий сигнал;  $v$  – частота вращения вала электродвигателя;  $v_n$  – частота вращения вала электродвигателя с учетом насыщения;  $T$  – упор гребного винта;  $M_C$  – момент сопротивления вращению вала электродвигателя со стороны гребного винта;  $T_e$  – тяга движителя в целом;  $v$  – проекция скорости набегающего потока жидкости на ось вращения винта;  $W_{vu}$  – передаточная функция двигателя постоянного тока по управляющему сигналу;  $W_{vM}$  – передаточная функция двигателя постоянного тока по моменту сопротивления вращению;  $x^2$  – блок возведения в квадрат с учетом знака величины.

Схема математической модели движителя, подготовленной для синтеза регуляторов путем секторной линеаризации и ввода интервальных параметров, приведена на рисунке 2.4.

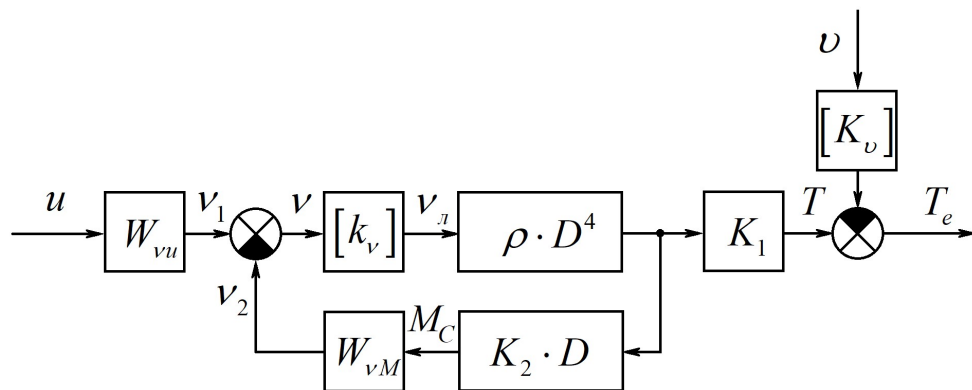


Рисунок 2.4 – Схема модели движителя с гребным винтом для синтеза регуляторов

Представленная на данном рисунке модель отличается от модели, представленной на предыдущем рисунке, наличием интервального коэффициента секторной линеаризации и интервального коэффициента поправки тяги винта на скорость набегающего потока жидкости.

Согласно рисунку 2.4 передаточные функции движителя с гребным винтом по задающему и возмущающему воздействиям могут быть записаны следующим образом:

$$W_{T_u}(s) = \frac{K_1 \cdot [k_v] \cdot c_m \cdot \rho \cdot D^4}{J_{\text{общ}} \cdot L_{\text{я}} \cdot s^2 + (J_{\text{общ}} \cdot R_{\text{я}} + D \cdot K_2 \cdot L_{\text{я}}) \cdot s + c_e \cdot c_m + D \cdot K_2 \cdot R_{\text{я}}};$$

$$W_{T_v}(s) = -\frac{[K_v]}{J_{\text{общ}} \cdot L_{\text{я}} \cdot s^2 + (J_{\text{общ}} \cdot R_{\text{я}} + D \cdot K_2 \cdot L_{\text{я}}) \cdot s + c_e \cdot c_m + D \cdot K_2 \cdot R_{\text{я}}}.$$

Модель движителя в таком виде будем использовать при построении модели системы для дальнейшего синтеза регуляторов. Рассмотрим далее процесс построения математической модели процесса движения НПА.

## 2.2 Математическое моделирование процесса движения НПА

Математическая модель процесса движения НПА должна связывать между собой пропульсивные силы и моменты, генерируемые ДРК НПА, и параметры движения НПА: скорости движения вдоль трех координатных осей и углы поворота НПА вокруг них. Также модель должна учитывать возмущающее воздействие в виде подводных течений. Рассмотрим далее процесс построения такой модели.

Движение НПА с учетом взаимовлияния между всеми степенями свободы описывается с помощью следующей системы из шести дифференциальных уравнений [76]:

$$(m + \lambda_{11}) \cdot \dot{v}_x + \lambda_{12} \cdot \dot{v}_y + \lambda_{13} \cdot \dot{v}_z + \lambda_{14} \cdot \dot{\omega}_x + \lambda_{15} \cdot \dot{\omega}_y + (-m \cdot y_C + \lambda_{16}) \cdot \dot{\omega}_z +$$

$$+(\lambda_{13} \cdot v_x + \lambda_{23} \cdot v_y + (m + \lambda_{33}) \cdot v_z + (m \cdot y_C + \lambda_{34}) \cdot \omega_x + \lambda_{35} \cdot \omega_y + \lambda_{36} \cdot \omega_z) \cdot \omega_y -$$

$$-(\lambda_{12} \cdot v_x + (m + \lambda_{22}) \cdot v_y + \lambda_{23} \cdot v_z + \lambda_{24} \cdot \omega_x + \lambda_{25} \cdot \omega_y + \lambda_{26} \cdot \omega_z) \cdot \omega_z = F_x;$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{12} \cdot \dot{v}_x + (m + \lambda_{22}) \cdot \dot{v}_y + \lambda_{23} \cdot \dot{v}_z + \lambda_{24} \cdot \dot{\omega}_x + \lambda_{25} \cdot \dot{\omega}_y + \lambda_{26} \cdot \dot{\omega}_z + \\ & + ((m + \lambda_{11}) \cdot v_x + \lambda_{12} \cdot v_y + \lambda_{13} \cdot v_z + \lambda_{14} \cdot \omega_x + \lambda_{15} \cdot \omega_y + (-m \cdot y_C + \lambda_{16}) \cdot \omega_z) \cdot \omega_z - \\ & - (\lambda_{13} \cdot v_x + \lambda_{23} \cdot v_y + (m + \lambda_{33}) \cdot v_z + (m \cdot y_C + \lambda_{34}) \cdot \omega_x + \lambda_{35} \cdot \omega_y + \lambda_{36} \cdot \omega_z) \cdot \omega_x = F_y; \\ & \lambda_{13} \cdot \dot{v}_x + \lambda_{23} \cdot \dot{v}_y + (m + \lambda_{33}) \cdot \dot{v}_z + (m \cdot y_C + \lambda_{34}) \cdot \dot{\omega}_x + \lambda_{35} \cdot \dot{\omega}_y + \lambda_{36} \cdot \dot{\omega}_z + \\ & + (\lambda_{12} \cdot v_x + (m + \lambda_{22}) \cdot v_y + \lambda_{23} \cdot v_z + \lambda_{24} \cdot \omega_x + \lambda_{25} \cdot \omega_y + \lambda_{26} \cdot \omega_z) \cdot \omega_x - \\ & - ((m + \lambda_{11}) \cdot v_x + \lambda_{12} \cdot v_y + \lambda_{13} \cdot v_z + \lambda_{14} \cdot \omega_x + \lambda_{15} \cdot \omega_y + (-m \cdot y_C + \lambda_{16}) \cdot \omega_z) \cdot \omega_y = F_z; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{14} \cdot \dot{v}_x + \lambda_{24} \cdot \dot{v}_y + (m \cdot y_C + \lambda_{34}) \cdot \dot{v}_z + (J_{xx} + \lambda_{44}) \cdot \dot{\omega}_x + (-J_{xy} + \lambda_{45}) \cdot \dot{\omega}_y + \\ & (-J_{xz} + \lambda_{46}) \cdot \dot{\omega}_z + ((-m \cdot y_C + \lambda_{16}) \cdot v_x + \lambda_{26} \cdot v_y + \lambda_{36} \cdot v_z + (-J_{xz} + \lambda_{46}) \cdot \omega_x + \\ & + (-J_{yz} + \lambda_{56}) \cdot \omega_y + (J_{zz} + \lambda_{66}) \cdot \omega_z) \cdot \omega_y - (\lambda_{15} \cdot v_x + \lambda_{25} \cdot v_y + \lambda_{35} \cdot v_z + \\ & + (-J_{xy} + \lambda_{45}) \cdot \omega_x + (J_{yy} + \lambda_{55}) \cdot \omega_y + (-J_{yz} + \lambda_{56}) \cdot \omega_z) \cdot \omega_z + \\ & + (\lambda_{13} \cdot v_x + \lambda_{23} \cdot v_y + (m + \lambda_{33}) \cdot v_z + (m \cdot y_C + \lambda_{34}) \cdot \omega_x + \lambda_{35} \cdot \omega_y + \lambda_{36} \cdot \omega_z) \cdot v_y - \\ & - (\lambda_{12} \cdot v_x + (m + \lambda_{22}) \cdot v_y + \lambda_{23} \cdot v_z + \lambda_{24} \cdot \omega_x + \lambda_{25} \cdot \omega_y + \lambda_{26} \cdot \omega_z) \cdot v_z = \\ & = M_x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{15} \cdot \dot{v}_x + \lambda_{25} \cdot \dot{v}_y + \lambda_{35} \cdot \dot{v}_z + (-J_{xy} + \lambda_{45}) \cdot \dot{\omega}_x + (J_{yy} + \lambda_{55}) \cdot \dot{\omega}_y + \\ & (-J_{yz} + \lambda_{56}) \cdot \dot{\omega}_z + (\lambda_{14} \cdot v_x + \lambda_{24} \cdot v_y + (m \cdot y_C + \lambda_{34}) \cdot v_z + (J_{xx} + \lambda_{44}) \cdot \omega_x + \\ & + (-J_{xy} + \lambda_{45}) \cdot \omega_y + (-J_{xz} + \lambda_{46}) \cdot \omega_z) \cdot \omega_z - ((-m \cdot y_C + \lambda_{16}) \cdot v_x + \lambda_{26} \cdot v_y + \lambda_{36} \cdot v_z + \\ & + (-J_{xz} + \lambda_{46}) \cdot \omega_x + (-J_{yz} + \lambda_{56}) \cdot \omega_y + (J_{zz} + \lambda_{66}) \cdot \omega_z) \cdot \omega_x + \\ & + ((m + \lambda_{11}) \cdot v_x + \lambda_{12} \cdot v_y + \lambda_{13} \cdot v_z + \lambda_{14} \cdot \omega_x + \lambda_{15} \cdot \omega_y + (-m \cdot y_C + \lambda_{16}) \cdot \omega_z) \cdot v_z - \\ & - (\lambda_{13} \cdot v_x + \lambda_{23} \cdot v_y + (m + \lambda_{33}) \cdot v_z + (m \cdot y_C + \lambda_{34}) \cdot \omega_x + \lambda_{35} \cdot \omega_y + \lambda_{36} \cdot \omega_z) \cdot v_x = \\ & = M_y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (-m \cdot y_C + \lambda_{16}) \cdot \dot{v}_x + \lambda_{26} \cdot \dot{v}_y + \lambda_{36} \cdot \dot{v}_z + (-J_{xz} + \lambda_{46}) \cdot \dot{\omega}_x + (-J_{yz} + \lambda_{56}) \cdot \dot{\omega}_y + \\ & (J_{zz} + \lambda_{66}) \cdot \dot{\omega}_z + (\lambda_{15} \cdot v_x + \lambda_{25} \cdot v_y + \lambda_{35} \cdot v_z + (-J_{xy} + \lambda_{45}) \cdot \omega_x + \\ & + (J_{yy} + \lambda_{55}) \cdot \omega_y + (-J_{yz} + \lambda_{56}) \cdot \omega_z) \cdot \omega_x - (\lambda_{14} \cdot v_x + \lambda_{24} \cdot v_y + (m \cdot y_C + \lambda_{34}) \cdot v_z + \\ & + (J_{xx} + \lambda_{44}) \cdot \omega_x + (-J_{xy} + \lambda_{45}) \cdot \omega_y + (-J_{xz} + \lambda_{46}) \cdot \omega_z) \cdot \omega_y + \\ & + (\lambda_{12} \cdot v_x + (m + \lambda_{22}) \cdot v_y + \lambda_{23} \cdot v_z + \lambda_{24} \cdot \omega_x + \lambda_{25} \cdot \omega_y + \lambda_{26} \cdot \omega_z) \cdot v_x - \\ & - ((m + \lambda_{11}) \cdot v_x + \lambda_{12} \cdot v_y + \lambda_{13} \cdot v_z + \lambda_{14} \cdot \omega_x + \lambda_{15} \cdot \omega_y + (-m \cdot y_C + \lambda_{16}) \cdot \omega_z) \cdot v_y = \\ & = M_z; \end{aligned}$$

где  $v_x, v_y, v_z$  – проекции линейных скоростей на соответствующие координатные оси;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – проекции угловых скоростей на соответствующие

координатные оси;  $y_C$  – метацентрическая высота НПА;  $J_{ij}$  – моменты инерции НПА относительно соответствующих осей;  $\lambda_{ij}$  – массы и моменты инерции жидкости, сдвигаемой НПА при движении;  $F_x, F_y, F_z$  – равнодействующие сил, действующих на НПА вдоль соответствующих осей;  $M_x, M_y, M_z$  – эквивалентный момент, действующий на НПА относительно соответствующей оси.

В том случае, если есть информация о геометрии НПА, можно упростить указанную систему уравнений. Так, например, для НПА с продольно-вертикальной плоскостью симметрии пренебрегают слагаемыми с присоединенными массами  $\lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{15}, \lambda_{23}, \lambda_{24}, \lambda_{25}, \lambda_{36}, \lambda_{46}, \lambda_{56}$ . Для НПА с горизонтальной плоскостью симметрии справедливо пренебречь слагаемыми с присоединенными массами  $\lambda_{12}, \lambda_{14}, \lambda_{16}, \lambda_{23}, \lambda_{34}, \lambda_{36}, \lambda_{25}, \lambda_{54}, \lambda_{56}$ . Будем считать, что рассматриваемые НПА симметричны относительно продольно-вертикальной плоскости. Рассмотрим далее правые части уравнений.

Эквивалентные силы и моменты в правых частях уравнений формируются на основе пропульсивных, гидродинамических и гидростатических сил и моментов [31, 47, 76]:

$$\begin{aligned} F_x &= T_x - R_x^{\text{гд}} + R_x^{\text{гст}}, \\ F_y &= T_y - R_y^{\text{гд}} + R_y^{\text{гст}}, \\ F_z &= T_z - R_z^{\text{гд}} + R_z^{\text{гст}}, \\ M_x &= M_x^T - M_x^{\text{гд}} + M_x^{\text{гст}}, \\ M_y &= M_y^T - M_y^{\text{гд}} + M_y^{\text{гст}}, \\ M_z &= M_z^T - M_z^{\text{гд}} + M_z^{\text{гст}}, \end{aligned}$$

где  $T_x, T_y, T_z, M_x^T, M_y^T, M_z^T$  – пропульсивные силы и моменты, действующие относительно соответствующих осей;  $R_x^{\text{гд}}, R_y^{\text{гд}}, R_z^{\text{гд}}, M_x^{\text{гд}}, M_y^{\text{гд}}, M_z^{\text{гд}}$  – гидродинамические силы и моменты, действующие относительно

соответствующих осей;  $R_x^{\text{гст}}$ ,  $R_y^{\text{гст}}$ ,  $R_z^{\text{гст}}$ ,  $M_x^{\text{гст}}$ ,  $M_y^{\text{гст}}$ ,  $M_z^{\text{гст}}$  – гидростатические силы и моменты, действующие относительно соответствующих осей.

Гидродинамические силы и моменты возникают в результате реакции вязкой жидкости на движение НПА и описываются следующими зависимостями [30, 31, 76]:

$$R_x^{\text{гд}} = 0.5 \cdot c_x \cdot \rho \cdot V^{2/3} \cdot v \cdot |v|,$$

$$R_y^{\text{гд}} = 0.5 \cdot c_y \cdot \rho \cdot V^{2/3} \cdot v \cdot |v|,$$

$$R_z^{\text{гд}} = 0.5 \cdot c_z \cdot \rho \cdot V^{2/3} \cdot v \cdot |v|,$$

$$M_x^{\text{гд}} = 0.5 \cdot m_x \cdot \rho \cdot V \cdot v \cdot |v|,$$

$$M_y^{\text{гд}} = 0.5 \cdot m_y \cdot \rho \cdot V \cdot v \cdot |v|,$$

$$M_z^{\text{гд}} = 0.5 \cdot m_z \cdot \rho \cdot V \cdot v \cdot |v|,$$

где  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $c_z$ ,  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  – коэффициенты гидродинамических сил и моментов;  $\rho$  – плотность воды;  $V$  – водоизмещение;  $v$  – скорость потока жидкости, обтекающего НПА. Следует упомянуть, что скорость потока жидкости, обтекающего НПА, зависит также от скорости подводных течений, которое следует учесть в разрабатываемой модели как возмущающее воздействие. Опишем подводное течение тремя параметрами: его скоростью и значениями углов атаки и дрейфа. Проекция скорости подводного течения на оси связанной системы координат могут быть вычислены с помощью следующих выражений:

$$\begin{aligned} v_x^f &= v^f \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta), \\ v_y^f &= v^f \cdot \sin(\alpha), \\ v_z^f &= v^f \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $v^f$  – модуль скорости течения;  $\alpha$  – значение угла атаки,  $\beta$  – значение угла дрейфа.

Гидродинамические силы и моменты имеют позиционные и демпфирующие составляющие, а также зависят от ориентации НПА в потоке жидкости, принято считать коэффициенты гидродинамических сил и моментов функциями значений углов атаки и дрейфа и угловых скоростей НПА:

$$c_{x,y,z} = c_{x,y,z}(\alpha, \beta, \omega_x, \omega_y, \omega_z),$$

$$m_{x,y,z} = m_{x,y,z}(\alpha, \beta, \omega_x, \omega_y, \omega_z).$$

Некоторыми из этих зависимостей допустимо пренебречь. Экспериментально установлено [31], что функции коэффициентов гидродинамических сил и моментов имеют следующие аргументы:

$$c_x = c_x(\alpha, \beta),$$

$$c_y = c_y(\alpha, \omega_z),$$

$$c_z = c_z(\beta, \omega_x, \omega_y),$$

$$m_x = m_x(\beta, \omega_x, \omega_y),$$

$$m_y = m_y(\beta, \omega_x, \omega_y),$$

$$m_z = m_z(\alpha, \omega_z).$$

Функции гидродинамических коэффициентов имеют вид линейных комбинаций своих аргументов [62] и могут быть записаны следующим образом:

$$c_x = c_x^\alpha \cdot \alpha + c_x^\beta \cdot \beta,$$

$$c_y = c_y^\alpha \cdot \alpha + c_x^{\omega_z} \cdot V^{1/3} \cdot \omega_z,$$

$$c_z = c_z^\beta \cdot \beta + c_z^{\omega_x} \cdot V^{1/3} \cdot \omega_x + c_z^{\omega_y} \cdot V^{1/3} \cdot \omega_y,$$

$$m_x = m_x^\beta \cdot \beta + m_x^{\omega_x} \cdot V^{1/3} \cdot \omega_x + m_x^{\omega_y} \cdot V^{1/3} \cdot \omega_y,$$

$$m_y = m_y^\beta \cdot \beta + m_y^{\omega_x} \cdot V^{1/3} \cdot \omega_x + m_y^{\omega_y} \cdot V^{1/3} \cdot \omega_y,$$

$$m_z = m_z^\alpha \cdot \alpha + m_z^{\omega_z} \cdot V^{1/3} \cdot \omega_z.$$

Гидростатические силы и моменты возникают в результате действия силы Архимеда и веса подводного аппарата и описываются следующими зависимостями [30, 31]:

$$R_x^{\text{гст}} = (A - G) \cdot \sin \psi,$$

$$R_y^{\text{гст}} = (A - G) \cdot \cos \psi \cdot \cos \theta,$$

$$R_z^{\text{гст}} = -(A - G) \cdot \cos \psi \cdot \sin \theta,$$

$$M_x^{\text{гст}} = -A \cdot z_A \cdot \cos \psi \cdot \cos \theta - A \cdot y_A \cdot \cos \psi \cdot \sin \theta,$$

$$M_y^{\text{гст}} = A \cdot x_A \cdot \cos \psi \cdot \sin \theta + A \cdot z_A \cdot \sin \psi,$$

$$M_z^{\text{гст}} = A \cdot x_A \cdot \cos \psi \cdot \cos \theta - A \cdot y_A \cdot \sin \psi,$$

где  $A$  – сила Архимеда, действующая на НПА;  $G$  – сила тяжести НПА;  $x_A, y_A, z_A$  – координаты центра водоизмещения НПА относительно его центра тяжести.

Таким образом, с учетом приведенных выше упрощений и преобразований, система уравнений, описывающих движение НПА в вязкой жидкости, может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases}
 (m + \lambda_{11}) \cdot \dot{v}_x + \lambda_{12} \cdot \dot{v}_y + (-m \cdot y_C + \lambda_{16}) \cdot \dot{\omega}_z + [(m + \lambda_{33}) \cdot v_z + (m \cdot y_C + \lambda_{34}) \cdot \omega_x + \\
 + \lambda_{35} \cdot \omega_y] \cdot \omega_y - [\lambda_{12} \cdot v_x + (m + \lambda_{22}) \cdot v_y + \lambda_{26} \cdot \omega_z] \cdot \omega_z = T_x - 0.5 \cdot (c_x^\alpha \cdot \alpha + c_x^\beta \cdot \beta) \cdot \\
 \cdot \rho \cdot V^{2/3} \cdot |v_x + v_x^f| \cdot (v_x + v_x^f) + (A - G) \cdot \sin(\psi); \\
 \lambda_{12} \cdot \dot{v}_x + (m + \lambda_{22}) \cdot \dot{v}_y + \lambda_{26} \cdot \dot{\omega}_z + [(m + \lambda_{11}) \cdot v_x + \lambda_{12} \cdot v_y + (-m \cdot y_C + \lambda_{16}) \cdot \omega_z] \cdot \omega_z - \\
 - [(m + \lambda_{33}) \cdot v_z + (m \cdot y_C + \lambda_{34}) \cdot \omega_x + \lambda_{35} \cdot \omega_y] \cdot \omega_x = T_y - 0.5 \cdot (c_y^\alpha \cdot \alpha + c_x^{\omega_z} \cdot V^{1/3} \cdot \omega_z) \cdot \rho \cdot \\
 \cdot V^{2/3} \cdot |v_y + v_y^f| \cdot (v_y + v_y^f) + (A - G) \cdot \cos(\psi) \cdot \cos(\theta); \\
 (m + \lambda_{33}) \cdot \dot{v}_z + (m \cdot y_C + \lambda_{34}) \cdot \dot{\omega}_x + \lambda_{35} \cdot \dot{\omega}_y + [\lambda_{12} \cdot v_x + (m + \lambda_{22}) \cdot v_y + \lambda_{26} \cdot \omega_z] \cdot \omega_x - \\
 - [(m + \lambda_{11}) \cdot v_x + \lambda_{12} \cdot v_y + (-m \cdot y_C + \lambda_{16}) \cdot \omega_z] \cdot \omega_y = T_z - 0.5 \cdot (c_z^\beta \cdot \beta + c_z^{\omega_x} \cdot V^{1/3} \cdot \omega_x + \\
 + c_z^{\omega_y} \cdot V^{1/3} \cdot \omega_y) \cdot \rho \cdot V^{2/3} \cdot |v_z + v_z^f| \cdot (v_z + v_z^f) - (A - G) \cdot \cos(\psi) \cdot \sin(\theta); \\
 (m \cdot y_C + \lambda_{34}) \cdot \dot{v}_z + (J_{xx} + \lambda_{44}) \cdot \dot{\omega}_x + (-J_{xy} + \lambda_{45}) \cdot \dot{\omega}_y + [(-m \cdot y_C + \lambda_{16}) \cdot v_x + \lambda_{26} \cdot v_y + \\
 + (J_{zz} + \lambda_{66}) \cdot \omega_z] \cdot \omega_y - [\lambda_{35} \cdot v_z + (-J_{xy} + \lambda_{45}) \cdot \omega_x + (J_{yy} + \lambda_{55}) \cdot \omega_y] \cdot \omega_z + [(m + \lambda_{33}) \cdot v_z + \\
 + (m \cdot y_C + \lambda_{34}) \cdot \omega_x + \lambda_{35} \cdot \omega_y] \cdot v_y - [\lambda_{12} \cdot v_x + (m + \lambda_{22}) \cdot v_y + \lambda_{26} \cdot \omega_z] \cdot v_z = \\
 = M_x^T - 0.5 \cdot (m_x^\beta \cdot \beta + m_x^{\omega_x} \cdot V^{1/3} \cdot \omega_x + m_x^{\omega_y} \cdot V^{1/3} \cdot \omega_y) \cdot \rho \cdot V \cdot |v_x + v_x^f| \cdot (v_x + v_x^f) - \\
 - A \cdot z_A \cdot \cos(\psi) \cdot \cos(\theta) - A \cdot y_A \cdot \cos(\psi) \cdot \sin(\theta); \\
 \lambda_{35} \cdot \dot{v}_z + (-J_{xy} + \lambda_{45}) \cdot \dot{\omega}_x + (J_{yy} + \lambda_{55}) \cdot \dot{\omega}_y + [(m \cdot y_C + \lambda_{34}) \cdot v_z + (J_{xx} + \lambda_{44}) \cdot \omega_x + \\
 + (-J_{xy} + \lambda_{45}) \cdot \omega_y] \cdot \omega_z - [(-m \cdot y_C + \lambda_{16}) \cdot v_x + \lambda_{26} \cdot v_y + (J_{zz} + \lambda_{66}) \cdot \omega_z] \cdot \omega_x + \\
 + [(m + \lambda_{11}) \cdot v_x + \lambda_{12} \cdot v_y + (-m \cdot y_C + \lambda_{16}) \cdot \omega_z] \cdot v_z - [(m + \lambda_{33}) \cdot v_z + (m \cdot y_C + \lambda_{34}) \cdot \omega_x + \\
 + \lambda_{35} \cdot \omega_y] \cdot v_x = M_y^T - 0.5 \cdot (m_y^\beta \cdot \beta + m_y^{\omega_x} \cdot V^{1/3} \cdot \omega_x + m_y^{\omega_y} \cdot V^{1/3} \cdot \omega_y) \cdot \rho \cdot V \cdot |v_y + v_y^f| \cdot \\
 \cdot (v_y + v_y^f) + A \cdot x_A \cdot \cos(\psi) \cdot \sin(\theta) + A \cdot z_A \cdot \sin(\psi); \\
 (-m \cdot y_C + \lambda_{16}) \cdot \dot{v}_x + \lambda_{26} \cdot \dot{v}_y + (J_{zz} + \lambda_{66}) \cdot \dot{\omega}_z + [\lambda_{35} \cdot v_z + (-J_{xy} + \lambda_{45}) \cdot \omega_x + \\
 + (J_{yy} + \lambda_{55}) \cdot \omega_y] \cdot \omega_x - [(m \cdot y_C + \lambda_{34}) \cdot v_z + (J_{xx} + \lambda_{44}) \cdot \omega_x + (-J_{xy} + \lambda_{45}) \cdot \omega_y] \cdot \omega_y + \\
 + [\lambda_{12} \cdot v_x + (m + \lambda_{22}) \cdot v_y + \lambda_{26} \cdot \omega_z] \cdot v_x - [(m + \lambda_{11}) \cdot v_x + \lambda_{12} \cdot v_y + (-m \cdot y_C + \lambda_{16}) \cdot \omega_z] \cdot \\
 \cdot v_y = M_z^T - 0.5 \cdot (m_z^\alpha \cdot \alpha + m_z^{\omega_z} \cdot V^{1/3} \cdot \omega_z) \cdot \rho \cdot V \cdot |v_z + v_z^f| \cdot (v_z + v_z^f) + \\
 + A \cdot x_A \cdot \cos(\psi) \cdot \cos(\theta) - A \cdot y_A \cdot \sin(\psi).
 \end{cases}$$

Полученная система уравнений позволит рассчитать линейные и угловые скорости НПА в связанной системе координат. Координаты НПА в глобальной системе координат можно вычислить с помощью умножения вектора найденных скоростей на ранее приведенную матрицу перехода в глобальную систему координат и интегрирования. Далее будем использовать полученную систему дифференциальных уравнений для имитационного моделирования движения НПА в шести степенях свободы с учетом вязкого трения и наличия подводных течений.

Для подготовки модели к синтезу регуляторов необходимо ее упростить и линеаризовать. Для упрощения правой части уравнений будем считать, что углы курса  $\varphi$ , крена  $\theta$ , дифферента  $\psi$ , атаки  $\alpha$  и дрейфа  $\beta$  принимают значения до  $\frac{\pi}{6}$  рад [30, 31]. Это позволяет принимать их косинус равным единице, а синус – величине угла. Также исключим из модели для синтеза регуляторов гидростатические силы и моменты ввиду того, что получение аналитических выражений для закона управления, компенсирующего их влияние на движение НПА, в дальнейшем рассматриваться не будет.

Для упрощения левых частей уравнений заменим в них некоторые линейные и угловые скорости и ускорения на интервальные параметры, пределы которых будем оценивать на основе характеристик движительно-рулевого комплекса моделируемого аппарата. Разобьем таким образом многосвязный объект управления на несколько односвязных, что позволит значительно упростить структуру модели и в то же время учесть некоторые взаимовлияния регулируемых величин.

Учитывая вышесказанное, запишем математическую модель процесса движения НПА в виде набора передаточных функций, связывающих параметры движения НПА с управляющими и возмущающими воздействиями:



$$W_{v_x T_x}(s) = \frac{1}{(m + \lambda_{11}) \cdot s + 0.5 \cdot c_x([\alpha], [\beta]) \cdot \rho \cdot V^{2/3} \cdot [k_{11}] - \lambda_{12} \cdot [\omega_z]};$$

$$W_{v_x v_f}(s) = \frac{0.5 \cdot c_x([\alpha], [\beta]) \cdot \rho \cdot V^{2/3} \cdot [k_{12}]}{(m + \lambda_{11}) \cdot s + 0.5 \cdot c_x([\alpha], [\beta]) \cdot \rho \cdot V^{2/3} \cdot [k_{11}] - \lambda_{12} \cdot [\omega_z]};$$

$$W_{v_y T_y}(s) = \frac{1}{(m + \lambda_{22}) \cdot s + 0.5 \cdot c_y([\alpha], [\omega_z]) \cdot \rho \cdot V^{2/3} \cdot [k_{21}] + \lambda_{12} \cdot [\omega_z]};$$

$$W_{v_y v_f}(s) = \frac{0.5 \cdot c_y([\alpha], [\omega_z]) \cdot \rho \cdot V^{2/3} \cdot [k_{22}] \cdot [\alpha]}{(m + \lambda_{22}) \cdot s + 0.5 \cdot c_y([\alpha], [\omega_z]) \cdot \rho \cdot V^{2/3} \cdot [k_{21}] + \lambda_{12} \cdot [\omega_z]};$$

$$W_{v_z T_z}(s) = \frac{1}{(m + \lambda_{33}) \cdot s + 0.5 \cdot c_z([\beta], [\omega_x], [\omega_y]) \cdot \rho \cdot V^{2/3} \cdot [k_{31}]};$$

$$W_{v_z v_f}(s) = \frac{0.5 \cdot c_z([\beta], [\omega_x], [\omega_y]) \cdot \rho \cdot V^{2/3} \cdot [k_{32}] \cdot [\beta]}{(m + \lambda_{33}) \cdot s + 0.5 \cdot c_z([\beta], [\omega_x], [\omega_y]) \cdot \rho \cdot V^{2/3} \cdot [k_{31}]};$$

$$W_{\omega_x M_x^T}(s) = \frac{1}{(J_{xx} + \lambda_{44}) \cdot s + (m \cdot y_C + \lambda_{34}) \cdot [v_y] - (-J_{xy} + \lambda_{45}) \cdot [\omega_z]};$$

$$W_{\omega_x v_x}(s) = \frac{0.5 \cdot m_x([\beta], [\omega_x], [\omega_y]) \cdot \rho \cdot V \cdot [k_{11}]}{(J_{xx} + \lambda_{44}) \cdot s + (m \cdot y_C + \lambda_{34}) \cdot [v_y] - (-J_{xy} + \lambda_{45}) \cdot [\omega_z]};$$

$$W_{\omega_x v_f}(s) = \frac{0.5 \cdot m_x([\beta], [\omega_x], [\omega_y]) \cdot \rho \cdot V \cdot [k_{12}]}{(J_{xx} + \lambda_{44}) \cdot s + (m \cdot y_C + \lambda_{34}) \cdot [v_y] - (-J_{xy} + \lambda_{45}) \cdot [\omega_z]};$$

$$W_{\omega_y M_y^T}(s) = \frac{1}{(J_{yy} + \lambda_{55}) \cdot s + ((-J_{xy} + \lambda_{45}) \cdot [\omega_z] - \lambda_{35} \cdot [v_x])};$$

$$W_{\omega_y v_y}(s) = \frac{0.5 \cdot m_y([\beta], [\omega_x], [\omega_y]) \cdot \rho \cdot V \cdot [k_{21}]}{(J_{yy} + \lambda_{55}) \cdot s + ((-J_{xy} + \lambda_{45}) \cdot [\omega_z] - \lambda_{35} \cdot [v_x])};$$

$$W_{\omega_y v_f}(s) = \frac{0.5 \cdot m_y([\beta], [\omega_x], [\omega_y]) \cdot \rho \cdot V \cdot [k_{22}] \cdot [\alpha]}{(J_{yy} + \lambda_{55}) \cdot s + ((-J_{xy} + \lambda_{45}) \cdot [\omega_z] - \lambda_{35} \cdot [v_x])};$$

$$W_{\omega_z M_z^T}(s) = \frac{1}{(J_{zz} + \lambda_{66}) \cdot s + \lambda_{26} \cdot [v_x] - (-m \cdot y_C + \lambda_{16}) \cdot [v_y]};$$

$$W_{\omega_z v_z}(s) = \frac{0.5 \cdot m_z([\alpha], [\omega_z]) \cdot \rho \cdot V \cdot [k_{31}]}{(J_{zz} + \lambda_{66}) \cdot s + \lambda_{26} \cdot [v_x] - (-m \cdot y_C + \lambda_{16}) \cdot [v_y]};$$

$$W_{\omega_z v_f}(s) = \frac{0.5 \cdot m_z([\alpha], [\omega_z]) \cdot \rho \cdot V \cdot [k_{32}] \cdot [\beta]}{(J_{zz} + \lambda_{66}) \cdot s + \lambda_{26} \cdot [v_x] - (-m \cdot y_C + \lambda_{16}) \cdot [v_y]};$$

где  $k_{ij}$  – коэффициенты линеаризации квадратичных зависимостей гидродинамических сил и моментов от соответствующих проекций скорости движения НПА.

Рассмотрим далее применение полученных математических моделей для исследования системы управления движением конкретного НПА в вертикальной плоскости.

### 2.3 Модель системы управления движением НПА в вертикальной плоскости

Рассмотрим процесс построения математической модели системы управления движением НПА в вертикальной плоскости. В данном разделе опишем исследуемый НПА; определим значения его постоянных и интервальных параметров; зададим структуру синтезируемой системы и выведем ее модель в форме передаточных функций с интервальными параметрами.

Предположим, что исследуемый НПА имеет приближенную к цилиндрической форму, оснащен четырьмя маршевыми движителями в кормовой части аппарата, двумя подруливающими вертикальными движителями в предусмотренных для них вертикальных каналах в корпусе НПА, а также одним горизонтальным подруливающим устройством в носовой части аппарата. Оси маршевых движителей параллельны продольной оси аппарата. Вид исследуемого НПА сбоку схематично изображен на рисунке 2.5.

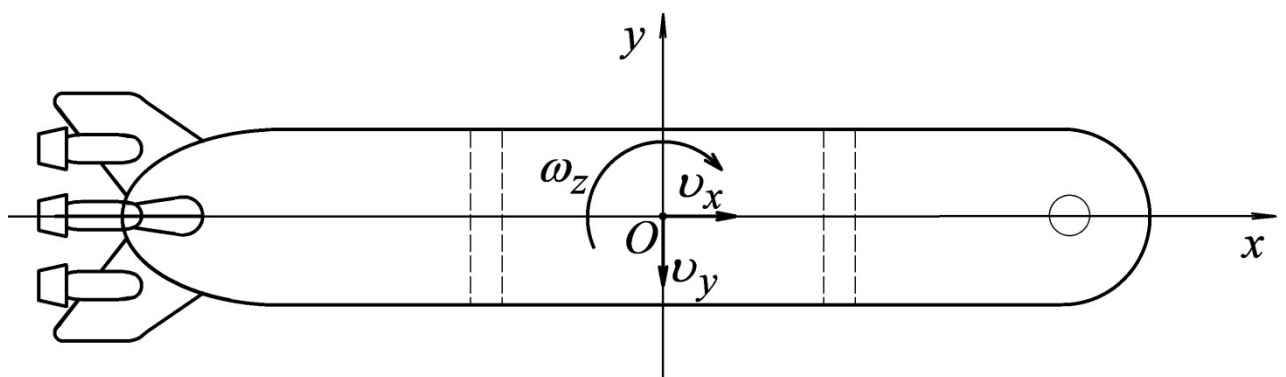


Рисунок 2.5 – Схематичное изображение исследуемого НПА сбоку

При дальнейших расчетах будем предполагать, что управление скоростью движения НПА по продольной оси осуществляется тягой маршевых движителей;

управление глубиной и скоростью погружения осуществляется вертикальными подруливающими движителями; управление дифферентом и скоростью его изменения осуществляется разностью тяг вертикальных подруливающих движителей. Далее приведем параметры самого НПА и его движительно-рулевого комплекса, а также оценим значения интервальных параметров исследуемой системы.

### 2.3.1 Оценка параметров системы

Согласно ранее приведенной модели в исследуемой системе присутствует ряд постоянных и интервальных параметров. Значения постоянных параметров будут приведены со ссылкой на литературу без описания процедуры их расчета. Первичные и вторичные интервальные параметры: коэффициенты секторной линеаризации, угол атаки, гидродинамические коэффициенты и коэффициенты поправки эффективности гребного винта на скорость потока жидкости, будут приведены с пояснениями расчетов.

#### 2.3.1.1 Оценка параметров ДРК НПА

Предположим, что исследуемый НПА оснащен движителями, описанными в [62]. Воспользуемся приведенными в указанной работе результатами экспериментов и найдем параметры описанной в разделе 2.1 модели движителя.

Согласно принятой модели гребной винт описывается уравнениями (2.7). Известно, что диаметр винта  $D = 0.19$  м; плотность воды примем равной  $\rho = 1025$  кг/м<sup>3</sup>. Оценку остальных параметров модели рассмотрим далее.

Зависимость передаточных коэффициентов винта по упору и по моменту  $K_1$  и  $K_2$  от относительной поступи винта  $\lambda$  показана на рисунке 2.6.

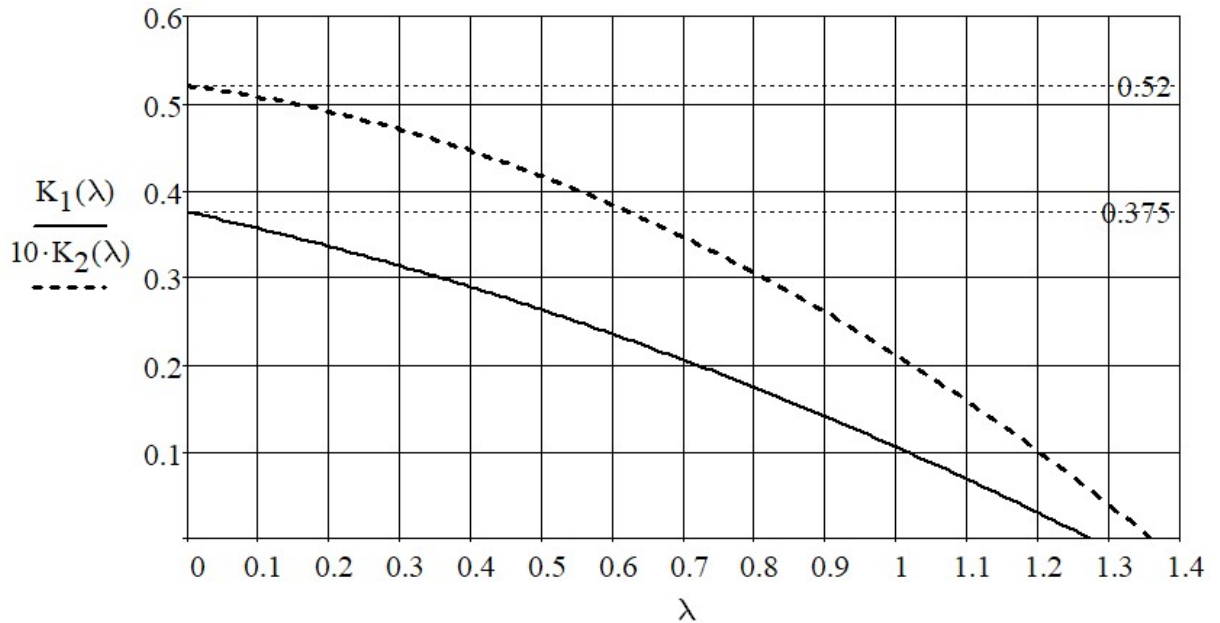


Рисунок 2.6 – Зависимость передаточных коэффициентов винта по упору и моменту от его относительной поступи

Ввиду того, что коррекция тяги движителя в модели выполняется за счет отдельного коэффициента, присвоим  $K_1$  и  $K_2$  их значения для швартовых испытаний движителя при  $\lambda = 0$ . Таким образом,  $K_1 = 0.375$ ;  $K_2 = 0.052$ . Для оценки  $[K_v]$ ,  $[k_v]$  воспользуемся характеристиками на рисунке ниже.

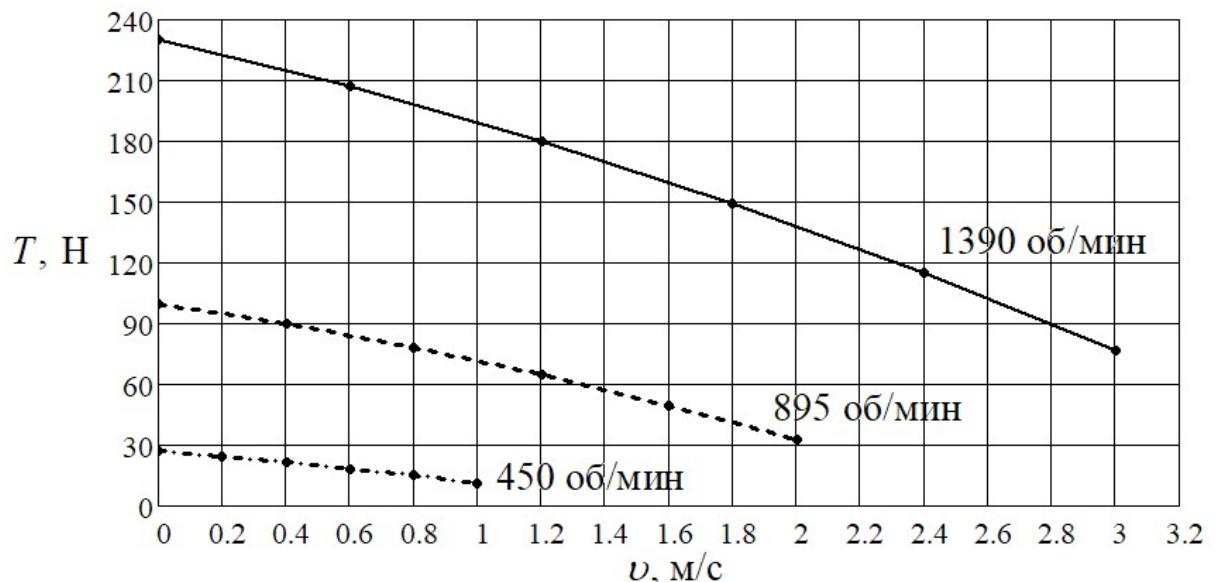


Рисунок 2.7 – Зависимость тяги винта от скорости набегающего потока

На рисунке 2.7 представлены зависимости тяги исследуемого гребного винта от скорости набегающего потока жидкости для трех значений частоты его вращения. Предположим, что с увеличением скорости набегающего потока тяга

винта снижается линейно. Коэффициент в этой линейной зависимости и будет искомым  $[K_v]$ . Рассчитаем искомый коэффициент для каждой из частот вращения винта по следующему выражению:

$$K_{v_i} = \frac{T(0) - T(v_i)}{v_i}.$$

Результаты расчетов приведены на рисунке ниже.

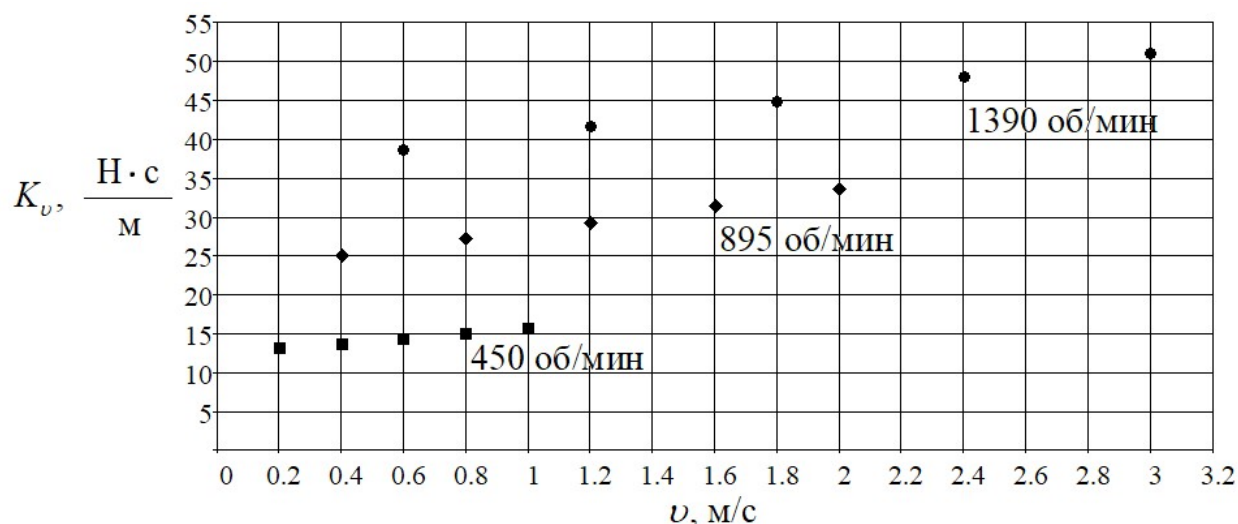


Рисунок 2.8 – Значения корректирующих коэффициентов тяги винта по скорости набегающего потока для различных скоростей потока

Отнесем полученные значения коэффициентов к частоте вращения винта и отобразим полученные значения на рисунке 2.9.

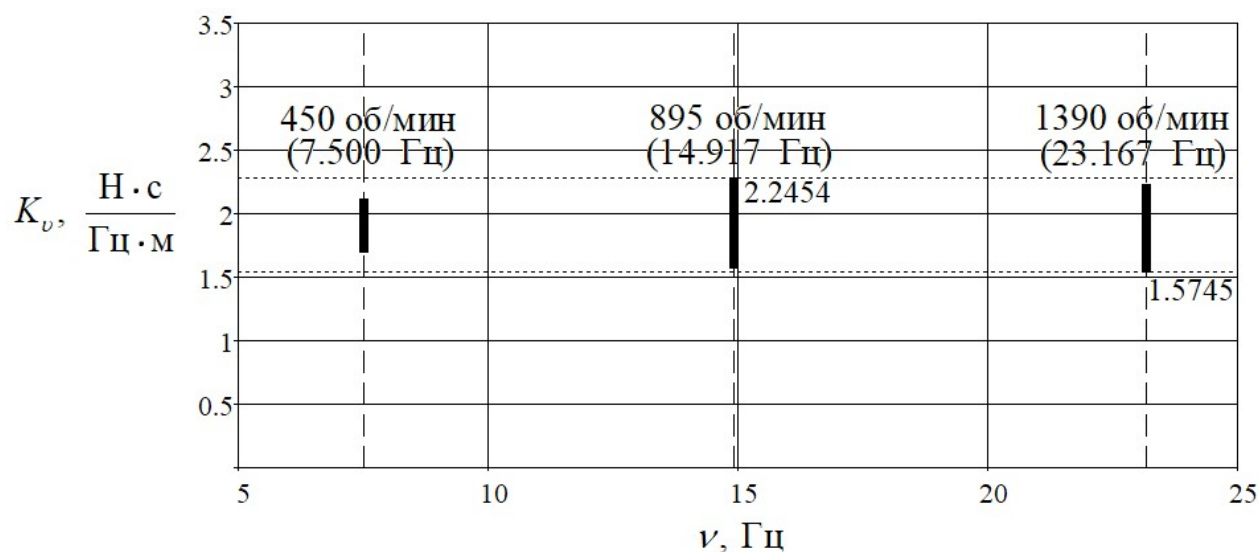


Рисунок 2.9 – Значения корректирующих коэффициентов тяги винта по скорости набегающего потока для различных частот его вращения

По данным, представленным на рисунке 2.9, есть возможность оценить интервал  $[K_v]$ . Примем коэффициент коррекции тяги винта по скорости набегающего потока  $[K_v]$  равным  $[1.5745; 2.2454]$ . Исходя из того, что испытания исследуемого винта проводились на диапазоне частот вращения  $\nu = [7.500; 23.167]$  Гц, можно утверждать, что на этих частотах винт не разрушается и сохраняет достаточную для применения эффективность. Примем коэффициент  $[k_v]$  равным  $[7.500; 23.167]$ .

Таким образом, при синтезе робастных регуляторов с постоянными параметрами будем использовать следующую модель гребного винта:

$$\begin{aligned} T_e(\nu) &= K_1 \cdot \rho \cdot D^4 \cdot [k_v] \cdot \nu - [K_v] \cdot [k_v] \cdot \nu = \\ &= [3.757; 11.605] \cdot \nu - [11.809; 52.019] \cdot \nu; \\ M(\nu) &= K_2 \cdot \rho \cdot D^5 \cdot [k_v] \cdot \nu = [0.099; 23.167] \cdot \nu. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ввиду того, что параметр  $[K_v]$  – неизмеряемый, при синтезе адаптивно-робастных регуляторов с подстройкой параметров будем считать  $[K_v]$  постоянным и равным среднему арифметическому границ интервала:  $K_v = 1.910$ .

Электродвигатель в свою очередь описывается передаточными функциями с постоянными коэффициентами (2.5). Известно, что в описанных в [62] движителях применялись электродвигатели серии 5ДБМ120. Подбрав подходящий к описанному винту двигатель из указанной серии, запишем его передаточные функции следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{\omega u}(s) &= \frac{10}{1.668 \cdot 10^{-5} \cdot s^2 + 27.8 \cdot 10^{-3} \cdot s + 1}; \\ W_{\omega M}(s) &= \frac{4.8 \cdot 10^{-4} \cdot s + 0.8}{1.668 \cdot 10^{-5} \cdot s^2 + 27.8 \cdot 10^{-3} \cdot s + 1}. \end{aligned}$$

С учетом вышесказанного сформируем передаточные функции, описывающие движитель целиком. Первая из них связывает управляющий сигнал и тягу движителя, вторая – скорость набегающего потока жидкости и тягу движителя:

$$W_{Tu}(s) = \frac{0.797 \cdot [k_v]}{1.668 \cdot 10^{-5} \cdot s^2 + (6.335 \cdot 10^{-3} \cdot [k_v] + 0.028) \cdot s + 0.011 \cdot [k_v] + 1};$$

$$W_{Tv}(s) = [K_v] \cdot [k_v].$$

Значение тяги движителя, скорректированное по скорости набегающего потока, формируется в итоге согласно выражению

$$T_e = W_{Tu}(s) \cdot u - W_{Tv}(s) \cdot v.$$

### 2.3.1.2 Оценка параметров НПА

Согласно выведенной ранее модели, процесс движения НПА в вязкой жидкости в продольно-вертикальной плоскости описывается с помощью передаточных функций, связывающих пропульсивные силы и моменты с линейными и угловыми скоростями аппарата:

$$W_{v_x T_x}(s) = \frac{1}{(m + \lambda_{11}) \cdot s + 0.5 \cdot c_x(\alpha) \cdot \rho \cdot V^{2/3} \cdot [k_{11}]};$$

$$W_{v_x v_f}(s) = \frac{0.5 \cdot c_x(\alpha) \cdot \rho \cdot V^{2/3} \cdot [k_{12}]}{(m + \lambda_{11}) \cdot s + 0.5 \cdot c_x(\alpha) \cdot \rho \cdot V^{2/3} \cdot [k_{11}]};$$

$$W_{v_y T_y}(s) = \frac{1}{(m + \lambda_{22}) \cdot s + 0.5 \cdot c_y(\alpha, \omega_z) \cdot \rho \cdot V^{2/3} \cdot [k_{21}]};$$

$$W_{v_y v_f}(s) = \frac{0.5 \cdot c_y(\alpha, \omega_z) \cdot \rho \cdot V^{2/3} \cdot [k_{22}] \cdot \alpha}{(m + \lambda_{22}) \cdot s + 0.5 \cdot c_y(\alpha, \omega_z) \cdot \rho \cdot V^{2/3} \cdot [k_{21}]};$$

$$W_{\omega_z M_z^T}(s) = \frac{1}{(J_{zz} + \lambda_{66}) \cdot s + m \cdot y_C \cdot [v_y]}.$$

Также известно, что

$$c_x(\alpha) = c_{x_0} + c_x^\alpha \cdot \alpha;$$

$$c_y(\alpha, \omega_z) = c_y^\alpha \cdot \alpha + c_y^{\omega_z} \cdot V^{1/3} \cdot \omega_z.$$
(2.11)

Таким образом, для дальнейших расчетов необходимо задать значения следующих параметров: масса НПА  $m$ ; момент инерции  $J_{zz}$ ; присоединенные массы  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{22}$  и  $\lambda_{66}$ ; объемное водоизмещение  $V$ ; коэффициенты в зависимостях

гидродинамических коэффициентов  $c_x$  и  $c_y$  от угла атаки  $\alpha$ . Для секторной линеаризации квадратичных зависимостей гидродинамических сил и моментов от скорости движения НПА необходимо оценить интервалы значений этих скоростей с учетом характеристик ДРК исследуемого НПА.

Для оценки параметров НПА воспользуемся [30]; значения постоянных параметров НПА приведены в Таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Значения постоянных параметров НПА

Наименование параметра		Значение
Масса НПА $m$ , кг		1140
Момент инерции $J_{zz}$ относительно оси $Oz$ , кг·м <sup>2</sup>		2300
Присоединенные массы	$\lambda_{11}$ , кг	123
	$\lambda_{22}$ , кг	1237
	$\lambda_{66}$ , кг·м <sup>2</sup>	3510
Объемное водоизмещение $V$ , м <sup>3</sup>		11
Координата центра тяжести, $y_C$ , м		0.1

Определим далее значения параметров  $c_{x_0}$ ,  $c_x^\alpha$ ,  $c_y^\alpha$  и  $c_y^{\omega_z}$ . Из [30, 31] известно, что гидродинамические коэффициенты  $c_x$  и  $c_y$  изменяются в зависимости от угла атаки  $\alpha$ . Графики этих зависимостей представлены на рисунках 2.10 и 2.11.

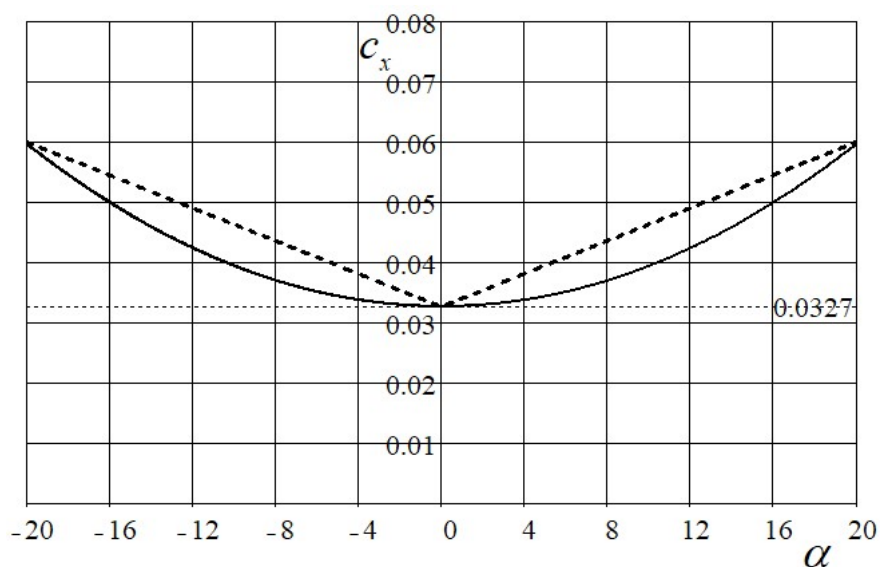




Рисунок 2.10 – Зависимости гидродинамического коэффициента  $c_x$  от угла атаки  $\alpha$ : исходная квадратичная и аппроксимированная линейная

Исходя из рисунка 2.10, можно утверждать, что зависимость гидродинамического коэффициента  $c_x$  от угла атаки  $\alpha$  на интервале  $[-20;20]$  градусов имеет форму параболы. Аппроксимируем эту квадратичную зависимость линейной, задав значения коэффициентов  $c_{x_0} = 0.0327$ ,  $c_x^\alpha = 1.365 \cdot 10^{-3}$ . График аппроксимированной зависимости изображен на рисунке 2.10 пунктирной линией.

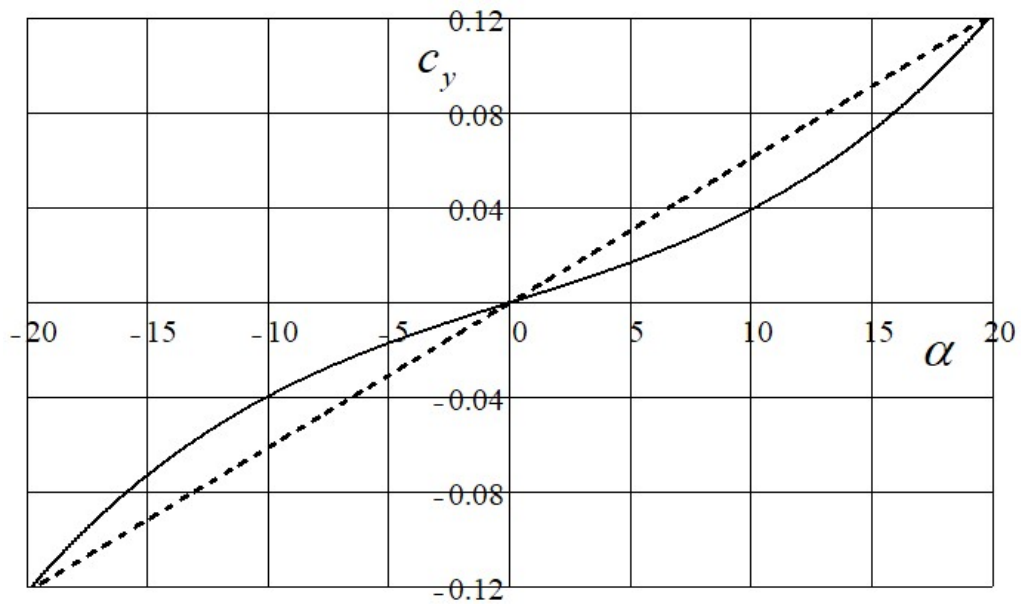


Рисунок 2.11 – Зависимость гидродинамического коэффициента  $c_y$  от угла атаки  $\alpha$ : исходная кубическая и аппроксимированная линейная

Исходя из рисунка 2.11, можно утверждать, что зависимость гидродинамического коэффициента  $c_y$  от угла атаки  $\alpha$  на интервале  $[-20;20]$  градусов имеет форму кубической параболы. Аппроксимируем эту квадратичную зависимость линейной, задав значение коэффициента  $c_y^\alpha = 6.104 \cdot 10^{-3}$ . График аппроксимированной зависимости изображен на рисунке 2.11 пунктирной линией. Также из [30] известно, что  $c_y^{\alpha=0} = 0.664$ .

Таким образом, для подстройки параметров адаптивно-робастного регулятора при  $\alpha \in [-20; 20]$  градусов будем косвенно измерять значения гидродинамических коэффициентов согласно следующим зависимостям:

$$c_x(\alpha) = 0.0327 + 1.365 \cdot 10^{-3} \cdot \alpha;$$

$$c_y(\alpha, \omega_z) = 6.104 \cdot 10^{-3} \cdot \alpha + 1.447 \cdot \omega_z.$$

Далее оценим интервалы значений гидродинамических коэффициентов для движения при больших углах атаки  $\alpha \in [-90; 90]$  градусов, на основе которых далее будут настроены робастные регуляторы. Известно, что искомые гидродинамические коэффициенты изменяются на указанном диапазоне углов атаки так, как показано на рисунках 2.12 и 2.13.

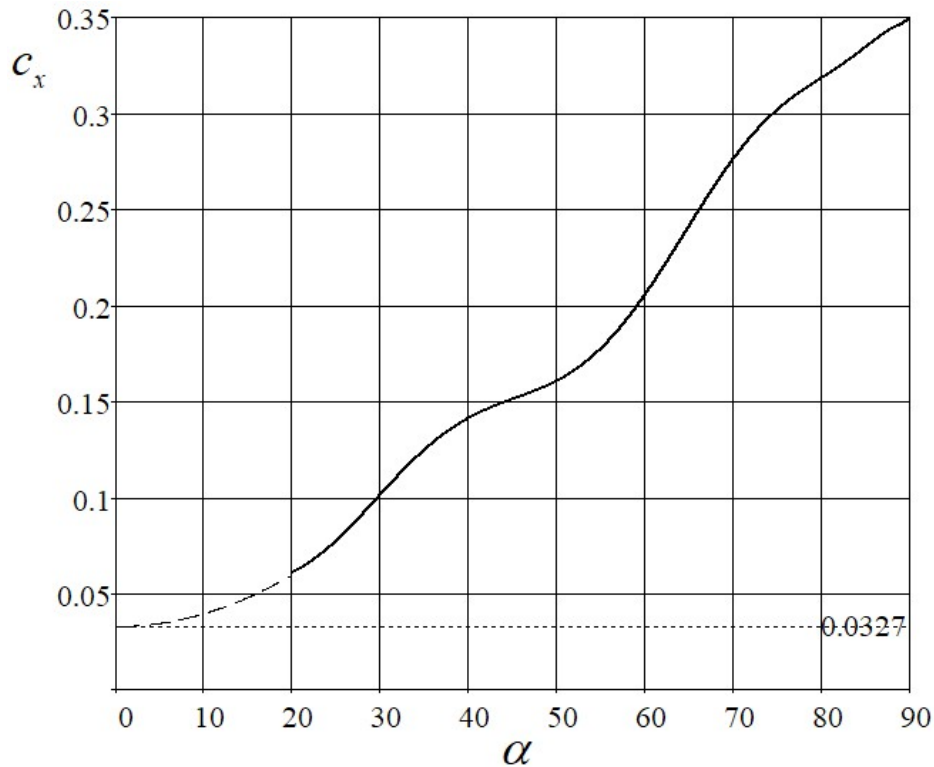


Рисунок 2.12 – Значения гидродинамического коэффициента  $c_x$  на широком диапазоне значений угла атаки  $\alpha$

На основе рисунка 2.12, учитывая, что функция  $c_x(\alpha)$  – четная, можно утверждать, что  $c_x \in [0.033; 0.350]$  на интервале  $\alpha \in [-90; 90]$  градусов.

Согласно второму выражению в (2.11) значение гидродинамического коэффициента  $c_y$  зависит не только от угла атаки  $\alpha$ , но и от значения угловой

скорости  $\omega_z$ . Первое слагаемое в этой зависимости определим на основе рисунка 2.13.

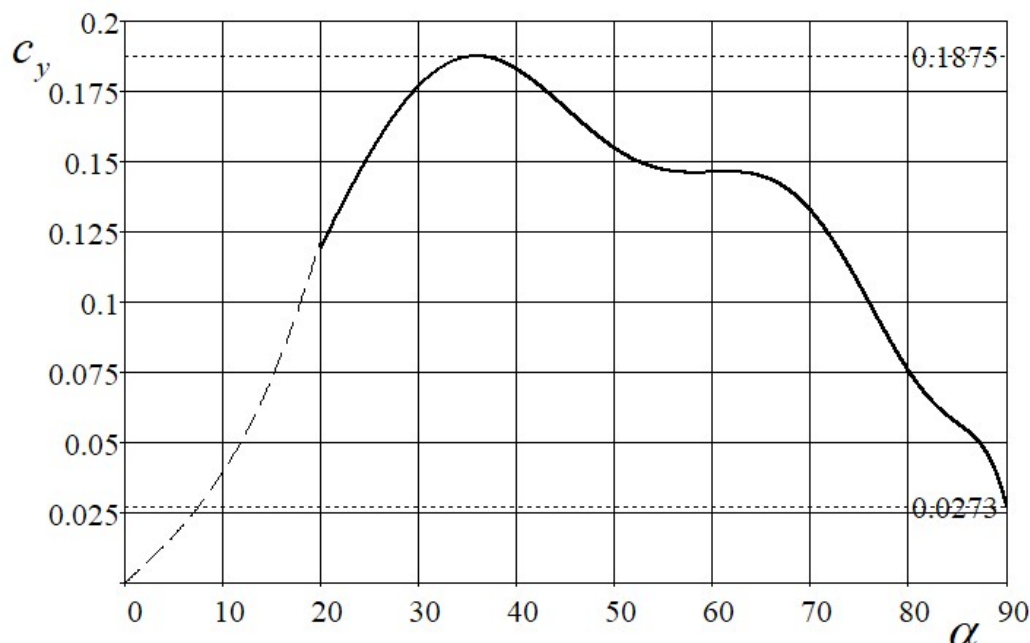


Рисунок 2.13 – Значения гидродинамического коэффициента  $c_y$  на широком диапазоне значений угла атаки  $\alpha$

На основе рисунка 2.13, учитывая, что функция  $c_y(\alpha)$  – нечетная, можно утверждать, что  $c_y(\alpha) \in [-0.188; 0.188]$  на интервале  $\alpha \in [-90; 90]$  градусов. Оценим далее второе слагаемое коэффициента  $c_y$ , зависящее от угловой скорости  $\omega_z$ .

В искомом слагаемом коэффициент пропорциональности  $c_y^{\omega_z}$  уже был найден ранее. Далее необходимо оценить интервал  $\omega_z$  и рассчитать итоговый интервал  $c_y$ . Из конструкции аппарата можно сделать вывод, что  $\omega_z \in [-\omega_{z\max}; \omega_{z\max}]$ . Также известно, что демпфирующий момент сопротивления вращению НПА вокруг оси  $Oz$  может быть рассчитан по следующей формуле:

$$M_z^R = 0.5 \cdot m_z^{\omega_z} \cdot \rho \cdot V^{4/3} \cdot \nu \cdot \omega_z,$$

где  $m_z^{\omega_z}$  – гидродинамический коэффициент демпфирующего момента сопротивления вращению вокруг оси  $Oz$ ,  $m_z^{\omega_z} = -0.261$  [30]. Максимальное

значение  $\omega_z$  достигается при равенстве максимального пропульсивного момента, обеспечиваемого ДРК НПА, моменту сопротивления вращению, следовательно, верно следующее выражение

$$\omega_{z\max} = \frac{2 \cdot T_{\max} \cdot l}{m_z^{\omega_z} \cdot \rho \cdot V^{4/3} \cdot v}, \quad (2.12)$$

где  $l = 2$  м – плечо момента тяги вертикального движителя;  $T_{\max}$  – максимальная тяга одного движителя. Из рисунка 2.7 примем  $T_{\max} = 230$  Н. Для расчета  $\omega_{z\max}$  по приведенному выражению оценим минимальную скорость потока жидкости вдоль оси  $Oy$ .

Движению НПА вдоль оси  $Oy$  с нулевым дифферентом соответствует значение угла атаки  $\alpha = 90$  градусов. Коэффициент позиционной силы гидродинамического сопротивления такому движению может быть найден по рисунку 2.13:  $c_y(90) = 0.027$ . Скорость движения НПА вдоль оси  $Oy$  в таких условиях может быть рассчитана по следующему выражению:

$$v_y = \sqrt{\frac{2 \cdot T_{\max}}{c_y \cdot \rho \cdot V^{2/3}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 230}{0.027 \cdot 1025 \cdot 11^{2/3}}} = 1.833 \text{ м/с}.$$

Воспользуемся выражением (2.12) для оценки максимального значения скорости вращения НПА вокруг оси  $Oz$ :

$$\omega_{z\max} = \frac{2 \cdot T_{\max} \cdot l}{m_z^{\omega_z} \cdot \rho \cdot V^{4/3} \cdot v} = \frac{2 \cdot 230 \cdot 2}{0.261 \cdot 1025 \cdot 11^{4/3} \cdot 1.905} = 0.077 \text{ рад/с}.$$

Таким образом,  $\omega_z \in [-0.077; 0.077]$ , а интервал значений гидродинамического коэффициента  $c_y$  может быть оценен следующим образом:

$$c_y(\alpha, \omega_z) = [-0.188; 0.188] + 1.447 \cdot [-0.077; 0.077] = [-0.300; 0.300].$$

Оценив интервалы гидродинамических коэффициентов, найдем значения коэффициентов линеаризации  $[k_{11}]$ ,  $[k_{12}]$ ,  $[k_{21}]$  и  $[k_{22}]$ . При этом  $[k_{11}]$  должен быть равен интервалу значений скорости движения НПА вдоль оси  $Ox$ ;  $[k_{21}]$  – вдоль оси  $Oy$ , а  $[k_{12}]$  и  $[k_{22}]$  – диапазону ожидаемых скоростей подводного

течения. Для корректности линеаризации необходимо, чтобы обе границы интервального коэффициента были больше нуля: это сохранит ненулевой статический коэффициент передачи в передаточных функциях модели НПА. В связи с этим будем считать, что минимальные значения скоростей движения НПА равны 10% от максимальных значений.

Оценим интервал значений коэффициента  $[k_{11}]$ . Из свойств модели очевидно, что

$$[k_{11}] = [\min(v_x); \max(v_x)] = [0.1 \cdot \max(v_x); \max(v_x)].$$

Максимальное значение достигается при максимальной тяге маршевых движителей и  $\alpha = 0$  градусов, следовательно, верно следующее:

$$v_{x\max} = \sqrt{\frac{4 \cdot T_{\max}}{c_x \cdot \rho \cdot V^{2/3}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 230}{0.033 \cdot 1025 \cdot 11^{2/3}}} = 2.345 \text{ м/с.}$$

Таким образом, интервал значений коэффициента линеаризации  $[k_{11}]$  равен

$$[k_{11}] = [0.1 \cdot \max(v_x); \max(v_x)] = [0.235; 2.345].$$

Оценим интервал значений коэффициента  $[k_{21}]$ . Максимальное значение было оценено ранее:  $v_{y\max} = 1.833$  м/с. Таким образом, интервал значений коэффициента линеаризации  $[k_{21}]$  равен

$$[k_{12}] = [0.1 \cdot \max(v_y); \max(v_y)] = [0.183; 1.833].$$

Для определения коэффициентов  $[k_{12}]$  и  $[k_{22}]$ , которые равны интервалам значений проекций скорости подводного течения  $v_f$  на оси  $Ox$  и  $Oy$  соответственно, необходимо задать предполагаемое значение  $v_f$ . Исходя из [100], примем  $v_{f\max} = 0.5$  м/с. Также ранее было принято, что в одном режиме управления  $\alpha \in [0; 20]$  градусов, в другом –  $\alpha \in [0; 90]$  градусов. Таким образом, для первого режима верно:

$$[k_{12}] = [0.1; 1] \cdot \cos(\pi/9) \cdot v_{f\max} = [0.1; 1] \cdot 0.940 \cdot 0.5 = [0.047; 0.470];$$

$$[k_{22}] = [0.1; 1] \cdot \sin(\pi/9) \cdot v_{f\max} = [0.1; 1] \cdot 0.342 \cdot 0.5 = [0.017; 0.171].$$

Во втором режиме обе проекции на оси  $Ox$  и  $Oy$  могут достигать  $v_{f\max}$ , следовательно, верно:

$$[k_{12}] = [k_{22}] = [0.05; 0.5].$$

Завершая оценку параметров модели НПА, запишем окончательный вид передаточных функций НПА:

$$W_{v_x T_x}(s) = \frac{1}{1263 \cdot s + 2534.870 \cdot [c_x] \cdot [k_{11}]};$$

$$W_{v_x v_f}(s) = \frac{2534.870 \cdot [c_x] \cdot [k_{12}]}{1263 \cdot s + 2534.870 \cdot [c_x] \cdot [k_{11}]};$$

$$W_{v_y T_y}(s) = \frac{1}{2377 \cdot s + 2534.870 \cdot [c_y] \cdot [k_{21}]};$$

$$W_{v_y v_f}(s) = \frac{2534.870 \cdot [k_{22}] \cdot [c_y] \cdot [\alpha]}{2377 \cdot s + 2534.870 \cdot [c_y] \cdot [k_{21}]};$$

$$W_{\omega_z M_z^T}(s) = \frac{1}{5810 \cdot s + 114 \cdot [v_y]}.$$

В зависимости от значений угла атаки и, соответственно, используемого режима управления будем использовать соответствующие значения интервальных параметров (см. Таблицу 2.2).

Таблица 2.2 – Интервальные параметры НПА в различных режимах управления

Параметр	Адаптивно-робастное управление	Робастное управление
$[\alpha], ^\circ$	[0; 20]	[0; 90]
$[c_x]$	$0.0327 + 1.365 \cdot 10^{-3} \cdot \alpha = [0.033; 0.060]$	[0.033; 0.350]
$[c_y]$	$6.104 \cdot 10^{-3} \cdot \alpha + 1.447 \cdot \omega_z = [-0.233; 0.233]$	[-0.300; 0.300]
$[k_{11}], \text{ м/с}$	[0.235; 2.345]	
$[k_{21}], \text{ м/с}$	[0.183; 1.833]	
$[k_{12}], \text{ м/с}$	[0.047; 0.470]	[0.05; 0.5]
$[k_{22}], \text{ м/с}$	[0.017; 0.171]	

Имея в распоряжении модели исполнительного устройства и объекта управления для системы управления движением исследуемого НПА в вертикальной плоскости, рассмотрим далее структуру исследуемой системы.

### 2.3.2 Структура и модель системы управления движением НПА в вертикальной плоскости

Построим далее модель системы управления движением НПА в вертикальной плоскости в целом. На выходе системы формируются текущие значения управляемых величин: скорости движения НПА вдоль оси  $Ox$  –  $v_x$ , глубины погружения НПА  $h$  и угла дифферента  $\psi$ ; на вход системы подаются их желаемые значения. С учетом того, что выходные величины ранее выведенной модели НПА представляют собой скорости движения НПА по осям  $Ox$  и  $Oy$ , а также скорость его вращения вокруг оси  $Oz$ , логично будет построить канал регулирования  $v_x$  в виде одноконтурной САР, а каналы регулирования  $h$  и  $\psi$  – в виде САР с подчиненным регулированием. Предлагаемая структура системы управления движением НПА в вертикальной плоскости представлена на рисунке ниже.

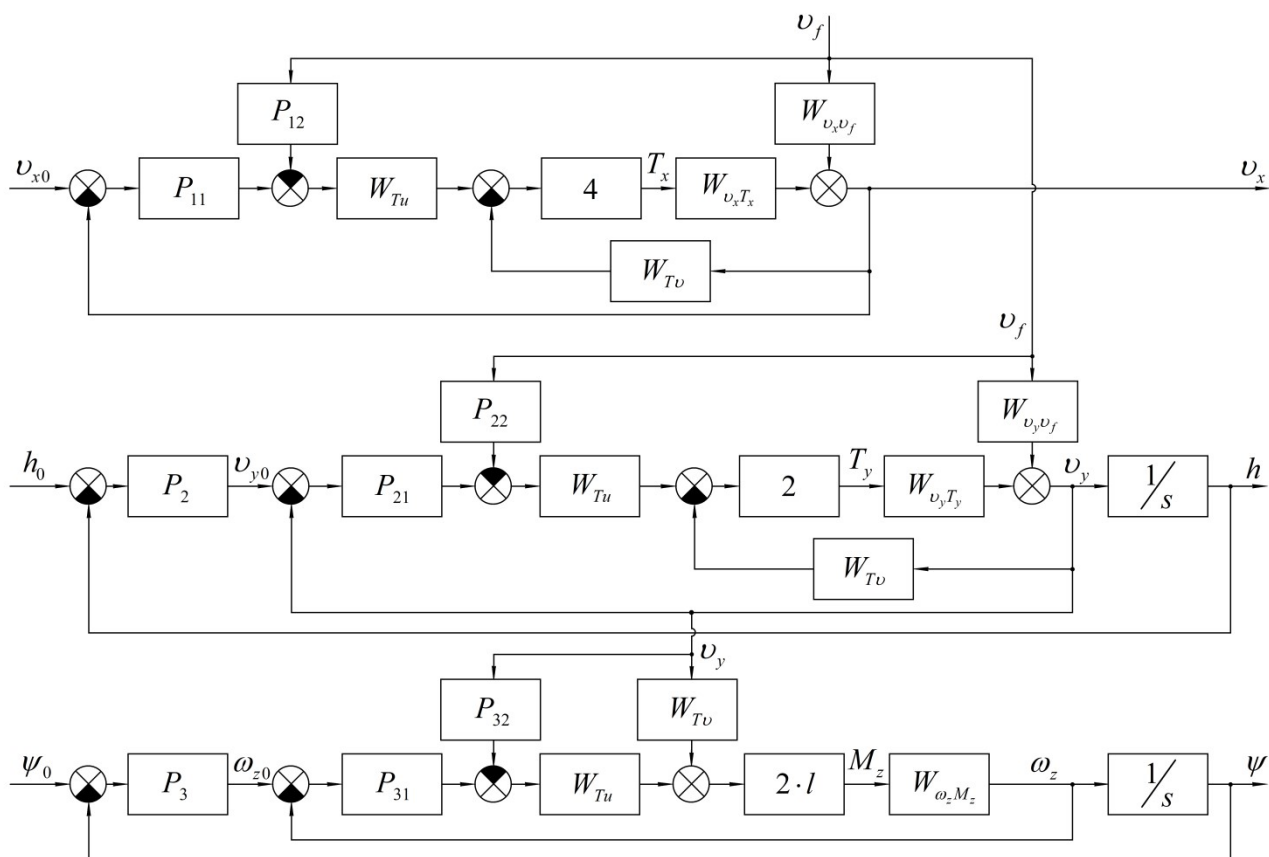


Рисунок 2.14 – Структурная схема системы управления движением НПА в вертикальной плоскости

На рисунке 2.14, кроме ранее введенных, используются следующие обозначения:  $P_{11}$  и  $P_{12}$  – регуляторы канала управления скоростью движения НПА вдоль оси  $Ox$  по задающему и возмущающему воздействию соответственно;  $P_2$  – регулятор внешнего контура канала управления глубиной погружения НПА  $h$ ;  $P_{21}$  и  $P_{22}$  – регуляторы вложенного контура канала управления глубиной погружения НПА  $h$  по задающему и возмущающему воздействию соответственно;  $P_3$  – регулятор внешнего контура канала управления углом дифферента НПА  $\psi$ ;  $P_{31}$  и  $P_{32}$  – регуляторы вложенного контура канала управления углом дифферента НПА  $\psi$  по задающему и возмущающему воздействиям соответственно.

Канал регулирования скорости  $v_x$  принимает на входы задающее и возмущающее воздействия: уставку скорости  $v_{x0}$  и скорость подводного течения  $v_f$ . Разница желаемого и текущего значений  $v_x$  поступает на регулятор по задающему воздействию  $P_{11}$ ; возмущающее воздействие поступает на регулятор  $P_{12}$ . Управляющий сигнал, равный разности выходных сигналов регуляторов  $P_{11}$  и  $P_{12}$ , поступает на движители НПА. За счет местной обратной связи при расчете тяги учитывается изменение эффективности работы гребного винта при разных скоростях набегающего потока жидкости. Скорректированное значение тяги движителя умножается на количество движителей, и значение совокупной тяги  $T_x$  поступает на объект управления. Текущее значение  $v_x$  рассчитывается на основе сформированного управляющего воздействия  $T_x$  с учетом возмущающего воздействия  $v_f$ .

Канал регулирования глубины погружения НПА  $h$  состоит из двух контуров. Внешний контур регулирует значение глубины  $h$ , вложенный – скорость погружения  $v_y$ . Вложенный контур организован аналогично уже рассмотренному каналу регулирования  $v_x$ . Значение  $v_y$ , сформированное на выходе внутреннего контура, поступает на интегратор; рассчитанное таким образом значение глубины  $h$  поступает на выход системы.



Канал регулирования угла дифферента НПА  $\psi$  также построен по принципу подчиненного регулирования. Внешний контур регулирует значение дифферента  $\psi$ ; вложенный – скорость его изменения  $\dot{\omega}_z$ . Структура вложенного контура этого канала отличается от ранее рассмотренных. Скорость потока жидкости  $v_y$  рассматривается не как сигнал местной обратной связи, а как возмущающее воздействие. Следовательно, регулятор по возмущающему воздействию компенсирует снижение эффективности работы движителей при изменении скорости потока жидкости, обтекающего их.

Во время изучения предметной области было выяснено, что для работы оборудования, составляющего полезную нагрузку НПА, необходимо обеспечить в исследуемой системе апериодические переходные процессы с низким перерегулированием. Также система должна обеспечивать движением НПА с заданной скоростью. Исходя из этих требований и особенностей предложенных ранее методик синтеза, определим структуру регуляторов системы.

Рассмотрим первый канал системы и вложенные контуры второго и третьего каналов. Будем считать, что регуляторы  $P_{11}$ ,  $P_{21}$  и  $P_{31}$ , используемые в них, – ПИД-регуляторы. В таком случае в контурах с этими регуляторами будет достигнут астатизм первого порядка, а также при помощи разработанных методик синтеза будет обеспечена апериодичность переходных процессов.

Рассмотрим внешние контуры второго и третьего каналов системы. Последние звенья в этих каналах – интегрирующие, следовательно, нет необходимости вводить в регуляторы этих контуров интегрирующие звенья для повышения порядка астатизма. Исходя из этого, а также из того, что динамические свойства канала в целом будут в большей степени заданы регуляторами вложенных контуров, предположим, что  $P_2$  и  $P_3$  – пропорциональные регуляторы.

Структуру регуляторов по возмущающим воздействиям во всех контурах будем определять из условия инвариантности выходного сигнала канала относительно возмущающего воздействия.

Передаточные функции системы зависят от интервальных параметров, для которых в предыдущих разделах были найдены два набора значений: для средних и больших значений угла атаки. В связи с этим предлагается сделать исследуемую систему двухрежимной: первый режим с адаптивно-робастными регуляторами – для средних значений угла атаки; второй режим с робастными регуляторами – для больших значений углов атаки или для ситуации, в которой нет возможности прямо или косвенно измерить значения интервальных параметров.

#### 2.4 Основные результаты

В данной главе на основе известной математической модели связного движения НПА в шести степенях свободы путем ввода интервальных параметров была получена модель системы управления движением НПА, подходящая для синтеза регуляторов. Разработанная модель состоит из модели процесса движения НПА в вязкой жидкости, модели ДРК НПА и блока регуляторов.

Ввод интервальных параметров в модель процесса движения НПА в вязкой жидкости позволил декомпозировать шестисвязную модель на модели каналов управления движением НПА в отдельных степенях свободы. Такой подход к декомпозиции позволяет при описании движения в одной степени свободы не принимать равными нулю все угловые и линейные скорости и их производные, относящиеся к другим степеням свободы, а сохранить их в передаточной функции, присвоив им интервальные значения, оцененные на основе характеристик ДРК НПА.

Кроме того, ввод интервальных параметров позволил применить секторную линеаризацию и заменить квадратичные зависимости гидродинамических сил и моментов от скорости движения НПА на линейные функции с интервальным коэффициентом. Также с помощью интервалов были описаны нестационарные гидродинамические коэффициенты НПА, зависящие от значений углов атаки и дрейфа.

Интервальные параметры также были введены в модель основного элемента ДРК НПА – движителя с гребным винтом. С помощью интервальной секторной

линеаризации были упрощены квадратичные зависимости упора и момента сопротивления вращению винта от частоты его вращения. Также был введен интервальный коэффициент коррекции упора винта по скорости набегающего потока.

В качестве примера применения построенной модели для описания конкретного НПА была выбрана задача моделирования системы управления движением НПА в вертикальной плоскости. Исходя из требований этой задачи, была выбрана структура блока регуляторов, а также показан пример идентификации интервальных параметров модели на основе результатов стандартных натуральных экспериментов с НПА и его элементами. В итоге была получена модель системы управления движением в вертикальной плоскости для конкретного НПА, которая далее будет применяться для синтеза робастных и адаптивно-робастных регуляторов.

### 3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ПРОВЕРОЧНЫХ ВЕРШИН ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО МНОГОГРАННИКА ДЛЯ РАСПОЛОЖЕНИЯ ПОЛЮСОВ СИСТЕМЫ В СООТВЕТСТВИИ С ПРИНЦИПОМ ДОМИНИРОВАНИЯ

Исходя из полученной в предыдущей главе математической модели, можно утверждать, что исследуемая система может быть описана характеристическим полиномом, коэффициенты которого зависят от первичных интервальных параметров системы или, иначе говоря, интервальным характеристическим полиномом (ИХП). С помощью правил интервальной арифметики тип неопределенности коэффициентов ИХП можно свести к интервальному.

Предположим, что ИХП системы автоматического управления содержит  $n$  интервальных коэффициентов. Тогда совокупность всех комбинаций их значений может быть описана гиперпараллелепипедом в  $n$ -мерном пространстве. Будем называть такой гиперпараллелепипед параметрическим многогранником системы.

Устойчивость интервального семейства полиномов определяется положением образов вершин параметрического многогранника ИХП исследуемой системы [101]. Согласно определению ИХП с интервальным типом неопределенности коэффициентов устойчив в целом, если он устойчив в вершинах своего параметрического многогранника. Однако значения корневых показателей робастного качества определяет лишь часть этих вершин. Для упрощения анализа и синтеза САУ с интервальными параметрами актуально определить координаты проверочных вершин параметрического многогранника ИХП, образы которых составляют правую границу области локализации полюсов системы и определяют значения корневых показателей робастного качества. Для этого логично воспользоваться теорией корневого годографа.

Известны работы [98], посвященные анализу корневых показателей качества в системах с интервальными параметрами и основанные на фазовых уравнениях теории корневого годографа [102], расширенных на интервальные системы. В указанных работах интервальное расширение фазового уравнения

теории корневого годографа используется для определения координат вершины параметрического многогранника, являющейся прообразом крайнего правого вещественного полюса системы. Найденные в этих работах координаты вершины позволяют задать желаемую степень робастной устойчивости системы с интервальными параметрами. В работе предлагается применить интервальное расширение фазового уравнения теории корневого годографа для поиска координат вершин, позволяющих задать желаемую степень робастной колебательности системы путем размещения в желаемых областях корневой плоскости пары комплексно-сопряженных полюсов.

Зная координаты вершин параметрического многогранника, составляющих правую границу области локализации полюсов, можно обеспечить системе желаемые значения корневых показателей робастного качества, влияя на положение образов этих вершин с помощью подстройки параметров регулятора. Для этого систему можно оснастить модальным регулятором полного порядка, что упростило бы процедуру параметрического синтеза, но усложнило бы реализацию регулятора. В данной работе задачу обеспечения желаемых значений корневых показателей робастного качества будем решать с помощью типовых регуляторов пониженного порядка. Это, очевидно, усложнит процедуру синтеза, однако упростит реализацию регулятора и в программной, и в аппаратной части.

Ввиду того, что модальный регулятор пониженного порядка не позволяет точно задать положение всех полюсов системы, положим в основу разрабатываемых методик синтеза принцип доминирования полюсов. Согласно данному принципу качество управления может быть задано за счет соответствующего расположения части полюсов системы и удаления остальных полюсов системы на достаточное расстояние для уменьшения их влияния на переходный процесс. Полюсы, определяющие качество управления в системе, будем называть доминирующими; все прочие – свободными. Расстояние между правой границей области локализации свободных полюсов и мнимой осью корневой плоскости будем называть степенью доминирования. В работе будем рассматривать два практически значимых случая расположения областей

локализации полюсов системы с интервальными параметрами в соответствии с принципом доминирования, изображенные ниже на рисунке 3.1.

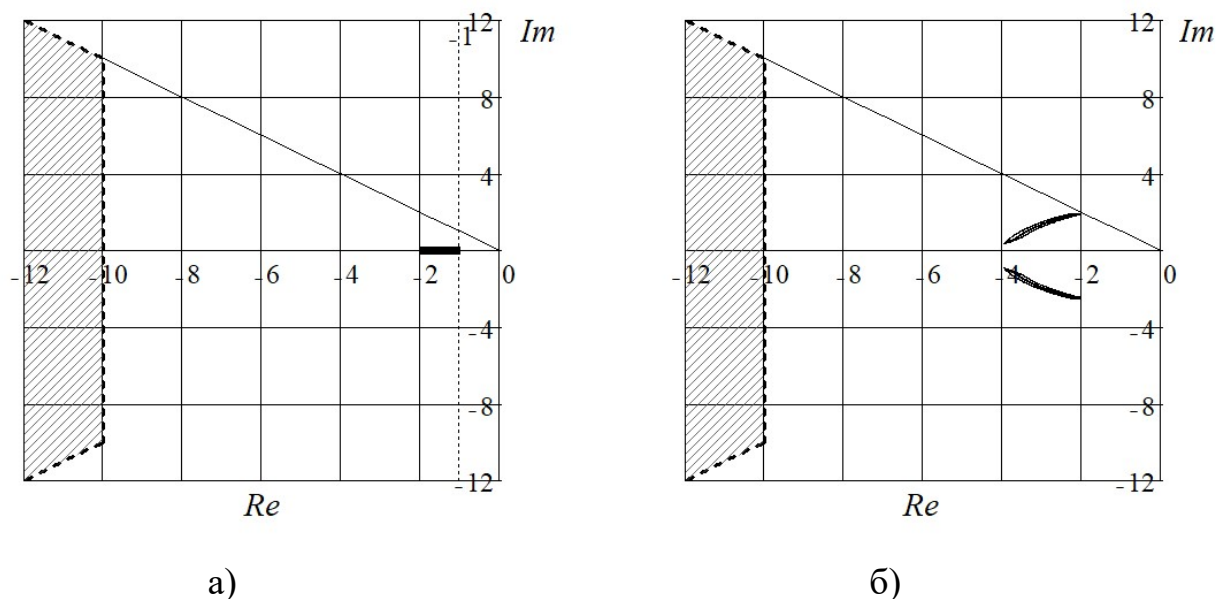


Рисунок 3.1 – Примеры расположения областей локализации полюсов в соответствии с принципом доминирования: а) с одним вещественным доминирующим полюсом; б) с парой комплексно-сопряженных доминирующих полюсов

Как показано на рисунке 3.1а степень робастной устойчивости задается положением правой границы отрезка вещественной оси, в котором лежит доминирующий полюс. Степень робастной колебательности может быть задана формой границы заштрихованной области локализации свободных полюсов. В свою очередь на рисунке 3.1б степень робастной устойчивости и колебательности задается положением пары комплексно-сопряженных доминирующих полюсов; остальные полюсы удалены в заштрихованную область в форме усеченного сектора. Следует отметить, что координаты вершин параметрического многогранника, соответствующие правой и левой границам отрезка вещественного доминирующего полюса на рисунке 3.1а известны из [98]. В ходе работы предлагается найти вершины, определяющие положение пары комплексно-сопряженных полюсов на рисунке 3.1б и свободных полюсов для обоих случаев.

Таким образом, в данной главе рассмотрим процедуру поиска координат вершин параметрического многогранника, определяющих корневые показатели робастного качества систем с интервальными параметрами, и вывод выражений, позволяющих располагать образы этих вершин в желаемых областях корневой плоскости с помощью настройки типового регулятора пониженного порядка. Среди корневых показателей робастного качества будем рассматривать степень робастной устойчивости, степень робастной колебательности и степень доминирования полюсов.

### 3.1 Интервальное расширение фазовых уравнений теории корневого годографа

#### 3.1.1 Фазовое уравнение корневого годографа

Рассмотрим систему автоматического управления со стационарными параметрами, прямая цепь которой описана передаточной функцией  $W_1$ , а обратная –  $W_2$ . В таком случае согласно правилам преобразования структурных схем эквивалентная передаточная функция системы для случаев отрицательной и положительной обратной связи определяется выражением

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 \pm W_1(s) \cdot W_2(s)}. \quad (3.1)$$

Дальнейшие расчеты будем выполнять для случая отрицательной главной обратной связи. В таком случае характеристическое уравнение описанной системы имеет следующий вид:

$$H(s) = 1 + W_1(s) \cdot W_2(s) = 0. \quad (3.2)$$

Очевидно, что уравнение (3.2) содержит в себе передаточную функцию разомкнутой системы, записанную в виде произведения  $W_1(s) \cdot W_2(s)$ .

Подставим  $s \rightarrow j\omega$  в уравнение (3.2). Записав отдельно равенства относительно модуля и аргумента комплексного числа, это уравнение в систему:

$$|W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega)| = 1; \quad (3.3)$$

$$\arg(W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega)) = \arg(-1). \quad (3.4)$$

Преобразовав второе уравнение этой системы, получим фазовое уравнение корневых годографов:

$$\sum_{i=1}^m \Theta_i^0 - \sum_{i=1}^n \Theta_i = \pm \pi \cdot (2n + 1), \quad n \in 0, 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

где  $\Theta_i^0$  – угол между ветвью корневого годографа, выходящей из  $i$ -го нуля передаточной функции разомкнутой системы, и положительным направлением вещественной оси;  $\Theta_i$  – угол между ветвью корневого годографа, выходящей из  $i$ -го полюса передаточной функции разомкнутой системы, и положительным направлением вещественной оси.

### 3.1.2 Многогранник коэффициентов интервального характеристического полинома и устойчивость систем автоматического управления с интервальными параметрами

На основании результатов предыдущих глав, можно утверждать, что исследуемая система может быть описана с помощью передаточных функций с интервальными параметрами. Ввод в систему интервальных параметров позволяет учесть изменения параметров системы внутри некоторых диапазонов, границы которых определяются заранее теоретически или в ходе эксперимента. Обозначать такие параметры будем следующим образом:

$$x = \left[ \underline{x}; \bar{x} \right],$$

где  $\underline{x}, \bar{x}$  – нижний и верхний пределы изменения параметра соответственно.

Используя понятие параметрического многогранника можно легко дать определение робастной устойчивости системы: система робастно устойчива тогда и только тогда, когда она устойчива в любой точке параметрического многогранника. Очевидно, что невозможно проверить на устойчивость каждую точку параметрического многогранника. Существует ряд методов, позволяющих проверить робастную устойчивость систем по ее устойчивости лишь в некоторых точках параметрического многогранника. Так, например, для систем с интервальным типом неопределенности коэффициентов ИХП для проверки



робастной устойчивости достаточно проверить устойчивость системы в вершинах параметрического многогранника [103]. Для работы с исследуемой системой, характеризующейся интервальным типом неопределенности коэффициентов ИХП, более сложные типы неопределенности коэффициентов ИХП не потребуются.

Проверить устойчивость вершин и ребер параметрического многогранника можно, отобразив их на комплексную плоскость. При этом образ параметрического многогранника покажет области локализации полюсов системы с интервальными параметрами.

Очевидно, что робастная устойчивость системы зависит от направления выхода проекций ребер параметрического многогранника из проекций его вершин. Ввиду того, что при движении вдоль каждого из ребер изменяется только один интервальный параметр, а остальные принимают свои предельные значения, каждая проекция ребра на корневую плоскость является однопараметрическим корневым годографом, для которого справедливо ранее рассмотренное фазовое уравнение. Однако для его применения необходимо располагать передаточной функцией разомкнутой системы. Рассмотрим получение такой передаточной функции для ребер параметрического многогранника системы с интервальным типом неопределенности коэффициентов ИХП – реберной передаточной функции [98].

Предположим, что ИХП системы автоматического управления имеет следующий вид:

$$D(s) = \sum_{i=0}^n [d]_i \cdot s^i,$$

где  $[d]_i$  – интервальные коэффициенты характеристического полинома. Рассмотрим ребро параметрического многогранника, соединяющее две вершины  $V_1$  и  $V_2$ , координаты которых в таком случае будут совпадать за исключением одного из интервальных коэффициентов: в одной из вершин этот коэффициент

примет максимальное значение, в другой – максимальное. В таком случае справедливо выражение:

$$D^{V_1}(s) - D^{V_2}(s) = (d_j^{V_1} - d_j^{V_2}) \cdot s^j = \Delta d_j \cdot s^j,$$

где  $j$  – номер коэффициента, изменение которого эквивалентно движению по исследуемому ребру параметрического многогранника,  $\Delta d_j$  – приращение  $j$ -го коэффициента. Очевидно, что  $\Delta d_j = \pm(\overline{d_j} - \underline{d_j})$  соответствует перемещению из одной вершины в другую, а  $|\Delta d_j| \in [0; \overline{d_j} - \underline{d_j}]$  соответствует перемещению в любую точку ребра  $V_1V_2$ . Исходя из этого, запишем выражение для реберного полинома:

$$E(s, \Delta d_j) = D^V(s) + \Delta d_j \cdot s^j, \quad (3.6)$$

где  $D^V(s)$  – вершинный полином в начале ребра.

Известно, что характеристический полином системы автоматического управления с единичной главной отрицательной обратной связью равен сумме числителя и знаменателя передаточной функции в прямом канале системы. Эта же передаточная функция будет в таком случае и передаточной функцией разомкнутой системы. Преобразовав по этой логике реберный полином (3.6), получим реберную передаточную функцию:

$$W_E(s, \Delta d_j) = \frac{\Delta d_j \cdot s^j}{D^V(s)}. \quad (3.7)$$

С помощью полученной реберной передаточной функции и фазового уравнения корневого годографа становится возможным исследование проекций ребер параметрического многогранника на корневую плоскость и поиск координат вершин, находящихся на границе области локализации полюсов исследуемой системы.

### 3.1.3 Интервальные фазовые неравенства корневого годографа

Обобщая результаты предыдущих двух параграфов, можно утверждать, что с помощью основного фазового уравнения теории корневого годографа (3.5) можно оценить углы выхода ветвей корневого годографа из узловой точки, при этом для вывода этого уравнения используется передаточная функция исследуемой разомкнутой системы. Также было показано, что ребра параметрического многогранника системы автоматического управления с интервальными параметрами могут быть описаны с помощью реберной передаточной функции разомкнутой системы (3.7), выводимой из соответствующего реберного полинома. Таким образом, справедливо применять основное фазовое уравнение для анализа углов выхода проекций ребер параметрического многогранника системы с интервальными параметрами из узловых точек. Рассмотрим далее способ такого анализа.

Из фазового уравнения теории корневого годографа (3.5) можно сделать вывод, что угол выхода ветви корневого годографа при увеличении коэффициента  $d_i$  характеристического полинома можно найти в соответствии с выражением

$$\Theta_1^i = \pi - \sum_{j=2}^n \Theta_j + \sum_{k=1}^m \Theta_k^0, \quad (3.8)$$

где  $\Theta_1^i$  – угол выхода реберной ветви из корневого узла при увеличении  $i$ -го коэффициента ИХП;  $\Theta_j$  – углы между векторами, выходящими из корневого узла ко всем прочим его проекциям на корневую плоскость, и положительным направлением вещественной оси;  $\Theta_k^0$  – угол между вектором, выходящим из каждого нуля к исследуемому корневному узлу, и положительным направлением вещественной оси. Из того же уравнения можно сделать вывод, что при уменьшении коэффициента  $d_i$  характеристического полинома угол выхода соответствующей реберной ветви можно рассчитать в соответствии со следующим выражением:

$$\Theta_1^i = -\sum_{j=2}^n \Theta_j + \sum_{k=1}^m \Theta_k^0. \quad (3.9)$$

Однако, согласно (3.7) каждая реберная передаточная функция имеет кратные нули, расположенные в начале координат корневой плоскости. При этом количество таких нулей равно степени члена ИХП, при котором находится изменяющийся в ходе движения по ребру коэффициент  $d_i$ . В текущих обозначениях эта степень совпадает с номером коэффициента. С учетом этого (3.8) и (3.9) можно переписать следующим образом:

$$\Theta_1^i = \pi - \sum_{j=2}^n \Theta_j + i \cdot \Theta_0, \quad (3.10)$$

$$\Theta_1^i = -\sum_{j=2}^n \Theta_j + i \cdot \Theta_0. \quad (3.11)$$

Выражения (3.10) и (3.11) можно использовать для поиска координат вершин параметрического многогранника, формирующих правую границу области локализации полюсов при разных конфигурациях их расположения. При этом расположение полюсов друг относительно друга задается интервалами значений углов  $\Theta_j$  и  $\Theta_0$ . В таком случае сами углы выхода реберных ветвей примут интервальные значения; справедливо будет переписать (3.10) и (3.11) следующим образом, объединив их в одно выражение:

$$[\Theta_1^i] = \pi \cdot r - \sum_{j=2}^n [\Theta_j] + i \cdot [\Theta_0], \quad (3.12)$$

где  $r$  – параметр, определяющий направление движения по ребру и, соответственно, предел интервального коэффициента в исследуемой вершине. Из свойств параметрического многогранника очевидно, что векторы движения по ребру при увеличении и уменьшении соответствующего коэффициента лежат на одной прямой и противоположны по направлению, то есть отличаются на  $\pi$  радиан. Ранее в (3.8) указывалось, что наличие слагаемого в  $\pi$  радиан указывает на движение в сторону увеличения коэффициента  $d_i$  и, соответственно, начало такого движения происходит от нижнего предела  $d_i$  или  $\underline{d}_i$ . Рассуждая

аналогично для (3.9), сделаем вывод, что  $r = 0$  соответствует верхний предел  $d_i$  или  $\overline{d}_i$ , а  $r = 1$  – нижний предел  $d_i$  или  $\underline{d}_i$ .

Желаемые свойства искомым вершин параметрического многогранника в таком случае будут задаваться верхним и нижним ограничением на значения углов выхода реберных ветвей. Записав эти ограничения, получим систему двойных интервальных неравенств:

$$\underline{\Theta} \leq [\Theta_1^i] \leq \overline{\Theta}, \quad i \in 0, 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Таким образом, выяснив, при каких  $r$  выполняются интервальные неравенства, можно найти координаты вершин-кандидатов на определение значений корневых показателей робастного качества исследуемой системы с интервальными параметрами. Рассмотрим далее процедуру поиска наборов таких вершин параметрического многогранника для различных вариантов расположения полюсов системы [104, 105].

### 3.2 Наборы проверочных вершин для размещения доминирующих полюсов системы автоматического управления с интервальными параметрами

Двойные интервальные угловые неравенства, выведенные в предыдущем разделе, позволяют определить координаты вершин параметрического многогранника, из которых реберные ветви корневого годографа выходят под заданными углами. Рассмотрим далее процесс поиска координат вершин параметрического многогранника, определяющих положение доминирующих полюсов, с учетом различных вариантов расположения свободных полюсов.

#### 3.2.1 Набор вершин для размещения одного доминирующего полюса в заданном отрезке вещественной оси

Рассмотрим пример поиска проверочных вершин, позволяющих задать исследуемой системе степень аperiodической устойчивости, разместив область локализации полюса в отрезке вещественной оси, с помощью ранее полученной формулы угла выхода реберной ветви корневого годографа. Покажем, что для

указанной цели подходят две вершины параметрического многогранника, координаты которых заданы в виде чередующихся максимальных и минимальных пределов соответствующих интервальных коэффициентов [98].

**Утверждение 1.** Если координаты вершины параметрического многогранника системы с интервальными параметрами заданы последовательностью  $\underline{d}_0, \overline{d}_1, \underline{d}_2, \overline{d}_3, \dots$ , то углы выхода реберных ветвей из образа этой вершины по всем реберным коэффициентам равны  $\pi$  рад.

**Доказательство.** Предположим, что образ искомой вершины лежит в точке  $P_1$  корневой плоскости. В таком случае, слева от него могут располагаться пары комплексно-сопряженных полюсов  $P_2$  и  $P_3$ , а также вещественные полюсы  $P_4$ . Изобразим такую ситуацию на рисунке ниже.

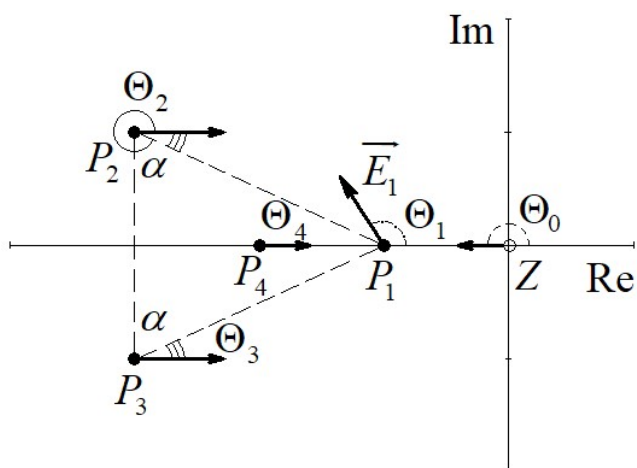


Рисунок 3.2 – Пример взаимного расположения вещественного полюса и пары комплексно-сопряженных полюсов относительно вещественного доминирующего полюса

На рисунке 3.2 углы между векторами, направленными из полюсов  $P_2$ ,  $P_3$  и  $P_4$  к полюсу  $P_1$ , и положительным направлением вещественной оси обозначены как  $\Theta_2$ ,  $\Theta_3$  и  $\Theta_4$  соответственно. Аналогичный угол для нуля реберной передаточной функции  $Z$  обозначен как  $\Theta_0$ . Вектор, указывающий направление выхода реберной ветви из полюса  $P_1$  обозначен как  $\overline{E}_1$ , угол выхода реберной ветви обозначен как  $\Theta_1$ .

В указанных обозначениях при помощи выражений (3.10) и (3.11) можно записать выражения для углов выхода исследуемой реберной ветви при увеличении и уменьшении каждого из интервальных коэффициентов:

$$\Theta_1^i = \pi - (\Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4) + i \cdot \Theta_0, \quad (3.14)$$

$$\Theta_1^i = -(\Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4) + i \cdot \Theta_0. \quad (3.15)$$

Оценим значения каждого из углов в правых частях записанных выражений.

Очевидно, что если  $Z$  лежит в начале координат, а  $P_1$  лежит на вещественной оси в левой полуплоскости, то  $\Theta_0 = \angle(\overrightarrow{ZP_1}; \overrightarrow{\text{Re}}) = \pi$  радиан. Аналогично для вещественного полюса  $P_4$ , лежащего на вещественной оси левее  $P_1$ , верно  $\Theta_4 = \angle(\overrightarrow{P_4P_1}; \overrightarrow{\text{Re}}) = 0$  рад.

Полюсы  $P_2$  и  $P_3$  – комплексно сопряженные, следовательно, треугольник  $P_1P_2P_3$  – равнобедренный и углы  $\alpha$  при его основании равны между собой. Учитывая это, а также то, что векторы при полюсах  $P_2$  и  $P_3$  параллельны вещественной оси и, соответственно, между собой, можно утверждать, что  $\Theta_2 + \Theta_3 = 2\pi$  рад.

С учетом вышесказанного перепишем (3.14) и (3.15) и уберем из правых частей слагаемое  $-2 \cdot \pi$ , описывающее полный поворот вектора вокруг начала. Получим:

$$\Theta_1^i = \pi + i \cdot \pi = (i + 1) \cdot \pi, \quad (3.16)$$

$$\Theta_1^i = i \cdot \pi. \quad (3.17)$$

Исходя из свойств искомой вершины, углы выхода  $\Theta_1^i$  должны быть равны  $\pi$  рад. С учетом (3.16) и (3.17) можно утверждать, что для коэффициентов при нечетных  $i$  и, соответственно, нечетных степенях  $s$  нужное значение угла выхода достигается при уменьшении  $d_i$ ; для чётных  $i$  – при увеличении  $d_i$ . Исходя из этого, искомая вершина параметрического многогранника имеет координаты  $\underline{d}_0, \overline{d}_1, \underline{d}_2, \overline{d}_3, \dots$ , что и требовалось доказать.

В ходе описанных расчетов были найдены координаты вершины параметрического многогранника, углы выхода реберных ветвей из образа которой по все интервальным коэффициентам равны  $\pi$  рад. Инвертируя пределы коэффициентов, по свойствам корневых годографов получим координаты вершины, углы выхода из которой равны 0 рад, а именно  $\overline{d}_0, \underline{d}_1, \overline{d}_2, \underline{d}_3, \dots$

Таким образом, разместить область локализации доминирующего полюса системы с интервальными параметрами в заданном отрезке вещественной оси корневой плоскости можно, обеспечив желаемое расположение образов двух вершин параметрического многогранника  $V_1(\underline{d}_0, \overline{d}_1, \underline{d}_2, \overline{d}_3, \dots)$  и  $V_2(\overline{d}_0, \underline{d}_1, \overline{d}_2, \underline{d}_3, \dots)$ . При этом образ вершины  $V_1$  определит правую границу этого отрезка, а образ вершины  $V_2$  – левую. Тем самым будет задана желаемая степень аперидической робастной устойчивости.

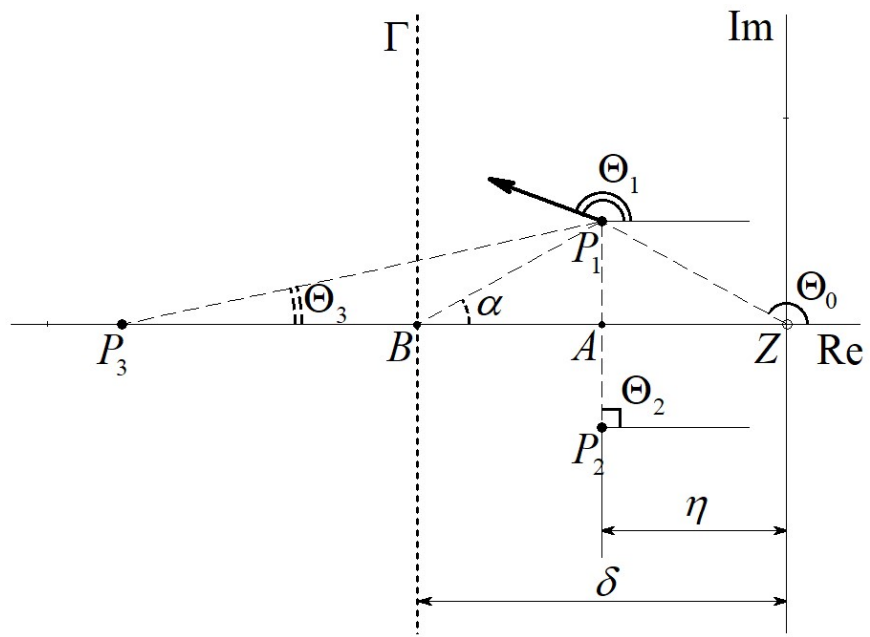
Рассмотрим далее поиск наборов вершин для расположения пары доминирующих комплексно-сопряженных полюсов в заданных областях корневой плоскости.

### 3.2.2 Набор вершин для размещения пары комплексно-сопряженных доминирующих полюсов

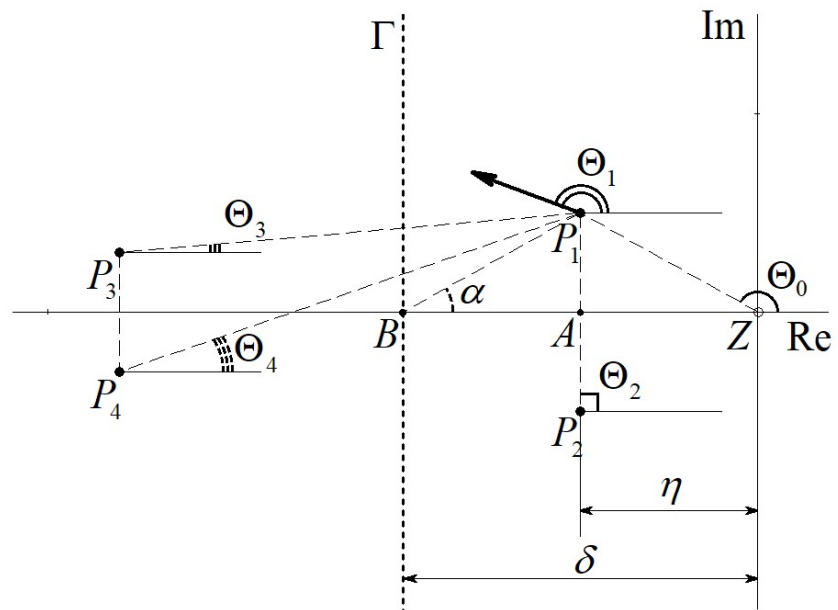
Аналогично предыдущему разделу разработаем процедуру поиска наборов проверочных вершин для размещения областей локализации пары доминирующих комплексно-сопряженных полюсов системы с интервальными параметрами в заданных областях корневой плоскости, обеспечивающих желаемую степень колебательной робастной устойчивости системы.

Рассмотрим возможные варианты взаимного расположения полюсов системы. Возможны два таких варианта: слева от пары доминирующих комплексно-сопряженных полюсов могут располагаться либо свободные вещественные полюсы, либо пары свободных комплексно-сопряженных полюсов. Эти варианты изображены на рисунке 3.3.

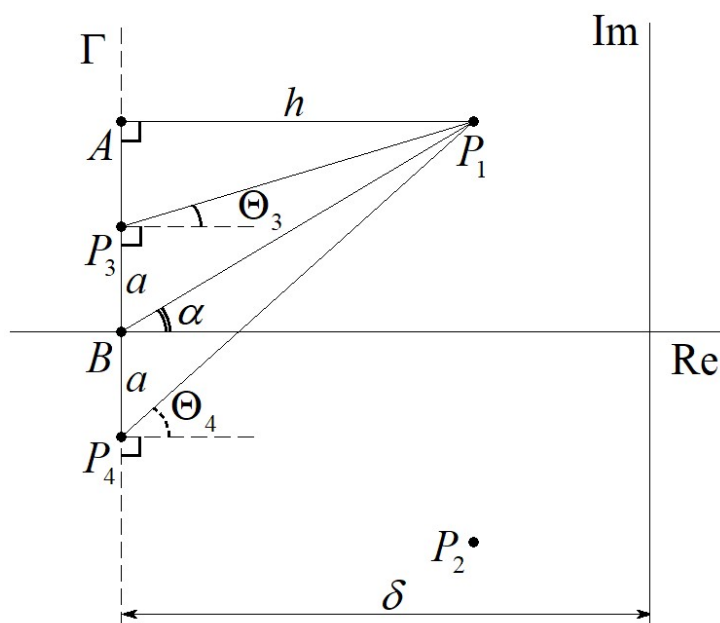




a)



b)



в)

Рисунок 3.3 – Примеры расположения свободных полюсов относительно пары доминирующих комплексно-сопряженных полюсов: а) один вещественный свободный полюс; б) пара свободных комплексно-сопряженных полюсов; в) пара свободных комплексно-сопряженных полюсов с дополнительными построениями

Как показано на рисунке 3.3, степень устойчивости системы  $\eta$  задана расстоянием между парой доминирующих комплексно-сопряженных полюсов  $P_1$  и  $P_2$  и мнимой осью корневой плоскости. Степень колебательности системы  $\mu$  задана углом  $\Theta_0$  так, что  $\mu = \operatorname{tg}(\pi - \Theta_0)$ . Справа от этой пары полюсов, в области, ограниченной справа прямой  $\Gamma$ , располагаются свободные полюсы: на рисунке 3.3а – один вещественный свободный полюс  $P_3$ , на рисунке 3.3б – пара комплексно-сопряженных свободных полюсов  $P_3$  и  $P_4$ .

Для составления системы двойных интервальных угловых неравенств (3.13) необходимо определить значения углов  $\Theta_i, i \in \overline{2, n}$  и затем, определив минимальные и максимальные значения углов выхода реберной ветви  $\Theta_1$ , записать неравенства. Исходя из того, что полюсы  $P_1$  и  $P_2$  – комплексно-сопряженные,  $\Theta_2 = \frac{\pi}{2}$  рад. Максимальное значение  $\Theta_1$ , позволяющее сохранить

заданное значение колебательности, равно  $\Theta_0$ . Минимальное значение  $\Theta_1$ , позволяющее сохранить заданную степень устойчивости равно  $\frac{3 \cdot \pi}{2}$  рад. Далее определим интервалы углов  $\Theta_3$  и  $\Theta_4$  для показанных на рисунке 3.3 вариантов расположения свободных полюсов.

**Утверждение 2.** Если свободный вещественный полюс  $P_3$  движется вдоль вещественной оси в некоторой области локализации свободных полюсов, ограниченной справа прямой  $\Gamma$  как показано на рисунке 3.3а, то значение угла  $\Theta_3$  между вектором  $\overline{P_3 P_1}$  и положительным направлением вещественной оси лежит в интервале  $\Theta_3 = [0; \alpha]$  рад.

**Доказательство.** Рассмотрим прямой треугольник  $AP_1P_3$ . Очевидно, что  $\Theta_3 = \arctg\left(\frac{P_1A}{P_3A}\right) = \arctg\left(\frac{P_1A}{|\operatorname{Re}(P_3)| - \eta}\right)$ . Если полюс  $P_3$  движется вдоль вещественной оси влево, то  $|\operatorname{Re}(P_3)| \rightarrow +\infty$ , а  $\Theta_3 \rightarrow \arctg(0) = 0$  рад. Если полюс движется с учетом введенных ограничений вправо, то  $\operatorname{Re}(P_3) \rightarrow \operatorname{Re}(B)$ , а  $\Theta_3 \rightarrow \alpha$  рад.

Таким образом,  $\Theta_3 = [0; \alpha]$  рад, что и требовалось доказать.

**Утверждение 3.** Если пара свободных комплексно-сопряженных полюсов  $P_3$  и  $P_4$  движется в некоторой области локализации свободных полюсов, ограниченной справа прямой  $\Gamma$  как показано на рисунке 3.3б, то значение суммы углов  $\Theta_3$  и  $\Theta_4$  между векторами  $\overline{P_3 P_1}$  и  $\overline{P_4 P_1}$  и положительным направлением вещественной оси лежит в интервале  $\Theta_3 + \Theta_4 = [0; 2 \cdot \alpha]$  рад.

**Доказательство.** Рассмотрим два предельных случая расположения полюсов  $P_3$  и  $P_4$ . В первом случае  $P_3$  и  $P_4$  удалены от  $\Gamma$  на бесконечно большое расстояние. В таком случае тангенсы  $\Theta_3$  и  $\Theta_4$  стремятся к нулю, следовательно, сами значения углов  $\Theta_3$  и  $\Theta_4$ , а также их сумма также стремятся к нулю.

Во втором случае  $P_3$  и  $P_4$  расположены на  $\Gamma$ . Такой случай изображен на рисунке 3.3в. На рисунке 3.3в выполнено дополнительное построение – из  $P_1$  на  $\Gamma$  в точку  $A$  опущен перпендикуляр. Пусть  $P_1A = h$ ,  $P_3B = BP_4 = a$ . В таком случае

верно, что  $AP_3 = \frac{h}{\operatorname{tg}(90^\circ - \Theta_3)} = h \cdot \operatorname{tg}(\Theta_3)$ . Аналогично  $AB = h \cdot \operatorname{tg}(\alpha)$ ,

$AP_4 = h \cdot \operatorname{tg}(\Theta_4)$ . Рассмотрим далее площади получившихся треугольников.

Известно, что площадь треугольника равна половине произведения высоты на основание, следовательно:  $S_{\Delta AP_3P_4} = 0.5 \cdot h^2 \cdot \operatorname{tg}(\Theta_3)$ ,  $S_{\Delta AP_1B} = 0.5 \cdot h^2 \cdot \operatorname{tg}(\alpha)$ ,  $S_{\Delta AP_1P_4} = 0.5 \cdot h^2 \cdot \operatorname{tg}(\Theta_4)$ . В то же время  $S_{\Delta BP_1P_3} = S_{\Delta BP_1P_4} = 0.5 \cdot a \cdot h$ . Исходя из вышесказанного и рисунка 3.3в верно следующее:

$$\begin{aligned} S_{\Delta AP_3P_4} - S_{\Delta AP_1B} &= S_{\Delta AP_1B} - S_{\Delta AP_1P_4}, \\ 0.5 \cdot h^2 \cdot \operatorname{tg}(\Theta_4) - 0.5 \cdot h^2 \cdot \operatorname{tg}(\alpha) &= 0.5 \cdot h^2 \cdot \operatorname{tg}(\alpha) - 0.5 \cdot h^2 \cdot \operatorname{tg}(\Theta_3), \\ \operatorname{tg}(\Theta_3) + \operatorname{tg}(\Theta_4) &= 2 \cdot \operatorname{tg}(\alpha). \end{aligned}$$

На основании формулы тангенса суммы углов можно записать следующее:

$$\operatorname{tg}(\Theta_3 + \Theta_4) \cdot (1 - \operatorname{tg}(\Theta_3) \cdot \operatorname{tg}(\Theta_4)) = \operatorname{tg}(2 \cdot \alpha) \cdot (1 - \operatorname{tg}^2(\alpha)).$$

Зная, что  $\operatorname{tg}(\Theta_3) = \frac{AP_3}{h}$ ,  $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{AP_3 + a}{h}$  и  $\operatorname{tg}(\Theta_4) = \frac{AP_3 + 2 \cdot a}{h}$ , оценим

значение отношения  $\frac{\operatorname{tg}(2 \cdot \alpha)}{\operatorname{tg}(\Theta_3 + \Theta_4)}$ :

$$\frac{\operatorname{tg}(2 \cdot \alpha)}{\operatorname{tg}(\Theta_3 + \Theta_4)} = \frac{1 - \operatorname{tg}(\Theta_3) \cdot \operatorname{tg}(\Theta_4)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha)} = \frac{h^2 - AP_3^2 - 2 \cdot a \cdot AP_3}{h^2 - AP_3^2 - 2 \cdot a \cdot AP_3 - a^2} > 1.$$

Следовательно,  $\operatorname{tg}(\Theta_3 + \Theta_4) < \operatorname{tg}(2 \cdot \alpha)$  и  $\Theta_3 + \Theta_4 < 2 \cdot \alpha$  с учетом монотонности функции тангенса на каждом периоде.

Таким образом,  $\Theta_3 + \Theta_4 = [0; 2 \cdot \alpha]$ , что и требовалось доказать.

Воспользовавшись утверждениями 2 и 3, можно составить систему (3.13) для произвольного количества свободных полюсов, каждый из которых вносит в значение угла выхода слагаемое  $[0; \alpha]$  рад:

$$\begin{aligned} \Theta_0 \leq [\Theta_1^i] &\leq \frac{3 \cdot \pi}{2}, \quad i \in \overline{0; n}; \\ \Theta_0 \leq \pi \cdot r_i - \left( \frac{\pi}{2} + (n-2) \cdot [0; \alpha] \right) + i \cdot \Theta_0 &\leq \frac{3 \cdot \pi}{2}, \quad i \in \overline{0; n}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где  $n$  – порядок характеристического полинома исследуемой системы.

Перед решением (3.18) необходимо задать желаемую степень робастной устойчивости системы  $\eta$ , степень доминирования  $\delta$  из условия  $\delta \cdot \eta^{-1} \geq 8$ , степень колебательности  $\mu$  и соответствующий ей угол  $\Theta_0$ . Для определения окончательного вида неравенств из (3.18) необходимо будет на основе перечисленных параметров рассчитать угол  $\alpha$  по следующей формуле:

$$\alpha = \arctg \left( \frac{\mu}{\delta \cdot \eta^{-1} - 1} \right). \quad (3.19)$$

Перед решением системы (3.18) также следует проверить выполнение условия  $(n-2) \cdot \alpha \leq \frac{3 \cdot \pi}{2} - \Theta_0$ . Если это условие не выполняется, то решать систему неравенств не имеет смысла, так как в ее решение попадут все возможные вершины параметрического многогранника.

Рассмотрим далее примеры нахождения координат доминирующих вершин параметрического многогранника для обеспечения степени робастной колебательности  $\mu=1$  при соотношении степени доминирования и степени робастной устойчивости системы  $\delta \cdot \eta^{-1} = 10$  в ИХП второго, третьего, четвертого, пятого и шестого порядка. В таком случае  $\Theta^0 = \frac{3 \cdot \pi}{4}$  рад, а  $\alpha = \arctg \left( \frac{1}{9} \right) \approx \frac{0.14 \cdot \pi}{4}$  рад. Запишем (3.18) для рассматриваемого примера:

$$\begin{aligned} \frac{3 \cdot \pi}{4} \leq \pi \cdot r_i - \left( \frac{\pi}{2} + (n-2) \cdot \left[ 0; \frac{0.14 \cdot \pi}{4} \right] \right) + i \cdot \Theta_0 &\leq \frac{3 \cdot \pi}{2}, \quad i \in \overline{0; n}; \\ \frac{3 \cdot \pi}{4} \leq \pi \cdot r_i + \left[ (3 \cdot i - 2) \cdot \frac{\pi}{4} - (n-2) \cdot \frac{0.14 \cdot \pi}{4}; (3 \cdot i - 2) \cdot \frac{\pi}{4} \right] &\leq \frac{3 \cdot \pi}{2}, \quad i \in \overline{0; n}. \end{aligned}$$

Для полинома *второго порядка* система неравенств примет вид:

$$\frac{3 \cdot \pi}{4} \leq \pi \cdot r_i + (3 \cdot i - 2) \cdot \frac{\pi}{4} \leq \frac{3 \cdot \pi}{2}, i \in \overline{0;2}.$$

В рассматриваемом случае получим набор  $r_i$ :  $r_0 = 0$ ,  $r_1 = 1$  и  $r_2 = 0$ . Этому набору соответствует одна вершина  $V_{21}(\overline{d_0}, \underline{d_1}, \overline{d_2})$ .

Для полинома *третьего порядка* система (3.18) примет вид

$$\frac{3 \cdot \pi}{4} \leq \pi \cdot r_i + \left[ (3 \cdot i - 2) \cdot \frac{\pi}{4} - 0.14 \cdot \frac{\pi}{4}; (3 \cdot i - 2) \cdot \frac{\pi}{4} \right] \leq \frac{3 \cdot \pi}{2}, i \in \overline{0;3}.$$

Решив эту систему неравенств, получим набор  $r_i$ :  $r_0 = 0$ ,  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 0$ ,  $r_3 = 0$  или  $r_3 = 1$ . Этому набору  $r_i$  соответствуют две вершины  $V_{31}(\overline{d_0}, \underline{d_1}, \overline{d_2}, \underline{d_3})$  и  $V_{32}(\overline{d_0}, \underline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3})$ .

Для полинома *четвертого порядка* система (3.18) примет вид

$$\frac{3 \cdot \pi}{4} \leq \pi \cdot r_i + \left[ (3 \cdot i - 2) \cdot \frac{\pi}{4} - 0.28 \cdot \frac{\pi}{4}; (3 \cdot i - 2) \cdot \frac{\pi}{4} \right] \leq \frac{3 \cdot \pi}{2}, i \in \overline{0;4}.$$

Решив эту систему неравенств, получим набор  $r_i$ :  $r_0 = 0$ ,  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 0$ ,  $r_3 = 0$  и  $r_3 = 1$ ,  $r_4 = 1$ . Этому набору  $r_i$  соответствуют две вершины  $V_{41}(\overline{d_0}, \underline{d_1}, \overline{d_2}, \underline{d_3}, \underline{d_4})$  и  $V_{42}(\overline{d_0}, \underline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \underline{d_4})$ .

Для полинома *пятого порядка* система (3.18) примет вид

$$\frac{3 \cdot \pi}{4} \leq \pi \cdot r_i + \left[ (3 \cdot i - 2) \cdot \frac{\pi}{4} - 0.42 \cdot \frac{\pi}{4}; (3 \cdot i - 2) \cdot \frac{\pi}{4} \right] \leq \frac{3 \cdot \pi}{2}, i \in \overline{0;5}.$$

Решив эту систему неравенств, получим набор  $r_i$ :  $r_0 = 0$ ,  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 0$ ,  $r_3 = 0$  и  $r_3 = 1$ ,  $r_4 = 1$ ,  $r_5 = 0$ . Этому набору  $r_i$  соответствуют две вершины  $V_{51}(\overline{d_0}, \underline{d_1}, \overline{d_2}, \underline{d_3}, \underline{d_4}, \overline{d_5})$  и  $V_{52}(\overline{d_0}, \underline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \underline{d_4}, \overline{d_5})$ .

Для полинома *шестого порядка* система (3.18) примет вид

$$\frac{3 \cdot \pi}{4} \leq \pi \cdot r_i + \left[ (3 \cdot i - 2) \cdot \frac{\pi}{4} - 0.56 \cdot \frac{\pi}{4}; (3 \cdot i - 2) \cdot \frac{\pi}{4} \right] \leq \frac{3 \cdot \pi}{2}, i \in \overline{0;6}.$$

Решив эту систему неравенств, получим набор  $r_i$ :  $r_0 = 0$ ,  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 0$ ,  $r_3 = 0$  и  $r_3 = 1$ ,  $r_4 = 1$ ,  $r_5 = 0$ ,  $r_6 = 1$ . Этому набору  $r_i$  соответствуют две вершины  $V_{61}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4}, \overline{d_5}, \overline{d_6})$  и  $V_{62}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4}, \overline{d_5}, \overline{d_6})$ .

Решение (3.18) даст набор координат вершин параметрического многогранника, позволяющих расположить пару комплексно-сопряженных доминирующих полюсов, обеспечивающих желаемую степень робастной устойчивости и степень робастной колебательности. Следует обратить внимание на то, что область локализации доминирующих полюсов в таком случае ограничена только справа; левую границу такой области с помощью найденных вершин настроить не удастся. Для удобства дальнейших расчетов информацию о найденных наборах проверочных вершин сведем в таблицу.

Таблица 3.1 – Координаты проверочных вершин, определяющих значения корневых показателей робастного качества, для  $\Theta_0 = \frac{3 \cdot \pi}{4}$  рад

№	Порядок полинома	Координаты проверочных вершин
1	2	$V_{21}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2})$
2	3	$V_{31}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}); V_{32}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3})$
3	4	$V_{41}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4}); V_{42}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4})$
4	5	$V_{51}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4}, \overline{d_5}); V_{52}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4}, \overline{d_5})$
5	6	$V_{61}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4}, \overline{d_5}, \overline{d_6}); V_{62}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4}, \overline{d_5}, \overline{d_6})$

Рассмотрим далее пример расположения областей локализации полюсов ИХП в соответствии с принципом доминирования.

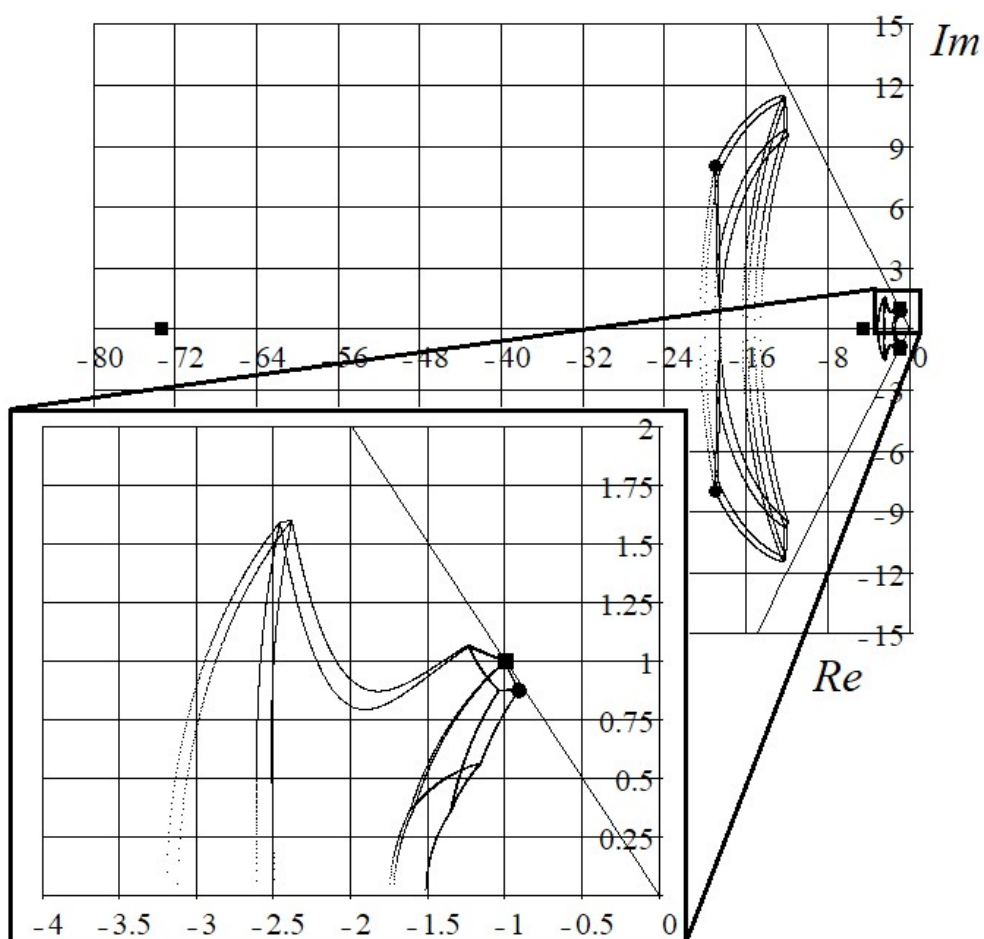


Рисунок 3.4 – Пример расположения областей локализации корней ИХП четвертого порядка

На рисунке 3.4 показаны области локализации корней полинома четвертого порядка:

$$D(s) = [1; 1.5] \cdot s^4 + [40; 80] \cdot s^3 + [450; 500] \cdot s^2 + [840; 1016] \cdot s + 684.$$

Кроме того на том же рисунке зачерненными кругами и квадратами отмечены корни вершинных полиномов, соответствующих найденным ранее проверочным вершинам  $V_{41}(684, 840, 500, 40, 1)$  и  $V_{42}(684, 840, 500, 80, 1)$ . Из рисунка 3.3 видно, что вершины из набора определяют показатели робастного качества: степень робастной устойчивости и степень робастной колебательности. Следовательно, набор проверочных вершин был найден верно.

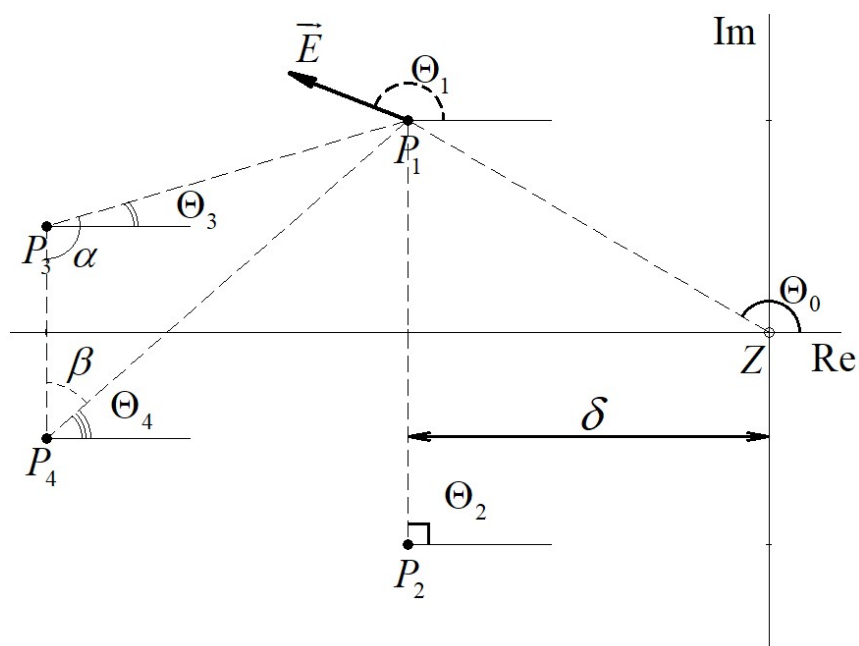


### 3.3 Наборы проверочных вершин для размещения свободных полюсов системы автоматического управления с интервальными параметрами

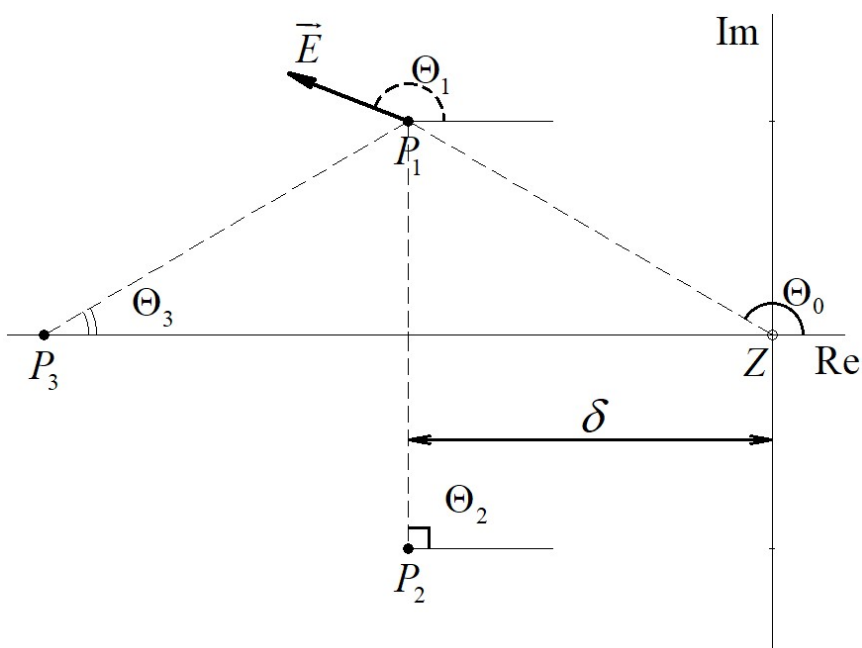
Воспользуемся двойными интервальными угловыми неравенствами для нахождения координат вершин параметрического многогранника, определяющих форму правой границы области локализации свободных полюсов. Расположение свободных полюсов синтезируемой системы должно обеспечивать желаемую степень доминирования и степень колебательности. Таким образом, необходимо искать наборы вершин трех типов: обеспечивающие степень аperiodической устойчивости, обеспечивающие степень колебательной устойчивости и обеспечивающие степень колебательности. Для обеспечения желаемой степени доминирования через расположение на границе области локализации свободных полюсов вещественного свободного полюса достаточно воспользоваться вершиной из утверждения 1. Процесс поиска проверочных вершин для остальных случаев рассмотрим далее.

#### 3.3.1 Наборы проверочных вершин для обеспечения заданной степени доминирования путем размещения пары свободных комплексно-сопряженных полюсов

Рассмотрим далее поиск координат проверочных вершин параметрического многогранника, обеспечивающих желаемую степень колебательной устойчивости свободного полинома. Варианты взаимного расположения свободных полюсов при обеспечении заданной степени доминирования изображены на рисунке 3.5.



а)



б)

Рисунок 3.5 – Примеры расположения свободных полюсов исследуемой системы относительно пары комплексно-сопряженных свободных полюсов: а) со второй парой комплексно-сопряженных полюсов; б) с одним вещественным полюсом

На рисунке 3.5а и 3.5б полюсы исследуемой системы обозначены как  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  и  $P_4$ ; углы между векторами, идущими от полюсов  $P_2$ ,  $P_3$  и  $P_4$  к полюсу  $P_1$ , и положительным направлением вещественной оси обозначены как  $\Theta_2$ ,  $\Theta_3$  и  $\Theta_4$ .

Аналогичный угол для нуля  $Z$  обозначен как  $\Theta_0$ . Вектор, указывающий направление выхода реберной ветви из точки  $P_1$  обозначен как  $\overline{E}_1$ , угол выхода этой ветви – как  $\Theta_1$ . Степень доминирования обозначена как  $\delta$ .

Для пары комплексно-сопряженных полюсов не удастся установить точные значения всех обозначенных на рисунке 3.5 углов как в примере с одним вещественным полюсом. Оценим интервалы значений этих углов. Очевидно, что

$[\Theta_0] = \left[ \frac{\pi}{2}; \pi \right]$  рад. Также очевидно, что если полюсы  $P_1$  и  $P_2$  – комплексно-

сопряженные, то  $\Theta_2 = \frac{\pi}{2}$  рад. Интервалы значений  $\Theta_3$  и  $\Theta_4$  рассмотрим далее.

**Утверждение 4.** Если пара комплексно-сопряженных полюсов  $P_3$  и  $P_4$  перемещается при изменении интервальных коэффициентов в области слева от пары комплексно-сопряженных полюсов  $P_1$  и  $P_2$  как показано на рисунке 3.4а, то сумма углов  $\Theta_3$  и  $\Theta_4$  лежит в интервале  $[0; \pi]$  рад.

**Доказательство.** Рассмотрим треугольник  $P_1P_3P_4$ . Очевидно, что  $\alpha = \Theta_3 + \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta = -\Theta_4 + \frac{\pi}{2}$ . Из этого следует, что  $\Theta_3 + \Theta_4 = \alpha - \beta$ . Однако  $\min(\alpha - \beta) = 0$  рад, а  $\max(\alpha - \beta) = \pi$  рад. Таким образом,  $[\Theta_3 + \Theta_4] = [0; \pi]$  рад, что и требовалось доказать.

**Утверждение 5.** Если вещественный полюс  $P_3$  перемещается вдоль вещественной оси слева от пары комплексно-сопряженных полюсов  $P_1$  и  $P_2$  как показано на рисунке 3.4б, то угол  $\Theta_3$  лежит в интервале  $\left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$  рад.

**Доказательство.** При движении полюса  $P_3$  в сторону пары полюсов  $P_1$  и  $P_2$  можно утверждать, что  $\text{Re}(P_3) \rightarrow \text{Re}(P_1) = \text{Re}(P_2)$  и, следовательно,  $\angle P_3P_1P_2 \rightarrow 0$  рад, а  $\Theta_3 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  рад. При обратном движении  $|\text{Re}(P_3)| \rightarrow +\infty$ . Также очевидно,

$\Theta_3 + \angle P_3 P_1 P_2 = \frac{\pi}{2}$  рад, так как эти углы прилегают к гипотенузе прямоугольного треугольника. Таким образом, катет, на который опирается  $\angle P_3 P_1 P_2$ , стремится к бесконечности, сам  $\angle P_3 P_1 P_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  рад, а  $\Theta_3 \rightarrow 0$  рад.

Таким образом,  $[\Theta_3] = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  рад, что и требовалось доказать.

На основании утверждений 2 и 3 можно считать, что каждая пара комплексно-сопряженных полюсов вносит в выражение для угла выхода из искомой вершины слагаемое  $[0; \pi]$  рад, а каждый вещественный полюс — слагаемое  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  рад. Зная это, можно на основе вариантов расположения полюсов исследуемой системы записать систему двойных интервальных угловых неравенств (3.13):

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &\leq [\Theta_1^i] \leq \frac{3 \cdot \pi}{2}, \quad i \in \overline{0; n}; \\ \frac{\pi}{2} &\leq \pi \cdot r_i - \sum_{j=2}^n [\Theta_j] + i \cdot [\Theta_0] \leq \frac{3 \cdot \pi}{2}, \quad i \in \overline{0; n}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Такое неравенство позволит найти координаты вершин, из которых ветви корневого годографа выходят в направлении от мнимой оси. Однако некоторые решения этой системы неравенств могут лежать внутри области локализации полюсов исследуемой системы, а не на правой ее границе. Для исключения таких вершин из наборов проверочных вершин сформулируем и докажем следующее утверждение.

**Утверждение 6.** Если координаты вершины из решения (3.20) содержат в себе три подряд идущих коэффициента ИХП с одним и тем же пределом, то такая вершина не может лежать на границе области локализации полюсов исследуемой системы.

**Доказательство.** Рассмотрим углы выхода реберной ветви из вершины, содержащей в своих координатах три подряд идущих коэффициента с

одинаковыми пределами  $\underline{d}_{i-1}$ ,  $\underline{d}_i$ ,  $\underline{d}_{i+1}$  или  $\overline{d}_{i-1}$ ,  $\overline{d}_i$ ,  $\overline{d}_{i+1}$ . Вершина из решения (3.20) лежит на границе области локализации, если  $\max(\Theta_1^i) - \min(\Theta_1^i) \leq \pi$ , проверим это условие для двух вариантов последовательностей из трех коэффициентов с одинаковыми пределами, найдя интервалы углов выхода с помощью (3.12).

Для  $\underline{d}_{i-1}$ ,  $\underline{d}_i$ ,  $\underline{d}_{i+1}$  верно:

$$[\Theta_1^{i-1}] = \pi - \sum_{j=2}^n [\Theta_j] + (i-1) \cdot [\Theta_0],$$

$$[\Theta_1^i] = \pi - \sum_{j=2}^n [\Theta_j] + i \cdot [\Theta_0],$$

$$[\Theta_1^{i+1}] = \pi - \sum_{j=2}^n [\Theta_j] + (i+1) \cdot [\Theta_0].$$

Известно, что  $[\Theta^0] > 0$ , следовательно  $\max(\Theta_1) = \overline{\Theta_1^{i+1}}$ , а  $\min(\Theta_1) = \underline{\Theta_1^{i-1}}$ . Проверим ранее введенное условие для минимальных значений коэффициентов:

$$\begin{aligned} \max(\Theta_1) - \min(\Theta_1) &= \pi - \sum_{j=2}^n [\Theta_j] + (i+1) \cdot [\Theta_0] - \\ &- \pi + \sum_{j=2}^n [\Theta_j] - (i-1) \cdot [\Theta_0] = 2 \cdot [\Theta_0] = [\pi; 2 \cdot \pi] \text{ рад.} \end{aligned}$$

Очевидно, что для  $\underline{d}_{i-1}$ ,  $\underline{d}_i$ ,  $\underline{d}_{i+1}$  условие  $\max(\Theta_1^i) - \min(\Theta_1^i) \leq \pi$  не выполняется.

Проверим это условие для  $\overline{d}_{i-1}$ ,  $\overline{d}_i$ ,  $\overline{d}_{i+1}$ .

Для  $\overline{d}_{i-1}$ ,  $\overline{d}_i$ ,  $\overline{d}_{i+1}$  верно:

$$[\Theta_1^{i-1}] = -\sum_{j=2}^n [\Theta_j] + (i-1) \cdot [\Theta_0],$$

$$[\Theta_1^i] = -\sum_{j=2}^n [\Theta_j] + i \cdot [\Theta_0],$$

$$[\Theta_1^{i+1}] = -\sum_{j=2}^n [\Theta_j] + (i+1) \cdot [\Theta_0].$$

Аналогично предыдущему случаю проверим условие граничности:

$$\begin{aligned} \max(\Theta_1) - \min(\Theta_1) &= -\sum_{j=2}^n [\Theta_j] + (i+1) \cdot [\Theta_0] + \\ &+ \sum_{j=2}^n [\Theta_j] - (i-1) \cdot [\Theta_0] = 2 \cdot [\Theta_0] = [\pi; 2 \cdot \pi] \text{ рад.} \end{aligned}$$

Очевидно, что и для  $\overline{d_{i-1}}$ ,  $\overline{d_i}$ ,  $\overline{d_{i+1}}$  условие граничности вершины не выполняется.

Следовательно, вершины из решения системы двойных интервальных угловых неравенств (3.20), содержащие такие последовательности пределов интервальных коэффициентов, не могут лежать на границе области локализации полюсов, что и требовалось доказать.

Итак, система двойных интервальных неравенств (3.20) может быть построена с помощью утверждений 4 и 5, а с помощью утверждения 6 из решения такой системы могут быть исключены вершины, не лежащие на границе области локализации полюсов системы. Рассмотрим далее процедуру поиска вершин, позволяющих разместить пару свободных комплексно-сопряженных полюсов в областях комплексной плоскости, обеспечивающих заданную степень доминирования  $\delta$ , для свободных полиномов различного порядка.

Так, например, для полиномов *второго порядка* с тремя интервальными коэффициентами система (3.18) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq \pi \cdot r_0 - \Theta_2 \leq \frac{3 \cdot \pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2} \leq \pi \cdot r_1 - \Theta_2 + [\Theta_0] \leq \frac{3 \cdot \pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2} \leq \pi \cdot r_2 - \Theta_2 + 2 \cdot [\Theta_0] \leq \frac{3 \cdot \pi}{2}. \end{cases}$$

Ранее было выяснено, что  $\Theta_2 = \frac{\pi}{2}$  рад и  $\Theta_0 = \left[ \frac{\pi}{2}; \pi \right]$  рад. Решение этой системы, как ранее было описано, нужно искать в форме наборов значений  $r_i$ , каждый из которых может быть равен нулю или единице. Очевидно, что первое неравенство справедливо при  $r_0 = 0$  или  $r_0 = 1$ ; второе – при  $r_1 = 1$ ; третье –  $r_2 = 0$ . Этот набор  $r_i$  соответствует двум вершинам параметрического многогранника:

$V_{21}(\underline{d}_0, \underline{d}_1, \overline{d}_2)$  и  $V_{22}(\overline{d}_0, \underline{d}_1, \overline{d}_2)$ . Ни одна из этих вершин не содержит в своих координатах последовательность из трех одинаковых пределов интервальных коэффициентов. Следовательно, обе эти вершины являются вершинами-кандидатами на определение степени робастной устойчивости. Таким образом, если поставлена задача обеспечить желаемую степень робастной устойчивости в системе с ИХП второго порядка путем расположения пары комплексно-сопряженных полюсов, то достаточно исследовать не восемь вершинных полиномов, а всего два. Найдем аналогичным образом наборы проверочных вершин для полиномов третьего, четвертого и пятого порядков

Для полинома *третьего порядка* с четырьмя интервальными коэффициентами единственный возможный вариант расположения полюсов изображен на рисунке 3.5б. Запишем систему неравенств (3.20) для исследуемого случая:

$$\frac{\pi}{2} \leq \pi \cdot r_i - (\Theta_2 + [\Theta_3]) + i \cdot [\Theta_0] \leq \frac{3 \cdot \pi}{2}, \quad i \in \overline{0;3}.$$

Из утверждения 5 известно, что  $[\Theta_3] = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  рад. С учетом этого перепишем полученную систему неравенств:

$$\frac{\pi}{2} \leq \pi \cdot r_i - \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] + i \cdot \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \leq \frac{3 \cdot \pi}{2}, \quad i \in \overline{0;3}.$$

Решив записанную систему неравенств, получим:  $r_0 = 0$ ;  $r_1 = 1$ ;  $r_2 = 0$  или  $r_2 = 1$ ;  $r_3 = 0$  или  $r_3 = 1$ . Этому набору  $r_i$  соответствуют вершины  $V_{31}(\overline{d}_0, \underline{d}_1, \overline{d}_2, \overline{d}_3)$ ,  $V_{32}(\overline{d}_0, \underline{d}_1, \underline{d}_2, \overline{d}_3)$ ,  $V_{33}(\overline{d}_0, \underline{d}_1, \overline{d}_2, \underline{d}_3)$ ,  $V_{34}(\overline{d}_0, \underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3)$ . Следует отметить, что вершина  $V_{34}(\overline{d}_0, \underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3)$  содержит в своих координатах последовательность из трех одинаковых пределов интервальных коэффициентов, идущих подряд, и не может лежать на границе области локализации полюсов. Таким образом, набор проверочных вершин для полиномов третьего порядка включает в себя три вершины из шестнадцати:  $V_{31}(\overline{d}_0, \underline{d}_1, \overline{d}_2, \overline{d}_3)$ ,  $V_{32}(\overline{d}_0, \underline{d}_1, \underline{d}_2, \overline{d}_3)$ ,  $V_{33}(\overline{d}_0, \underline{d}_1, \overline{d}_2, \underline{d}_3)$ .

Для полинома *четвертого порядка* возможны два варианта расположения полюсов: в первом из них (см. рисунок 3.5а) кроме крайней правой пары комплексно-сопряженных полюсов есть еще одна, расположенная левее; во втором варианте слева от пары комплексно-сопряженных полюсов расположены два вещественных полюса. Для каждого из этих вариантов необходимо будет составить и решить свою систему двойных интервальных угловых неравенств. Итоговый набор проверочных вершин будет объединять множество решений составленных неравенств.

Для случая двух пар комплексно-сопряженных полюсов запишем систему (3.20) и упростим ее с учетом утверждения 2:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &\leq \pi \cdot r_i - (\Theta_2 + [\Theta_3] + [\Theta_4]) + i \cdot [\Theta_0] \leq \frac{3 \cdot \pi}{2}, \quad i \in \overline{0;4}; \\ \frac{\pi}{2} &\leq \pi \cdot r_i - \left( \frac{\pi}{2} + [0; \pi] \right) + i \cdot \left[ \frac{\pi}{2}; \pi \right] \leq \frac{3 \cdot \pi}{2}, \quad i \in \overline{0;4}; \\ \frac{\pi}{2} &\leq \pi \cdot r_i + \left[ \frac{\pi}{2} \cdot i - \frac{3 \cdot \pi}{2}; \pi \cdot i - \frac{\pi}{2} \right] \leq \frac{3 \cdot \pi}{2}, \quad i \in \overline{0;4}. \end{aligned}$$

Следует обратить внимание на то, что во втором случае для двух вещественных полюсов, перемещающихся слева от пары комплексно-сопряженных полюсов, система неравенств будет иметь тот же вид, что и для двух пар комплексно-сопряженных полюсов. Это объясняется тем, что согласно утверждениям 4 и 5 от смены расположения полюсов сумма углов  $\Theta_2 + [\Theta_3] + [\Theta_4]$  не изменится. Следовательно, записанная система неравенств описывает оба варианта расположения полюсов системы с ИХП четвертого порядка, и ее решение даст набор проверочных вершин для обоих вариантов.

Решив эту систему неравенств, получим:  $r_0 = 0$ ;  $r_1 = 0$  или  $r_1 = 1$ ;  $r_2 = 0$  или  $r_2 = 1$ ;  $r_3 = 0$  или  $r_3 = 1$ ;  $r_4 = 0$  или  $r_4 = 1$ . Этому набору  $r_i$  соответствует следующий набор вершин:  $V_{41}(\overline{d_0}, \underline{d_1}, \underline{d_2}, \overline{d_3}, \underline{d_4})$ ,  $V_{42}(\overline{d_0}, \underline{d_1}, \underline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4})$ ,  $V_{43}(\overline{d_0}, \underline{d_1}, \overline{d_2}, \underline{d_3}, \underline{d_4})$ ,  $V_{44}(\overline{d_0}, \underline{d_1}, \overline{d_2}, \underline{d_3}, \overline{d_4})$ ,  $V_{45}(\overline{d_0}, \underline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \underline{d_4})$ ,  $V_{46}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \underline{d_2}, \underline{d_3}, \overline{d_4})$ ,  $V_{47}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \underline{d_2}, \overline{d_3}, \underline{d_4})$ ,



$V_{48}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \underline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4})$ . Таким образом, набор проверочных вершин для ИХП четвертого порядка включает в себя восемь вершин из тридцати двух.

Для полиномов *пятого порядка* и выше множество решений системы двойных интервальных угловых неравенств (3.18) включает в себя все вершины параметрического многогранника и, следовательно, не имеет смысла для поиска набора проверочных вершин.

**Утверждение 7.** Решение двойных угловых неравенств системы (3.20) не включает в себя все вершины параметрического многогранника только для полиномов четвертого порядка и ниже.

**Доказательство.** Пусть степень устойчивости ИХП определяет пара комплексно-сопряженных полюсов, а слева от них размещается еще  $p$  пар комплексно-сопряженных полюсов и  $k$  вещественных полюсов. В таком случае интервал углов выхода реберных ветвей при изменении  $i$ -го коэффициента ИХП можно найти с помощью выражения

$$\begin{aligned}\Theta_1^i &= \pi \cdot r_i - \left( \frac{\pi}{2} + p \cdot [0; \pi] + k \cdot \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right] \right) + i \cdot \left[ \frac{\pi}{2}; \pi \right] = \\ &= \pi \cdot r_i + \left[ -(2 \cdot p + k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right] + i \cdot \left[ \frac{\pi}{2}; \pi \right] = \\ &= \left[ \pi \cdot r_i + (i - 2 \cdot p - k - 1) \cdot \frac{\pi}{2}; \pi \cdot r_i + (2 \cdot i - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \right].\end{aligned}$$

Из (3.20) следует, что  $r_i$  можно точно выбрать только в том случае, если  $\overline{\Theta}_1^i - \underline{\Theta}_1^i \leq \pi$ . Проверим, для каких  $i$  может выполняться это условие:

$$\begin{aligned}\overline{\Theta}_1^i - \underline{\Theta}_1^i &\leq \pi; \\ (2 \cdot i - 1) \cdot \frac{\pi}{2} - (i - 2 \cdot p - k - 1) \cdot \frac{\pi}{2} &\leq \pi; \\ i + 2 \cdot p + k &\leq 2; \\ i &\leq 2 - (2 \cdot p + k).\end{aligned}$$

Учитывая, что порядок ИХП  $n$  равен количеству полюсов системы  $n = 2 \cdot p + k + 2$ , можно утверждать следующее:

$$\begin{aligned} i &\leq 2 - (n - 2); \\ i &\leq 4 - n. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Неравенство (3.21) ограничивает множество целых неотрицательных  $i$ , для которых интервал углов выхода соответствующих реберных ветвей может уложиться в заданные пределы. Очевидно, что при  $n \geq 5$  это множество будет пустым, а множество решений системы неравенств совпадет со множеством вершин параметрического многогранника исследуемого ИХП, что и требовалось доказать.

С учетом утверждения 7 для полиномов пятого порядка и выше рекомендуется искать наборы проверочных вершин, исключая вершины параметрического многогранника, не лежащие на границе области локализации полюсов согласно утверждению 6.

Таким образом, обеспечить желаемую степень доминирования можно разместив желаемым образом образы проверочных вершин. Для полиномов четвертого порядка и ниже проверочные вершины предлагается выбирать из таблицы 3.1. Для полиномов пятого порядка и выше проверочные вершины предлагается выбирать с помощью утверждения 6.

Таблица 3.2 – Проверочные вершины для обеспечения степени доминирования путем размещения пары комплексно-сопряженных корней свободного полинома четвертого порядка и ниже

№	Порядок полинома	Список проверочных вершин
1	2	$V_{21}(\underline{d}_0, \underline{d}_1, \overline{d}_2), V_{22}(\overline{d}_0, \underline{d}_1, \overline{d}_2)$
2	3	$V_{31}(\underline{d}_0, \underline{d}_1, \underline{d}_2, \overline{d}_3), V_{32}(\overline{d}_0, \underline{d}_1, \underline{d}_2, \overline{d}_3), V_{33}(\overline{d}_0, \underline{d}_1, \overline{d}_2, \underline{d}_3)$
3	4	$V_{41}(\underline{d}_0, \underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3, \overline{d}_4), V_{42}(\overline{d}_0, \underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3, \overline{d}_4), V_{43}(\underline{d}_0, \underline{d}_1, \overline{d}_2, \underline{d}_3, \overline{d}_4),$ $V_{44}(\underline{d}_0, \underline{d}_1, \overline{d}_2, \underline{d}_3, \overline{d}_4), V_{45}(\overline{d}_0, \underline{d}_1, \overline{d}_2, \underline{d}_3, \overline{d}_4), V_{46}(\overline{d}_0, \underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3, \overline{d}_4),$ $V_{47}(\overline{d}_0, \underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3, \overline{d}_4), V_{48}(\overline{d}_0, \underline{d}_1, \overline{d}_2, \underline{d}_3, \overline{d}_4)$

Продемонстрируем правильность найденных наборов вершин на примере отображения на корневую плоскость параметрического многогранника ИХП

четвертого порядка в целом и вершин из соответствующего набора из таблицы 3.2.

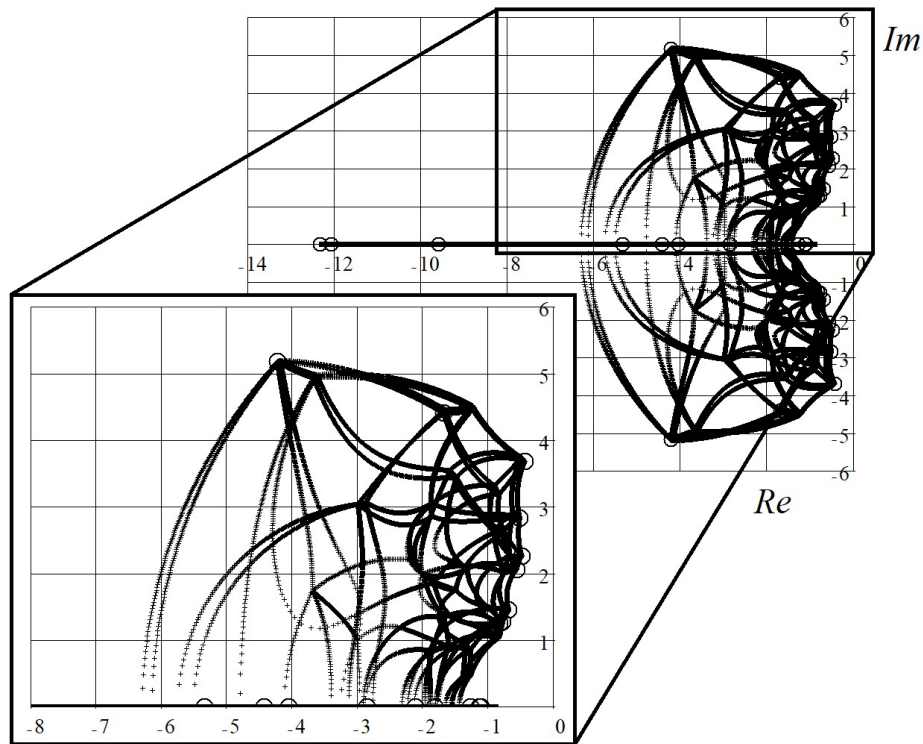


Рисунок 3.6 – Проекция на комплексную плоскость параметрического многогранника ИХП четвертого порядка в целом и проверочных вершин для обеспечения степени доминирования

На рисунке 3.6 изображена проекция на комплексную плоскость параметрического многогранника полинома

$$D(s) = [1; 2] \cdot s^4 + [10; 15] \cdot s^3 + [42; 60] \cdot s^2 + [88; 120] \cdot s + [80; 100]$$

и проверочных вершин из соответствующего набора.

Линии на рисунке 3.6 показывают траектории движения корней реберных полиномов, точки соединения нескольких линий являются образами вершин параметрического многогранника. Кругами обведены образы проверочных вершин из ранее найденного набора. Очевидно, что проверочные вершины задают степень робастной устойчивости полинома, которая для свободного полинома будет степенью доминирования. Следовательно, набор вершин найден верно.

### 3.3.2 Наборы вершин для обеспечения желаемой степени робастной колебательности свободного полинома

Рассмотрим задачу поиска наборов проверочных вершин для определения степени робастной колебательности свободных полиномов различных порядков. Постановка такой задачи похожа на постановку задачи, решенной в предыдущем разделе, за исключением двух отличий. В задаче обеспечения заданной степени колебательности допустимый интервал углов выхода реберной ветви теперь не задан жестко  $\Theta_1^i = \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$ , а связан с  $\Theta_0$ :  $\Theta_1^i = [\Theta_0; \Theta_0 + \pi]$ . Угол  $\Theta_0$  определяет желаемую степень робастной колебательности  $\mu = \text{tg}(\pi - \Theta_0)$ . При этом  $\Theta_0 \in \left( \frac{\pi}{2}; \pi \right)$ , так как в противном случае задача определения степени колебательности вырождается в уже решенную задачу обеспечения заданной степени устойчивости, либо система может потерять устойчивость.

С учетом нового интервала углов выхода реберной ветви запишем систему двойных интервальных неравенств для поиска проверочных вершин, определяющих степень робастной колебательности свободного полинома:

$$\begin{aligned} \Theta_0 &\leq [\Theta_1^i] \leq \Theta_0 + \pi, \quad i \in \overline{0; n}; \\ \Theta_0 &\leq \pi \cdot r_i - \sum_{j=2}^n [\Theta_j] + i \cdot \Theta_0 \leq \Theta_0 + \pi, \quad i \in \overline{0; n}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Для составления системы (3.22) потребуются интервалы значений углов между положительным направлением вещественной оси и векторами, направленными от полюсов системы к образу искомой вершины. Как и в прошлой задаче, слева от пары комплексно-сопряженных полюсов могут находиться вещественные полюсы и другие пары комплексно-сопряженных полюсов. Слагаемые, вносимые в интервал углов выхода в таких случаях, определены в утверждении 4 и 5. Однако в рассматриваемой задаче допускается также расположение вещественных полюсов справа от пары комплексно-сопряженных полюсов, задающих степень

робастной колебательности. Пример такого расположения полюсов показан на рисунке 3.7. Найдем интервал значений угла  $\Theta_3$  для такого случая.

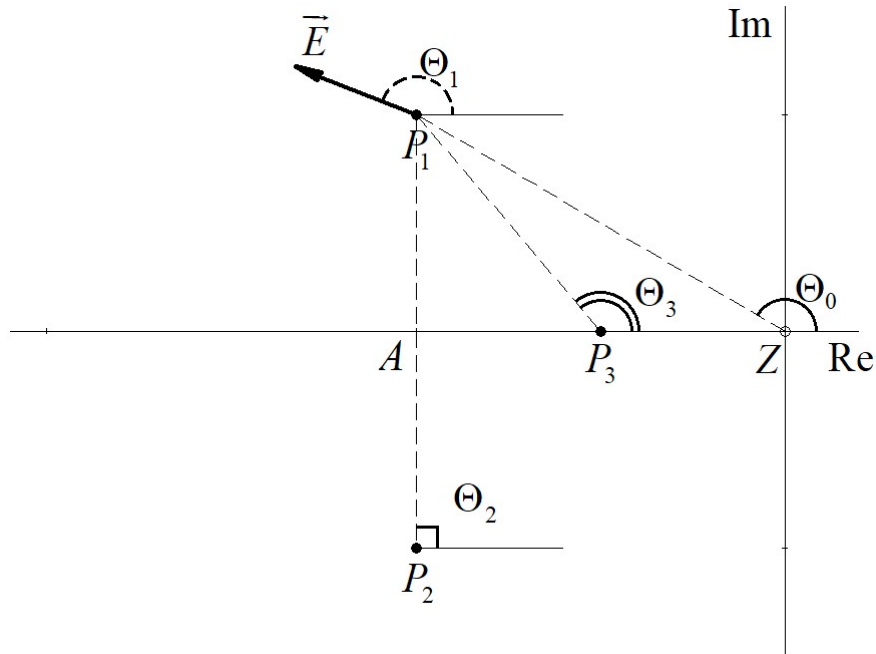


Рисунок 3.7 – Пример расположения вещественного полюса справа от задающей степень робастной колебательности пары комплексно-сопряженных полюсов

**Утверждение 8.** Если вещественный полюс перемещается вдоль вещественной оси справа от пары комплексно-сопряженных полюсов как показано на рисунке 3.6, то угол  $\Theta_3$  лежит в интервале  $\left[\frac{\pi}{2}; \Theta_0\right]$  рад.

**Доказательство.** Рассмотрим прямоугольные треугольники  $P_1AP_3$  и  $P_1AZ$ . Предположим, что полюс  $P_3$  движется вдоль вещественной оси вправо. Тогда  $AP_3 \rightarrow AZ$  и в предельном случае  $\Theta_3 = \Theta^0$ .

В противном случае, если  $P_3$  движется влево вдоль вещественно оси, то  $AP_3 \rightarrow 0$ , а  $\angle P_1P_3A = \text{arccctg}\left(\frac{AP_3}{AP_1}\right) \rightarrow \text{arccctg}(0) = \frac{\pi}{2}$  рад. В таком случае

$$\Theta_3 = \pi - \angle P_1P_3A \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ рад.}$$

В начале раздела было введено ограничение  $\Theta_0 \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ . Таким образом,

$$\Theta_3 = \left[\frac{\pi}{2}; \Theta_0\right], \text{ что и требовалось доказать.}$$

С учетом вышесказанного будем формировать наборы проверочных вершин следующим образом: зададим  $\Theta_0$ , исходя из желаемой степени колебательности; для полиномов разных порядков будем находить решения (3.22) для различных вариантов расположения свободных полюсов. Рассмотрим далее подробно расчеты для полиномов второго, третьего и четвертого порядков,  $\mu = 1$  и, соответственно,  $\Theta_0 = \frac{3\pi}{4}$  рад.

Для полинома *второго порядка* возможен только один вариант расположения полюсов. Система (3.22), записанная для него, будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{3 \cdot \pi}{4} &\leq \pi \cdot r_i - \frac{\pi}{2} + i \cdot \frac{3 \cdot \pi}{4} \leq \frac{7 \cdot \pi}{4}, \quad i \in \overline{0; 2}; \\ \frac{3 \cdot \pi}{4} &\leq \pi \cdot r_i + (3 \cdot i - 2) \cdot \frac{\pi}{4} \leq \frac{7 \cdot \pi}{4}, \quad i \in \overline{0; 2}. \end{aligned}$$

Решив эту систему, получим следующий набор  $r_i$ :  $r_0 = 0$ ,  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 0$ . Этому набору  $r_i$  соответствует одна вершина  $V_{21}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2})$ .

Для полинома *третьего порядка* возможны два случая расположения полюсов: первый изображен на рисунке 3.4б, второй – на рисунке 3.6. Запишем систему (3.20) для первого случая:

$$\begin{aligned} \frac{3 \cdot \pi}{4} &\leq \pi \cdot r_i - \left(\frac{\pi}{2} + \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) + i \cdot \frac{3 \cdot \pi}{4} \leq \frac{7 \cdot \pi}{4}, \quad i \in \overline{0; 3}; \\ \frac{3 \cdot \pi}{4} &\leq \left[(3 \cdot i - 4) \cdot \frac{\pi}{4} + \pi \cdot r_i; (3 \cdot i - 2) \cdot \frac{\pi}{4} + \pi \cdot r_i\right] \leq \frac{7 \cdot \pi}{4}, \quad i \in \overline{0; 3}. \end{aligned}$$

Решив эту систему, получим следующий набор  $r_i$ :  $r_0 = 0$ ,  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 0$  или  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = 0$ . Этому набору  $r_i$  соответствуют вершины  $V_{31}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3})$ ,  $V_{32}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3})$ . Этот набор необходимо дополнить вершинами из решения следующей системы

неравенств, составленной для случая правого расположения вещественного полюса:

$$\frac{3 \cdot \pi}{4} \leq \pi \cdot r_i - \left( \frac{\pi}{2} + \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{3 \cdot \pi}{4} \right] \right) + i \cdot \frac{3 \cdot \pi}{4} \leq \frac{7 \cdot \pi}{4}, \quad i \in \overline{0;3};$$

$$\frac{3 \cdot \pi}{4} \leq \left[ (3 \cdot i - 5) \cdot \frac{\pi}{4} + \pi \cdot r_i; (3 \cdot i - 4) \cdot \frac{\pi}{4} + \pi \cdot r_i \right] \leq \frac{7 \cdot \pi}{4}, \quad i \in \overline{0;3}.$$

Решением этой системы будет набор  $r_i$ :  $r_0 = 0$ ,  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = 0$ . Этому набору соответствует одна вершина  $V_{33}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \underline{d_2}, \overline{d_3})$ . Таким образом, если требуется размещение полюсов системы в секторе корневой плоскости, то необходимо воспользоваться набором из трех вершин:  $V_{31}(\overline{d_0}, \underline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3})$ ,  $V_{32}(\overline{d_0}, \underline{d_1}, \underline{d_2}, \overline{d_3})$  и  $V_{33}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \underline{d_2}, \overline{d_3})$ .

Для полинома *четвертого порядка* существует четыре варианта расположения полюсов: две пары комплексно-сопряженных полюсов, два вещественных полюса слева от пары комплексно-сопряженных полюсов, два вещественных полюса справа от пары комплексно-сопряженных полюсов, по одному полюсу слева и справа от пары комплексно-сопряженных полюсов. Составим для каждого из этих вариантов систему неравенств (3.22), решим их и найдем наборы проверочных вершин параметрического многогранника.

Рассмотрим случай расположения двух пар комплексно-сопряженных полюсов. Система (3.22) для этого случая будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{3 \cdot \pi}{4} \leq \pi \cdot r_i - \left( \frac{\pi}{2} + [0; \pi] \right) + i \cdot \frac{3 \cdot \pi}{4} \leq \frac{7 \cdot \pi}{4}, \quad i \in \overline{0;4};$$

$$\frac{3 \cdot \pi}{4} \leq \left[ (3 \cdot i - 6) \cdot \frac{\pi}{4} + \pi \cdot r_i; (3 \cdot i - 2) \cdot \frac{\pi}{4} + \pi \cdot r_i \right] \leq \frac{7 \cdot \pi}{4}, \quad i \in \overline{0;4}.$$

Следует обратить внимание, что записанная система неравенств также справедлива для второго расположения полюсов – с двумя вещественными полюсами слева от пары комплексно-сопряженных полюсов. Решив эту систему неравенств, получим набор  $r_i$ :  $r_0 = 0$  или  $r_0 = 1$ ,  $r_1 = 0$  или  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 0$  или  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = 0$ ,  $r_4 = 0$  или  $r_4 = 1$ . Такому набору соответствуют шестнадцать вершин

параметрического многогранника. Выбрав из них граничные вершины с помощью утверждения 6, получим следующий набор проверочных вершин:

$$V_{41}(\underline{d_0}, \underline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \underline{d_4}), V_{42}(\underline{d_0}, \overline{d_1}, \underline{d_2}, \overline{d_3}, \underline{d_4}), V_{43}(\underline{d_0}, \overline{d_1}, \underline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4}), V_{44}(\overline{d_0}, \underline{d_1}, \underline{d_2}, \overline{d_3}, \underline{d_4}), \\ V_{45}(\overline{d_0}, \underline{d_1}, \underline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4}), V_{46}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \underline{d_4}), V_{47}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \underline{d_2}, \overline{d_3}, \underline{d_4}), V_{48}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \underline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4}).$$

Рассмотрим далее два варианта расположения корней полинома четвертого порядка с учетом возможного правого расположения одного или обоих вещественных полюсов. Для случая расположения вещественных полюсов слева и справа от пары комплексно-сопряженных полюсов система (3.22) будет иметь вид

$$\frac{3 \cdot \pi}{4} \leq \pi \cdot r_i - \left( \frac{\pi}{2} + \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right] + \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{3 \cdot \pi}{4} \right] \right) + i \cdot \frac{3 \cdot \pi}{4} \leq \frac{7 \cdot \pi}{4}, i \in \overline{0;4}; \\ \frac{3 \cdot \pi}{4} \leq \pi \cdot r_i + \left[ (3 \cdot i - 7) \cdot \frac{\pi}{4}; (3 \cdot i - 4) \cdot \frac{\pi}{4} \right] \leq \frac{7 \cdot \pi}{4}, i \in \overline{0;4}.$$

Решив эту систему неравенств, получим набор  $r_i$ :  $r_0 = 0$  или  $r_0 = 1$ ,  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = 0$  или  $r_3 = 1$ ,  $r_4 = 0$  или  $r_4 = 1$ . Такому набору  $r_i$  соответствуют следующие граничные вершины:  $V_{49}(\underline{d_0}, \overline{d_1}, \underline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4})$ ,  $V_{42}$  и  $V_{43}$ ,  $V_{410}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \underline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4})$ ,  $V_{47}$  и  $V_{48}$ . Таким образом, за счет рассмотрения нового варианта расположения полюсов количество вершин в искомом наборе увеличилось до десяти.

Для случая расположения вещественных полюсов справа от пары комплексно-сопряженных полюсов система (3.22) будет иметь вид

$$\frac{3 \cdot \pi}{4} \leq \pi \cdot r_i - \left( \frac{\pi}{2} + \left[ \pi; \frac{3 \cdot \pi}{2} \right] \right) + i \cdot \frac{3 \cdot \pi}{4} \leq \frac{7 \cdot \pi}{4}, i \in \overline{0;4}; \\ \frac{3 \cdot \pi}{4} \leq \pi \cdot r_i + \left[ (3 \cdot i - 8) \cdot \frac{\pi}{4}; (3 \cdot i - 6) \cdot \frac{\pi}{4} \right] \leq \frac{7 \cdot \pi}{4}, i \in \overline{0;4}.$$

Решив эту систему неравенств, получим набор  $r_i$ :  $r_0 = 0$  или  $r_0 = 1$ ,  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 0$  или  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = 1$ ,  $r_4 = 0$ . Такому набору  $r_i$  соответствуют следующие граничные вершины:  $V_{49}$ ,  $V_{411}(\underline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4})$ ,  $V_{410}$ . Таким образом, за счет рассмотрения последнего варианта расположения полюсов количество вершин в искомом



наборе увеличилось до одиннадцати из тридцати двух возможных. Результаты приведенных расчетов сведем в таблицу.

Таблица 3.3 – Проверочные вершины для обеспечения единичной степени колебательности свободного полинома четвертого порядка и ниже

№	Порядок полинома	Список проверочных вершин
1	2	$V_{21}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2})$
2	3	$V_{31}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}), V_{32}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}), V_{33}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3})$
3	4	$V_{41}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4}), V_{42}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4}), V_{43}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4}),$ $V_{44}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4}), V_{45}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4}), V_{46}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4}),$ $V_{47}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4}), V_{48}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4}), V_{49}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4}),$ $V_{410}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4}), V_{411}(\overline{d_0}, \overline{d_1}, \overline{d_2}, \overline{d_3}, \overline{d_4})$

Продemonстрируем правильность найденных наборов вершин на примере отображения на корневую плоскость параметрического многогранника ИХП четвертого порядка в целом и вершин из соответствующего набора из таблицы 3.3.

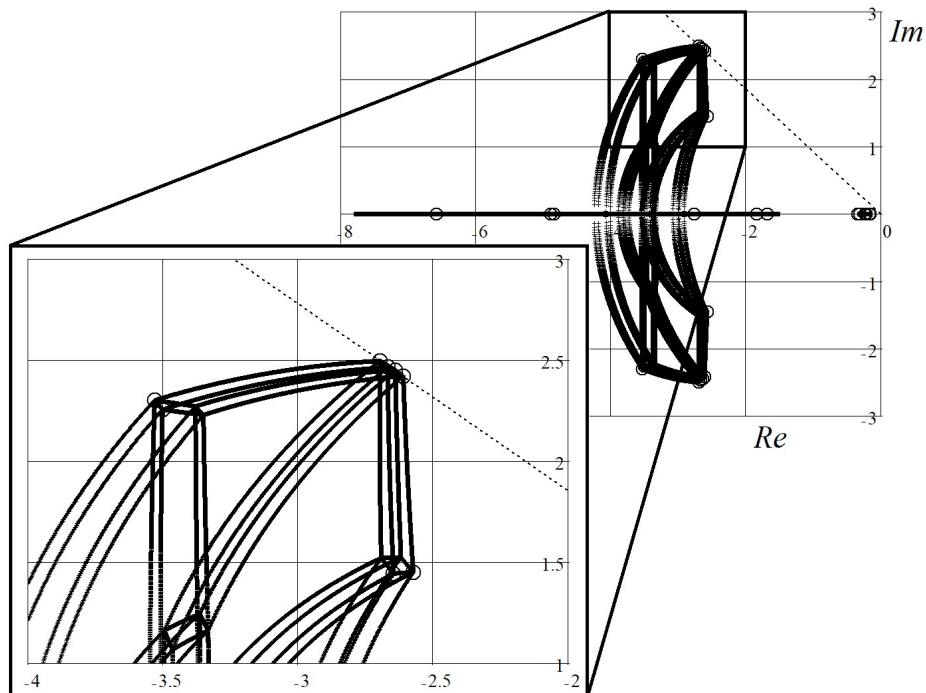


Рисунок 3.8 – Образ параметрического многогранника ИХП четвертого порядка в целом и проверочных вершин для обеспечения степени колебательности

На рисунке 3.8 изображена проекция на комплексную плоскость параметрического многогранника полинома

$$D(s) = [0.1; 0.2] \cdot s^4 + [12; 15] \cdot s^3 + [80; 100] \cdot s^2 + [150; 200] \cdot s + [30; 40],$$

а также образы проверочных вершин из соответствующего набора из таблицы 3.3. Аналогично рисунку 3.6 кругами обведены образы проверочных вершин. Как и ожидалось, проверочные вершины определяют степень робастной колебательности исследуемого полинома. Следовательно, набор был найден верно.

### 3.4 Основные результаты

В данной главе на основе свойств ранее выведенной математической модели процесса движения НПА в водной среде с нестационарными параметрами обоснована актуальность применения математического аппарата теории систем с интервальными параметрами и модальных регуляторов пониженного порядка. Ввиду того, что модальный регулятор пониженного порядка не позволяет разместить каждый из полюсов системы в желаемой области корневой плоскости как регулятор полного порядка, было принято решение использовать принцип доминирования полюсов.

На основе интервального расширения фазового уравнения корневого годографа и по примеру нахождения вершины параметрического многогранника, определяющей положение правой границы вещественного полюса системы с интервальными параметрами [98], были составлены системы двойных интервальных угловых неравенств, сформулированы и доказаны утверждения, позволяющие размещать пару доминирующих комплексно-сопряженных полюсов и свободные полюсы в желаемых областях комплексной плоскости.

В частности, координаты вершин параметрического многогранника, обеспечивающих размещение доминирующих комплексно-сопряженных полюсов в заданных областях комплексной плоскости, могут быть найдены решением (3.18). Пример результатов такого решения приведен в таблице 3.1.

Координаты вершин, обеспечивающих желаемую степень доминирования, найдены решением системы (3.20) с учетом утверждений 6 и 7. Результаты такого решения приведены в таблице 3.2.

Координаты вершин, обеспечивающих желаемую степень колебательности свободного полинома, найдены решением (3.22) с учетом утверждения 6. Пример результатов такого решения приведен в таблице 3.3.

Таким образом, разработанный математический аппарат в совокупности с ранее известным позволяет находить координаты вершин параметрического многогранника, обеспечивающих расположение полюсов систем автоматического управления с интервальными параметрами по принципу доминирования до шестого порядка включительно.

#### 4 МЕТОДИКИ СИНТЕЗА МОДАЛЬНЫХ РОБАСТНЫХ И АДАПТИВНО-РОБАСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА ДОМИНИРОВАНИЯ ПОЛЮСОВ

В предыдущей главе было обосновано применение модальных регуляторов пониженного порядка для обеспечения в исследуемой системе желаемых значений корневых показателей робастного качества управления путем расположения полюсов системы согласно принципу доминирования.

С помощью двойных интервальных угловых неравенств были найдены координаты вершин, образы которых определяют границы областей локализации доминирующих и свободных полюсов.

Рассмотрим далее процесс разработки методик синтеза модальных регуляторов пониженного порядка для САУ с интервальными параметрами, основанных на принципе доминирования полюсов. Для этого последовательно опишем формализацию задачи синтеза и подходы к размещению доминирующих и свободных полюсов САУ, сформулируем алгоритмы синтеза и апробируем их на числовых примерах решения задачи синтеза.

#### 4.1 Формализация задачи синтеза модального регулятора пониженного порядка с применением принципа доминирования полюсов для систем автоматического управления с интервальными параметрами

Согласно принципу доминирования, если часть полюсов системы расположена близко к вещественной оси комплексной плоскости, а остальные полюсы системы достаточно удалены от нее, то качество регулирования в системе определяется расположением ближайших к вещественной оси полюсов. Таким образом, для обеспечения желаемого качества регулирования достаточно соответствующим образом расположить доминирующие полюсы системы, а остальные – свободные полюсы – удалить на достаточное расстояние от доминирующих полюсов.

Рассмотрим задачу размещения полюсов системы с интервальными параметрами выбором соответствующих настроек робастного регулятора.

Очевидно, что характеристический полином системы можно записать как

$$D(s) = \prod_{i=1}^n (s - \sigma_i)^i, \text{ где } \sigma_i - \text{ корни полинома, } n - \text{ порядок полинома.}$$

Задав значения доминирующих полюсов, получим доминирующий полином

$$A(s) = \prod_{i=1}^k (s - \lambda_i)^i, \text{ где } \lambda_i - \text{ доминирующие полюсы; } k - \text{ количество}$$

доминирующих полюсов. Разделив  $D(s)$  на  $A(s)$ , получим свободный полином

$B(s)$  степени  $n-k$ , определяющий расположение свободных полюсов. От этого

деления образуется остаток  $R(s) = D(s) - A(s) \cdot B(s)$ , представляющий собой

полином степени  $k-1$ . Таким образом, с учетом интервальности задаваемых

доминирующих полюсов и коэффициентов  $A(s)$  и  $B(s)$  исходный

характеристический полином системы может быть представлен в следующем

виде

$$\begin{aligned} D(s, q, K) &= \sum_{i=0}^n [d(q, K)]_i \cdot s^i = A(s, \lambda) \cdot B(s, \lambda, d, K) + R(s, d, K) = \\ &= \prod_{i=1}^k (s - [\lambda]_i)^i \cdot \sum_{j=0}^{n-k} [b(\lambda, d, K)]_j \cdot s^j + \sum_{l=0}^{k-1} [r(d, K)]_l \cdot s^l, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $q$  – вектор первичных интервальных параметров системы;  $K$  – вектор

настраиваемых параметров регулятора;  $[d(q, K)]_i$  – интервальные коэффициенты

характеристического полинома замкнутой системы;  $\lambda_i$  – интервальные

доминирующие полюсы системы;  $[b(d, K)]_j$ ,  $[r(d, K)]_l$  – интервальные

коэффициенты свободного полинома и остатка, зависящие от коэффициентов

ИХП и, следовательно, от параметров регулятора. Таким образом, задача

расположения полюсов системы желаемым образом сводится к обеспечению

желаемого расположения корней  $B(s, d, K)$ , соответствующего принципу

доминирования полюсов, и обеспечению равенства остатка  $R(s, d, K)$  нулю, что

позволит расположить доминирующие полюсы в соответствии с желаемым

качеством регулирования. Для удобства изложения дальнейших расчетов

обозначим параметры регулятора, обеспечивающие желаемое размещение свободных полюсов, как  $K_{св}$  и будем называть их свободными. Параметры регулятора, обеспечивающие положение доминирующих полюсов, обозначим как  $K_{зав}$  и будем называть их зависимыми.

Рассмотрим далее способы желаемого расположения свободных и доминирующих полюсов систем с интервальными параметрами.

#### 4.2 Размещение свободных полюсов системы автоматического управления с интервальными параметрами в желаемой области комплексной плоскости

Известно, что принцип доминирования полюсов предполагает расположение свободных полюсов на некотором удалении от доминирующих, что приводит к уменьшению влияния свободных полюсов на переходный процесс до пренебрежимо малого. В случае систем с интервальными параметрами приходится располагать желаемым образом не сами свободные полюсы, а области их локализации. Для этого предлагается применять метод D-разбиения по свободному полиному  $B(s, d, K_{св}) = \sum_i [b(d, K_{св})]_i \cdot s^i$  в проверочных вершинах многогранника его коэффициентов, координаты которых зависят от коэффициентов характеристического полинома замкнутой системы  $D(s)$ . Выбор проверочных вершин подробно рассмотрен в главе 2. Рассмотрим далее процесс вывода уравнений кривой D-разбиения по свободному полиному.

Вывод уравнения кривых D-разбиения предлагается выполнять в три этапа: расчет интервальных коэффициентов свободного полинома на основе коэффициентов ИХП замкнутой системы  $D(s)$ , переход в частотную область с подстановкой в свободный полином  $B(s, d, K_{св})$  уравнения правой границы области локализации свободных полюсов и вывод зависимостей свободных параметров от частоты.

Формулы для расчета коэффициентов свободного полинома можно получить, разделив в общем виде исходный ИХП замкнутой системы на

доминирующий полином. В таком случае при размещении одного доминирующего полюса в желаемом отрезке вещественной оси комплексной плоскости коэффициенты свободного полинома можно рассчитать по следующей формуле:

$$[b]_j = [b]_{j+1} + [d(q, K_{св})]_{i+2} \cdot [\lambda]; \quad j \in n-1 \dots 0. \quad (4.2)$$

Для случая размещения пары комплексно-сопряженных доминирующих полюсов в заданных областях комплексной плоскости коэффициенты свободного полинома могут быть рассчитаны по следующей формуле:

$$[b]_i = [d(q, K_{св})]_{i+2} + [x] \cdot [b]_{i+1} - [y] \cdot [b]_{i+2}, \quad i \in n-2 \dots 0, \quad (4.3)$$

где  $[x], [y]$  – сумма и произведение комплексно-сопряженных доминирующих полюсов соответственно. Таким образом, в обоих случаях коэффициенты свободного полинома определяются доминирующими полюсами и коэффициентами ИХП замкнутой системы, которые в свою очередь зависят от первичных интервальных параметров и свободных параметров регулятора.

Следующий этап вывода уравнения кривой D-разбиения состоит в задании желаемой области локализации свободных полюсов путем определения правой ее границы в соответствии с принципом доминирования полюсов. Предлагается использовать два типа границ областей локализации свободных полюсов: первый будет ограничивать минимальную степень устойчивости свободного полинома, второй – максимальную степень колебательности. Примеры таких областей локализации показаны на рисунке 4.1.

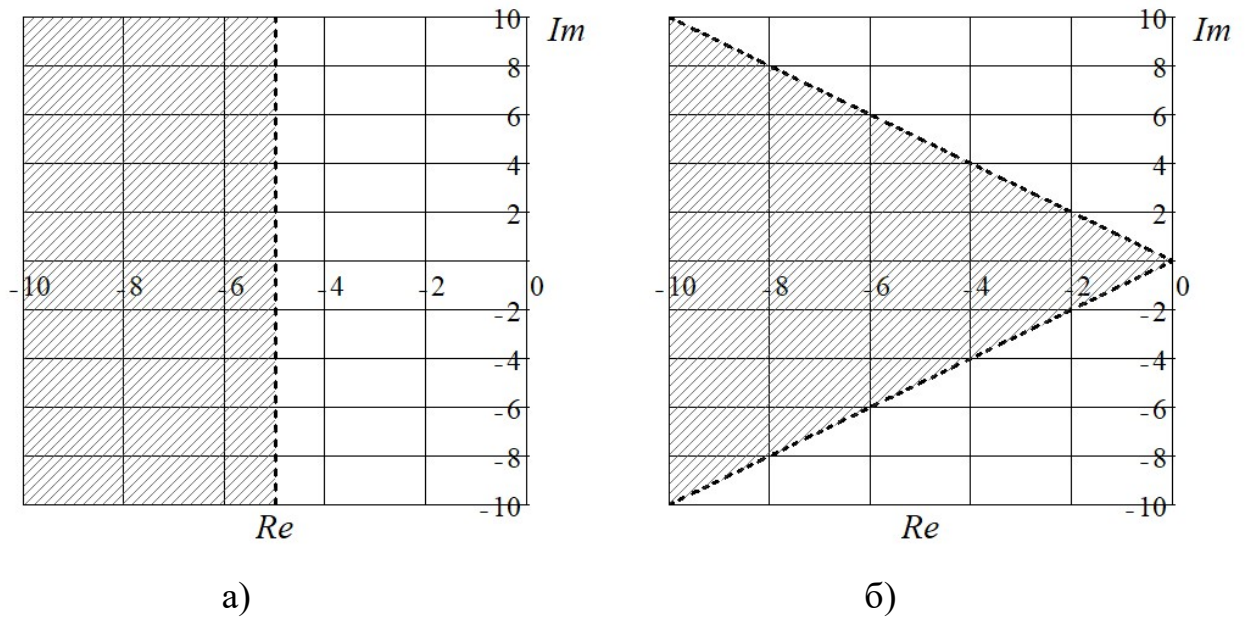


Рисунок 4.1 – Примеры областей локализации свободных полюсов: а) с ограничением по степени устойчивости; б) с ограничением по степени колебательности

Область локализации свободных полюсов на рисунке 4.1а ограничена справа вертикальной прямой. Точки, лежащие на этой прямой, имеют постоянную координату по оси абсцисс, модуль которой равен желаемой степени устойчивости свободного полинома или, иначе говоря, степени доминирования. Ордината этих точек изменяется в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Такая граница может быть описана уравнением

$$s(\omega) = -\delta + j\omega, \quad (4.4)$$

где  $\omega \in (-\infty; +\infty)$  – циклическая частота,  $\delta$  – желаемая степень устойчивости свободного полинома. Далее будем называть величину  $\delta$  степенью доминирования.

В свою очередь область локализации свободных полюсов на рисунке 4.1б ограничена справа двумя лучами, исходящими из начала координат. Тангенс угла наклона этих лучей к оси абсцисс определяет степень колебательности свободного полинома. Такая граница может быть описана следующим уравнением:



$$s(\omega) = -\frac{|\omega|}{\mu} + j\omega, \quad (4.5)$$

где  $\mu$  – желаемая степень колебательности свободного полинома.

Для вывода уравнения кривой D-разбиения необходимо подставить выражения (4.4) и (4.5) в свободный полином, интервалы коэффициентов которого рассчитаны с помощью выражений (4.2) или (4.3), а их значения выбраны в соответствии с координатами проверочных вершин многогранника коэффициентов:

$$B_1(\omega, \delta, K_{св}) = \sum_i b_{пр}(K_{св})_i \cdot (-\delta + j\omega)^i,$$

$$B_2(\omega, \delta, K_{св}) = \sum_i b_{пр}(K_{св})_i \cdot \left( -\frac{|\omega|}{\mu} + j\omega \right)^i,$$

где  $b_{пр}(K_{св})_i$  – зависимости значений коэффициентов свободного полинома от свободных параметров регулятора в проверочной вершине многогранника коэффициентов свободного полинома. Приравняв эти выражения к нулю и решив полученные уравнения относительно каждого из свободных параметров регулятора, получим искомые уравнения кривых D-разбиения.

Проведя D-разбиение с подстановками (4.4) и (4.5), в случае пересечения найденных областей устойчивости можно обеспечить расположение свободных полюсов в усеченном секторе, как показано на рисунке 2.1. Также стоит упомянуть, что применение метода D-разбиения накладывает ограничения на количество свободных параметров регулятора – таких параметров у регулятора может быть не более двух. Далее при составлении методик будем считать, что регулятор имеет один свободный параметр  $K_{св}$ .

### 4.3 Размещение доминирующих полюсов системы автоматического управления с интервальными параметрами в желаемых областях и точках комплексной плоскости

Расположение доминирующих полюсов САУ с интервальными параметрами, соответствующее целевому качеству регулирования, достигается за счет обеспечения равенства остатка  $R(s, d, K)$  нулю. В ранее введенных обозначениях это уравнение можно записать следующим образом:

$$R(s, d, K_{\text{зав}}, K_{\text{св}}) = \sum_{l=0}^{k-1} [r(d, K_{\text{зав}}, K_{\text{св}})]_l \cdot s^l = 0.$$

Рассмотрим далее два практически значимых случая: расположение одного вещественного доминирующего полюса в заданном отрезке вещественной оси корневой плоскости и расположение двух комплексно-сопряженных доминирующих полюсов в заданных областях корневой плоскости. Первый случай позволит обеспечить апериодический переходный процесс желаемой длительности, второй – колебательный переходный процесс желаемой длительности и с желаемым перерегулированием.

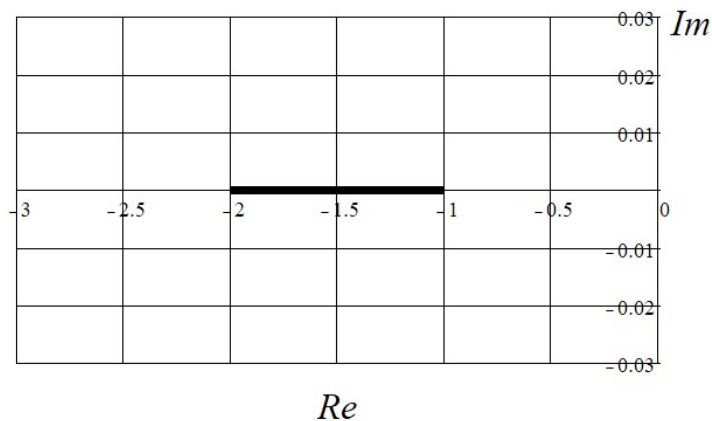


Рисунок 4.2 – Пример расположения одного вещественного доминирующего полюса САУ с интервальными параметрами

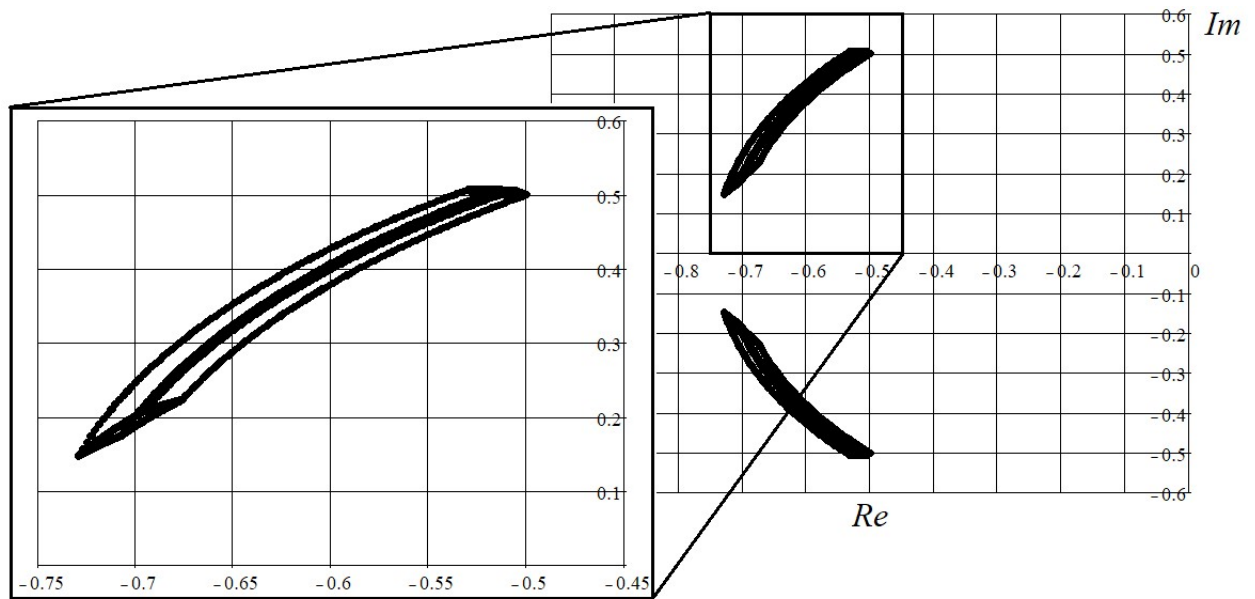


Рисунок 4.3 – Пример расположения пары комплексно-сопряженных доминирующих полюсов САУ с интервальными параметрами

В первом случае  $[\lambda] = [\underline{\lambda}; \bar{\lambda}]$ ,  $k = 1$ ,  $A(s) = s - [\lambda]$ . Разделив с учетом этого в общем виде исходный характеристический полином  $D(s)$  на доминирующий полином  $A(s)$ , получим, что выражение для расчета остатка имеет вид:

$$R([\lambda], [d]_i) = \sum_{i=0}^n [d(K_{\text{зав}}, K_{\text{св}})]_i \cdot [\lambda]^i = D([\lambda]), \quad (4.6)$$

где  $[d]_i$  – интервальные коэффициенты исходного характеристического полинома  $D(s)$ .

Концы отрезка вещественного доминирующего полюса  $[\lambda]$ , изображенного на рисунке 4.2, соответствуют образам двух вершин параметрического многогранника ИХП замкнутой системы  $D(s)$ . Следовательно, для размещения вещественного доминирующего полюса в заданном интервале вещественной оси корневой плоскости необходимо обеспечить равенство (4.6) нулю в двух вершинах параметрического многогранника, одна из которых будет соответствовать левой его границе, другая – правой. С учетом материалов главы 2, в которой были найдены такие вершины, можно утверждать, что для нахождения параметров регулятора, обеспечивающего рассматриваемое

положение доминирующего полюса, необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} R_1([\underline{\lambda}], \overline{[d(K_{\text{зав}}, K_{\text{св}})]_0}, \overline{[d(K_{\text{зав}}, K_{\text{св}})]_1}, \overline{[d(K_{\text{зав}}, K_{\text{св}})]_2}, \dots) = 0, \\ R_2([\overline{\lambda}], \overline{[d(K_{\text{зав}}, K_{\text{св}})]_0}, \overline{[d(K_{\text{зав}}, K_{\text{св}})]_1}, \overline{[d(K_{\text{зав}}, K_{\text{св}})]_2}, \dots) = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Решением такой системы будут функции зависимых параметров регулятора от свободных. Очевидно, что система уравнений (4.7) будет иметь решение в том случае, если регулятор содержит не менее двух зависимых параметров  $K_{\text{зав}}$ . Эти же зависимости следует подставить вместо соответствующих параметров регулятора в выражения для коэффициентов свободного полинома, чтобы обеспечить их зависимость только от свободных параметров регулятора. При дальнейших расчетах будем предполагать, что такие замены не требуются или уже проведены.

Из системы (4.7) также можно сделать вывод, что при наличии возможности косвенно измерить коэффициенты ИХП замкнутой системы, можно стабилизировать доминирующий полюс в заданной точке комплексной плоскости и обеспечить тем самым постоянную степень устойчивости системы и время переходного процесса в условиях интервальной параметрической неопределенности САУ. В таком случае решение уравнения

$$R(\lambda, d_0, d_1, d_2, \dots) = 0,$$

где  $d_i$  – текущие косвенно измеренные значения коэффициентов ИХП, а  $\lambda$  – постоянный вещественный доминирующий полюс, будет законом адаптации одного из коэффициентов используемого регулятора.

Во втором случае для двух интервальных комплексно-сопряженных полюсов  $[\lambda]_{1,2} = -[\alpha] \pm j \cdot [\beta]$ ,  $k = 2$ ,  $A(s) = (s + [\alpha] - j \cdot [\beta]) \cdot (s + [\alpha] + j \cdot [\beta])$ . Учитывая это, найдем выражение для остатка, разделив исходный ИХП на доминирующий полином:

$$R(s) = ([d]_1 + [x] \cdot [b]_0 - [y] \cdot [b]_1) \cdot s + [d]_0 - [y] \cdot [b]_0, \quad (4.8)$$

где  $[x], [y]$  – сумма и произведение комплексно-сопряженных доминирующих полюсов соответственно;  $[b]_j$  – интервальные коэффициенты свободного полинома;  $[d]_i$  – интервальные коэффициенты исходного характеристического полинома  $D(s)$ .

Очевидно, что в коэффициенты  $[d]_i$  выражения (4.4) также входят параметры регулятора. Следовательно, на основе этого выражения можно составить систему уравнений, решением которой будут искомые значения параметров регулятора, обеспечивающие равенство остатка  $R(s)$  нулю. При этом указанное равенство должно обеспечиваться в двух вершинах параметрического многогранника  $P_0$  и  $P_1$ , образы которых описывают крайнюю правую и крайнюю левую точки области локализации каждого из доминирующих полюсов. Выполним для  $R(s)$  подстановку  $s \rightarrow j\omega$  и, приняв остаток за комплексное число, запишем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(R(P_0)) = 0, \\ \operatorname{Im}(R(P_0)) = 0, \\ \operatorname{Re}(R(P_1)) = 0, \\ \operatorname{Im}(R(P_1)) = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что для решения такой системы требуется регулятор с четырьмя зависимыми параметрами, а пятый параметр – свободный – потребуется для размещения свободных полюсов. Такой регулятор будет избыточен для широкого класса систем, в том числе и для каналов регулирования рассматриваемой системы.

Для сокращения размерности используемой системы уравнений будем задавать положение доминирующих полюсов только в одной вершине параметрического многогранника, образ которой соответствует крайней правой точке их областей локализации. Способ нахождения такой вершины был описан в главе 2. Таким образом, зависимости двух параметров регулятора от третьего,

обеспечивающие заданные корневые показатели робастного качества регулирования, могут быть найдены решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(R(j\omega, P_0)) = d_0 - y \cdot b_0 = 0, \\ \operatorname{Im}(R(j\omega, P_0)) = d_1 + x \cdot b_0 - y \cdot b_1 = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

где  $d_i, b_i$  – значения коэффициентов ИХП замкнутой системы и свободного полинома в проверочной вершине  $P_0$  параметрического многогранника, зависящие от параметров регулятора;  $x = -2 \cdot \alpha$ ,  $y = \alpha^2 + \beta^2$  – сумма и произведение доминирующих полюсов системы. Также решение системы уравнений (4.9) может использоваться в качестве закона адаптации двух параметров регулятора, позволяющих стабилизировать доминирующие полюсы системы в заданных точках корневой плоскости при наличии возможности косвенно измерить коэффициенты ИХП замкнутой системы.

Таким образом, были разработаны способы обеспечения расположения доминирующих полюсов САУ с интервальными параметрами в четырех конфигурациях: один доминирующий полюс в заданном интервале или заданной точке вещественной оси комплексной плоскости, два комплексно-сопряженных доминирующих полюса в желаемых областях или в желаемых точках комплексной плоскости. При этом размещение доминирующих полюсов в областях комплексной плоскости достигается за счет задания постоянных значений параметров регулятора, а стабилизация доминирующих полюсов в заданных точках комплексной плоскости требует измерения текущих значений коэффициентов ИХП замкнутой системы и подстройки параметров регулятора. Сформулируем далее методики синтеза регуляторов на основе выведенных выражений.

#### 4.4 Методики синтеза модальных робастных и адаптивно-робастных регуляторов пониженного порядка и примеры их применения

В предыдущем разделе описаны способы размещения доминирующих полюсов в желаемых областях и точках корневой плоскости в четырех

конфигурациях. Сформулируем далее методики синтеза регуляторов для каждой из таких конфигураций; работоспособность методик проиллюстрируем примерами.

4.4.1 Методика синтеза робастного ПИД-регулятора, обеспечивающего расположение доминирующих полюсов в заданных областях

Расположение одного вещественного доминирующего полюса в желаемой области вещественной оси комплексной плоскости позволяет обеспечить заданную степень робастной устойчивости. Расположение областей локализации пары комплексно-сопряженных доминирующих полюсов позволят также задать степень робастной колебательности. Свободные полюсы при этом следует располагать также с желаемой степенью доминирования и степенью колебательности.

Сформулируем алгоритм решения этой задачи с помощью ПИД-регулятора. Для нахождения значений настроек ПИД-регулятора, обеспечивающих желаемое расположение полюсов системы, необходимо:

1. Исходя из желаемых значений показателей качества, задать интервал доминирующего полюса или крайние точки правой границы области локализации пары доминирующих комплексно-сопряженных полюсов.

2. Вычислить зависимость значений остатка от настроек регулятора в проверочных вершинах на основе выражения (4.6) (для одного доминирующего вещественного полюса) или на основе выражения (4.8) (для пары доминирующих комплексно-сопряженных полюсов).

3. Приравняв полученные зависимости к нулю, получить систему уравнений, связывающую зависимые параметры регулятора со свободным параметром (для одного вещественного доминирующего полюса – (4.7); для пары доминирующих комплексно-сопряженных полюсов – (4.9)).

4. Решив данную систему, получить функции зависимых параметров ПИД-регулятора от свободных, обеспечивающие желаемое расположение доминирующего полюса.

5. Воспользовавшись (4.2), Найти выражения коэффициентов свободного полинома с помощью выражения (4.2) для одного вещественного доминирующего полюса и (4.3) для пары комплексно-сопряженных доминирующих полюсов.

6. Если коэффициенты свободного полинома включают в себя зависимые параметры регулятора, подставить вместо них зависимости из п. 4, обеспечив таким образом инвариантность положения областей локализации свободных полюсов от зависимых параметров регулятора.

7. Провести D-разбиение для свободного полинома и выбрать значение свободного параметра ПИД-регулятора. В том случае, если область устойчивости, найденная методом D-разбиения, пуста, необходимо изменить требования к области локализации свободных полюсов.

8. Вычислить значения зависимых параметров по зависимостям из п. 4.

Рассмотрим далее примеры применения разработанной методики [106–108].

4.4.1.1 Пример расположения одного доминирующего полюса в заданном отрезке вещественной оси

Пусть передаточная функция неизменяемой части системы имеет вид

$$W(s, p_0, p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{p_3 \cdot s^3 + p_2 \cdot s^2 + p_1 \cdot s + p_0},$$

где  $p_0 = [40; 80]$ ,  $p_1 = [10; 15]$ ,  $p_2 = [5; 8]$ ,  $p_3 = [0.05; 0.15]$  – первичные интервальные параметры системы. Система состоит из ПИД-регулятора и неизменяемой части, охваченных единичной отрицательной обратной связью. Передаточная функция регулятора имеет вид

$$W_{PID}(s, K_P, K_I, K_D) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s,$$

где  $K_P, K_I, K_D$  – настройки пропорциональной, интегральной и дифференциальной составляющих регулятора.

Необходимо обеспечить в данной системе апериодический переходный процесс длительностью не более 8 секунд. Такой длительности переходного



процесса соответствует минимальная степень устойчивости, равная  $\eta = 0.5$ . Воспользуемся разработанной методикой для размещения доминирующего полюса в интервале  $\lambda = [-0.6; -0.5]$ . Свободные полюсы системы при этом разместим левее прямой  $\text{Re}(X) = -4$ , также обеспечим степень робастной колебательности  $\mu = 1$ .

Характеристический полином исследуемой системы имеет вид

$$D(s, K_P, K_I, K_D, p_0, p_1, p_2, p_3) = p_3 \cdot s^4 + p_2 \cdot s^3 + (K_D + p_1) \cdot s^2 + (K_P + p_0) \cdot s + K_I. \quad (4.10)$$

Согласно разработанной методике найдем значения остатка для левой и правой границ интервала доминирующего полюса

$$\underline{\lambda}: R_1 = D(\underline{\lambda}, K_P, K_I, K_D, \underline{p_0}, \underline{p_1}, \underline{p_2}, \underline{p_3}) = -0.6 \cdot K_P + K_I + 0.36 \cdot K_D - 19.6606,$$

$$\bar{\lambda}: R_2 = D(\bar{\lambda}, K_P, K_I, K_D, \bar{p_0}, \bar{p_1}, \bar{p_2}, \bar{p_3}) = -0.5 \cdot K_P + K_I + 0.25 \cdot K_D - 38.1969.$$

Приравняв к нулю полученные выражения и решив систему из двух уравнений, получим зависимости двух настроек регулятора от третьей

$$\begin{aligned} K_I(K_P) &= 0.2727 \cdot K_P + 81.3067, \\ K_D(K_P) &= 0.9091 \cdot K_P - 171.2390. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Выполнение этих условий при расчете значений настроек регулятора обеспечит желаемое расположение доминирующего полюса.

Подставим найденные зависимости в исходный характеристический полином и воспользуемся выражением (4.2) для нахождения коэффициентов свободного полинома

$$B(s, b_0, b_1, b_2, b_3) = [b_3] \cdot s^3 + [b_2] \cdot s^2 + [b_1(K_P)] \cdot s + [b_0(K_P)],$$

$$[b_3] = [0.0500; 0.1500];$$

$$[b_2] = [4.9100; 7.9750];$$

$$[b_1(K_P)] = [0.9091 \cdot K_P - 166.0250; 0.9091 \cdot K_P - 158.6950];$$

$$[b_0(K_P)] = [0.4545 \cdot K_P + 135.2170; 0.5455 \cdot K_P + 163.0125].$$

Выполнив подстановки  $s \rightarrow -4 + i \cdot \omega$  и  $s \rightarrow -|\omega| + i \cdot \omega$ , выразим  $K_P$  из  $B(-4 + i \cdot \omega, b_0(K_P), b_1(K_P), b_2, b_3)$  и  $B(-|\omega| + i \cdot \omega, b_0(K_P), b_1(K_P), b_2, b_3)$  и построим

кривые D-разбиения в проверочных вершинах многогранника  $[b]$ . Для поиска значений  $K_p$ , обеспечивающих заданную степень доминирования, воспользуемся набором проверочных вершин №2 из таблицы 2.2, дополненным вершиной из утверждения 1. Для поиска значений  $K_p$ , обеспечивающих заданную степень колебательности свободного полинома, воспользуемся набором проверочных вершин №2 из таблицы 2.3. Результаты D-разбиения для свободного полинома в плоскости  $K_p$  изображены на рисунках 4.4 и 4.5.

На рисунках 4.4 и 4.5 окружностями обозначены начала кривых D-разбиения, соответствующие направлению  $\omega \rightarrow -\infty$ ; кругами обозначены концы кривых, соответствующие  $\omega \rightarrow +\infty$ . Такие обозначения будем использовать и далее. С учетом этого из рисунков 4.4 и 4.5 видно, что желаемое расположение свободных полюсов достигается при  $K_p \in [259.70; 260.49]$ . Выберем  $K_p = 260$ . Согласно (4.11),  $K_I = 152.2160; K_D = 65.1230$  при выбранном  $K_p$ .

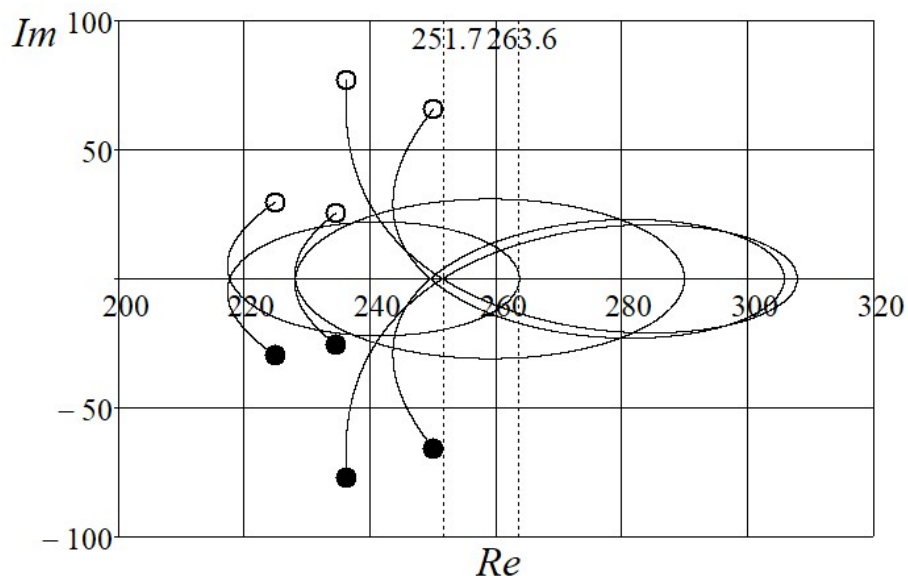


Рисунок 4.4 – D-разбиение для свободного полинома по  $K_p$  для обеспечения заданной степени доминирования

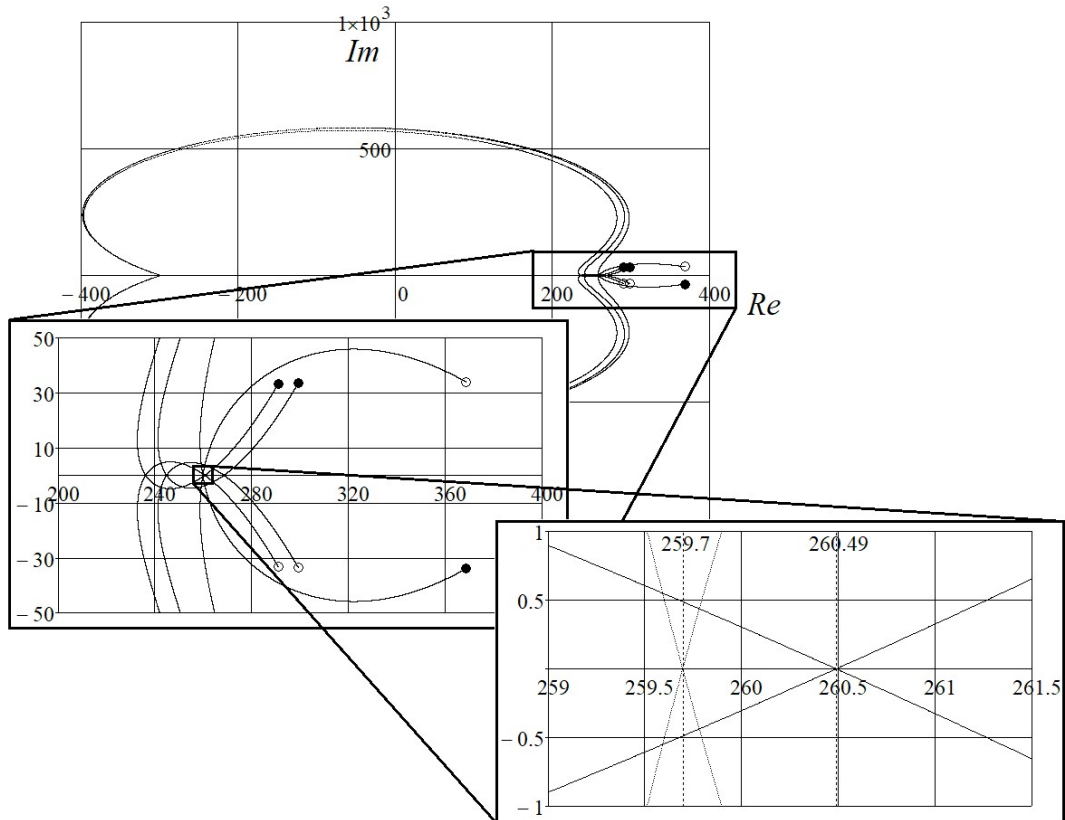


Рисунок 4.5 – D-разбиение для свободного полинома по  $K_p$  для обеспечения заданной степени колебательности

Для оценки полученного расположения полюсов системы с синтезированным регулятором на рисунке 4.6 построен ее многопараметрический интервальный корневой годограф (МИКГ). Из рисунка 4.6 очевидно, что доминирующий полюс расположился в заданном интервале  $\lambda = [-0.6; -0.5]$ , свободные полюсы при этом расположены внутри усеченного сектора, обеспечивающего заданные степень доминирования и степень колебательности.

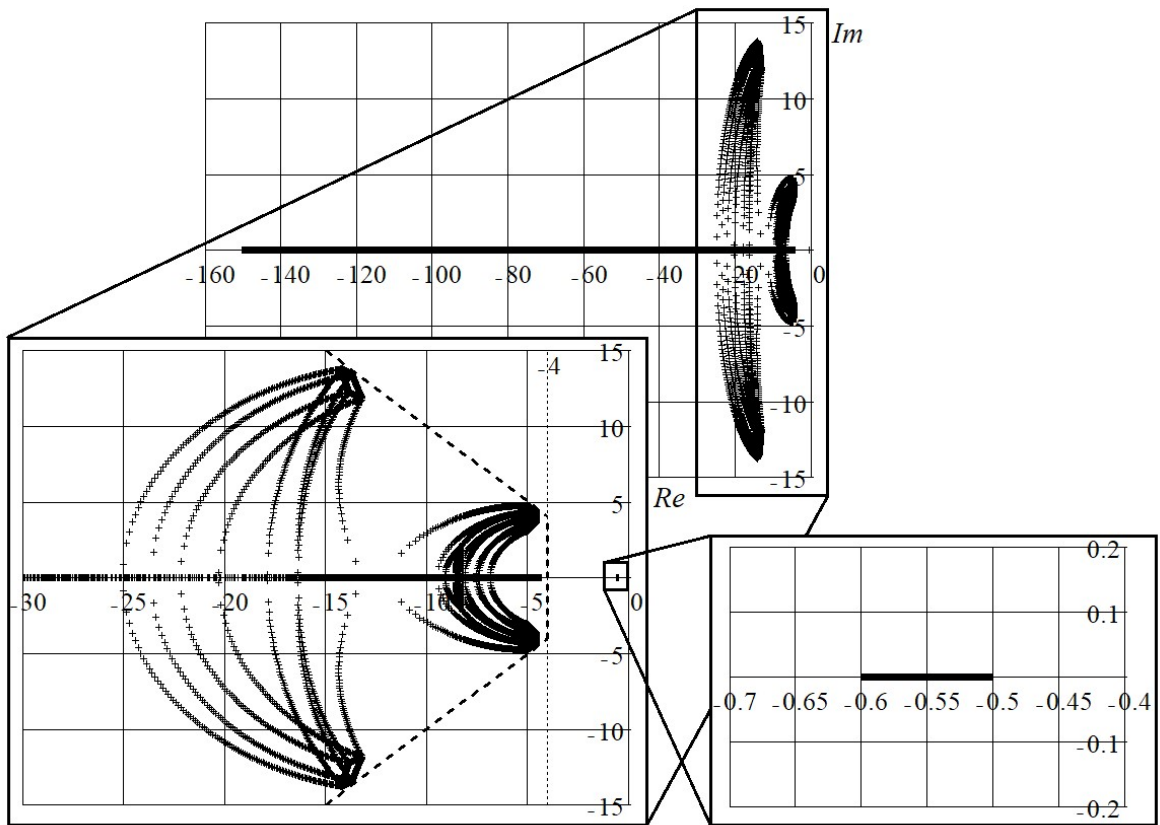


Рисунок 4.6 – МИКГ синтезированной системы с одним вещественным интервальным доминирующим полюсом

Оценим качество переходных процессов в полученной системе. Для этого построим переходные характеристики системы во всех вершинах ее параметрического многогранника.

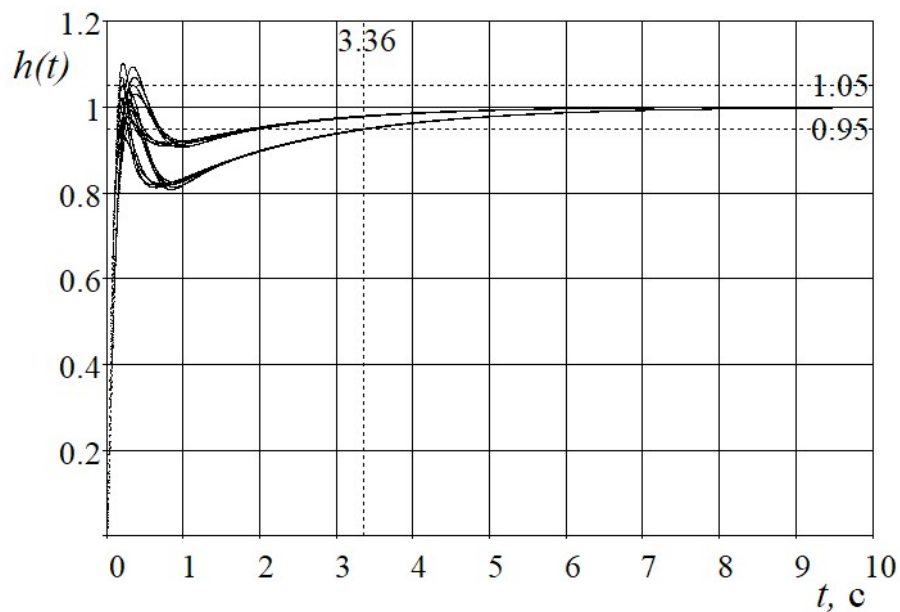


Рисунок 4.7 – Переходные характеристики с робастным ПИД-регулятором

Из рисунка 4.7 видно, что синтезированный регулятор обеспечивает апериодический переходный процесс с перерегулированием в 10.2%. Время регулирования лежит в интервале  $t_p = [2.00; 3.36]$  с.

Таким образом, можно утверждать, что поставленная задача решена, а разработанная методика работоспособна.

#### 4.4.1.2 Пример расположения двух комплексно-сопряженных доминирующих полюсов в заданных областях

Предположим, что необходимо обеспечить в системе с ИХП (4.10) переходный процесс со временем регулирования 3-4 с и перерегулированием не более 5%. Таким значениям прямых показателей качества соответствует значение степени робастной устойчивости  $\eta=1$  и значение степени робастной колебательности  $\mu=1$ . Следовательно, расположим правые крайние точки области локализации доминирующих полюсов в точках  $-1 \pm j \cdot 1$ . Сумму и произведение этих корней обозначим соответственно как  $x = -1 - j \cdot 1 - 1 + j \cdot 1 = -2$ ,  $y = (-1 - j \cdot 1) \cdot (-1 + j \cdot 1) = 2$ .

Воспользуемся выражением (4.8) и найдем функцию остатка от параметров регулятора в вершине  $V_{41}$  из набора №3 таблицы 2.1:

$$R(s, K_P, K_I, K_D) = K_I - 2 \cdot K_D + s \cdot (K_P - 2 \cdot K_D + 20) - 10.2.$$

Выполнив замену  $s \rightarrow j \cdot \omega$ , составим и решим систему уравнений (4.9). Получим зависимости между параметрами регулятора, выполнение которых обеспечит желаемое расположение доминирующих полюсов:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(R(j \cdot \omega, K_P, K_I, K_D)) = 0 \\ \operatorname{Im}(R(j \cdot \omega, K_P, K_I, K_D)) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_P(K_D) = 2 \cdot K_D - 20 \\ K_I(K_D) = 2 \cdot K_D + 10.2 \end{cases}$$

Затем воспользуемся выражением (4.3) для расчета коэффициентов свободного полинома:

$$B(s, b_0, b_1, b_2) = [b_2] \cdot s^2 + [b_1] \cdot s + [b_0(K_D)],$$

$$[b_2] = [0.05; 0.15];$$

$$[b_1] = [4.7; 7.9];$$

$$[b_0(K_D)] = [K_D - 6.1; K_D + 5.5].$$

Зная коэффициенты свободного полинома, проведем D-разбиение в проверочных вершинах его многогранника коэффициентов. D-разбиение для обеспечения желаемой степени доминирования следует проводить в вершинах из набора №1 таблицы 3.2; для обеспечения желаемой степени робастной колебательности – в вершинах набора №1 из таблицы 2.3. Результаты такого D-разбиения приведены на рисунках 4.8 и 4.9.

Из результатов D-разбиения можно сделать вывод, что желаемое расположение свободных полюсов достигается при  $K_D \in [44.351; 68.149]$ , выберем  $K_D = 68$ . С помощью ранее выведенных зависимостей и на основе выбранного значения  $K_D$  рассчитаем значения остальных параметров регулятора  $K_p = 116$  и  $K_I = 146.2$ .

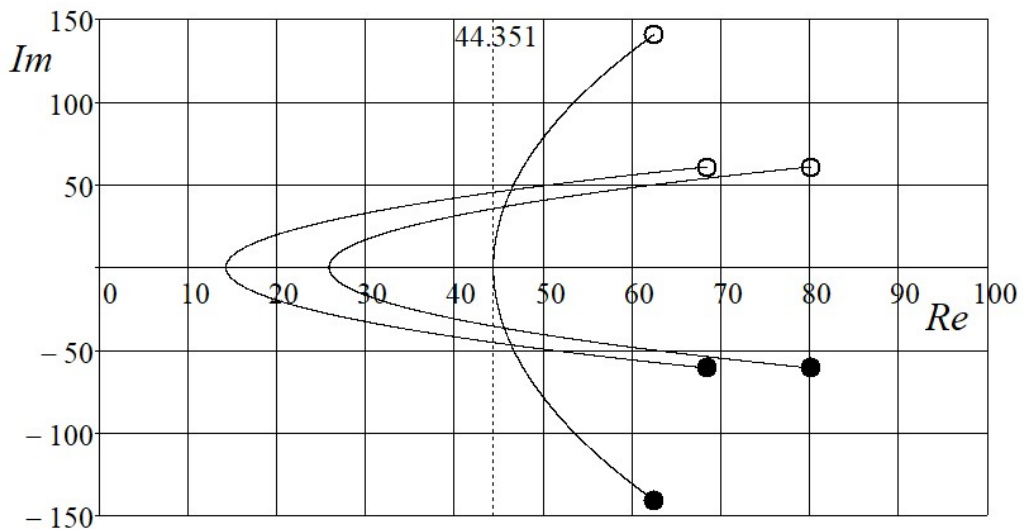


Рисунок 4.8 – D-разбиение для свободного полинома по  $K_D$  для обеспечения заданной степени доминирования

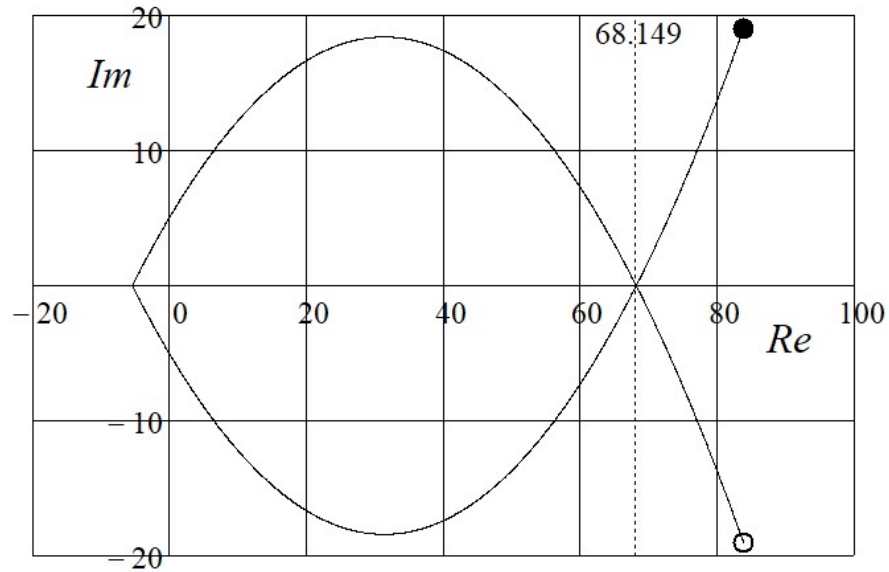


Рисунок 4.9 – D-разбиение для свободного полинома по  $K_D$  для обеспечения заданной степени колебательности

Расположение полюсов синтезированной системы показано на рисунке 4.10; переходные характеристики – на рисунке 4.11.

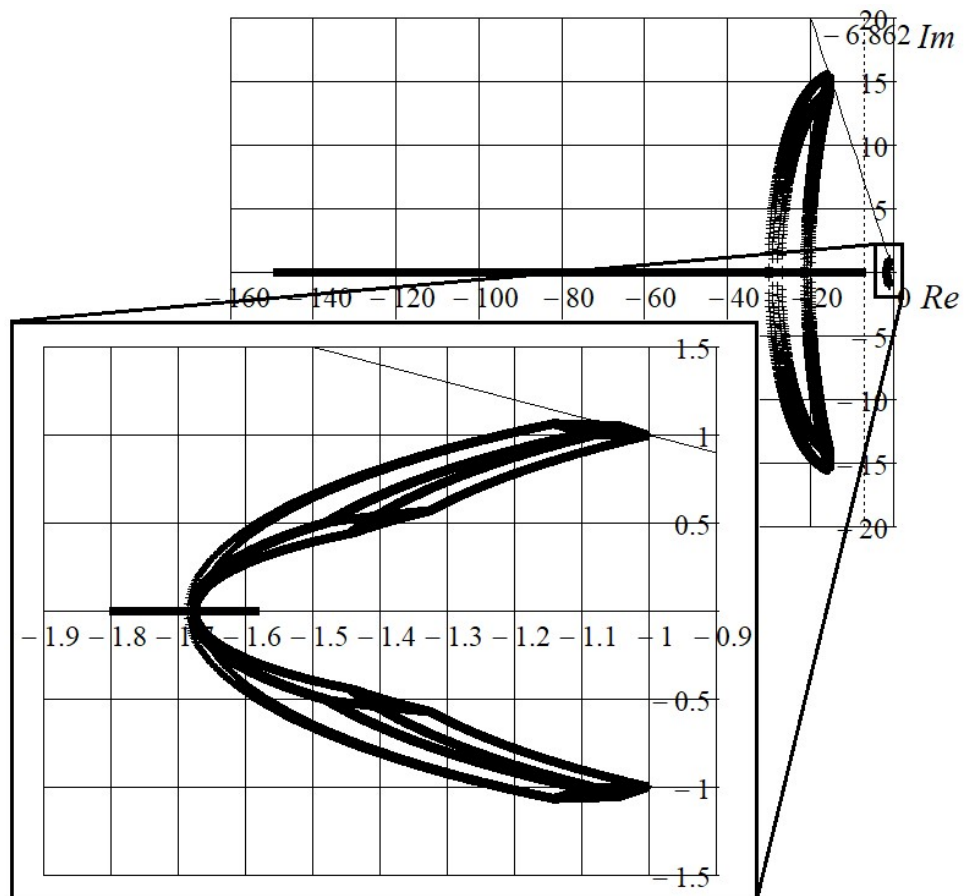


Рисунок 4.10 – МИКГ синтезированной системы с двумя доминирующими комплексно-сопряженными полюсами

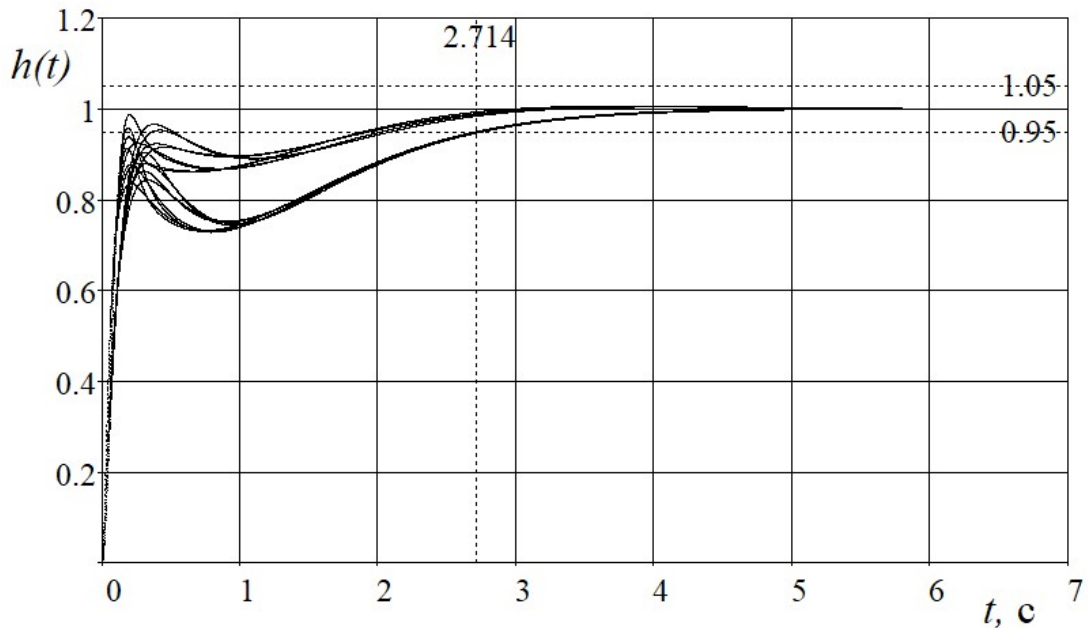


Рисунок 4.11 – Переходные характеристики синтезированной системы с двумя доминирующими комплексно-сопряженными полюсами

Расположение полюсов системы, показанное на рисунке 4.10, соответствует желаемому: достигнута степень робастной устойчивости  $\eta = 1$  и степень робастной колебательности  $\mu = 1$ . Прямые показатели качества также соответствуют желаемым: время регулирования лежит в диапазоне  $t_p = [2; 2.714]$ , перерегулирование  $\sigma = 0.6\%$  не превышает 5%. Таким образом, синтез проведен успешно, предложенная методика работоспособна.

#### 4.4.2 Методика синтеза адаптивно-робастного регулятора для расположения вещественного доминирующего полюса в заданной точке

Расположение доминирующего вещественного полюса в заданной точке вещественной оси корневой плоскости позволит обеспечить системе постоянную степень устойчивости, несмотря на параметрическую неопределенность системы в целом. Расположение пары доминирующих комплексно-сопряженных полюсов в заданных точках корневой плоскости позволит дополнительно обеспечить системе постоянную степень колебательности. Свободные полюсы при этом должны располагаться с желаемой степенью доминирования и степенью колебательности.



Для размещения одного доминирующего полюса будем использовать ПИ-регулятор

$$W_{PI}(s, K_p, K_I) = K_p + \frac{K_I}{s},$$

где  $K_p, K_I$  – настройки пропорциональной и интегральной составляющих ПИ-регулятора соответственно. В таком случае, значение остатка  $R$  будет зависеть от обеих настроек регулятора, а свободный полином  $B(s)$  будет зависеть только от коэффициента пропорциональной составляющей регулятора  $K_p$ . Это позволит обеспечить желаемое размещение свободных полюсов за счет выбора значения свободного параметра – пропорционального коэффициента  $K_p$ , а размещение доминирующего полюса обеспечивать подстройкой зависимого параметра – интегрального коэффициента  $K_I$ .

Для размещения пары комплексно-сопряженных полюсов будем использовать ПИД-регулятор. Передаточная функция ПИД-регулятора с независимыми коэффициентами приведена ранее. В таком случае, значение остатка  $R$  будет зависеть от всех параметров регулятора; а коэффициенты свободного полинома – коэффициента дифференциальной составляющей  $K_D$ , свободного параметра регулятора. Это позволит обеспечить желаемое расположение свободных полюсов за счет выбора значения  $K_D$ ; желаемое расположение доминирующих полюсов – за счет подстройки зависимых параметров: пропорциональной и интегральной составляющих  $K_p$  и  $K_I$ , из условия  $R(s, K_p, K_I, K_D, \bar{q}) = 0$ , где  $\bar{q}$  – вектор интервальных параметров.

Сформулируем алгоритм параметрического синтеза адаптивно-робастных регуляторов, обеспечивающих желаемое расположение полюсов системы:

1. Задать положение одного вещественного или пары комплексно-сопряженных полюсов системы.
2. Найти зависимость остатка от параметров регулятора и интервальных параметров системы. Для одного вещественного полюса –  $R(K_p, K_I, \bar{q})$  с

помощью выражения (4.6); для пары комплексно-сопряженных полюсов –  $R(s, K_p, K_I, K_D, \bar{q})$  по выражению (4.8).

3. Вычислить функции зависимых параметров регулятора от свободных, а также интервальных параметров системы, из условия равенства остатка нулю. Для одного вещественного полюса –  $K_I(K_P, \bar{q})$ ; для пары комплексно-сопряженных полюсов –  $K_p(K_D, \bar{q})$  и  $K_I(K_D, \bar{q})$ .

4. Найти коэффициенты свободного полинома. Для одного вещественного полюса –  $B(s, K_P, \bar{q})$  с помощью выражения (4.2); для пары комплексно-сопряженных полюсов –  $B(s, K_D, \bar{q})$  с помощью выражения (4.3).

5. Если коэффициенты свободного полинома включают в себя зависимые параметры регулятора, подставить вместо них зависимости из п.3, обеспечив таким образом инвариантность положения областей локализации свободных полюсов от зависимых параметров регулятора.

6. Провести D-разбиение в области свободного параметра регулятора в проверочных вершинах.

7. Подставив найденное значение свободного параметра регулятора в выражения из п. 3, найти законы адаптации зависимых параметров регулятора к значениям интервальных параметров системы.

Рассмотрим далее примеры применения разработанной методики [109, 110].

4.4.2.1 Пример расположения вещественного доминирующего полюса в заданной точке

Пусть передаточная функция неизменяемой части системы имеет вид:

$$W(s, p_0, p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{p_3 \cdot s^3 + p_2 \cdot s^2 + p_1 \cdot s + p_0},$$

где  $p_0 = [40; 80]$ ,  $p_1 = [10; 15]$ ,  $p_2 = [5; 8]$ ,  $p_3 = [0.05; 0.15]$  – интервальные параметры системы. Система состоит из неизменяемой ее части и ПИ-регулятора,

охваченных единичной отрицательной обратной связью. Передаточная функция ПИ-регулятора приведена ранее.

Пусть необходимо обеспечить в исследуемой системе аperiodический переходный процесс длительностью не более 20 с. Такому переходному процессу соответствует степень робастной устойчивости системы  $\eta = 0.2$ . Воспользуемся разработанной методикой для размещения доминирующего полюса  $\lambda$  в точке комплексной плоскости с координатами  $(-0.2; j0)$  и свободных полюсов слева от прямой  $\text{Re}(X) = -0.4$ .

Характеристический полином исследуемой системы имеет вид

$$D(s, K_P, K_I, p_0, p_1, p_2, p_3) = [p_3] \cdot s^4 + [p_2] \cdot s^3 + [p_1] \cdot s^2 + (K_P + [p_3]) \cdot s + K_I.$$

Согласно разработанной методике найдем выражение для остатка  $R$ , затем из условия равенства остатка нулю найдем зависимость  $K_I$  от  $K_P$  и интервальных параметров системы:

$$\begin{aligned} R(K_P, K_I, p_0, p_1, p_2, p_3) &= D(\lambda, K_P, K_I, p_0, p_1, p_2, p_3) = \\ &= K_I - 0.2 \cdot K_P - 0.2 \cdot p_0 + 0.04 \cdot p_1 - 0.008 \cdot p_2 + 0.0016 \cdot p_3; \end{aligned}$$

$$K_I(K_P, p_0, p_1, p_2, p_3) = 0.2 \cdot K_P + 0.2 \cdot p_0 - 0.04 \cdot p_1 + 0.008 \cdot p_2 - 0.0016 \cdot p_3.$$

Вычислим коэффициенты свободного полинома:

$$B(s, b_0, b_1, b_2, b_3) = [b_3] \cdot s^3 + [b_2] \cdot s^2 + [b_1] \cdot s + [b_0];$$

$$[b_3] = [0.05; 0.15];$$

$$[b_2] = [4.97; 7.99];$$

$$[b_1] = [8.402; 14.006];$$

$$[b_0(K_P)] = [K_P + 37.199; K_P + 78.320].$$

Зная интервалы коэффициентов свободного полинома, проведем D-разбиение аналогично разделу 4.4.1. Кривые D-разбиения изобразим на рисунках 4.12 и 4.13. Аналогично предыдущим случаям на рисунках ниже окружностями обозначены начала кривых

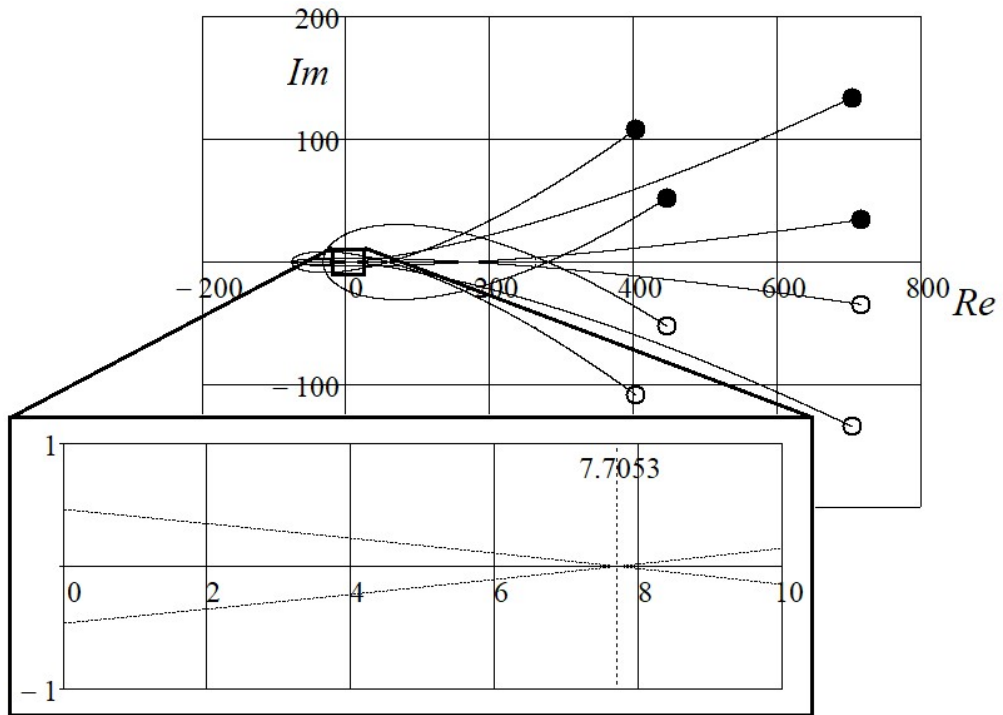


Рисунок 4.12 – D-разбиение для свободного полинома в проверочных вершинах его многогранника коэффициентов в плоскости  $K_p$  для обеспечения степени доминирования

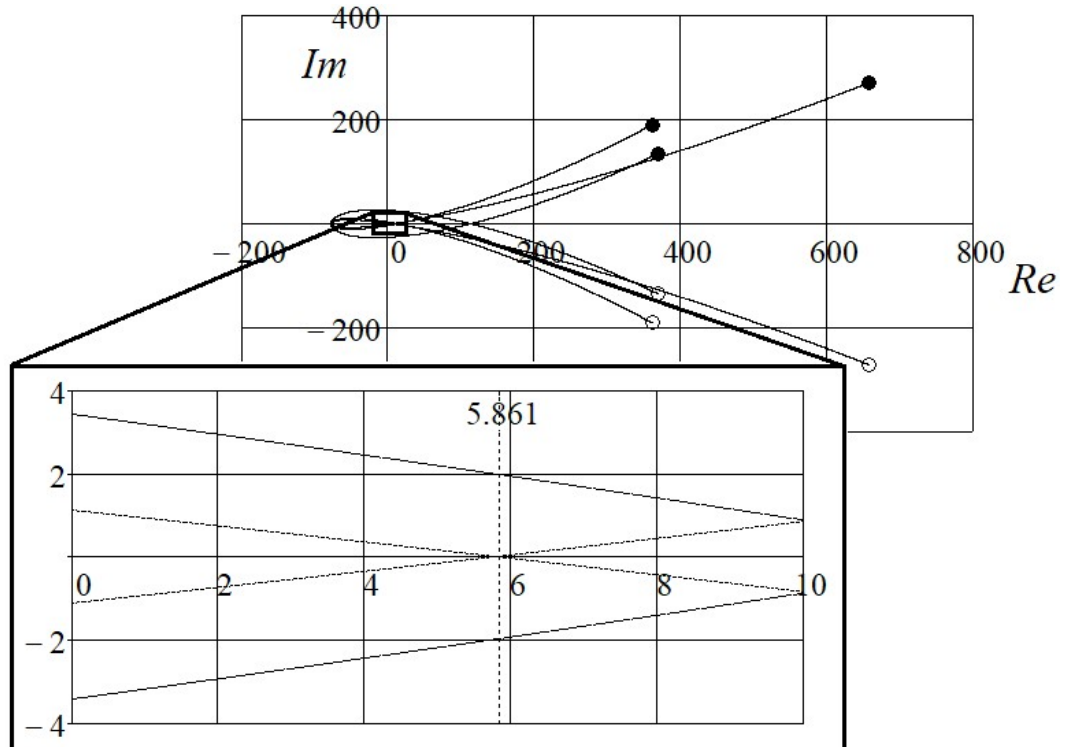


Рисунок 4.13 – D-разбиение для свободного полинома в проверочных вершинах его многогранника коэффициентов в плоскости  $K_p$  для обеспечения степени колебательности

Следует упомянуть, что в данном случае обеспечить степень доминирования  $\delta > 0.44$  и степень колебательности  $\mu < 7$  невозможно, так как вся область устойчивости будет лежать в левой полуплоскости и, следовательно, будет включать в себя только отрицательные значения  $K_p$ . Из областей устойчивости, ограниченных кривыми D-разбиения на рисунках выше, можно утверждать, что подходящие значения  $K_p$  лежат в диапазоне  $K_p \in (0; 5.861]$ ; выберем  $K_p = 1$ . В таком случае синтезированный адаптивно-робастный ПИ-регулятор имеет следующие настройки:

$$K_p = 1;$$

$$K_I(p_0, p_1, p_2, p_3) = 0.2 + 0.2 \cdot p_0 - 0.04 \cdot p_1 + 0.008 \cdot p_2 - 0.0016 \cdot p_3.$$

Для оценки расположения полюсов системы с синтезированным регулятором построим области локализации ее полюсов с помощью метода сканирования параметрического многогранника.

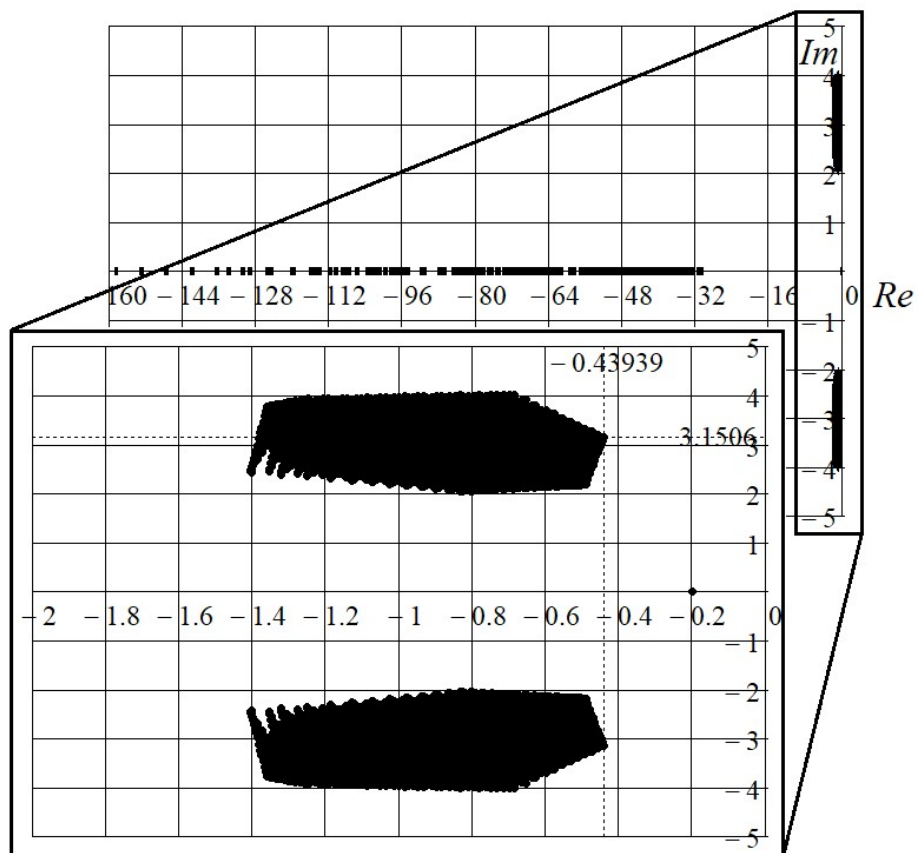


Рисунок 4.14 – Область локализации полюсов системы с адаптивно-робастным ПИ-регулятором

Исходя из рисунка 4.14, можно утверждать, что желаемое расположение полюсов достигнуто. Для оценки качества регулирования построим переходные характеристики системы в вершинах ее параметрического многогранника.

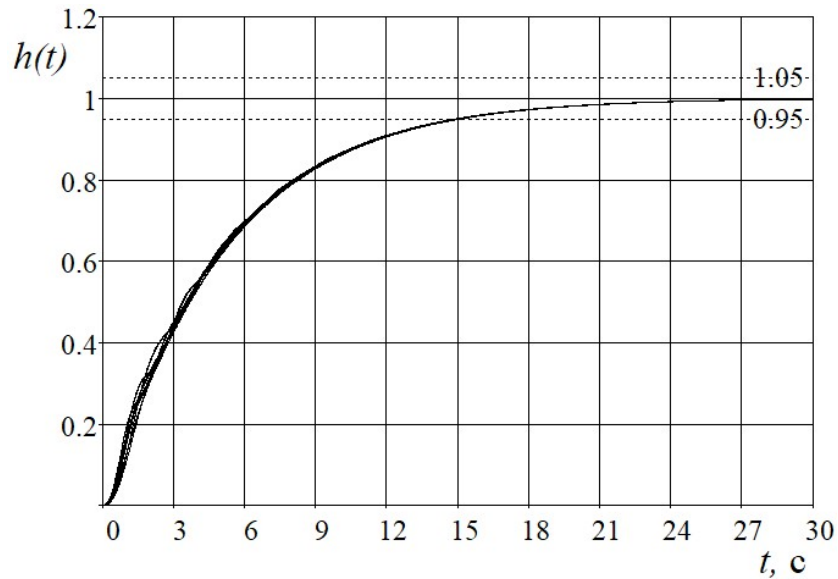


Рисунок 4.15 – Переходные характеристики системы с адаптивно-робастным ПИ-регулятором в вершинах ее параметрического многогранника

Из рисунка 4.15 видно, что время регулирования постоянно и составляет  $t_p = 15$  с; перерегулирование в системе равно нулю, тип переходного процесса – апериодический.

Следует отметить, что качество регулирования высоко. Пример демонстрирует, что стабилизация доминирующего полюса в конкретной точке комплексной плоскости позволяет добиться постоянного времени регулирования в условиях значительной параметрической неопределенности системы.

#### 4.4.2.2 Пример расположения двух комплексно-сопряженных доминирующих полюсов в заданных точках

Пусть передаточная функция неизменяемой части системы имеет вид

$$W(s, p_0, p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{p_3 \cdot s^3 + p_2 \cdot s^2 + p_1 \cdot s + p_0},$$

где  $p_0 = [40; 80]$ ,  $p_1 = [10; 15]$ ,  $p_2 = [5; 8]$ ,  $p_3 = [0.05; 0.15]$  – интервальные параметры системы. Система состоит из неизменяемой части и ПИД-регулятора, охваченных единичной отрицательной обратной связью.

Пусть необходимо обеспечить в исследуемой системе максимальную степень колебательности  $\mu = 1$  и длительность переходного процесса не более  $t_p = 4$  с. Таким характеристикам системы соответствует расположение доминирующих полюсов в точках  $\lambda_{1,2} = -2 \pm j \cdot 2$ ; свободные полюсы разместим в усеченном секторе со степенью доминирования  $\delta = 3$ . Характеристический полином исследуемой системы имеет вид (4.8).

Положение доминирующих полюсов зададим через значения их суммы и произведения:  $x = \lambda_1 + \lambda_2 = -4$ ;  $y = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 8$ . Согласно разработанной методике найдем, исходя из равенства остатка  $R$  нулю, зависимости для подстройки пропорционального и интегрального коэффициентов регулятора:

$$R(s) = (K_P + p_0 + x \cdot (K_D + p_1 + x \cdot (p_2 + x \cdot p_3) - y \cdot p_3) - y \cdot (p_2 + x \cdot p_3)) \cdot s + K_I - y \cdot (K_D + p_1 + x \cdot (p_2 + x \cdot p_3) - y \cdot p_3);$$

$$\operatorname{Re}(R(j \cdot \omega)) = 0 \rightarrow \begin{cases} K_I - y \cdot (K_D + p_1 + x \cdot (p_2 + x \cdot p_3) - y \cdot p_3) = 0 \\ K_I(K_D, p_1, p_2, p_3) = 8 \cdot K_D + 8 \cdot p_1 - 32 \cdot p_2 + 64 \cdot p_3 \end{cases}$$

$$\operatorname{Im}(R(j \cdot \omega)) = 0 \rightarrow \begin{cases} K_P + p_0 + x \cdot (K_D + p_1 + x \cdot (p_2 + x \cdot p_3) - y \cdot p_3) - \\ - y \cdot (p_2 + x \cdot p_3) = 0 \\ K_P(K_D, p_0, p_1, p_2) = 4 \cdot K_D - p_0 + 4 \cdot p_1 - 8 \cdot p_2. \end{cases}$$

Рассчитаем коэффициенты свободного полинома

$$B(s) = b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0;$$

$$b_2 = [0.05; 0.15];$$

$$b_1 = [4.40; 7.80];$$

$$b_0 = [K_D - 22.40; K_D - 3.00].$$

Зная коэффициенты свободного полинома, построим кривые D-разбиения в плоскости  $K_D$  в проверочных вершинах многогранника коэффициентов свободного полинома, получим область значений  $K_D$ , при которых свободные

полюсы располагаются в нужном секторе. Результаты D-разбиения изобразим ниже на рисунках 4.16 и 4.17.

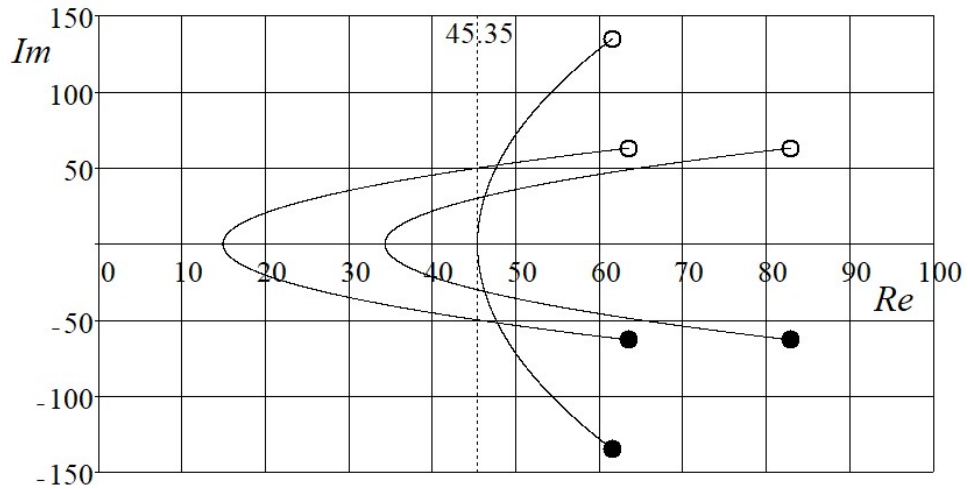


Рисунок 4.16 – D-разбиение для свободного полинома в проверочных вершинах его многогранника коэффициентов в плоскости  $K_D$  для обеспечения степени доминирования

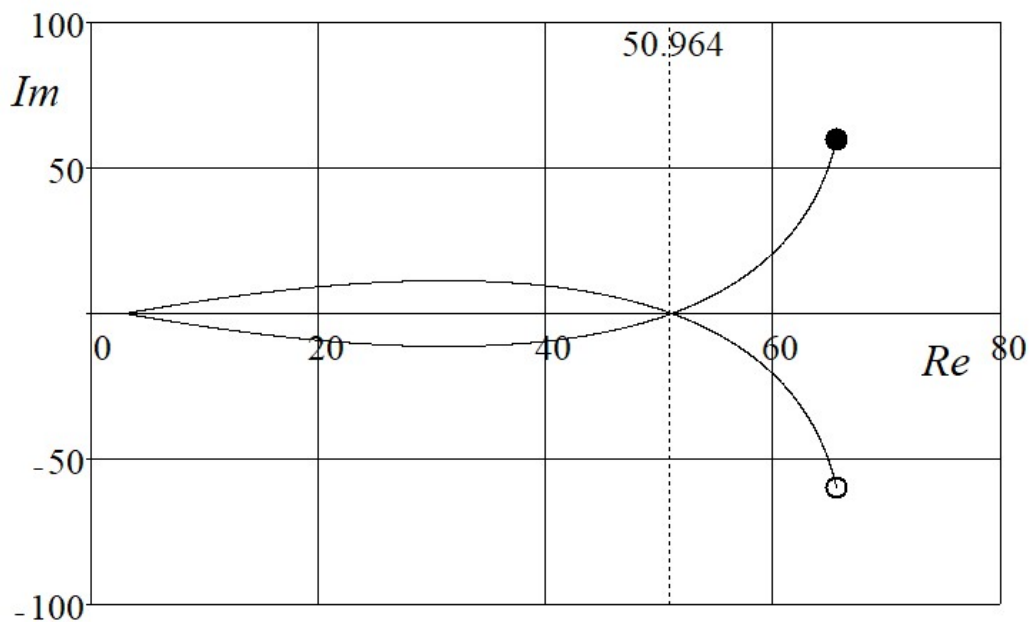


Рисунок 4.17 – D-разбиение для свободного полинома в проверочных вершинах его многогранника коэффициентов в плоскости  $K_D$  для обеспечения степени колебательности свободного полинома

Из рисунков 4.16 и 4.17 видно, что расположение свободных полюсов в заданном усеченном секторе достигается при  $K_D \in [45.350; 50.964]$ . Выберем  $K_D = 46$ .



Таким образом, синтезированный адаптивно-робастный ПИД-регулятор имеет настройки

$$K_P(p_0, p_1, p_2) = -p_0 + 4 \cdot p_1 - 8 \cdot p_2 + 184;$$

$$K_I(p_1, p_2, p_3) = 8 \cdot p_1 - 32 \cdot p_2 + 64 \cdot p_3 + 368;$$

$$K_D = 46.$$

Построим области локализации полюсов системы с синтезированным регулятором для оценки результатов синтеза с помощью метода сканирования параметрического многогранника.

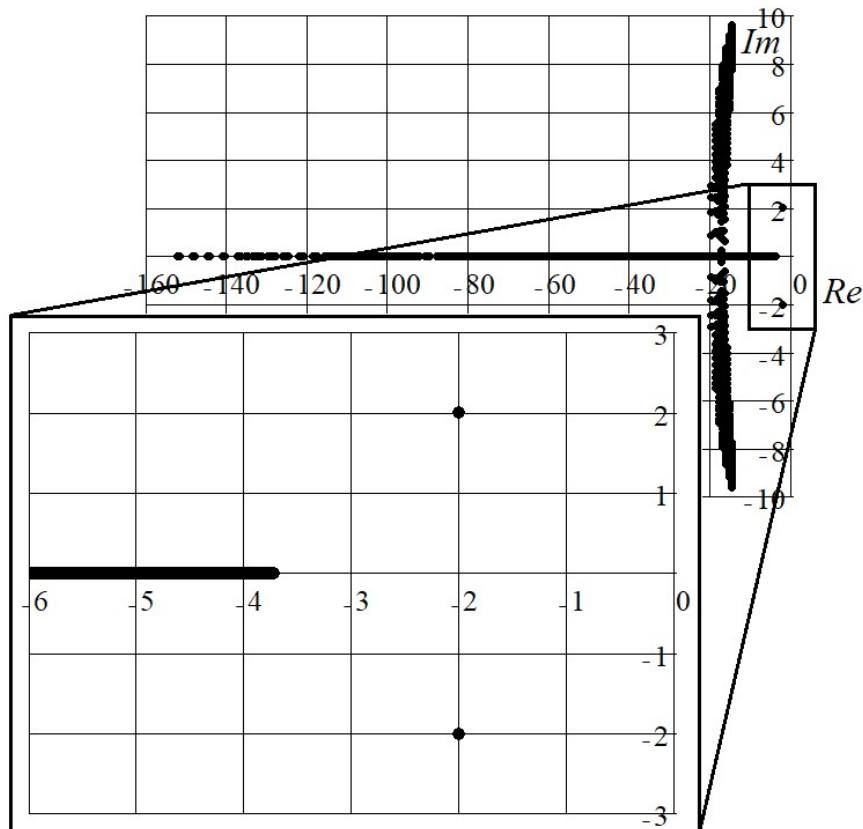


Рисунок 4.18 – МИКГ системы с адаптивно-робастным ПИД-регулятором

Из рисунка 4.18 очевидно, что синтезированный регулятор обеспечивает желаемое расположение полюсов системы. Для оценки качества переходного процесса построим переходные характеристики системы в вершинах ее параметрического многогранника.

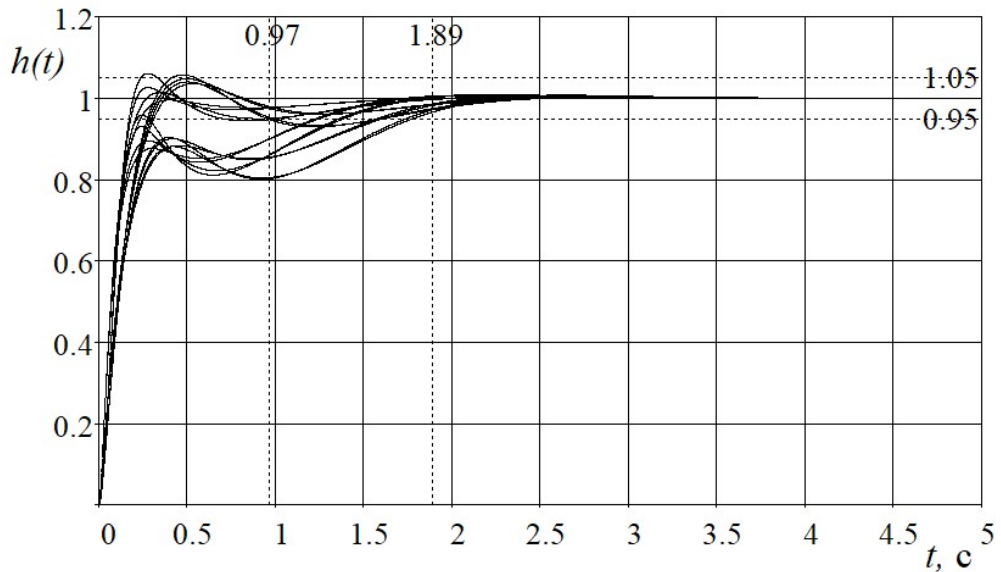


Рисунок 4.19 – Переходные характеристики системы с адаптивно-робастным ПИД-регулятором в вершинах ее параметрического многогранника

Исходя из рисунка 4.19, можно утверждать, что время регулирования колеблется от  $t_p = 0.97$  с до  $t_p = 1.89$  с; максимальное перерегулирование составило  $\sigma = 6.02\%$ . Прямые и корневые показатели качества синтезированной системы соответствуют заданным, следовательно, синтез проведен успешно, а предложенная методика работоспособна.

#### 4.5 Основные результаты

В данной главе поставлена задача синтеза модального регулятора пониженного порядка, обеспечивающего расположение полюсов системы по принципу доминирования, при помощи деления полиномов на доминирующий и свободный и, соответственно, деления параметров регулятора на зависимые и свободные.

В процессе решения поставленной задачи на основе наборов проверочных вершин для различных вариантов расположения доминирующих и свободных полюсов разработаны методики синтеза для расположения одного вещественного доминирующего полюса в отрезке или в точке вещественной оси корневой плоскости, а также для расположения пары комплексно-сопряженных доминирующих полюсов в областях или точках корневой плоскости. При этом

расположение доминирующих полюсов в областях комплексной плоскости достигается при постоянных значениях параметров регулятора, а их стабилизация в конкретных точках комплексной плоскости требует адаптации зависимых параметров регулятора.

Для демонстрации работоспособности предложенных методик приведены примеры их использования. Во всех случаях синтез проведен успешно: желаемые корневые и прямые показатели качества успешно достигнуты. При этом следует обратить внимание, что применение адаптивно-робастных регуляторов с подстройкой зависимых параметров регуляторов позволяет достичь более стабильного качества регулирования, либо обеспечить более высокие их значения.

## 5 СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ И ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ НПА В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

### 5.1 Синтез регуляторов системы управления движением НПА в вертикальной плоскости

Рассмотрим процесс синтеза регуляторов исследуемой системы [111]. В частности, рассчитаем параметры робастных и адаптивно-робастных регуляторов по задающим и возмущающим воздействиям для трех каналов исследуемой системы, а также убедимся в том, что синтезированные регуляторы обеспечивают желаемые значения корневых и прямых показателей робастного качества.

Цель синтеза будем задавать в виде желаемых значений максимального времени переходного процесса  $t_{\max}$  и максимального перерегулирования  $\sigma_{\max}$ . Соответствующие значения степени робастной устойчивости и степени робастной колебательности будем определять в первом приближении по следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \eta_{\min} &= \frac{4}{t_{\max}}; \\ \mu_{\max} &= -\frac{\pi}{\ln(\sigma_{\max})}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

#### 5.1.1 Синтез робастных регуляторов по задающему воздействию

В данном разделе рассмотрим синтез регуляторов  $P_{11}$ ,  $P_{21}$  и  $P_{31}$  (см. рисунок 2.14) для режима движения с большими значениями угла атаки  $\alpha$ . Как указано в предыдущем разделе, в таком режиме движения регуляторы  $P_{11}$ ,  $P_{21}$  и  $P_{31}$  – робастные ПИД-регуляторы с постоянными параметрами. С учетом того, что упомянутые три регулятора будут синтезированы по одной методике, опишем подробно синтез регулятора  $P_{11}$ , для остальных регуляторов приведем только результаты синтеза.

Зададим желаемое время переходного процесса в канале регулирования скорости НПА  $v_x$  равным  $t_m = 5$  с, максимальное перерегулирование зададим равным  $\sigma_{\max} = 5\%$ . В таком случае согласно (5.1) целевые значения корневых показателей робастного качества могут быть заданы следующим образом:

$$\begin{aligned}\eta_{\min} &= 0.8; \\ \mu_{\max} &= 1.049.\end{aligned}$$

В ходе выполнения первых итераций синтеза было выяснено, что желаемое время переходного процесса достигается при меньших значениях степени робастной устойчивости. Исходя из этого, зададим  $\eta_{\min} = 0.3$ . Определим далее желаемое расположение областей локализации полюсов синтезируемой системы.

Исходя из того, что в системе необходимо обеспечить апериодический переходный процесс, расположим один вещественный доминирующий полюс системы в интервале  $[\lambda] = [-0.4; -0.3]$ ; согласно принципу доминирования отнесем остальные полюсы системы левее прямой  $\text{Re}(x) = -3$  для уменьшения их влияния на переходный процесс до пренебрежимо малого. Степень робастной колебательности системы при этом не должна превышать заданную. Желаемое расположение полюсов системы показано на рисунке 5.1.

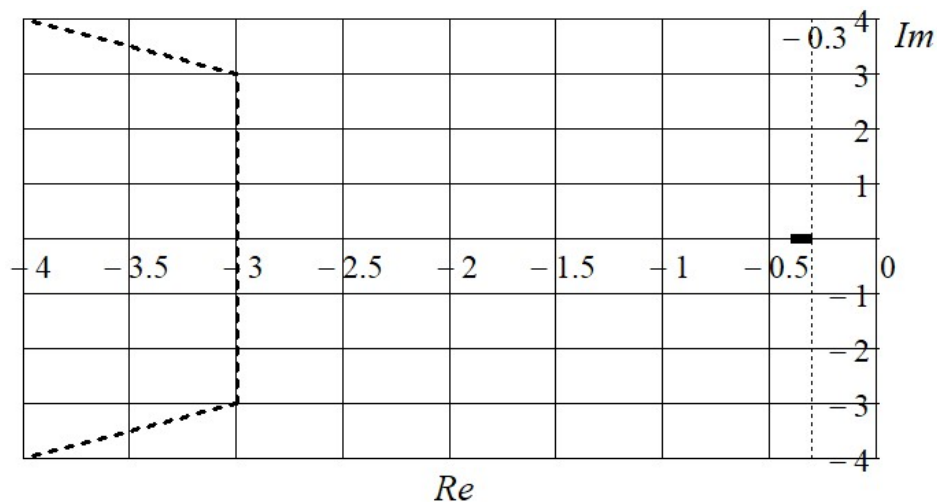


Рисунок 5.1 – Желаемое расположение полюсов канала управления скоростью движения НПА  $v_x$

Воспользуемся разработанной методикой для обеспечения желаемого расположения полюсов синтезируемой системы. Интервальный характеристический полином системы задан следующим образом:

$$D(s) = s^4 + [1673.175; 1674.932] \cdot s^3 + (2539.040 \cdot K_D + [70805.486; 73744.417]) \cdot s^2 + (2539.040 \cdot K_P + [3921.497; 128132.294]) \cdot s + 2539.040 \cdot K_I,$$

где  $K_P$ ,  $K_I$ ,  $K_D$  – пропорциональный, интегральный и дифференциальный коэффициенты ПИД-регулятора соответственно.

Согласно разработанной методике найдем зависимость остатка от коэффициентов регулятора для левой и правой границ интервала доминирующего полюса:

$$\underline{\lambda}: R_1 = -1015.616 \cdot K_P + 2539.040 \cdot K_I + 406.246 \cdot K_D + 10123.450,$$

$$\bar{\lambda}: R_2 = -761.712 \cdot K_P + 2539.040 \cdot K_I + 228.514 \cdot K_D - 32112.410.$$

Приравняв оба полученных выражения к нулю, получим систему из двух уравнений с тремя неизвестными. Решив эту систему методом Крамера относительно  $K_I$  и  $K_D$ , получим зависимости между коэффициентами регулятора, соблюдение которых обеспечит желаемое расположение доминирующего полюса:

$$\begin{aligned} K_I(K_P) &= 0.171 \cdot K_P + 34.034; \\ K_D(K_P) &= 1.428 \cdot K_P - 237.622. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Все коэффициенты регулятора должны иметь положительные значения. Исходя из этого условия и выражений (5.2) определим, что  $K_P > 166.352$ .

Далее подставим (5.2) в характеристический полином системы и затем найдем коэффициенты свободного полинома:

$$B(s) = b_3 \cdot s^3 + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0,$$

$$b_3 = 1,$$

$$b_2 = [1672.776; 1674.632],$$

$$b_1 = [3626.841 \cdot K_P - 533196.130; 3626.841 \cdot K_P - 530089.178],$$

$$b_0 = [1088.334 \cdot K_P + 215955.137; 1451.011 \cdot K_P + 288089.609].$$

Зная коэффициенты свободного полинома, построим кривые D-разбиения, показывающие область значений пропорционального коэффициента регулятора, обеспечивающих желаемые значения степени доминирования  $\delta$  и степени робастной колебательности  $\mu$ , в вершинах параметрического многогранника из ранее найденных проверочных наборов. Результаты D-разбиения приведены на рисунке 5.2.

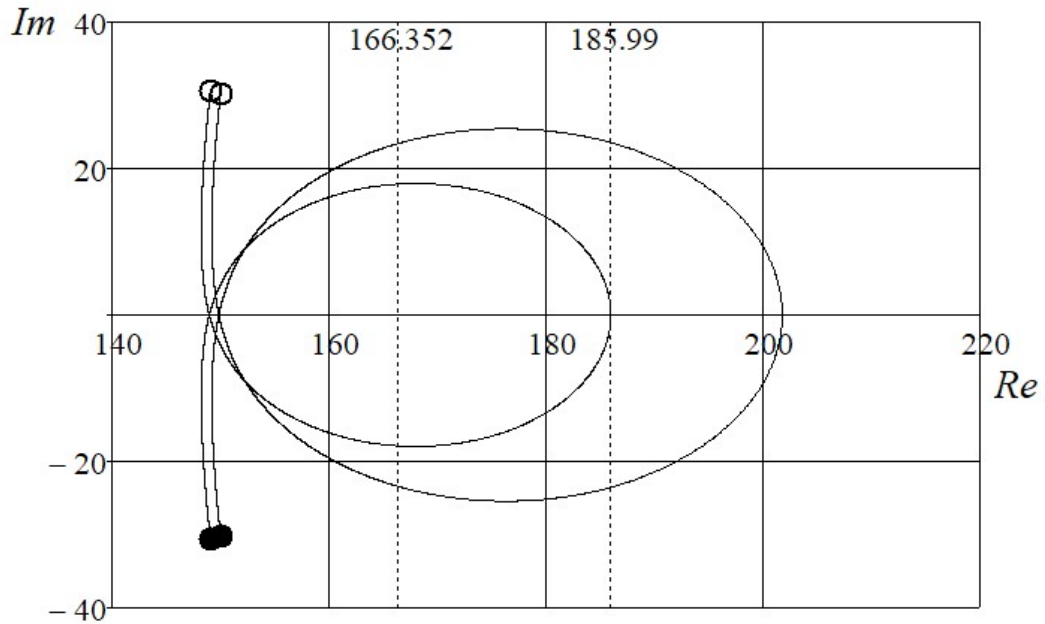


Рисунок 5.2 – Кривые D-разбиения по свободному полиному в пространстве  $K_p$  для обеспечения заданной степени доминирования  $\delta$

На рисунке 5.2 окружностями обозначены начала кривых D-разбиения, соответствующие направлению  $\omega \rightarrow -\infty$ ; кругами обозначены концы кривых, соответствующие направлению  $\omega \rightarrow +\infty$ . Учитывая это, а также ранее выведенное условие положительности коэффициентов регулятора, можно утверждать, что значение пропорционального коэффициента следует выбирать из интервала  $K_p \in [166.352; 185.990]$ .

На рисунке 5.3 приняты те же обозначения, что на рисунке 5.2. Исходя из рисунка 5.2, можно утверждать, что значение пропорционального коэффициента следует выбирать из интервала  $K_p \in [157.36; 552.85]$ .

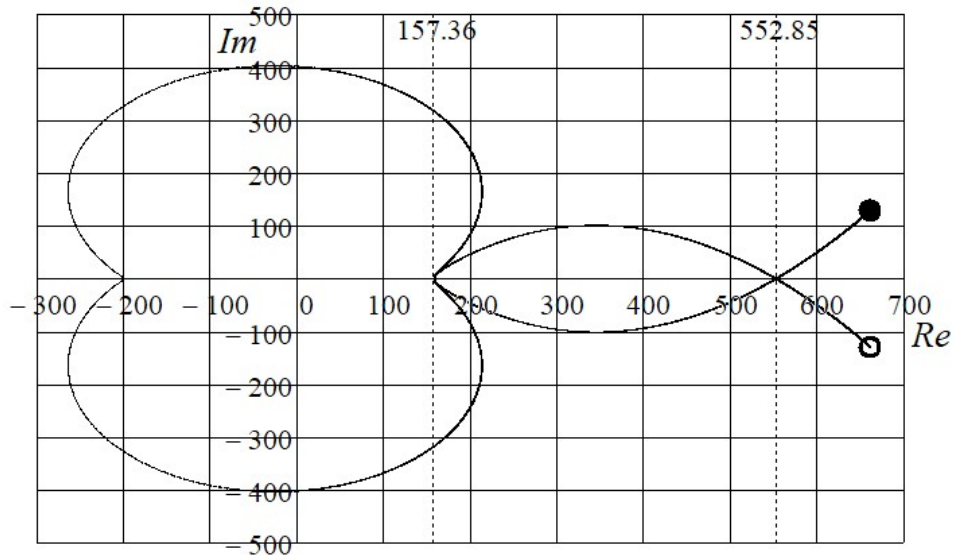


Рисунок 5.3 – Кривые D-разбиения по свободному полиному в пространстве  $K_p$  для обеспечения заданной степени робастной колебательности  $\mu$

Найденные области устойчивости пересекаются в интервале  $K_p \in [166.352; 185.990]$ . Выберем  $K_p = 170$ . В таком случае согласно (5.2)

$$K_I = 63.179; K_D = 5.211.$$

Расположение областей локализации полюсов системы, обеспечиваемое синтезированным робастным ПИД-регулятором, показано на рисунке 5.4.

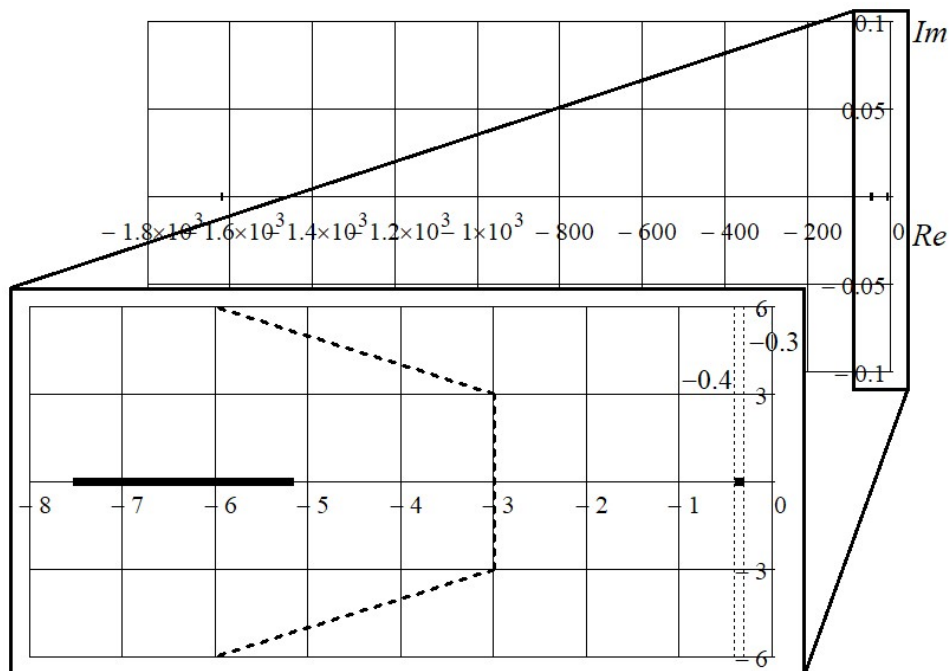


Рисунок 5.4 – Расположение полюсов канала управления скоростью НПА  $v_x$  с робастным ПИД-регулятором



Согласно рисунку 5.4 синтезированный регулятор обеспечивает желаемые значения корневых показателей качества. Доминирующий полюс расположился в заданном интервале  $[-0.4; -0.3]$ , обеспечивая степень робастной устойчивости  $\eta_{\min} = 0.3$ ; свободные полюсы десятикратно удалены от доминирующего и располагаются левее прямой  $\text{Re}(x) = -3$ . Степень робастной колебательности синтезированной системы равна нулю. Переходные характеристики синтезированной системы приведены на рисунке 5.5.

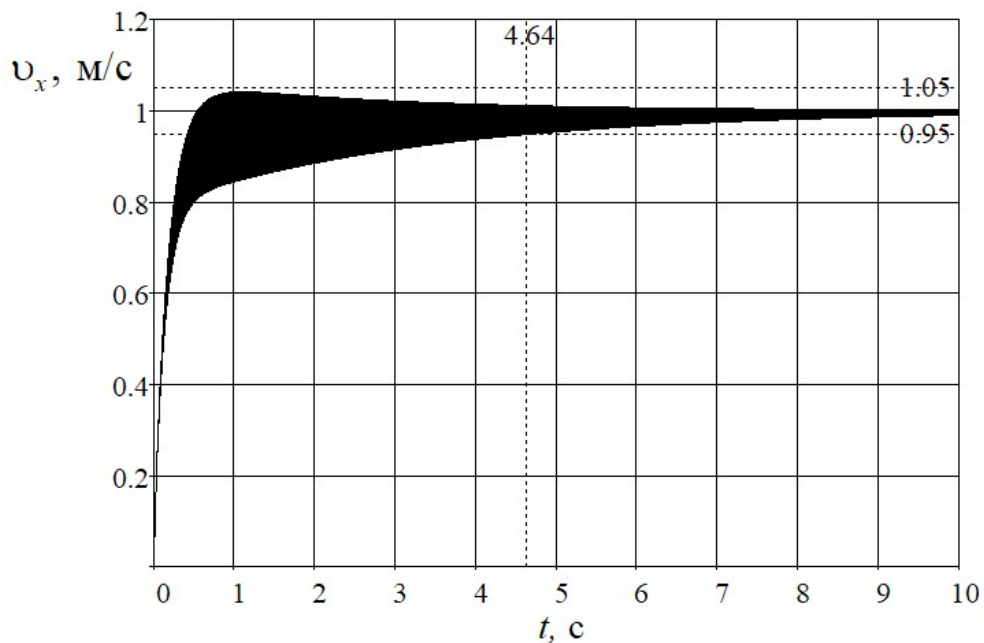


Рисунок 5.5 – Переходные характеристики канала управления скоростью НПА  $v_x$  с робастным ПИД-регулятором

Из рисунка 5.5 можно сделать вывод, что прямые показатели качества синтезированного канала соответствуют целевым: максимальное время переходного процесса  $t_{mn} = 4.64$  с; максимальное перерегулирование  $\sigma_{\max} = 3.93\%$ . Ранее было определено, что желаемое расположение полюсов также достигнуто успешно. Таким образом, синтез регулятора  $P_{11}$  выполнен успешно. Регуляторы  $P_{21}$  и  $P_{31}$  были синтезированы аналогичным способом.

Регулятор  $P_{21}$  обеспечивает расположение полюсов контура управления скоростью погружения, показанное на рисунке 5.6. Степень робастной

устойчивости контура равна  $\eta_{\min} = 0.3$ ; степень колебательности контура равна нулю.

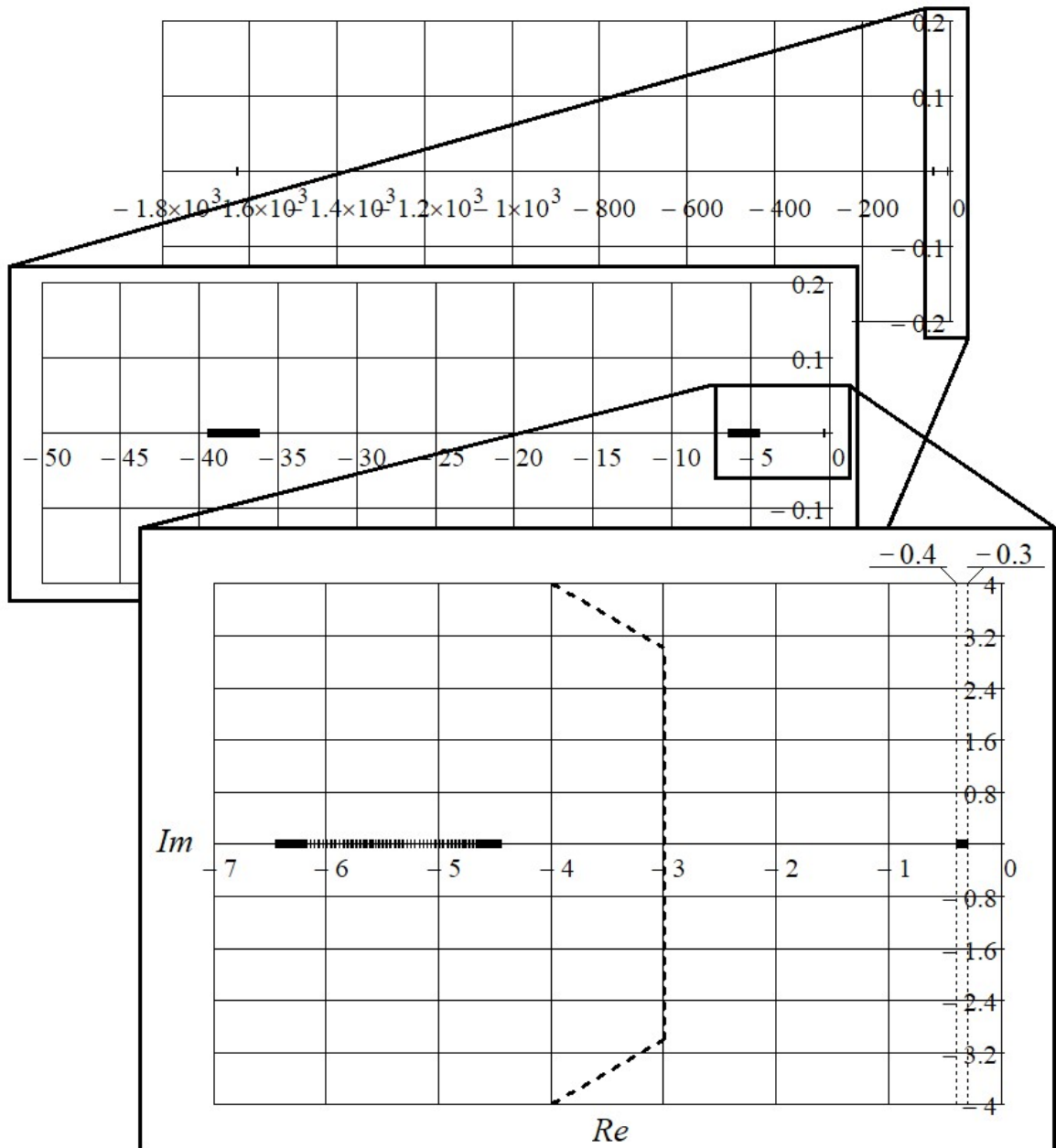


Рисунок 5.6 – Расположение полюсов контура управления скоростью погружения НПА  $v_y$  с робастным ПИД-регулятором

Таким корневым показателям качества соответствуют переходные характеристики, показанные на рисунке 5.7; наибольшее время переходного процесса  $t_{mn} = 4.14$  с, перерегулирование  $\sigma_{\max} = 16.14\%$ .

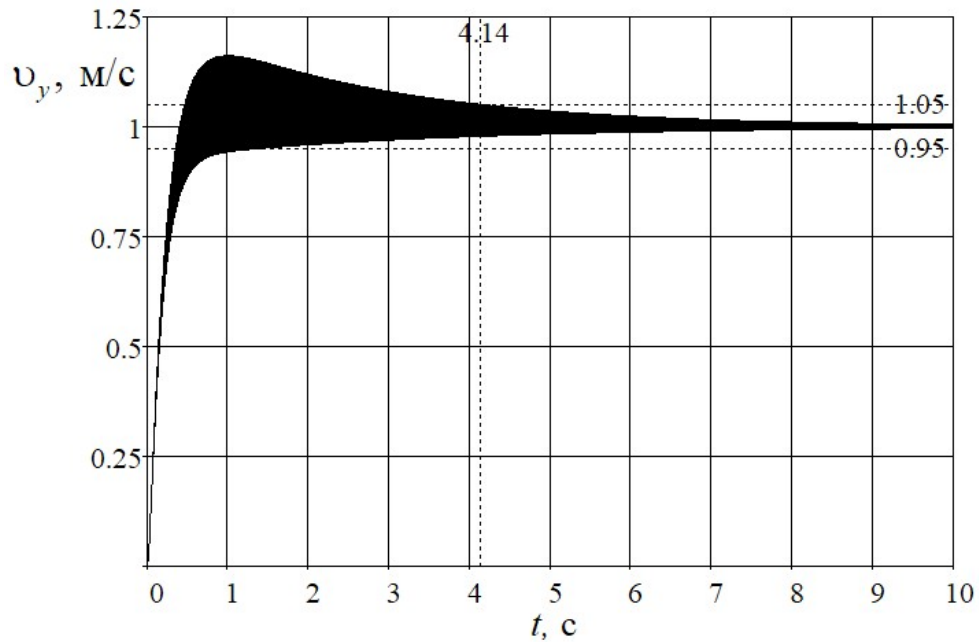


Рисунок 5.7 – Переходные характеристики контура управления скоростью погружения НПА  $v_y$  с робастным ПИД-регулятором

Зная параметры регулятора  $P_{21}$ , зададим значение передаточного коэффициента пропорционального регулятора  $P_2$  во внешнем контуре канала управления глубиной погружения НПА  $h$ . Зададим  $P_2 = 0.85$ ; переходные характеристики канала в целом изображены на рисунке 5.8.

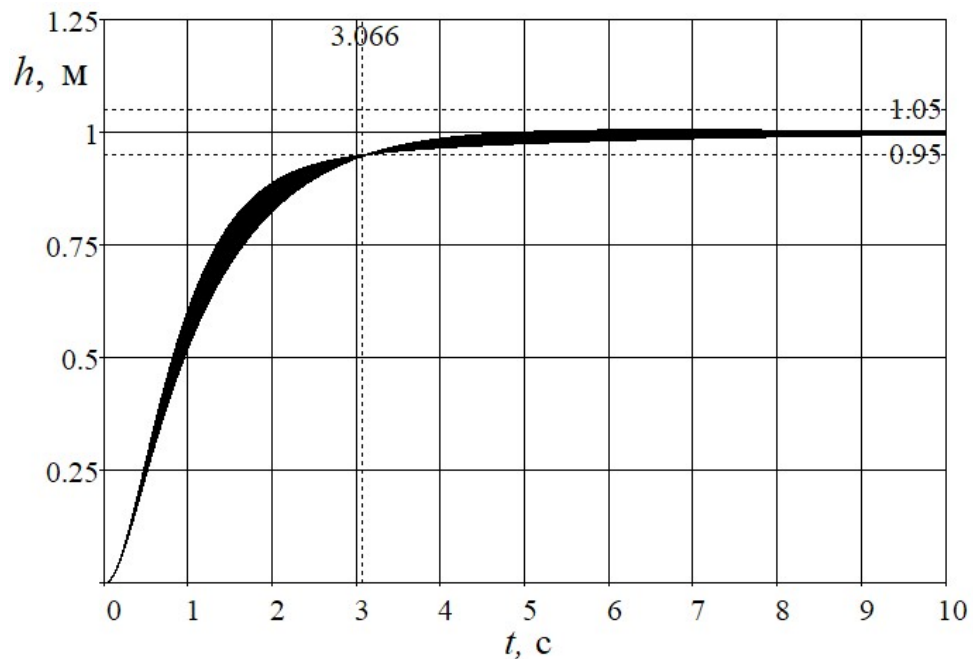


Рисунок 5.8 – Переходные характеристики канала управления глубиной погружения НПА  $h$

Полученный канал управления глубиной имеет постоянное время переходного процесса  $t_{nn} = 3.066$  с, максимальное перерегулирование  $\sigma_{\max} = 0.540\%$ .

Регулятор  $P_{31}$  обеспечивает расположение полюсов контура управления скоростью маневрирования по дифференту, показанное на рисунке 5.9. Степень робастной устойчивости контура равна  $\eta_{\min} = 0.35$ ; степень колебательности контура равна нулю.

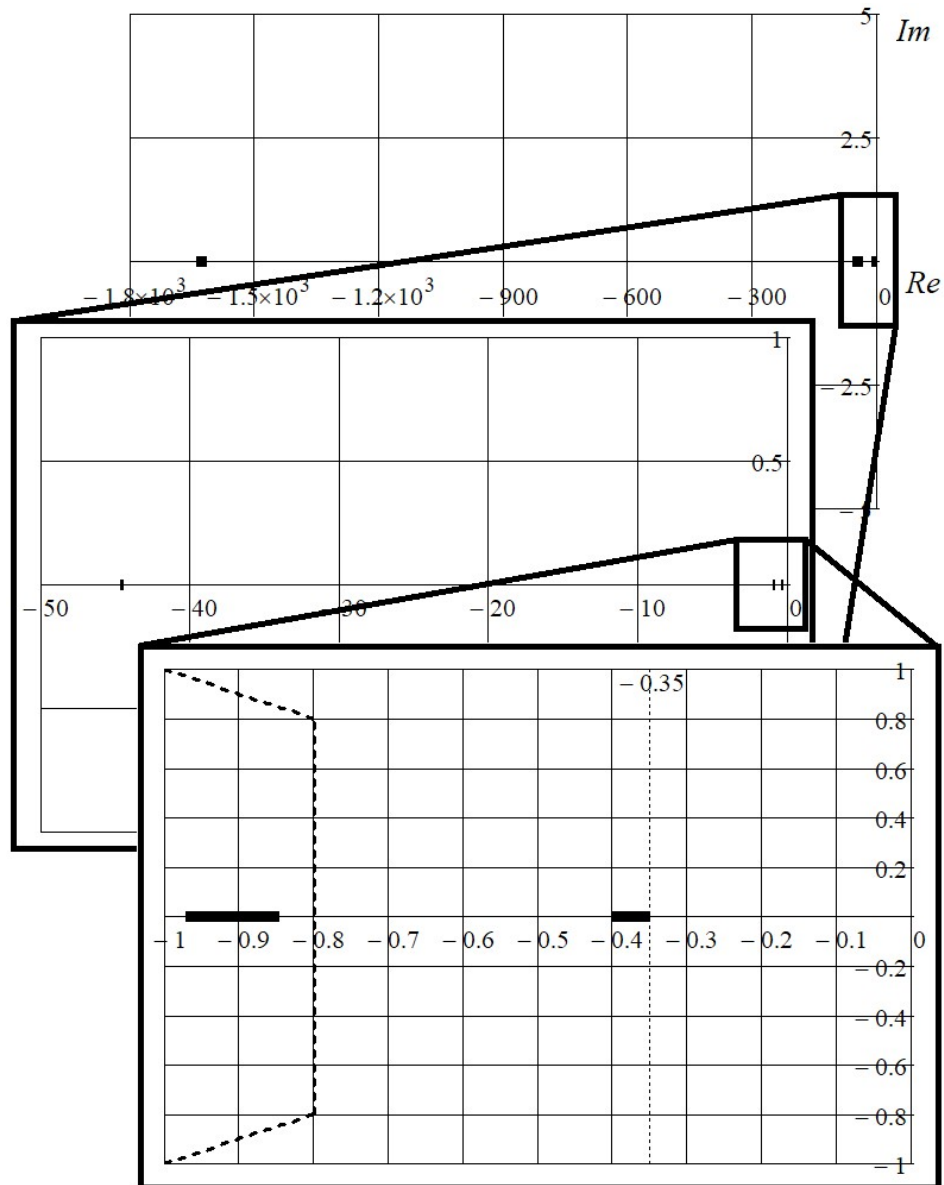


Рисунок 5.9 – Расположение полюсов контура регулирования скорости маневрирования НПА по дифференту  $\omega_z$  с синтезированным робастным ПИД-регулятором

Таким корневым показателям качества соответствуют переходные характеристики, показанные на рисунке 5.10; наибольшее время переходного процесса  $t_{nn} = 7.176$  с, перерегулирование  $\sigma_{\max} = 13.61\%$ .

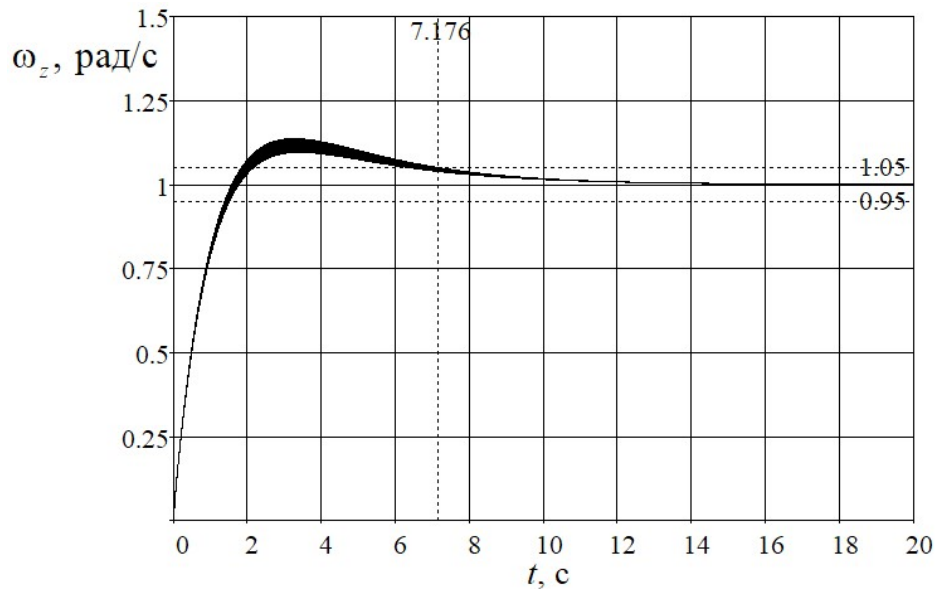


Рисунок 5.10 – Переходные характеристики контура управления скоростью маневрирования НПА по дифференту  $\omega_z$  с робастным регулятором

Зная параметры регулятора  $P_{31}$ , зададим значение передаточного коэффициента пропорционального регулятора  $P_3$  во внешнем контуре канала управления дифферента НПА  $\psi$ . Зададим  $P_3 = 0.35$ ; переходные характеристики канала в целом изображены на рисунке 5.11.

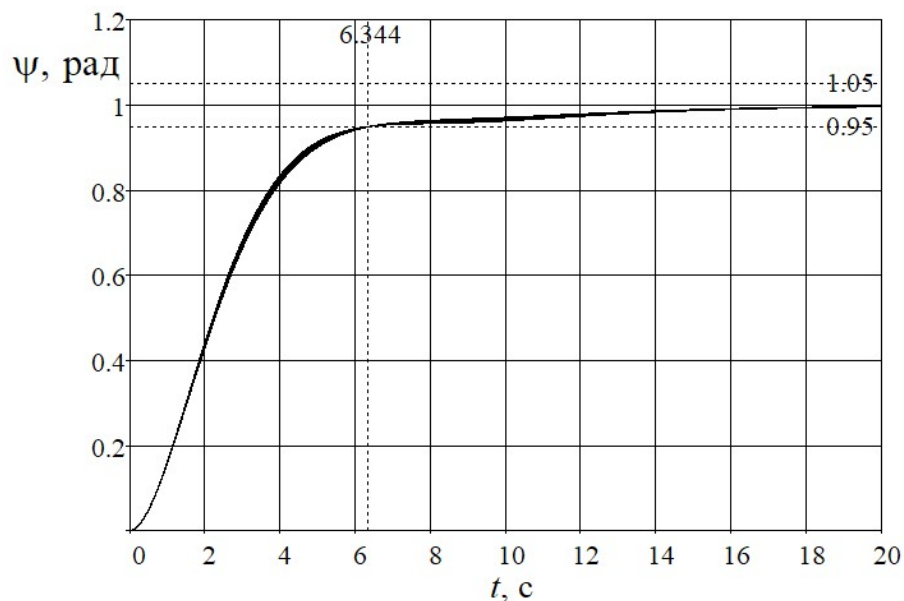


Рисунок 5.11 – Переходные характеристики канала управления дифферентом  $\psi$

Полученный канал управления глубиной имеет постоянное время переходного процесса  $t_{mn} = 6.344$  с и нулевое перерегулирование.

Рассмотрим далее синтез адаптивно-робастных регуляторов для режима движения НПА со средними значениями угла атаки.

### 5.1.2 Синтез адаптивно-робастных регуляторов по задающему воздействию

В данном разделе рассмотрим синтез регуляторов  $P_{11}$ ,  $P_{21}$  и  $P_{31}$  для режима движения со средними значениями угла атаки  $\alpha$ . Как указано в предыдущем разделе, в таком режиме движения регуляторы  $P_{11}$ ,  $P_{21}$  и  $P_{31}$  – адаптивно-робастные ПИ-регуляторы с подстраиваемыми параметрами. С учетом того, что упомянутые три регулятора будут синтезированы по одной методике, опишем подробно синтез регулятора  $P_{11}$ , для остальных регуляторов приведем только результаты синтеза.

Предлагаемые методики синтеза адаптивно-робастных регуляторов позволяют при прочих равных условиях добиться более высокого качества регулирования по сравнению с предлагаемыми методиками синтеза робастных регуляторов. С учетом этого целевые значения корневых показателей качества для синтеза адаптивно-робастных регуляторов будем выбирать, исходя из значений аналогичных показателей, использованных при синтезе робастных регуляторов.

В предыдущем разделе для канала регулирования скорости движения НПА  $v_x$  был синтезирован робастный ПИД-регулятор с постоянными параметрами, обеспечивающий расположение доминирующего полюса в интервале  $\lambda \in [-0.4; -0.3]$ . Далее синтезируем для этого же канала адаптивно-робастный ПИ-регулятор, стабилизирующий доминирующий полюс системы в точке комплексной плоскости с координатами  $(-0.4; j0)$ . Свободные полюсы синтезируемой системы расположим в десятикратном удалении от доминирующего левее прямой  $\text{Re}(x) = -4$ . Требования по степени

колебательности оставим прежними:  $\mu_{\max} = 1.049$ . Рассмотрим далее саму процедуру синтеза.

Характеристический полином синтезируемой системы в исследуемом режиме имеет следующий вид:

$$D(s) = s^4 + (6.049 \cdot 10^{-3} \cdot [k_v] + 15.333 \cdot [c_x] \cdot [k_{11}] + 1673.120) \cdot s^3 + \\ + (10.121 \cdot [k_v] + 3358.703 \cdot [c_x] \cdot [k_{11}] + 70712.700) \cdot s^2 + \\ + (2539.040 \cdot K_p + 427.747 \cdot [k_v] + 141922.302 \cdot [c_x] \cdot [k_{11}]) \cdot s + 2539.040 \cdot K_I.$$

Согласно используемой методике найдем зависимость остатка от параметров регулятора:

$$R(K_p, K_I, [c_x], [k_v], [k_{11}]) = -1015.616 \cdot K_p + 2539.040 \cdot K_I + \\ + 11206.978 - 169.480 \cdot [k_v] - 56231.021 \cdot [c_x] \cdot [k_{11}].$$

Приравняв остаток к нулю, затем выразив из этого равенства интегральный коэффициент регулятора  $K_I$ , получим выражение для подстройки  $K_I$  под значения нестационарных параметров:

$$K_I(K_p, c_x, k_v, k_{11}) = 0.4 \cdot K_p + 0.067 \cdot k_v + 22.814 \cdot c_x \cdot k_{11} - 4.414.$$

Пропорциональный коэффициент регулятора  $K_p$ , обеспечивающий желаемое расположение свободных полюсов, определим из D-разбиения по свободному полиному. Свободный полином синтезируемой системы имеет следующий вид:

$$B(s) = b_3 \cdot s^3 + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0, \\ b_3 = 1, \\ b_2 = [1672.784; 1673.143], \\ b_1 = [70150.452; 70750.528], \\ b_0 = [2539.040 \cdot K_p - 23777.618; 2539.040 \cdot K_p + 1817.846].$$

Зная коэффициенты свободного полинома, построим кривые D-разбиения, показывающие область значений пропорционального коэффициента регулятора, обеспечивающих желаемые значения степени доминирования  $\delta$  и степени робастной колебательности  $\mu$ , в вершинах параметрического многогранника из

ранее найденных проверочных наборов. Результаты D-разбиения приведены на рисунке 5.12.

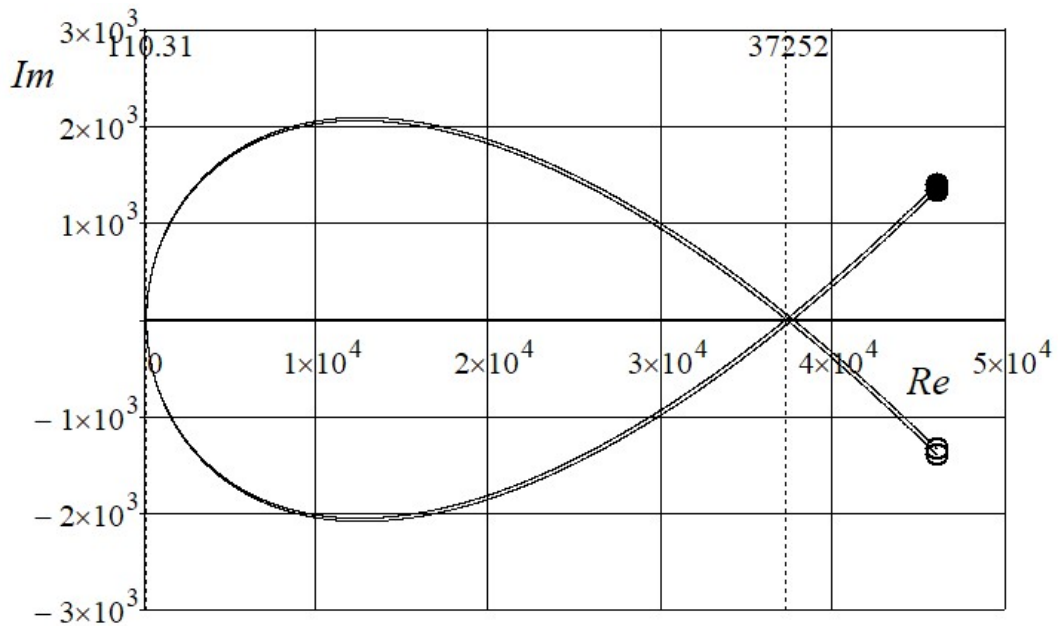


Рисунок 5.12 – Кривые D-разбиения по свободному полиному в пространстве  $K_p$  для обеспечения заданной степени доминирования  $\delta$

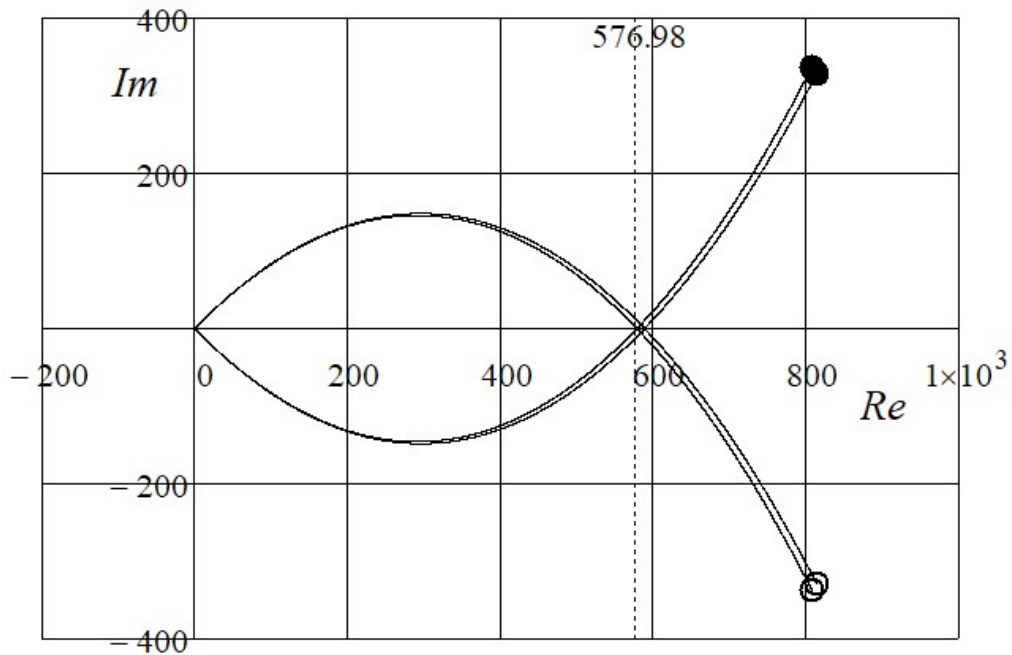


Рисунок 5.13 – Кривые D-разбиения по свободному полиному в пространстве  $K_p$  для обеспечения заданной степени робастной колебательности  $\mu$



Из пересечения областей устойчивости, найденных методом D-разбиения, получим диапазон значений  $K_p$ , обеспечивающих желаемое расположение свободных полюсов синтезируемой системы:

$$K_p \in [110.310; 37252] \cap (0; 576.980) = [110.310; 576.980].$$

Выберем из найденного интервала  $K_p = 111$ . С учетом значения  $K_p$ , зависимости  $c_x(\alpha)$  из Таблицы 5.2, а также того, что  $k_v$  и  $k_{11}$  – коэффициенты секторной линеаризации квадратичных функций частоты вращения вала двигателя  $v$  и скорости НПА  $v_x$ , запишем окончательный вид закона адаптации интегрального коэффициента синтезируемого регулятора:

$$K_I(v, v_x, \alpha) = 39.986 + 0.067 \cdot v + v_x \cdot (0.746 + 3.114 \cdot 10^{-2} \cdot \alpha).$$

Расположение областей локализации полюсов системы, обеспечиваемое синтезированным адаптивно-робастным ПИ-регулятором, изображено на рисунке 5.14.

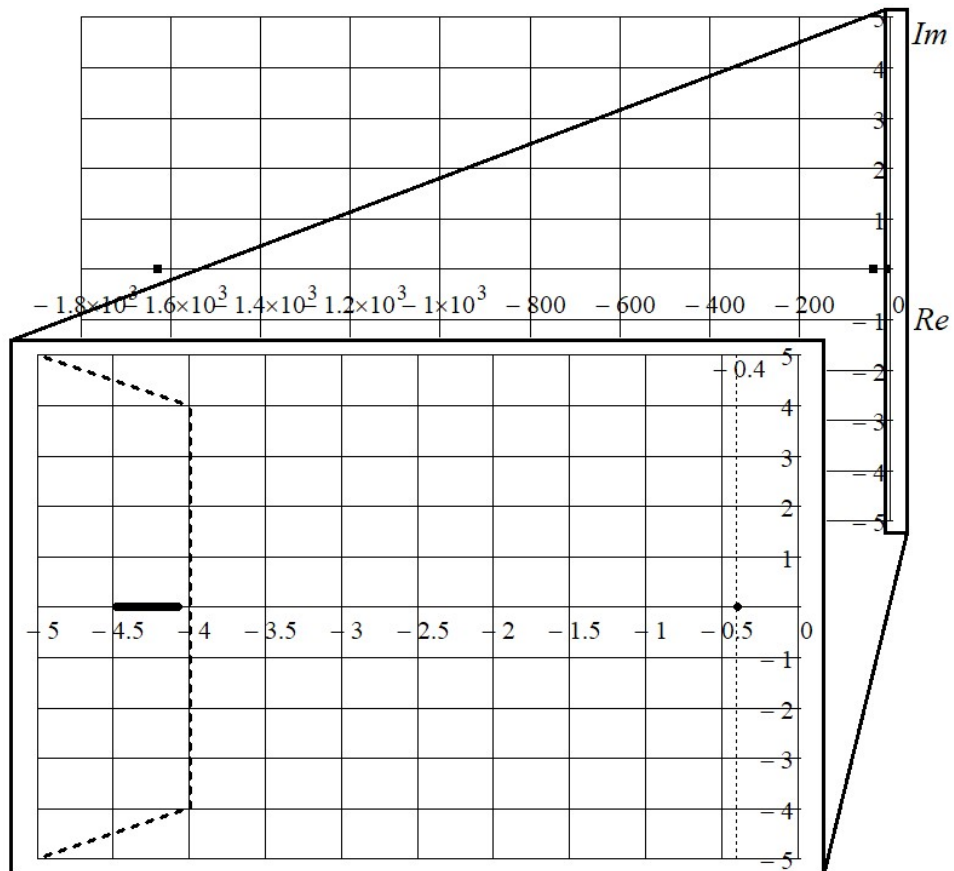


Рисунок 5.14 – Расположение полюсов канала управления скоростью НПА  $v_x$  с синтезированным адаптивно-робастным ПИ-регулятором

На основе рисунка 5.14 можно утверждать, что желаемые значения корневых показателей качества достигнуты: доминирующий полюс системы размещен в точке  $(-0.4; j0)$ , степень устойчивости постоянна и равна  $\eta=0.4$ ; свободные полюсы размещены слева от прямой  $\text{Re}(x)=-4$  с десятикратным удалением от доминирующего; степень колебательности синтезированной системы равна нулю. Переходные характеристики синтезированной системы изображены на рисунке 5.15.

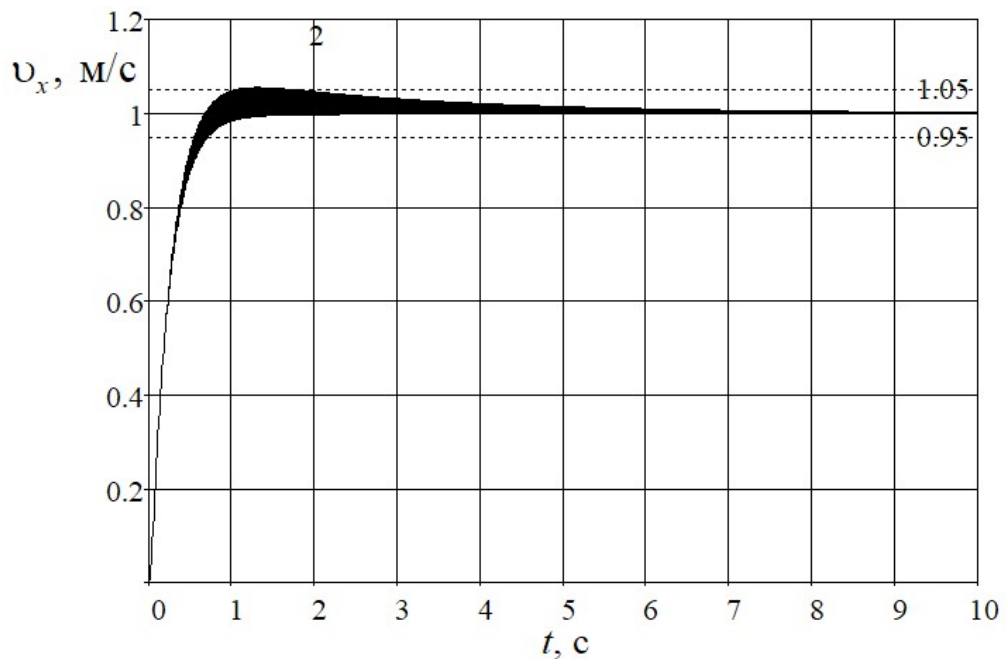


Рисунок 5.15 – Переходные характеристики канала управления скоростью НПА  $v_x$  с синтезированным адаптивно-робастным ПИ-регулятором

Время переходного процесса в синтезированной системе не превышает  $t_{nn} = 2$  с; перерегулирование не превышает  $\sigma_{\max} = 5.46\%$ . Таким образом, синтез адаптивно-робастного регулятора  $P_{11}$  был проведен успешно. Регуляторы  $P_{21}$  и  $P_{31}$  были синтезированы аналогичным образом, далее приведем результаты их синтеза.

Регулятор  $P_{21}$  обеспечивает расположение полюсов контура управления скоростью погружения НПА, показанное на рисунке 5.16. Степень устойчивости контура равна  $\eta_{\min} = 0.5$ ; степень колебательности контура равна нулю.

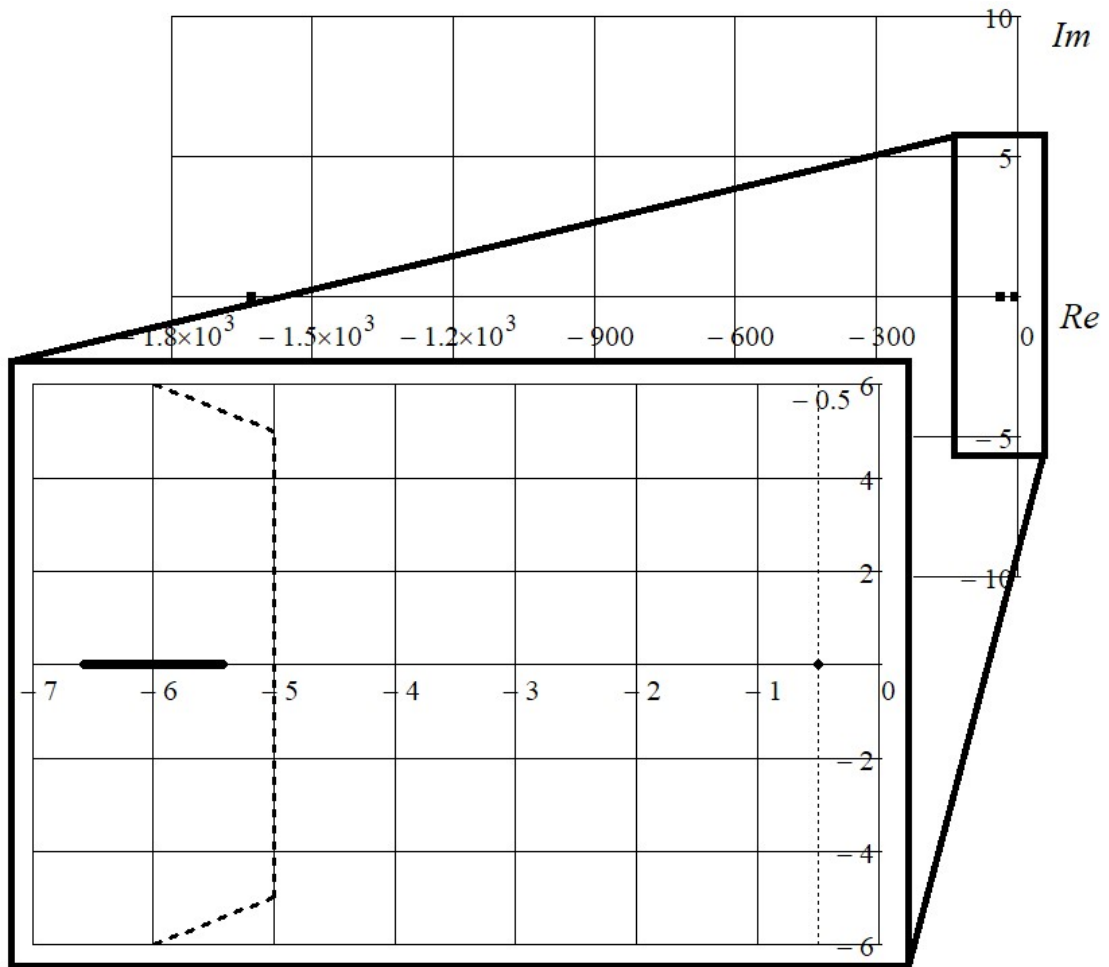


Рисунок 5.16 – Расположение полюсов контура управления скоростью погружения НПА  $v_y$  с адаптивно-робастным ПИ-регулятором

Переходные характеристики, соответствующие такому расположению полюсов, изображены на рисунке 5.17. Наибольшее время переходного процесса в синтезированном контуре равно  $t_{nn} = 3$  с; максимальное перерегулирование  $\sigma_{\max} = 13.12\%$ .

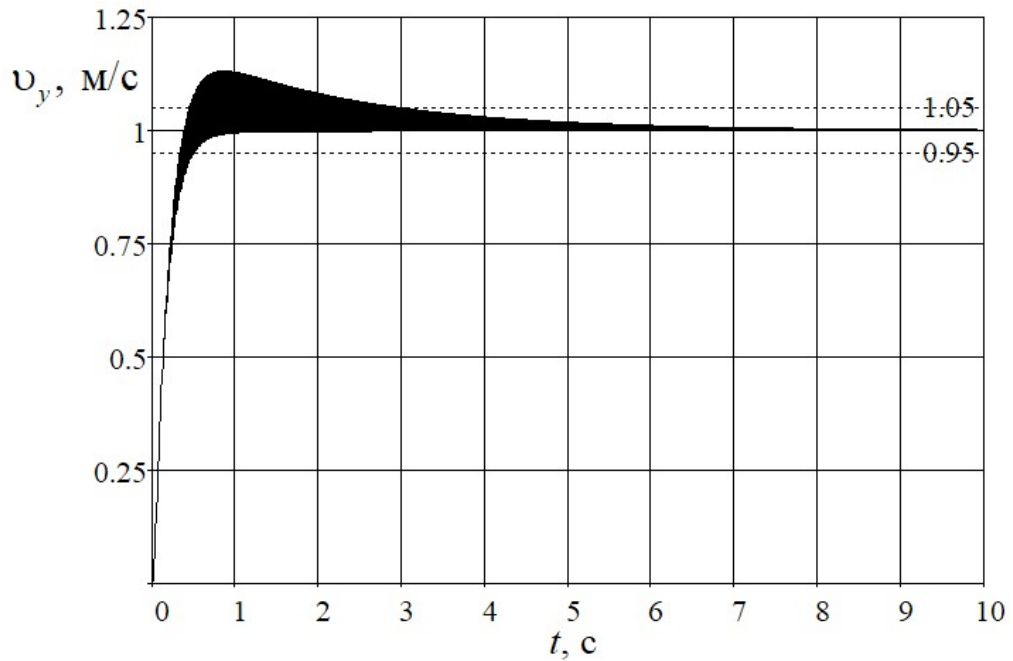


Рисунок 5.17 – Переходные характеристики контура управления скоростью погружения НПА  $v_y$  с адаптивно-робастным ПИ-регулятором

Зная параметры регулятора  $P_{21}$ , зададим значение передаточного коэффициента пропорционального регулятора  $P_2$  во внешнем контуре канала управления глубиной погружения НПА  $h$ . Зададим  $P_2 = 0.85$ ; переходные характеристики канала в целом изображены на рисунке 5.18.

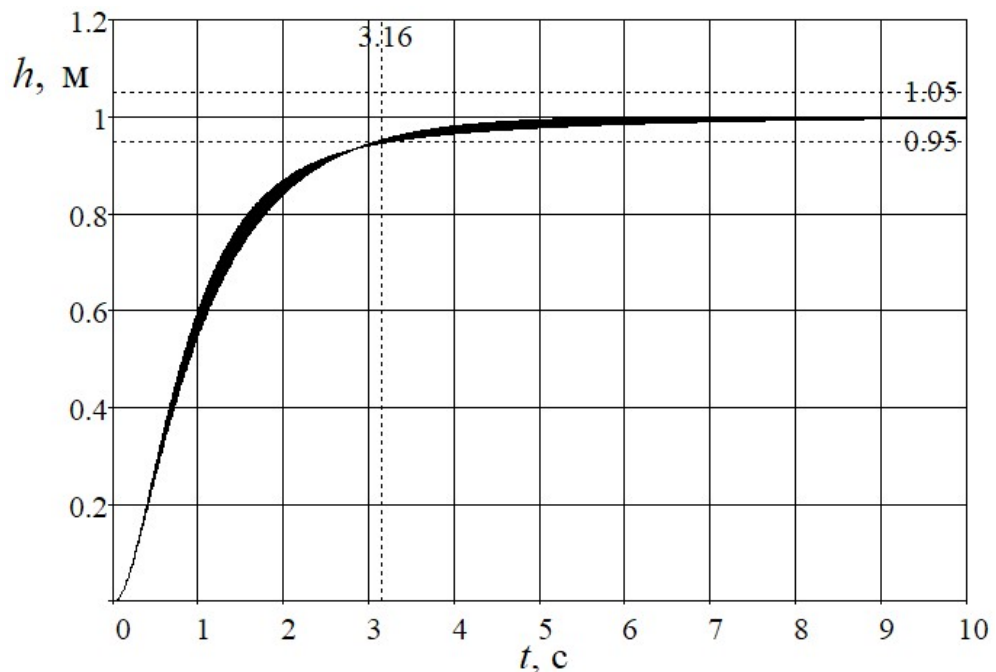


Рисунок 5.18 – Переходные характеристики канала управления глубиной погружения НПА  $h$  с адаптивно-робастным ПИ-регулятором

Полученный канал регулирования имеет время переходного процесса  $t_{mn} = 3.16$  с и нулевое перерегулирование.

Регулятор  $P_{31}$  обеспечивает расположение полюсов контура управления скоростью маневрирования НПА по дифференту  $\omega_z$ , показанное на рисунке 5.29. Степень устойчивости контура равна  $\eta_{\min} = 0.4$ ; степень колебательности контура равна нулю.

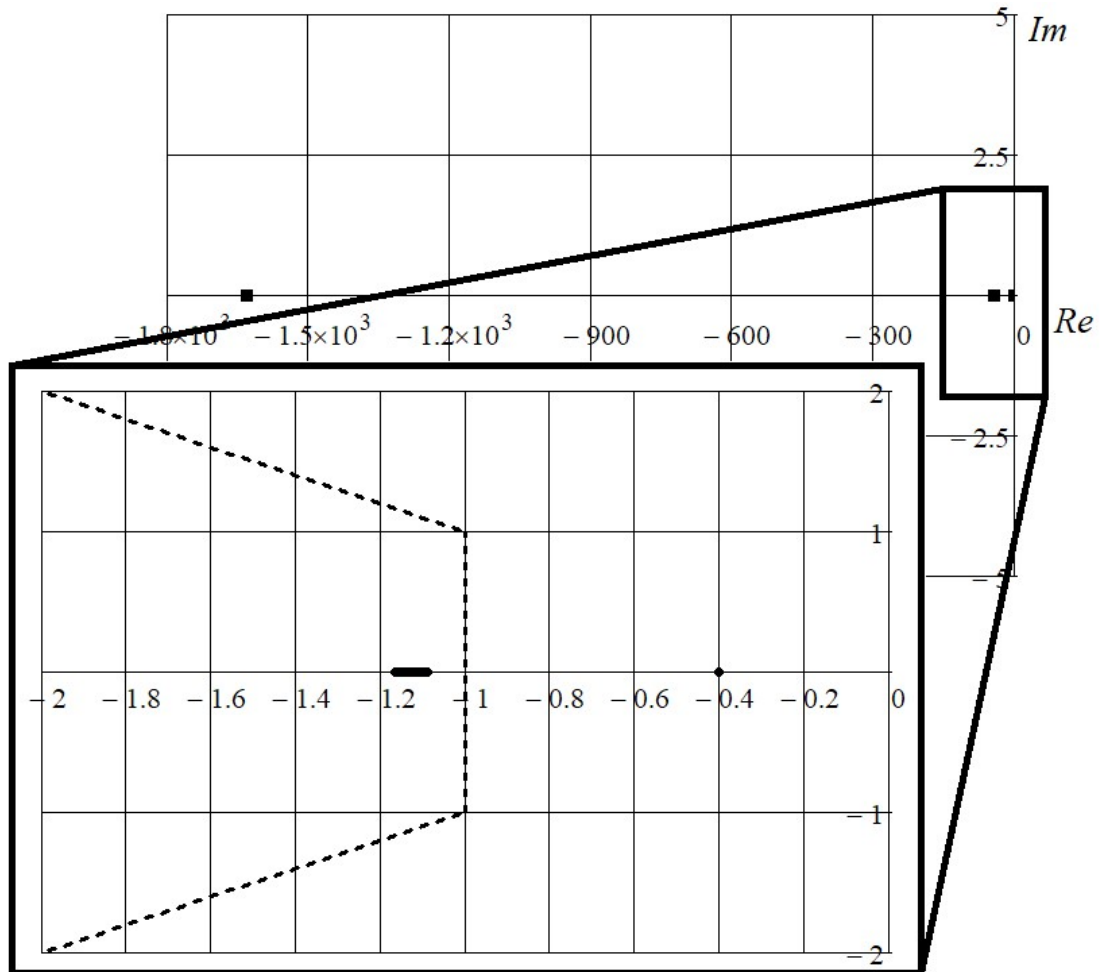


Рисунок 5.19 – Расположение полюсов контура управления скоростью маневрирования НПА по дифференту  $\omega_z$  с адаптивно-робастным ПИ-регулятором

Переходные характеристики, соответствующие такому расположению полюсов, изображены на рисунке 5.20. Наибольшее время переходного процесса в синтезированном контуре равно  $t_{mn} = 6.64$  с; максимальное перерегулирование  $\sigma_{\max} = 13.36\%$ .

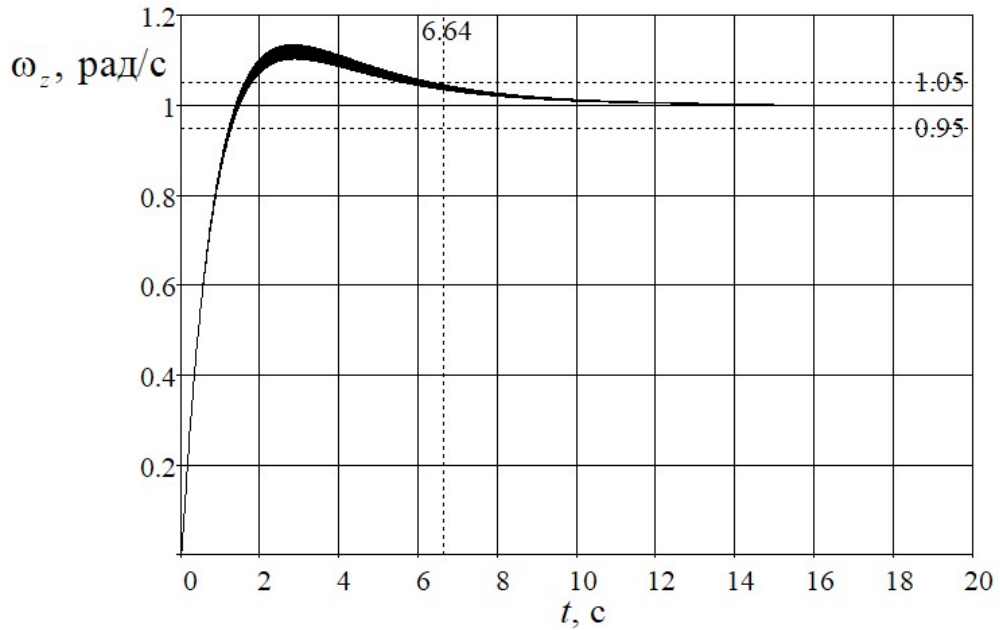


Рисунок 5.20 – Переходные характеристики контура управления скоростью маневрирования НПА по дифференту  $\omega_z$  с адаптивно-робастным ПИ-регулятором

Зная параметры регулятора  $P_{31}$ , зададим значение передаточного коэффициента пропорционального регулятора  $P_3$  во внешнем контуре канала управления дифферентом НПА  $\psi$ . Зададим  $P_3 = 0.35$ ; переходные характеристики канала в целом изображены на рисунке 5.21.

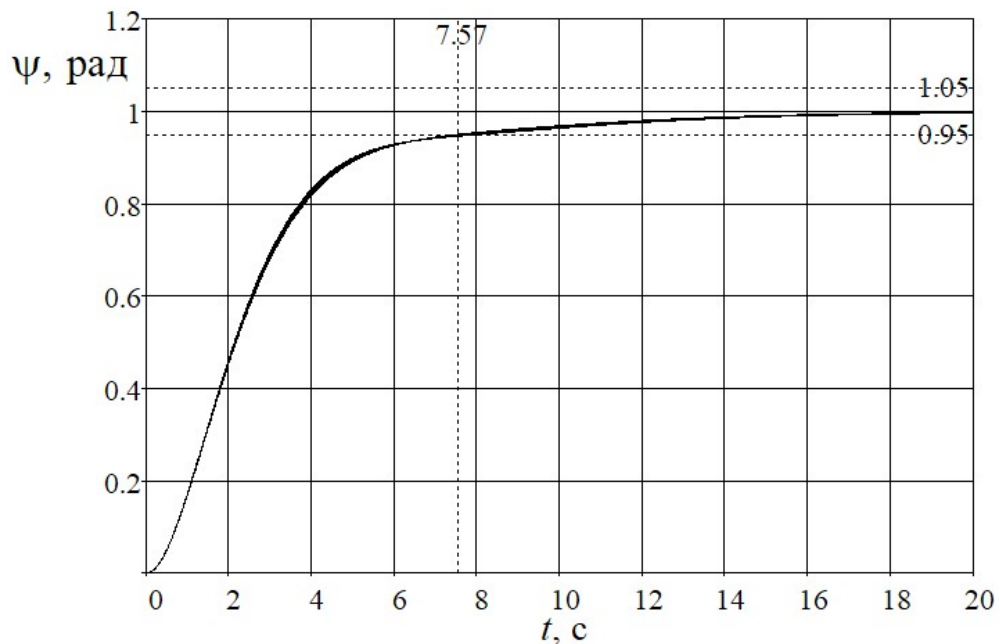
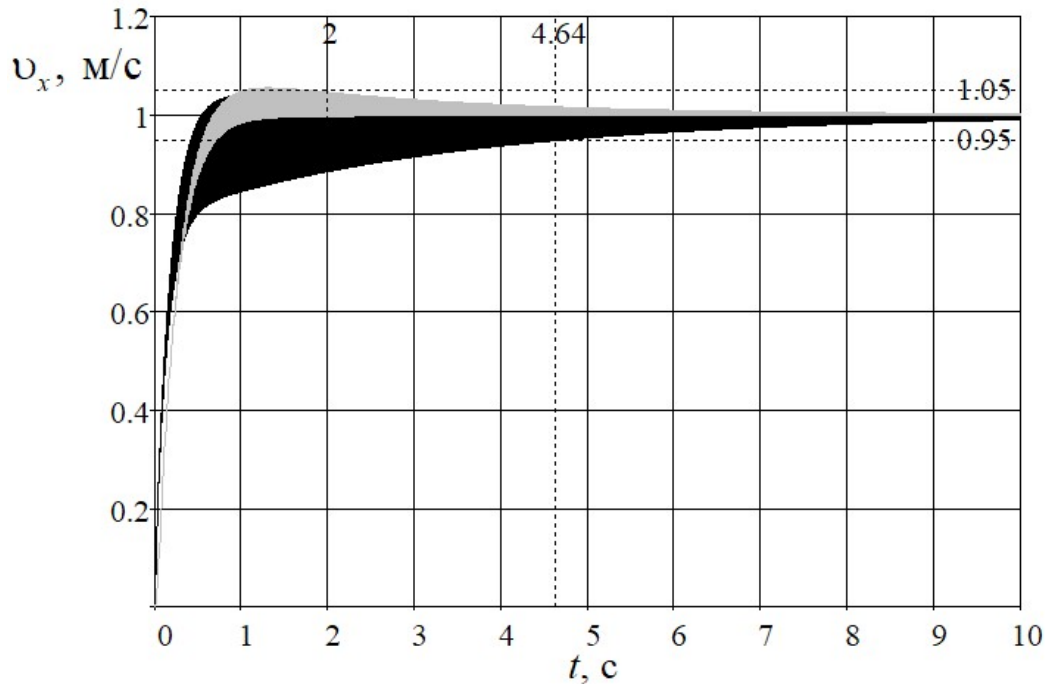


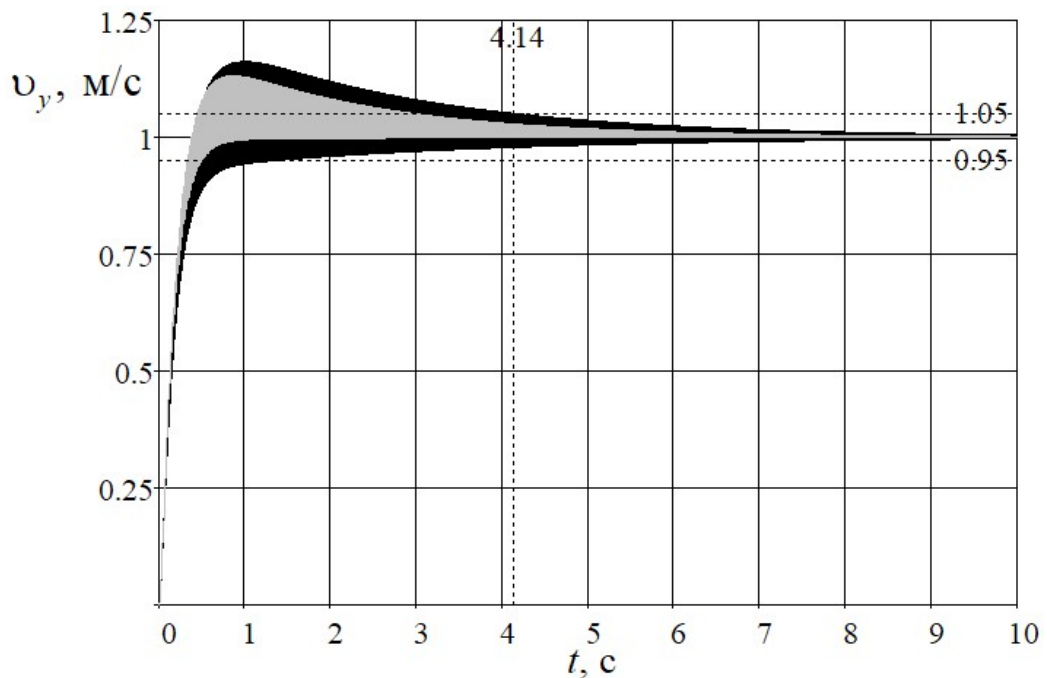
Рисунок 5.21 – Переходные характеристики канала управления дифферентом НПА  $\psi$  с адаптивно-робастным ПИ-регулятором

Полученный канал регулирования имеет время переходного процесса  $t_{mn} = 7.57$  с и нулевое перерегулирование.

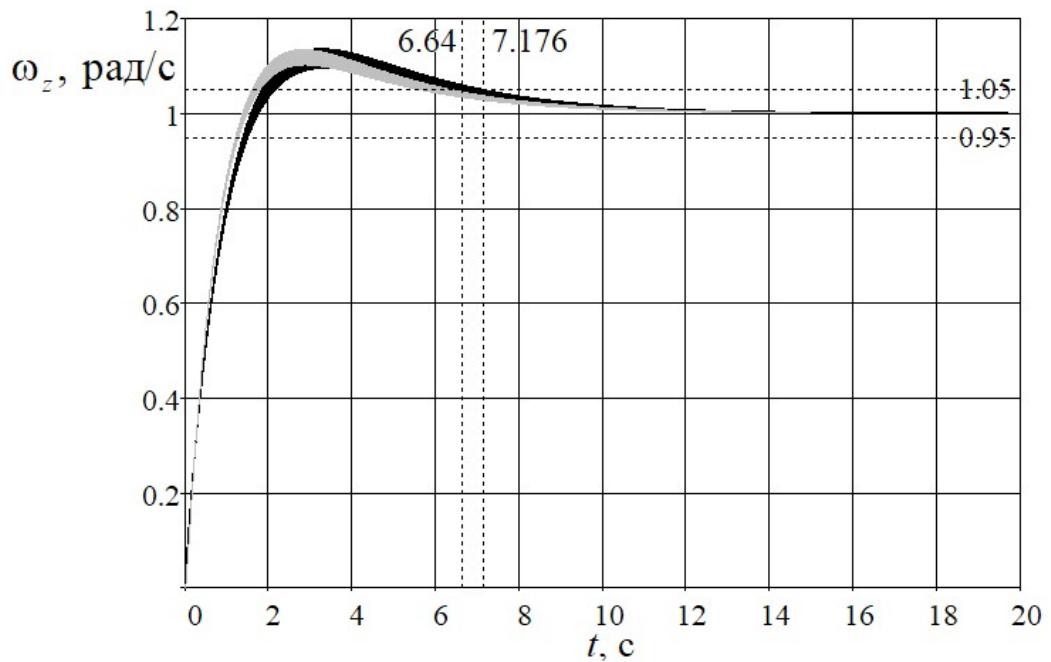
Сравним далее переходные характеристики систем в двух режимах: движение с большими углами атаки под управлением робастного ПИД-регулятора и движение со средними углами атаки под управлением адаптивно-робастного ПИ-регулятора. Рассмотрим для этого рисунок 5.22.



а)



б)



в)

Рисунок 5.22 – Переходные характеристики синтезированных каналов в адаптивно-робастном и робастном режиме: а) канал управления  $v_x$ ; б) канал управления  $v_y$ ; в) канал управления  $\omega_z$

Из рисунка 5.22 можно сделать вывод, что в режиме движения с малыми углами атаки каналы системы управления движением НПА имеют более стабильное качество регулирования, чем при движении с большими углами атаки. Это объясняется применением адаптивно-робастных регуляторов с подстраиваемыми параметрами, а также меньшим размахом интервальных параметров. Рассмотрим далее синтез регуляторов синтезируемой системы по возмущающим воздействиям.

### 5.1.3 Синтез регуляторов по возмущающему воздействию

В каналах управления скоростью движения НПА  $v_x$  и глубиной его погружения  $h$  в качестве возмущающего воздействия следует рассматривать скорость подводного течения  $v_f$ ; в канале управления дифферентом  $\psi$  – скорость потока жидкости  $v_y$ , обтекающего вертикальные движители.



Рассмотрим далее синтез регулятора по возмущающему воздействию для канала управления скоростью движения НПА  $v_x$ . Регуляторы по возмущающему воздействию для оставшихся двух каналов будут синтезированы аналогично. Для них приведем только результаты синтеза.

Передаточная функция канала управления скоростью движения НПА по возмущающему воздействию может быть записана следующим образом:

$$W_{v_x v_f}(s) = \frac{4 \cdot P_{12}(s) \cdot W_{Tu}(s, k_v) \cdot W_{v_x T_x}(s, c_x, k_{11}) - W_{v_x v_f}(s, c_x, k_{11}, k_{12}, k_v)}{1 + 4 \cdot W_{v_x T_x}(s, c_x, k_{11}) \cdot (W_{Tv}(s, k_v, K_v) + P_{11}(s) \cdot W_{Tu}(s, k_v))}.$$

Найдем передаточную функцию регулятора по возмущающему воздействию  $P_{12}(s)$ , обеспечивающую инвариантность регулируемой величины относительно возмущающего воздействия, из условия равенства числителя приведенной передаточной функции нулю:

$$\begin{aligned} P_{12}(s) &= \frac{W_{v_x v_f}(s, c_x, k_{11}, k_{12}, k_v)}{4 \cdot W_{Tu}(s, k_v) \cdot W_{v_x T_x}(s, c_x, k_{11})} = 0.0133 \cdot \frac{c_x \cdot k_{12}}{k_v} \cdot s^2 + \\ &+ 795.1286 \cdot c_x \cdot k_{12} \cdot \left( 0.0063 + \frac{0.0280}{k_v} \right) \cdot s + \\ &+ 795.1286 \cdot c_x \cdot k_{12} \cdot \left( 0.0110 + \frac{1}{k_v} \right). \end{aligned}$$

Данная передаточная функция ПДД<sup>2</sup>-регулятора обеспечивает согласно математической модели системы инвариантность регулируемой величины относительно возмущающего воздействия.

Реализация такого регулятора затруднена двумя обстоятельствами:

– расчет управляющего сигнала требует оценки первой и второй производной скорости подводного течения  $v_f$ ;

– настройки регулятора зависят от интервальных параметров системы.

Обойдем первое обстоятельство, упростив структуру регулятора до пропорционального, исключив тем самым необходимость прямого или косвенного измерения производных  $v_f$ . Второе обстоятельство делает найденную передаточную функцию регулятора применимой только для адаптивно-

робастного режима работы системы. Таким образом, коэффициент пропорционального регулятора по возмущающему воздействию для адаптивно-робастного режима может быть рассчитан по следующему закону:

$$P_{12} = 795.1286 \cdot c_x \cdot v_f \cdot \left( 0.0110 + \frac{1}{v} \right).$$

Зависимости ошибки регулирования от времени в вершинах параметрического многогранника при единичном ступенчатом возмущающем воздействии показаны на рисунке 5.23.

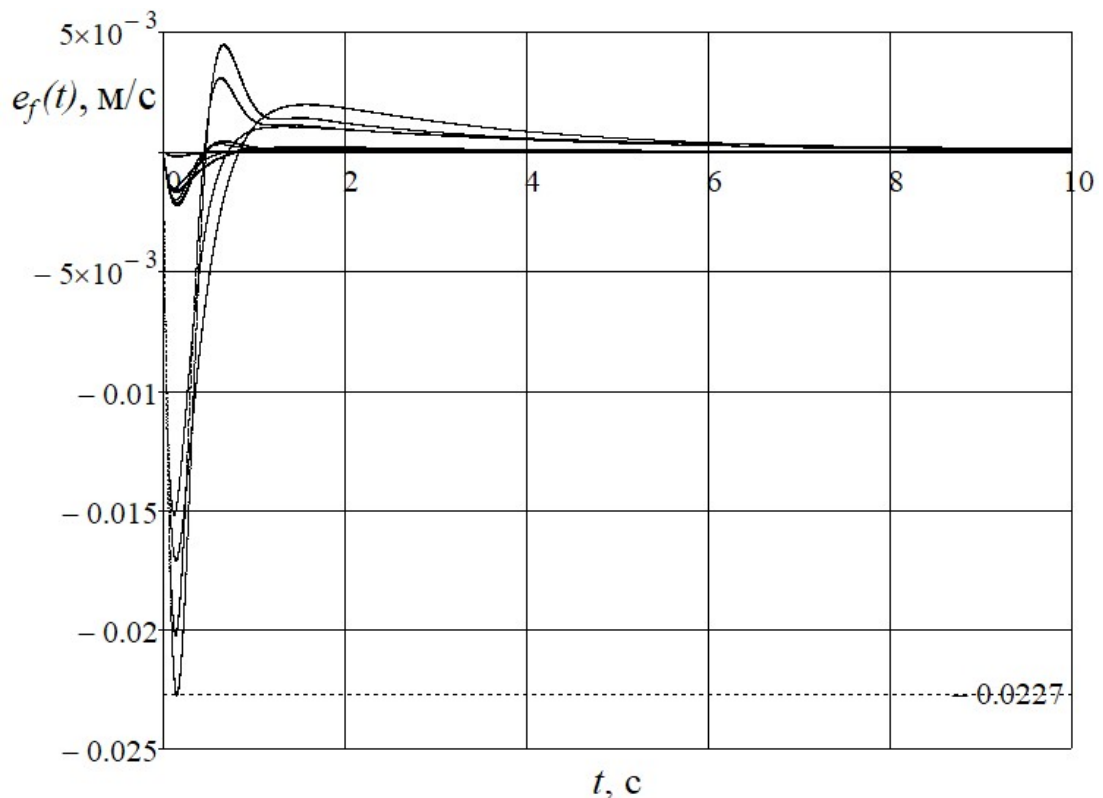


Рисунок 5.23 – Переходные характеристики канала управления скоростью движения НПА  $v_x$  по возмущающему воздействию в адаптивно-робастном режиме работы

Из рисунка 5.23 очевидно, что упрощенный регулятор не позволяет достичь инвариантности, но обеспечивает приемлемые значения ошибки по возмущающему воздействию: не более 2.27% в наихудшем режиме работы системы. Рассмотрим далее синтез регулятора по возмущающему воздействию для робастного режима работы системы.

Передаточная функция исследуемого канала по возмущающему воздействию имеет астатизм первого порядка, следовательно, установившееся значение ошибки регулирования по возмущающему воздействию равно нулю. Синтезируем пропорциональный регулятор по возмущающему воздействию, исходя из коэффициента скоростной ошибки. Выражение для этого коэффициента имеет вид:

$$c_1 = P_{12} \cdot k_v - 795.1286 \cdot \frac{c_x \cdot k_{12}}{k_v} + 8.7464 \cdot c_x \cdot k_{12}.$$

Построим на рисунке 5.24 графики модуля значений скоростного коэффициента ошибок от искомого коэффициента регулятора  $P_{12}$ .

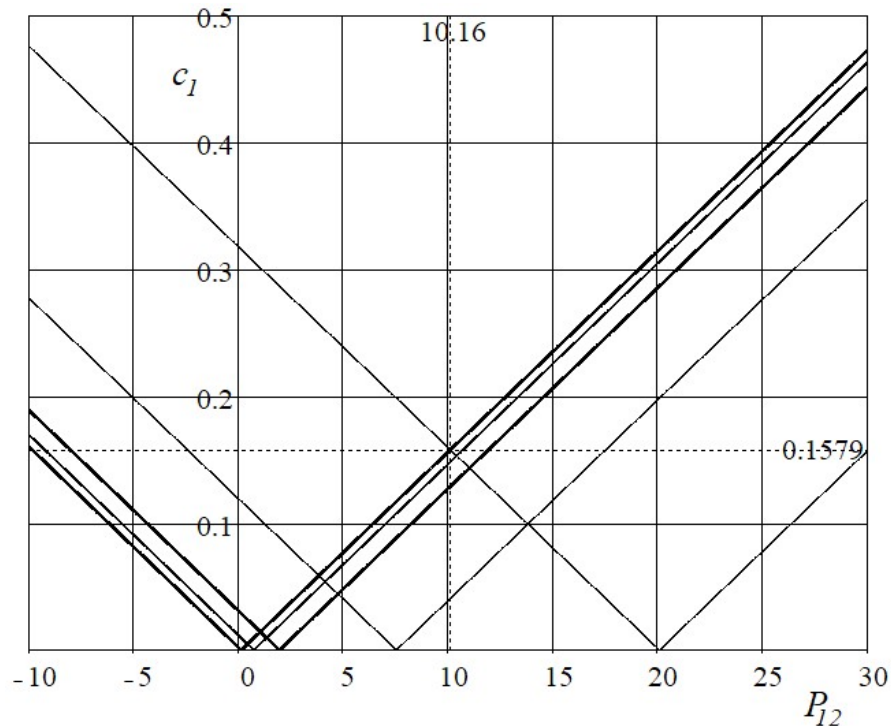


Рисунок 5.24 – Зависимость модуля коэффициента скоростной ошибки по возмущающему воздействию  $c_1$  от передаточного коэффициента регулятора  $P_{12}$

Согласно рисунку 5.24 минимальное значение  $c_1 = 0.1579$  достигается при  $P_{12} = 10.16$ . Переходные характеристики системы по возмущающему воздействию приведены на рисунке ниже.

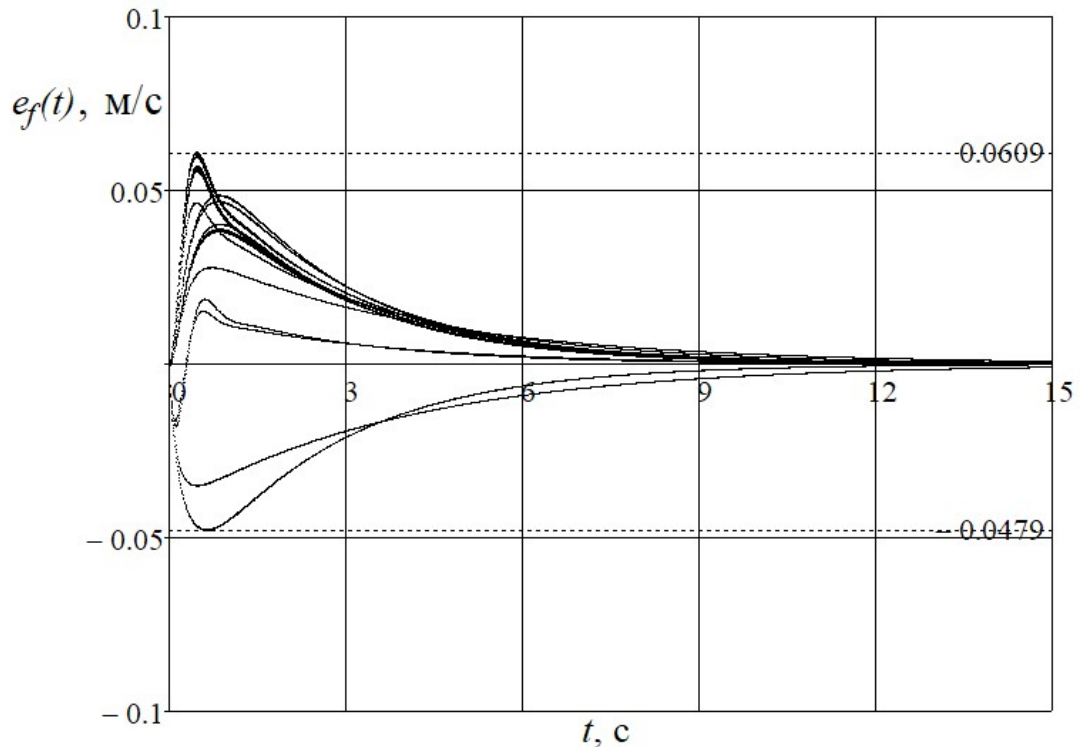
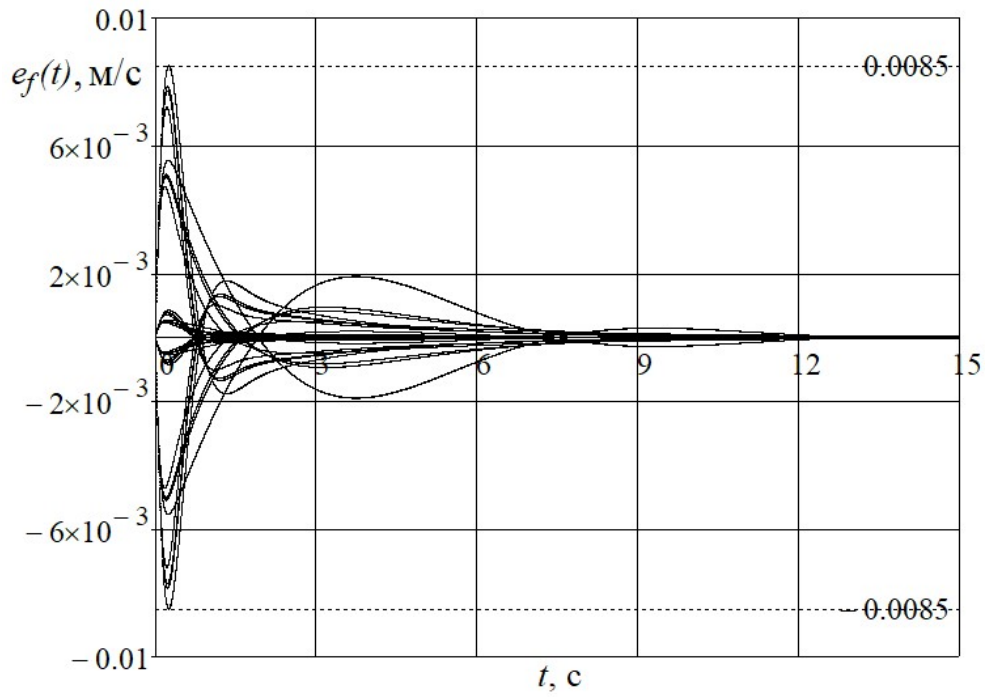


Рисунок 5.25 – Переходные характеристики канала управления скоростью движения НПА  $v_x$  по возмущающему воздействию в робастном режиме работы

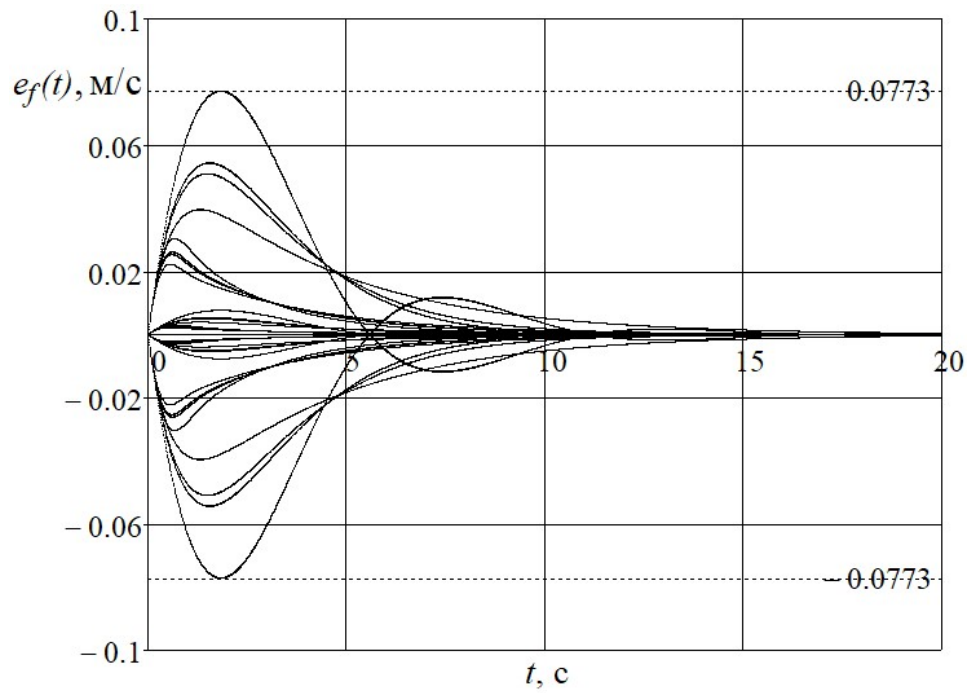
Как показано на рисунке 5.25, наихудшее значение ошибки регулирования по возмущающему воздействию в робастном режиме не превышает 6.09%. Синтезируем аналогичным образом регуляторы по возмущающему воздействию для канала управления глубиной погружения и дифферентом НПА.

Для контура управления скоростью погружения НПА удалось синтезировать регуляторы по возмущающему воздействию, обеспечивающие максимальную динамическую ошибку регулирования в адаптивно-робастном режиме – 0.85%, в робастном режиме – 7.73%. Также следует упомянуть, что в робастном режиме наличие любого регулятора с отличным от нуля передаточным коэффициентом ухудшает динамические свойства системы. Было принято решение в робастном режиме работы контура управления скоростью погружения НПА размыкать линию с регулятором по возмущающему воздействию.

Переходные характеристики канала управления скоростью погружения НПА по возмущающему воздействию показаны на рисунке 5.26.



а)

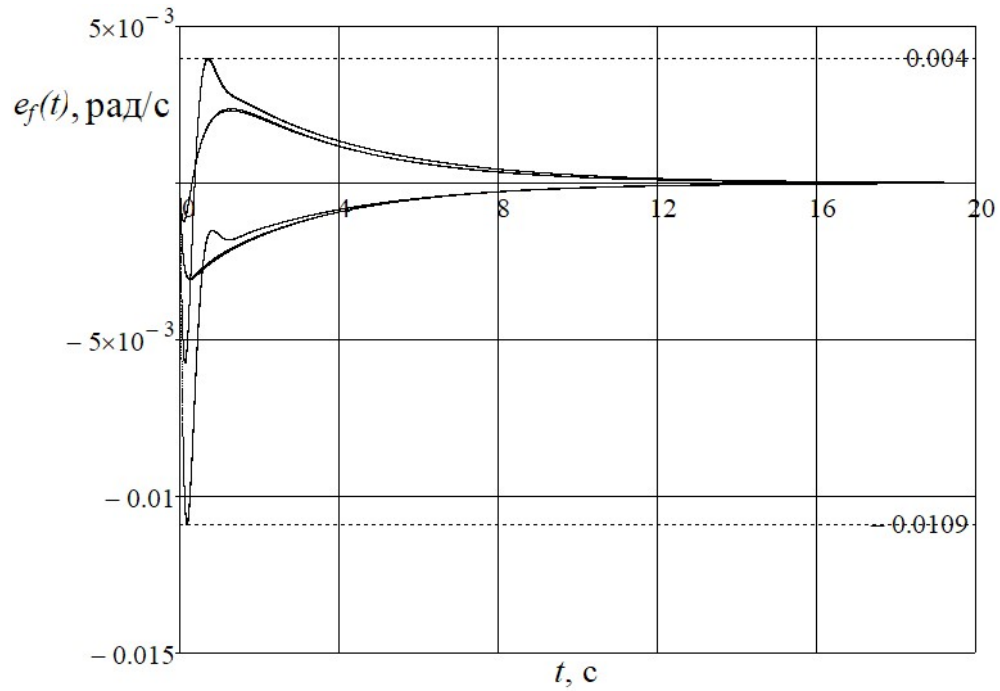


б)

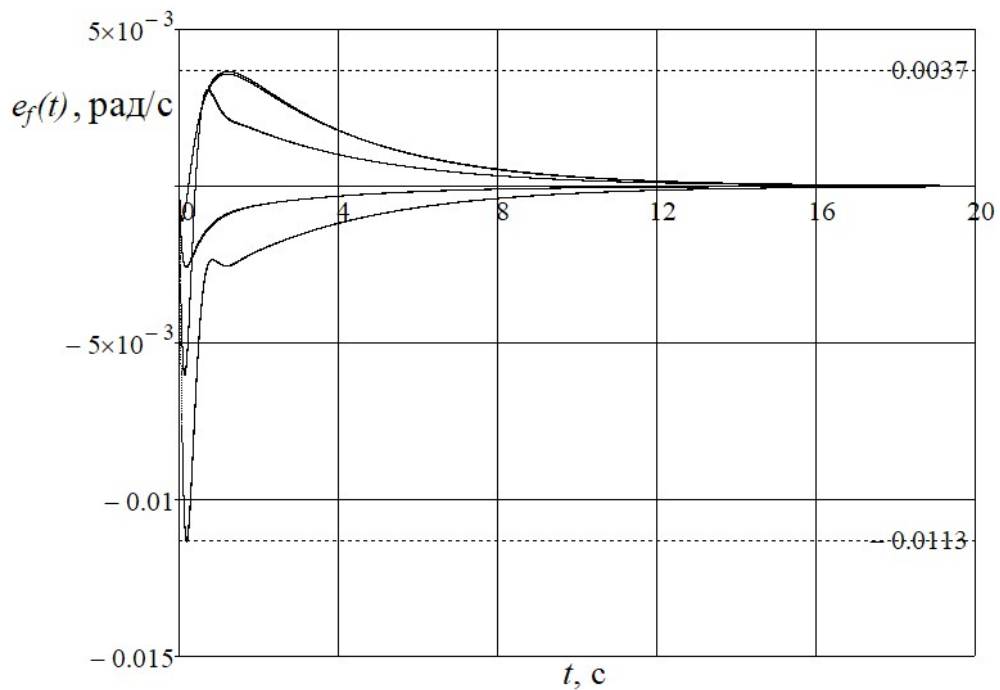
Рисунок 5.26 – Переходные характеристики контура управления скоростью погружения НПА  $v_y$  по возмущающему воздействию:

а) в адаптивно-робастном режиме; б) в робастном режиме

Для контура управления дифферентом НПА были синтезированы регуляторы по возмущающему воздействию, обеспечивающие переходные характеристики, изображенные на рисунке 5.27.



а)



б)

Рисунок 5.27 – Переходные характеристики контура управления скоростью маневрирования НПА по дифференту  $\omega_z$  по возмущающему воздействию:

а) в адаптивно-робастном режиме; б) в робастном режиме

Согласно рисунку 5.27 ошибка регулирования дифферента в адаптивно-робастном режиме не превышает 1.09%, в робастном – 1.13%.

Рассмотрим далее процесс работы системы управления движением НПА в вертикальной плоскости с синтезированными регуляторами по задающему и возмущающему воздействию.

## 5.2 Имитационное моделирование двухрежимной системы управления движением НПА в вертикальной плоскости

Выполним имитационное моделирование работы синтезированной системы. Для этого промоделируем один из каналов синтезированной системы с переключением между адаптивно-робастным и робастным режимом работы в зависимости от измеренных значений первичных интервальных параметров. Далее промоделируем связную работу трех каналов регулирования синтезированной системы во время отработки заданной траектории движения НПА в вертикальной плоскости.

### 5.2.1 Имитационное моделирование работы двухрежимного канала управления скоростью движения НПА маршем

Для имитационного моделирования канала управления скоростью движения НПА маршем  $v_x$  воспользуемся MATLAB Simulink. На вход модели поступают три сигнала, задающие скорость подводного течения, уставку скорости движения НПА маршем и угол атаки. На выходе модели формируется текущее значение скорости движения НПА маршем; в целях упрощения отладки также выведены текущие значения коэффициента силы гидродинамического сопротивления и частоты вращения гребного винта. Модель исследуемой системы приведена на рисунке 5.28.

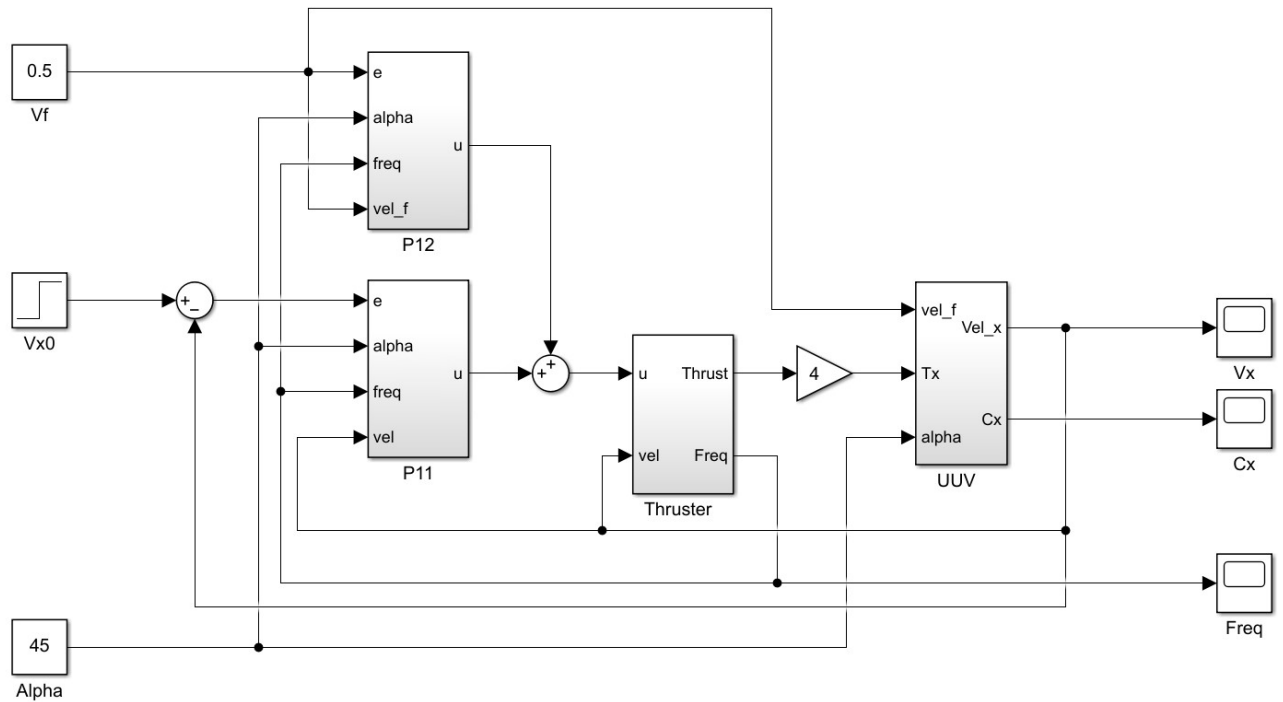


Рисунок 5.28 – Модель канала управления скоростью движения НПА маршем в MATLAB Simulink

модель реализована в виде совокупности блоков двухрежимных регуляторов по задающему и возмущающему воздействиям, блока движителя и блока НПА. Рассмотрим далее реализацию каждого из этих блоков.

На рисунке 5.29 изображена структура блока, моделирующего изменение скорости НПА при движении с учетом скорости и направления подводного течения. Входные величины: скорость подводного течения; пропульсивная сила, создаваемая ДРК; угол атаки. На выходе блока формируются значения скорости движения НПА маршем; значение гидродинамического коэффициента  $c_x$ .

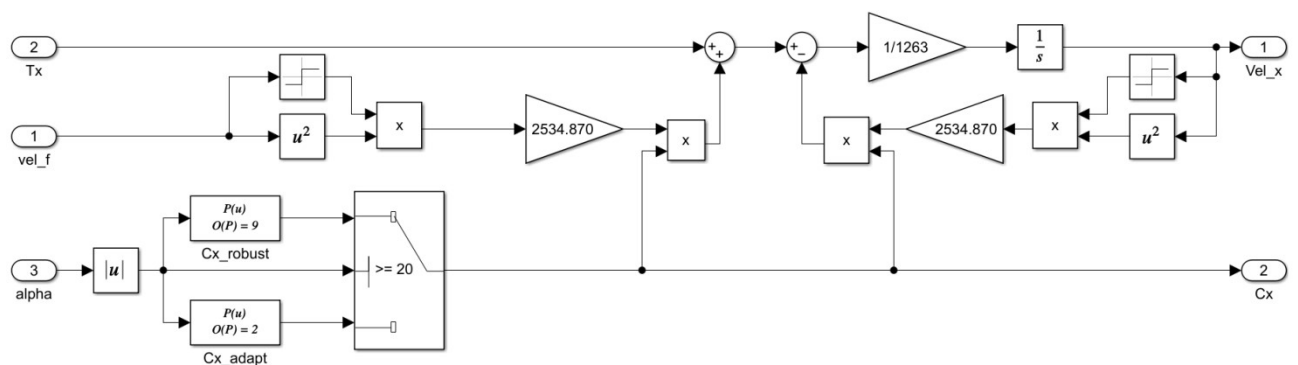


Рисунок 5.29 – Блок НПА в модели канала управления скоростью движения НПА маршем в MATLAB Simulink



Разработанная модель учитывает квадратичную зависимость силы гидродинамического сопротивления от скорости движения НПА и использует экспериментально определенные зависимости гидродинамического коэффициента  $c_x$  от угла атаки  $\alpha$ . Эти зависимости для узкого и широкого диапазона значений углов атаки  $\alpha$  аппроксимированы в разработанной модели полиномами девятого и второго порядка соответственно:

$$c_x(\alpha) = \begin{cases} -1.865 \cdot 10^{-15} \cdot \alpha^9 + 7.802 \cdot 10^{-13} \cdot \alpha^8 - 1.356 \cdot 10^{-10} \cdot \alpha^7 + \\ + 1.266 \cdot 10^{-8} \cdot \alpha^6 - 6.852 \cdot 10^{-7} \cdot \alpha^5 + 2.163 \cdot 10^{-5} \cdot \alpha^4 - & , \text{ при } |\alpha| \geq 20; \\ -3.820 \cdot 10^{-4} \cdot \alpha^3 + 3.428 \cdot 10^{-3} \cdot \alpha^2 - 0.0106 \cdot \alpha + 0.0335 \\ 1.3564 \cdot 10^{-5} \cdot \alpha^2 + 0.0332 & , \text{ при } |\alpha| < 20. \end{cases}$$

На рисунке 5.30 изображена структура модели движителя НПА.

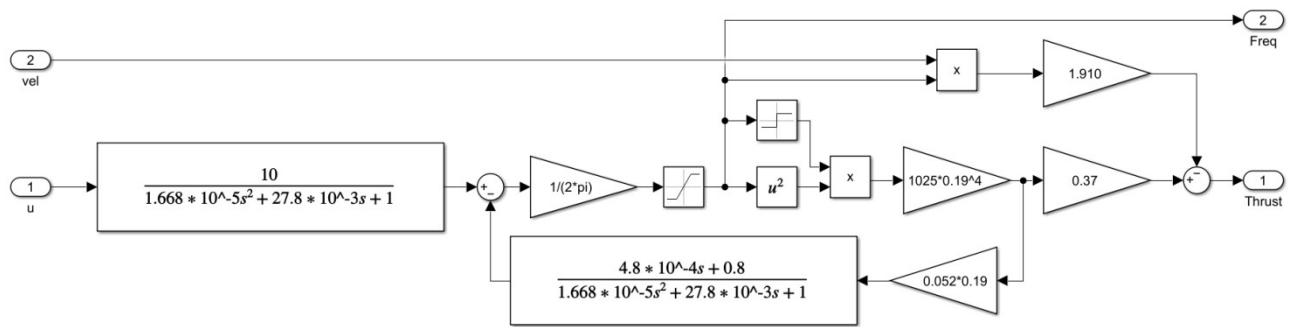


Рисунок 5.30 – Блок движителя в модели канала управления скоростью движения НПА маршем в MATLAB Simulink

На вход модели подаются значения управляющего напряжения и скорости потока жидкости, обтекающего движитель. На выходе модели формируются значения тяги движителя; также с целью отладки выводится значение частоты вращения вала электродвигателя и, соответственно, гребного винта. Следует обратить внимание, что модель учитывает квадратичную зависимость упора винта от частоты его вращения, а также нелинейность типа «насыщение». Пределы «насыщения» установлены, исходя из экспериментальных характеристик двигателя и винта.

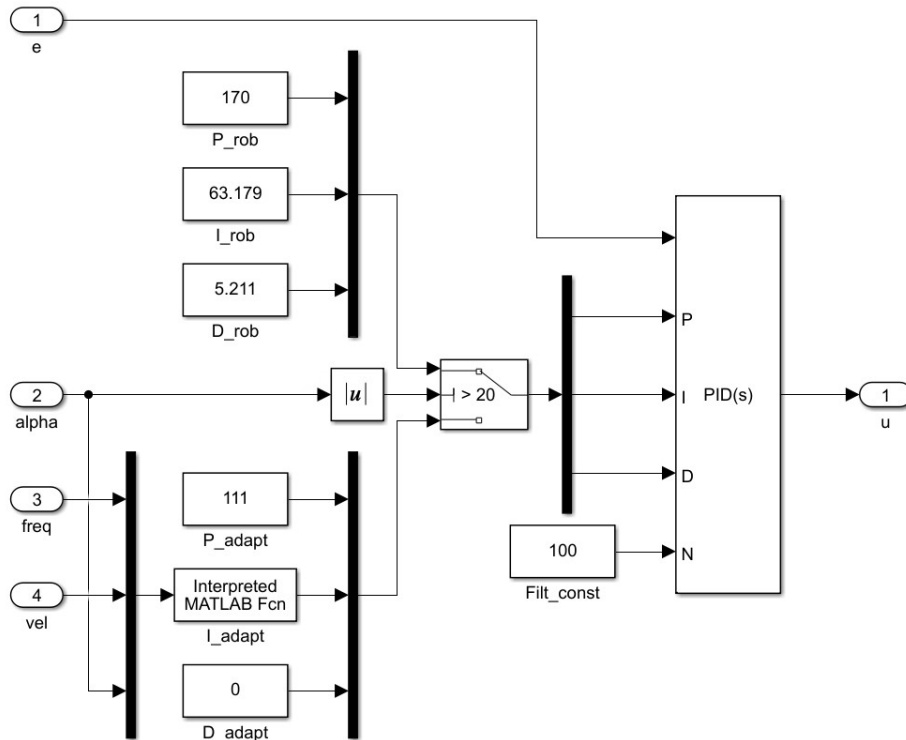


Рисунок 5.31 – Блок двухрежимного регулятора в модели канала управления скоростью движения НПА маршем в MATLAB Simulink

На рисунке 5.31 изображена структура блока двухрежимного регулятора по задающему воздействию в модели канала управления скоростью движения НПА маршем. Блок регулятора по возмущающему воздействию реализован аналогично. На вход блока подаются четыре сигнала: рассогласование, значение угла атаки, значение частоты вращения гребного винта и значение скорости движения НПА.

В зависимости от модуля угла атаки регулятор работает в одном из двух режимов: робастном при  $|\alpha| \geq 20^\circ$  и адаптивно-робастном при  $|\alpha| < 20^\circ$ . При этом в робастном режиме регулятор имеет постоянные параметры, в адаптивно-робастном режиме выполняется подстройка интегрального коэффициента регулятора. Закон адаптации интегрального коэффициента основан на линеаризованной зависимости гидродинамического коэффициента от значения угла атаки, а не на приведенных ранее полиномах. Таким образом, блоки моделей НПА и движителя построены на основе нелинейных уравнений, а регуляторы основаны на упрощенных линеаризованных моделях элементов системы.

С помощью разработанной модели симулируем управление скоростью НПА, спущенного с судна-носителя в поток воды со скоростью  $v_f = -0.5$  м/с с таким дифферентом на корму, что угол атаки составляет  $\alpha = -30^\circ$ . Предположим, что угол атаки  $\alpha$  изменяется за счет работы канала регулирования дифферента НПА по показанной на рисунке 5.32 траектории; график уставки скорости НПА  $v_0$  показан на том же рисунке.

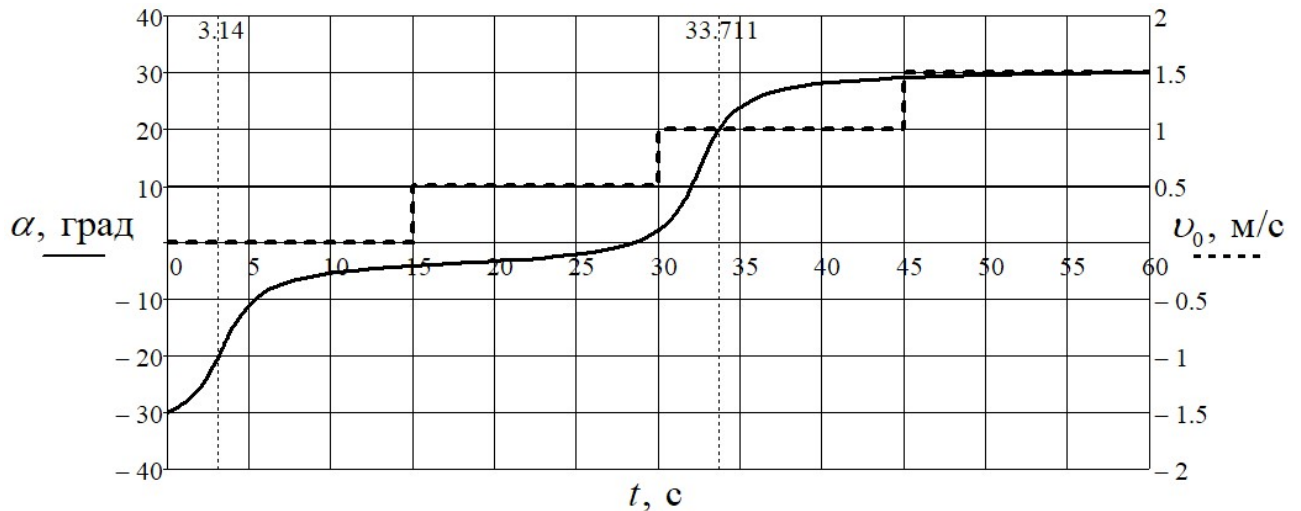
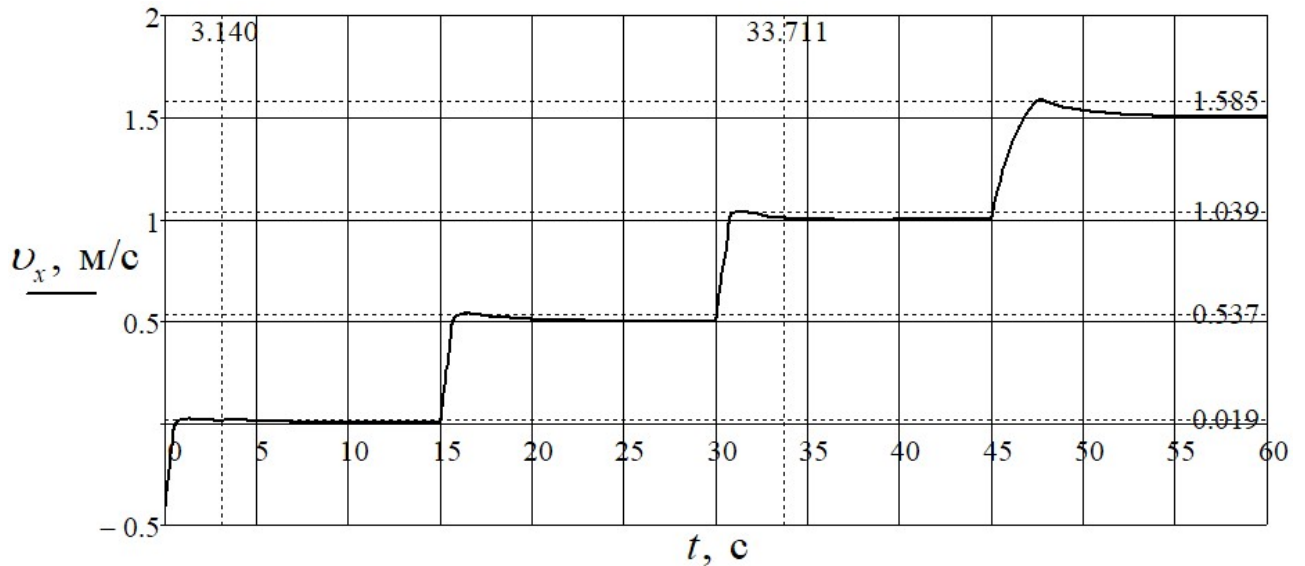


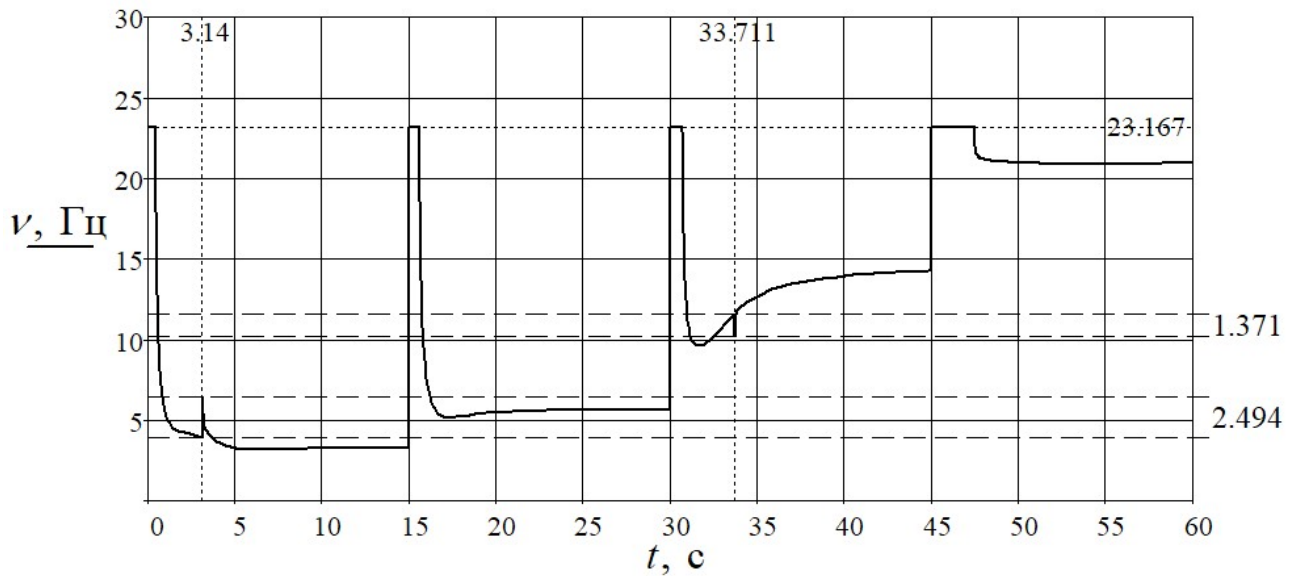
Рисунок 5.32 – Графики изменения угла атаки и уставки скорости НПА в течение моделирования

Такое изменение входных параметров системы позволит показать на первых пятнадцати секундах переходный процесс с переходом из робастного режима в адаптивно-робастный на 3.14 с; на вторых пятнадцати секундах – переходный процесс в адаптивно-робастном режиме; на третьих пятнадцати секундах – переходный процесс с переходом из адаптивно-робастного режима в робастный на 33.711 с; на последнем отрезке моделирования – переходный процесс в робастном режиме работы системы.

График изменения скорости НПА в течение моделирования, а также график частоты вращения гребного винта показаны на рисунке 5.33.



а)



б)

Рисунок 5.33 – Результаты моделирования работы канала управления скоростью движения НПА: а) график изменения скорости движения НПА; б) график изменения частоты вращения гребного винта

По данным рисунка 5.33 можно утверждать, что переходные процессы в исследуемой системе – аperiodические, а переключение между робастным и адаптивно-робастным режимами не вносит значительных возмущений в переходную характеристику системы. Согласно рисунку 5.33б, часть времени переходного процесса движитель находится в режиме насыщения, время работы в режиме насыщения не превышает 2.5 с. Такое течение переходного процесса

приемлемо, так как существующие модели движителей допускают работу под максимальной нагрузкой в течение нескольких минут.

Оценить время переходного процесса и перерегулирования по рисунку 5.43а не представляется возможным, так как эти показатели качества меняются с увеличением уставки. Проведем дополнительные эксперименты: измерим время переходного процесса и перерегулирование для различных значений уставки и угла атаки; полученные данные сведем в таблицы 5.1 и 5.2.

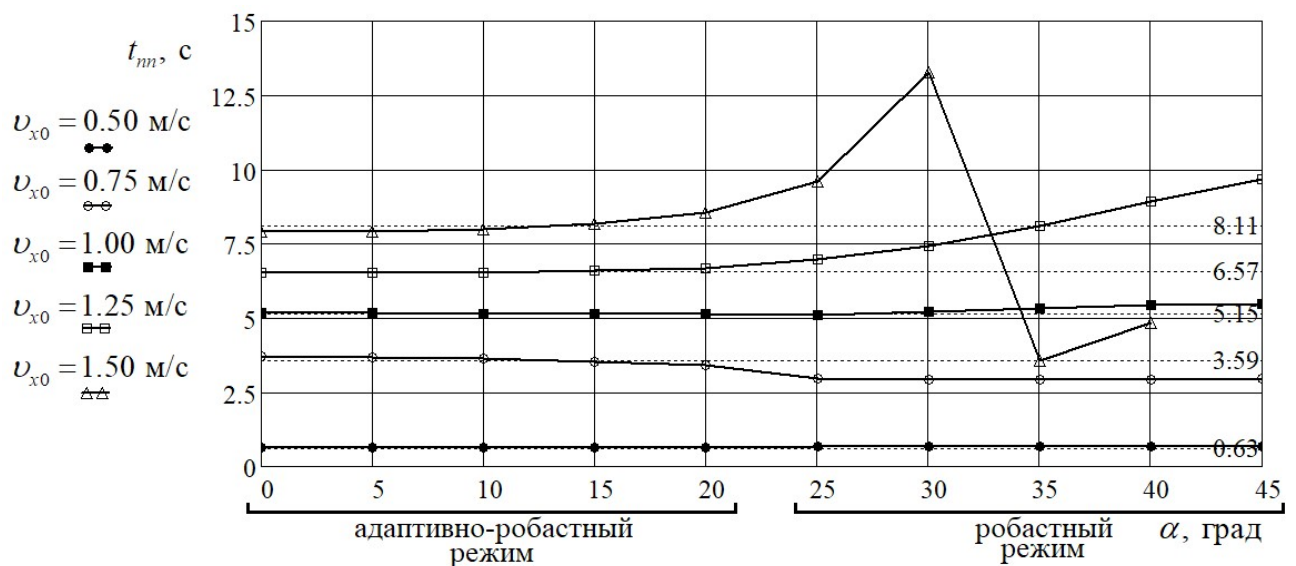
Таблица 5.1 – Показатели качества работы системы в адаптивно-робастном режиме

Уставка $v_{x0}$ , м/с	Параметр	Угол атаки $\alpha$ , град				
		0	5	10	15	20
0.50	$t_{nn}$ , с	0.63	0.63	0.63	0.64	0.64
	$\sigma$ , %	4.65	4.60	4.39	4.06	3.60
0.75	$t_{nn}$ , с	3.70	3.68	3.62	3.54	3.42
	$\sigma$ , %	10.61	10.58	10.43	10.20	9.86
1.00	$t_{nn}$ , с	5.18	5.16	5.15	5.13	5.12
	$\sigma$ , %	16.68	16.67	16.57	16.41	16.19
1.25	$t_{nn}$ , с	6.53	6.52	6.54	6.59	6.69
	$\sigma$ , %	22.34	22.34	22.26	22.10	21.82
1.50	$t_{nn}$ , с	7.91	7.92	8.00	8.18	8.56
	$\sigma$ , %	26.91	26.85	26.56	25.94	24.47

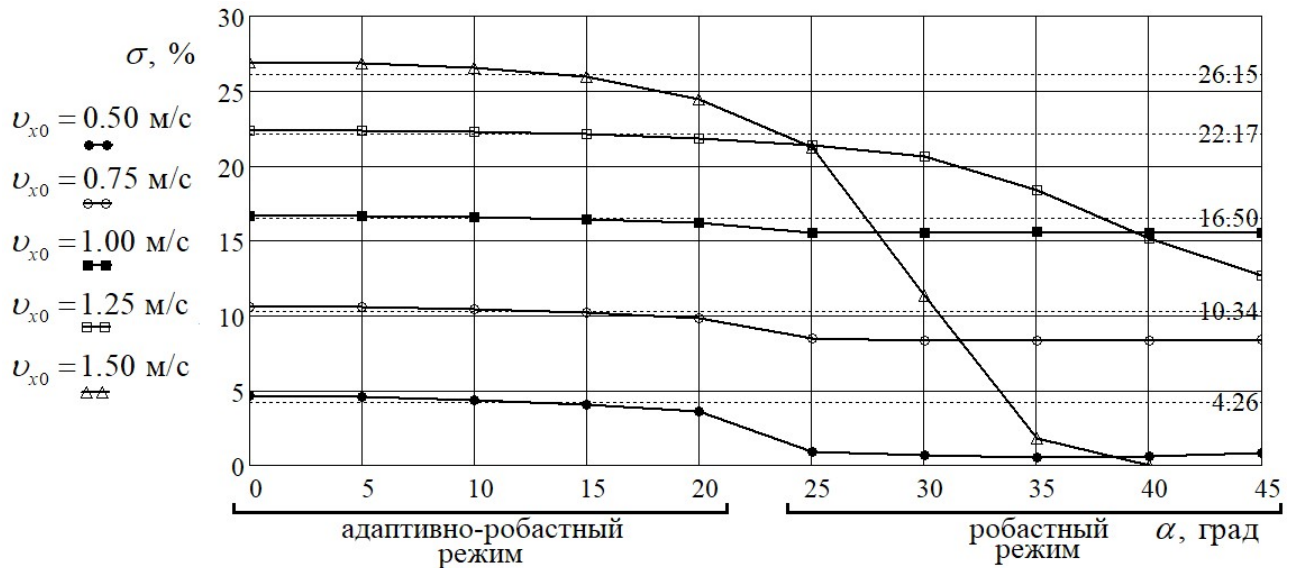
Таблица 5.2 – Показатели качества работы системы в робастном режиме

Уставка $v_{x0}$ , м/с	Параметр	Угол атаки $\alpha$ , град				
		25	30	35	40	45
0.50	$t_{nn}$ , с	0.67	0.67	0.67	0.67	0.67
	$\sigma$ , %	0.87	0.65	0.56	0.63	0.84
0.75	$t_{nn}$ , с	2.96	2.93	2.92	2.94	2.96
	$\sigma$ , %	8.46	8.35	8.30	8.31	8.38
1.00	$t_{nn}$ , с	5.10	5.21	5.34	5.43	5.48
	$\sigma$ , %	15.55	15.56	15.57	15.55	15.52
1.25	$t_{nn}$ , с	6.98	7.42	8.09	8.91	9.66
	$\sigma$ , %	21.39	20.59	18.38	15.15	12.71
1.50	$t_{nn}$ , с	9.60	13.28	3.564	4.84	–
	$\sigma$ , %	21.24	11.34	1.818	0	–

Оформим полученные данные в виде графиков зависимостей показателей качества от значений угла атаки для различных значений уставки; графики приведены на рисунке 5.34.



а)



б)

Рисунок 5.34 – Значения показателей качества работы системы для различных значений угла атаки и уставки: а) время переходного процесса; б) перерегулирование

Исходя из рисунка 5.34, можно утверждать, что исследуемая система имеет стабильные значения времени переходного процесса и перерегулирования в обоих режимах на скоростях движения НПА до 1 м/с для различных значений угла атаки. На скоростях выше 1 м/с в робастном режиме работы показатели качества системы значительно меняются в зависимости от значения угла атаки и отличаются от таковых для адаптивно-робастного режима. Так, например, для наибольшего рассмотренного значения уставки  $v_{x0} = 1.50$  м/с среднее значение времени переходного процесса равно  $t_{mn} = 8.11$  с для адаптивно-робастного режима и  $t_{mn} = 7.82$  с для робастного режима. При  $\alpha \in [0^\circ; 45^\circ]$  в адаптивно-робастном режиме время переходного процесса отклоняется от среднего значения не более чем на 5.50%, в робастном режиме – на 69.82%. Аналогично изменяется перерегулирование: средние значения для адаптивно-робастного и робастного режимов составили  $\sigma_1 = 26.15\%$  и  $\sigma_2 = 8.60\%$  соответственно; максимальные отклонения от средних значений составили 6.41% и 146.99% соответственно.

Также на основе рисунка 5.34 можно составить рекомендации по планированию миссии НПА под управлением синтезированной системы. В

частности при планировании миссии НПА следует рассчитывать на единовременное изменение уставки скорости НПА не более чем на 0.5 м/с без учета режима работы системы, либо не более чем на 1.5 м/с в адаптивно-робастном режиме.

Таким образом, из результатов имитационного моделирования работы канала регулирования скорости движения маршем можно сделать ряд выводов:

- синтезированные на основе линейной упрощенной модели системы регуляторы сохраняют работоспособность при проверке на модели с учетом нелинейностей;

- в адаптивно-робастном режиме обеспечивается более стабильное качество переходных процессов, чем в робастном режиме;

- отклонения показателей качества синтезированной системы, полученных на основе линейной модели, от значений тех же показателей, полученных на основе нелинейной модели, проявляются значительно с увеличением уставки и должны быть учтены при составлении рекомендаций по планированию миссии НПА.

Рассмотрим далее моделирование связной работы синтезированных каналов.

### 5.2.2 Имитационное моделирование двухрежимной трехсвязной системы управления движением НПА в вертикальной плоскости

Для имитационного моделирования связной работы каналов синтезированной системы необходимо доработать блоки Simulink, реализующие модели ДРК НПА, кинематики и динамики НПА, осуществляющего движение по трем степеням свободы. Блок двухрежимного регулятора используем из предыдущей модели без изменений (см. рисунок 5.31).

Аналогично модели канала управления скоростью движения НПА маршем реализуем в Simulink блок, моделирующий кинематику НПА при движении в вертикальной плоскости. Блок должен принимать на входы значения равнодействующих сил и моментов, действующих на НПА, и на выходах



формировать значения линейных и угловых скоростей НПА. Структура такого блока показана на рисунке 5.35.

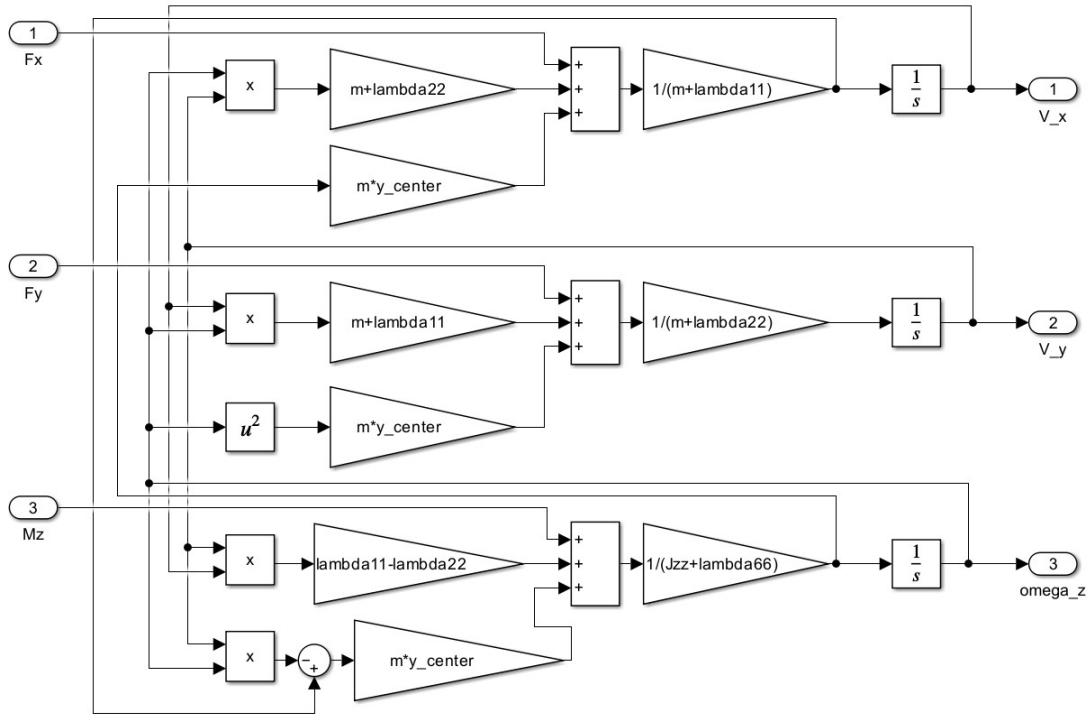


Рисунок 5.35 – Структура блока кинематики НПА для случая движения в вертикальной плоскости

Показанный на рисунке 5.35 блок реализует следующие соотношения между параметрами движения НПА в вертикальной плоскости:

$$\begin{cases} (m + \lambda_{11}) \cdot \dot{v}_x = F_x + m \cdot y_C \cdot \dot{\omega}_z + (m + \lambda_{22}) \cdot v_y \cdot \omega_z; \\ (m + \lambda_{22}) \cdot \dot{v}_y = F_y + m \cdot y_C \cdot \omega_z^2 - (m + \lambda_{11}) \cdot v_x \cdot \omega_z; \\ (J_{zz} + \lambda_{66}) \cdot \dot{\omega}_z = M_z + (\lambda_{11} - \lambda_{22}) \cdot v_x \cdot v_y - m \cdot y_C \cdot \omega_z \cdot v_y + m \cdot y_C \cdot \dot{v}_x. \end{cases}$$

Блок, моделирующий ДРК НПА, реализуем на основе уже созданного блока движителя с учетом того, что вертикальные движители используются для регулирования глубины и дифферента одновременно. При движении в вертикальной плоскости вертикальные движители используются одновременно для регулирования глубины и дифферента. Глубина изменяется под действием суммы тяг вертикальных движителей, а дифферент – под действием суммы создаваемых ими моментов. Для распределения мощности вертикальных движителей между каналами управления этими величинами введен весовой

коэффициент  $w \in [0;1]$ . Примем  $w = 0.5$ . Структура такого блока показана на рисунке 5.36.

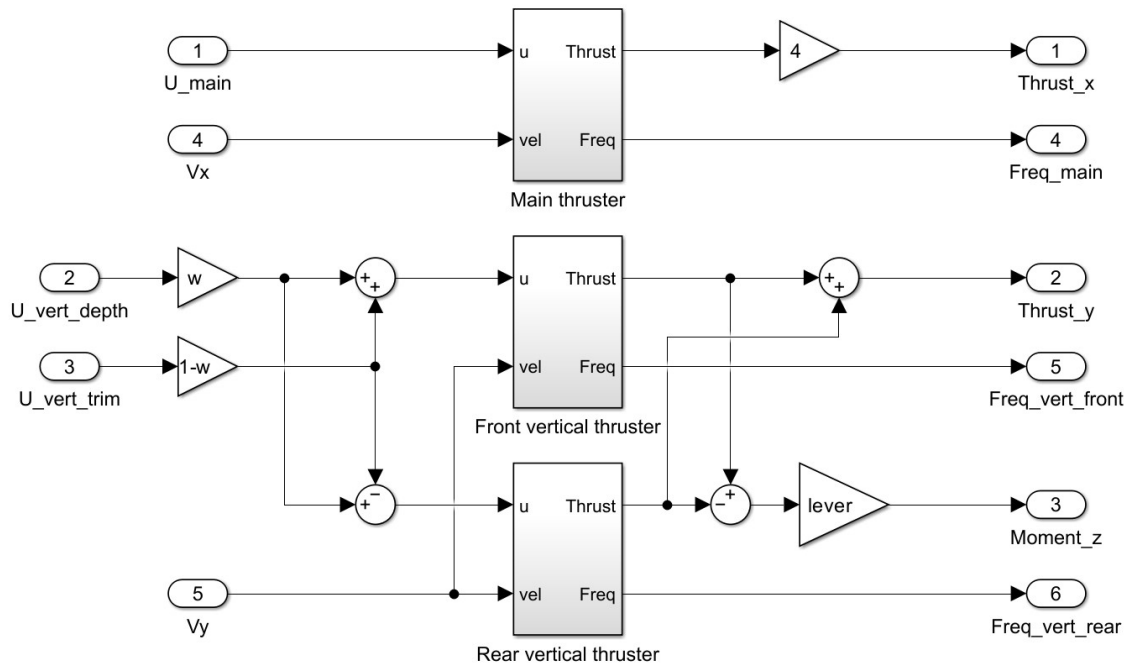


Рисунок 5.36 – Структура блока ДРК для случая движения НПА в вертикальной плоскости

На рисунке 5.37 показана траектория движения НПА при погружении на 10 м в условиях подводного течения с постоянной скоростью  $v_f = 0.1$  м/с и углом атаки  $\alpha_0 = 0^\circ$ .

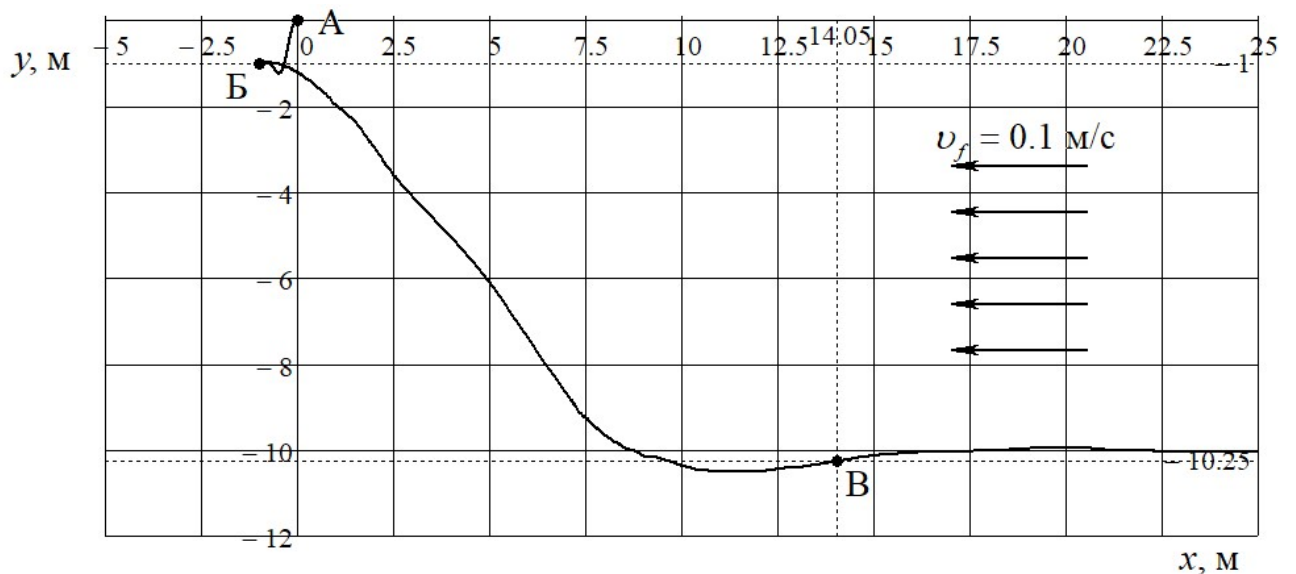
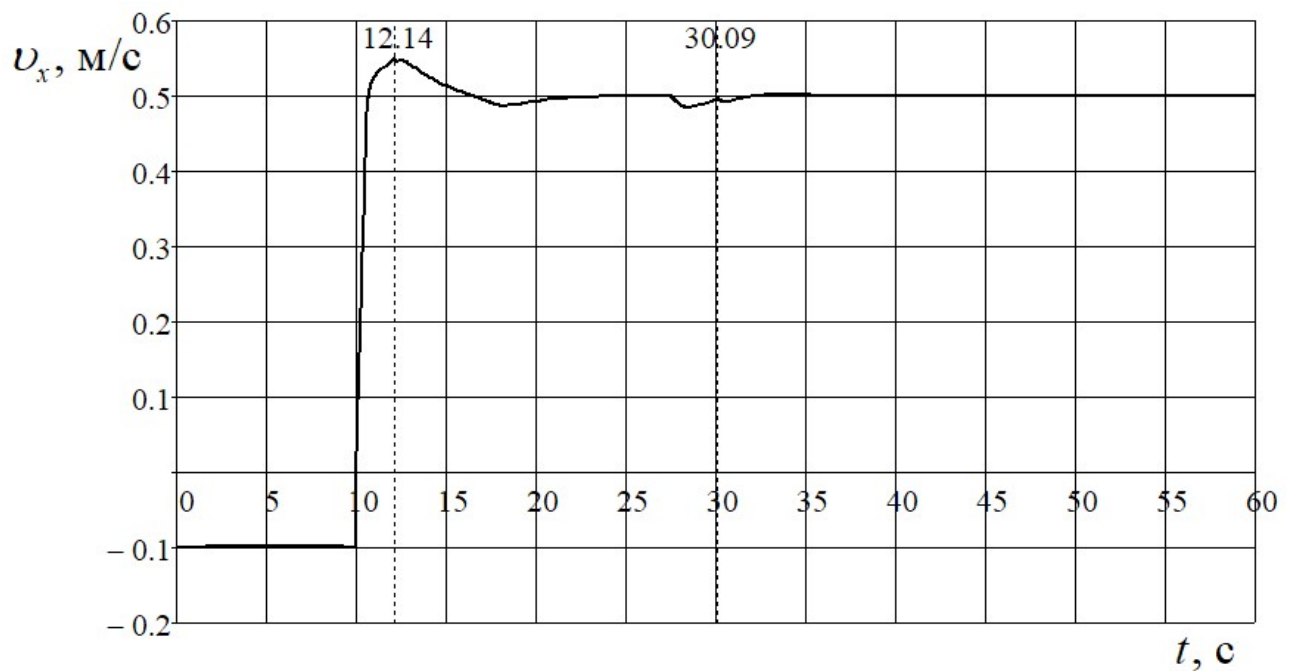


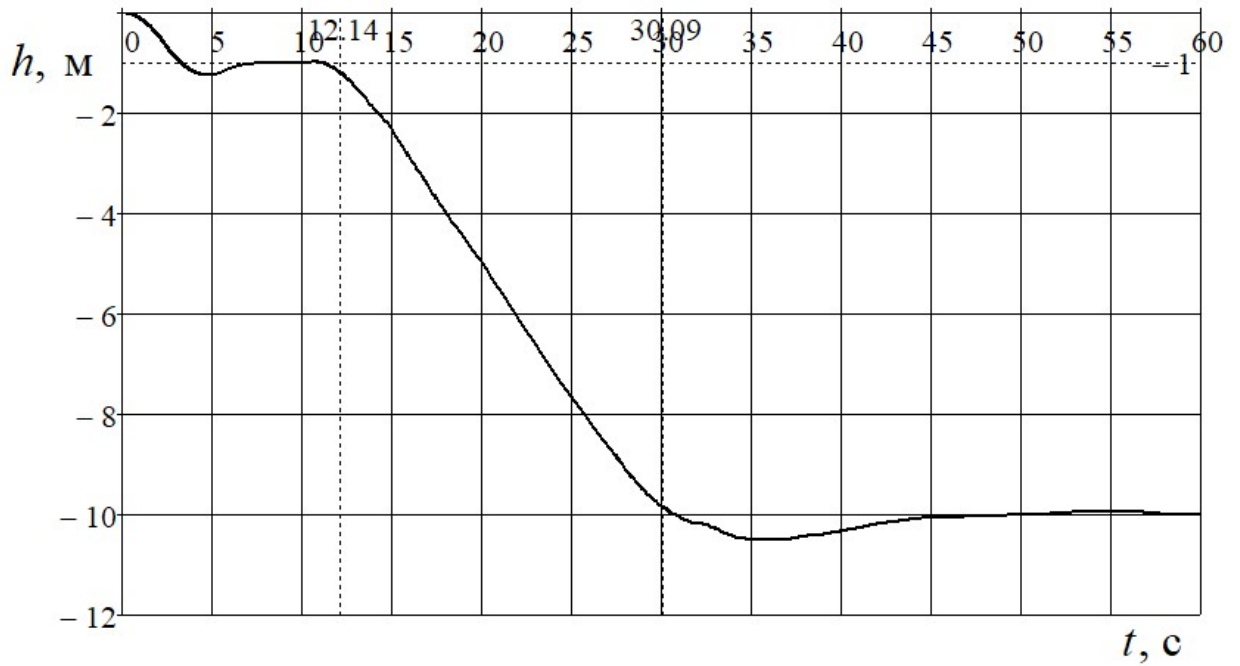
Рисунок 5.37 – Траектория движения НПА в трех степенях свободы под управлением синтезированной системы

Как показано на рисунке 5.37, движение начинается в точке А: уставка дифферента  $\psi$  равна  $0^\circ$ , уставка глубины  $h$  равна 1 м; управление скоростью движения маршем  $v_x$  не осуществляется. На участке траектории А-Б аппарат движется по вертикальной оси под управлением каналов регулирования глубины и дифферента; по горизонтальной оси – под действием скорости подводного течения. В точке Б канал регулирования глубины отключается, уставка скорости движения маршем равна 0.5 м, уставка дифферента –  $45^\circ$ . На участке траектории Б-В аппарат принимает дифферент на нос и за счет движения маршем перемещается одновременно по двум координатам. При приближении к точке В уставка дифферента меняется на  $0^\circ$  для перехода к движению на постоянной глубине. В точке В канал регулирования глубины включается с уставкой 10 м для дальнейшей стабилизации глубины. Таким образом, на каждом участке траектории движение осуществляется под управлением не менее чем двух связно работающих каналов.

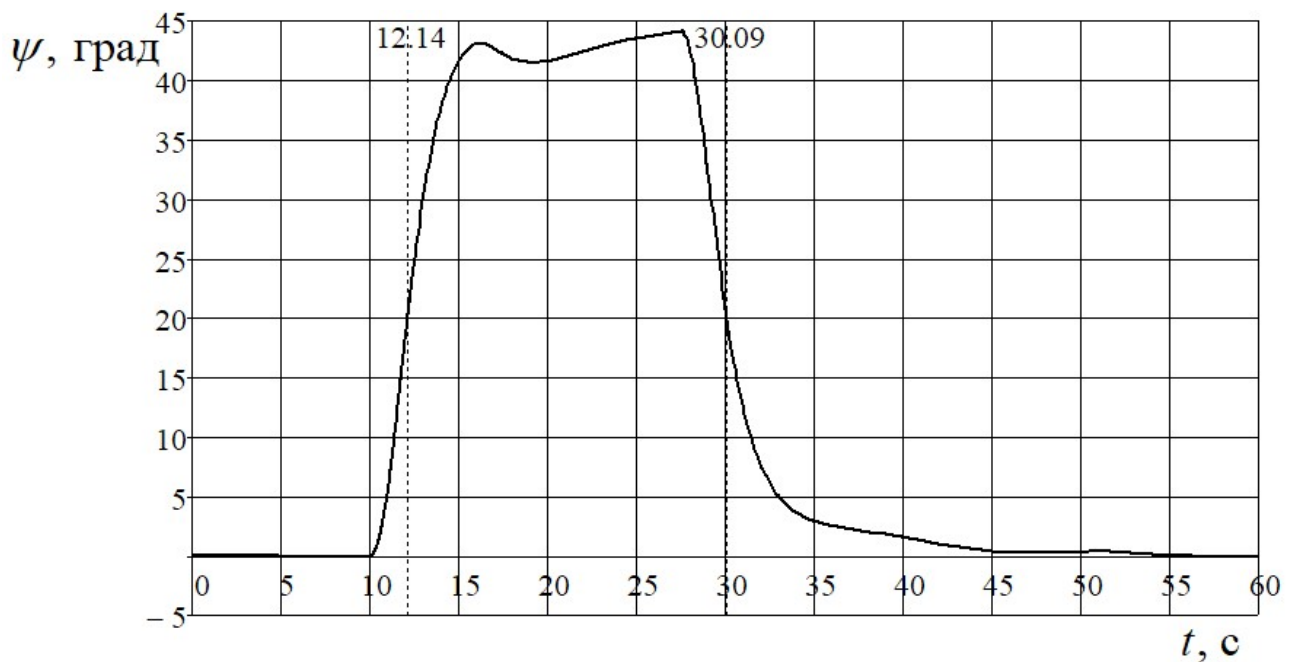
Рассмотрим далее графики изменения регулируемых параметров движения, показанные на рисунке 5.38.



а)



б)



в)

Рисунок 5.38 – Графики регулируемых параметров движения НПА в трех степенях свободы под управлением синтезированной системы: а) скорость движения маршем; б) глубина погружения; в) дифферент

В отрезок времени между 12.14 с и 30.09 с система работает в робастном режиме, так как угол атаки превышает пороговое значение в  $20^\circ$  за счет изменения дифферента; в остальное время система работает в адаптивно-

робастном режиме. Исходя из графиков на рисунке 5.38, можно утверждать, что двухрежимная трехсвязная система управления движением НПА в вертикальной плоскости с регуляторами, синтезированными для отдельных линейных каналов регулирования, сохраняет приемлемые динамические свойства, несмотря на нестационарность параметров неизменяемой части системы, ее нелинейность и многосвязность. В частности переходные процессы имеют аperiodический тип, длительность переходных процессов в итоговой системе приемлема и мало отличается от заданной при синтезе.

### 5.3 Основные результаты

В данной главе при помощи разработанных в главе 4 методик синтеза робастных и адаптивно-робастных регуляторов были рассчитаны регуляторы по задающему воздействию для двухрежимной системы управления движением НПА в вертикальной плоскости. Синтез выполнялся на основе модели, полученной в главе 2. Кроме того, из условия минимального коэффициента скоростной ошибки по возмущающему воздействию были синтезированы регуляторы, корректирующие управляющее воздействие по скорости подводного течения.

По результатам исследования системы с помощью упрощенной линеаризованной модели с интервальными параметрами, на основе которой проводился синтез, регуляторы обеспечивают аperiodические переходные процессы. Длительность и перерегулирование в канале управления скоростью движения маршем  $v_x$  не превышают 4.64 с и 3.93% в робастном режиме и 2.00 с и 5.46% в адаптивно-робастном режиме; в канале регулирования глубины  $h$  – 3.07 с и 0.54% в робастном режиме и 3.16 с и 0% в адаптивно-робастном режиме; в канале регулирования дифферента  $\psi$  – 7.57 с и 0% в робастном режиме и 7.57 с и 0% в адаптивно-робастном режиме. При этом было показано, что адаптивно-робастный регулятор обеспечивает более стабильное качество регулирования, чем робастный регулятор с постоянными параметрами. Таким

образом, в ходе синтеза были успешно достигнуты цели, сформулированные при анализе предметной области: в системе обеспечены апериодические переходные процессы приемлемой длительности с малым или нулевым перерегулированием.

По результатам имитационного моделирования канала регулирования скорости движения маршем  $v_x$  с учетом нелинейности объекта и исполнительного устройства можно утверждать, что синтезированный двухрежимный регулятор сохраняет работоспособность, обеспечивая в синтезированной системе апериодические переходные процессы. При этом время переходного процесса и перерегулирование изменяются для различных значений уставки.

По результатам моделирования связной работы трех каналов синтезированной системы можно утверждать, что система сохраняет работоспособность без дополнительных межканальных регуляторов в условиях многосвязности на уровне объекта. При этом ранее заданное качество переходных процессов сохраняется.

Таким образом, предложенные математическая модель системы управления движением НПА с интервальными параметрами и методики синтеза робастных и адаптивно-робастных регуляторов позволили синтезировать систему, сохраняющую работоспособность при движении НПА с большими углами атаки при наличии подводных течений в условиях многосвязности, нелинейности НПА и ДРК и интервальности их параметров.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подробные выводы по результатам каждого этапа исследований были приведены в конце соответствующих глав. В финальном заключении обобщим полученные результаты.

На основе известной модели связного движения НПА в шести степенях свободы была разработана упрощенная для синтеза регуляторов модель системы управления движением НПА в виде передаточных функций с интервальными параметрами. Ввод интервальных параметров позволил учесть в модели нестационарность параметров объекта управления и исполнительного устройства, их нелинейность и связность каналов управления движением НПА в различных степенях свободы. Полученная модель применена для описания системы управления движением в вертикальной плоскости конкретного НПА: показан пример идентификации интервальных параметров системы по результатам экспериментов с НПА, а также определены типы регуляторов и структура связей между ними.

На основе интервального расширения метода корневого годографа получено правило для поиска наборов проверочных вершин, образы которых определяют правые границы областей локализации доминирующих и свободных полюсов. Работоспособность сформулированного правила показана на примере нахождения набора проверочных вершин для системы четвертого порядка.

На основе найденных наборов проверочных вершин, модального подхода к синтезу и принципа доминирования полюсов разработаны методики синтеза адаптивно-робастных и робастных ПИ-регуляторов и ПИД-регуляторов, обеспечивающих постоянные и квазипостоянные значения корневых показателей робастного качества. В тексте главы приведены примеры синтеза регуляторов, демонстрирующие работоспособность методик.

С помощью разработанных методик и математической модели синтезированы регуляторы двухрежимной системы управления движением в вертикальной плоскости для исследуемого НПА. Работоспособность системы подтверждается ее исследованием на моделях разной степени детализации.

Проверка синтезированных регуляторов на модели с интервальными параметрами, на основе которой и выполнялся синтез, подтвердила работоспособность методик: желаемые значения корневых и прямых показателей робастного качества достигнуты в робастном и адаптивно-робастном режимах.

Проверка работоспособности регуляторов канала управления скоростью движения НПА маршем на нелинейной модели системы показала, что, хотя тип переходного процесса сохраняется, перерегулирование и время переходного процесса увеличиваются с ростом уставки регулируемой величины. Для сохранения пренебрежимо малого перерегулирования менее 5% предлагается составлять план миссии НПА и работающий в соответствии с ним программный задатчик скорости так, чтобы уставка канала регулирования скорости маршем не превышала 0.5 м/с.

Проверка связной работы трех синтезированных каналов (канала регулирования скорости движения НПА маршем, канала регулирования глубины и канала регулирования дифферента) показала, что переходные процессы в синтезированной системе сохраняют апериодический тип, приемлемую длительность и перерегулирование, несмотря на отсутствие межканальных регуляторов.

Таким образом, синтезированная с помощью разработанных математической модели и методик система управления движением НПА в вертикальной плоскости действительно имеет желаемые значения корневых и прямых показателей робастного качества, а также сохраняет их в условиях нелинейности и многосвязности, исходя из результатов имитационного моделирования. В качестве развития работы логично проверить работоспособность системы не только вычислительным, но и натурным экспериментом, и синтезировать в случае успеха полноразмерную систему для шести степеней свободы.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Инзарцев А. В., Павин А. М., Багницкий А. В. Планирование и осуществление действий обследовательского подводного робота на базе поведенческих методов //Подводные исследования и робототехника. – 2013. – №. 1. – С. 4-16.
2. Илларионов Г. Ю. Некоторые аспекты военного применения подводных роботов за рубежом //Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2012. – Т. 128. – №. 3.
3. Киселев Л. В. и др. Модели, системы и технологии подводных роботов и их применение для решения поисково-обследовательских задач //XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019. – 2019. – С. 3271-3278.
4. Опарин А. И. Оперативное комплектование и применение группировок разнородных средств ведения подводных исследований и работ //Extreme Robotics. – 2017. – Т. 1. – №. 1. – С. 431-439.
5. Инзарцев А. В. и др. Обнаружение и обследование локальных донных объектов с помощью группы специализированных автономных подводных роботов //Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2018. – №. 1 (195).
6. Спорышев М. С., Щербатюк А. Ф. Об использовании групп морских роботов для охраны водных акваторий: краткий обзор //Подводные исследования и робототехника. – 2018. – №. 2. – С. 21-27.
7. Инзарцев А. В. и др. Отладка алгоритмов инспекции подводных трубопроводов на борту АНПА с помощью удаленного высокопроизводительного моделирующего комплекса //Подводные исследования и робототехника. – 2018. – №. 2. – С. 28-36.
8. Кукарских А. К., Павин А. М. Электромагнитный искатель для обнаружения и отслеживания металлосодержащих подводных протяженных объектов //Приборы. – 2008. – №. 4. – С. 33-38.
9. Inzartsev A. V., Pavin A. M., Rylov N. I. Development of the AUV automatic docking methods based on echosounder and video data //2017 24th Saint Petersburg

International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS). – IEEE, 2017. – С. 1-6.

10. Киселев Л. В., Медведев А. В. О некоторых особенностях динамики автономного подводного робота при управлении эквидистантным движением вблизи дна //Гирроскопия и навигация. – 2019. – Т. 27. – №. 1. – С. 93-106.

11. Киселев Л. В., Медведев А. В. Сравнительный анализ и оптимизация динамических свойств автономных подводных роботов различных проектов и конфигураций //Подводные исследования и робототехника. – 2012. – №. 1. – С. 24.

12. Михайлов Д. Н. и др. Применение автономного необитаемого подводного аппарата для гидрографических исследований в Охотском море //Подводные исследования и робототехника. – 2017. – №. 2. – С. 4-13.

13. Розман Б. Я., Елкин А. В. Сверхлегкий подводный телеуправляемый обзорный аппарат //Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2018. – №. 11-2. – С. 219-223.

14. Гизитдинова М. Р., Кузьмицкий М. А. Мобильные подводные роботы в современной океанографии и гидрофизике //Фундаментальная и прикладная гидрофизика. – 2010. – Т. 3. – №. 1. – С. 4-13.

15. Дуленин А. А., Кудревский О. А. Использование легкого телеуправляемого необитаемого подводного аппарата для морских прибрежных гидробиологических исследований //Вестник Камчатского государственного технического университета. – 2019. – №. 48.

16. Крылов П. В. и др. Задачи обслуживания и мониторинга оборудования систем подводной добычи с учетом особенностей шельфовых месторождений Российской Федерации //Газовая промышленность. – 2018. – Т. 778. – №. 12.

17. Фирсов Ю. Г. Специальное навигационное обеспечение и точность батиметрической съемки для решения задач глубоководных геологоразведочных работ //Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. – 2019. – Т. 11. – №. 6. – С. 1070-1087.

18. Римский-Корсаков Н. А. Определение координат подводных природных объектов методом гидролокации бокового обзора //Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2017. – №. 12-1. – С. 148-153.
19. Римский-Корсаков Н. А. Технические средства для исследований дна акваторий гидролокационными методами //Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2017. – №. 10-2. – С. 205-213.
20. ГОСТ Р. 56960-2016. Аппараты необитаемые подводные: Утвержден и введен в действие Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 14 июня 2016 г. N 616-ст: дата введения 2017-04-01. – URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200136057> (дата обращения: 24.03.2023). – Текст: электронный.
21. Профилограф донный Н5Р1. Руководство по эксплуатации [Электронный ресурс] // ООО «Экран», 2020. URL: <http://hydrasonars.ru/component/jdownloads/send/37-/141-profilograf-donnyj-h5p1-rukovodstvo-po-ekspluatatsii-416219010-01om> (дата обращения: 10.09.2022).
22. WorkHorse. Horizontal ADCP Operation Manual [Электронный ресурс] // Communication Technology, 2008. URL: <https://www.commtec.com/Docs/Manuali/RDI/HADCPOR.PDF> (дата обращения: 10.09.2022).
23. Нестеров Н. А. и др. Гидролокационное обследование дна при геоморфологических исследованиях Ладожского озера //Ученые записки Российского государственного гидрометеорологического университета. – 2015. – №. 39. – С. 17-24.
24. Выполнение батиметрической съемки с помощью интерферометрического гидролокатора бокового обзора [Электронный ресурс] // ООО «Экран», 2020. URL: <http://hydrasonars.ru/component/jdownloads/send/35-/64-ss00008> (дата обращения: 10.09.2022).
25. Завьялов, В. В. Судовые навигационные эхолоты. В 2 ч. Ч. I. Теория. [Текст]: учеб. пособие /В. В. Завьялов, В. Ф. Полковников, А. И. Саранчин. – Владивосток: Мор. гос. ун-т, 2012. – 93 с.

26. Эхолот «Кристалл-40ВП». Руководство по эксплуатации. [Электронный ресурс] // ООО «Аларм-РНС», 2020. URL: <https://alarm-rns.ru/assets/files/2023-03-17-13-39-15-rukovodstvo-kristall-40vp.pdf> (дата обращения: 10.09.2022).
27. Нерсесов Б. А. Особенности поиска подводных потенциально опасных объектов в Балтийском море //Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2017. – №. 11-2. – С. 270-275.
28. Магнитометр протонный двухканальный наземный ММПГ-1. Руководство по эксплуатации. [Электронный ресурс] // ООО «Сервисная геологофизическая компания», 2001. URL: <http://geophysmethod.ru/images/MMPG.pdf> (дата обращения: 10.09.2022).
29. Багницкий А. В., Инзарцев А. В. Автоматизация подготовки миссии для АНПА в задачах обследования акваторий //Подводные исследования и робототехника. – 2010. – №. 2. – С. 17-24.
30. Пантов Е. Н. и др. Основы теории движения подводных аппаратов //Л.: Судостроение. – 1973. – Т. 210.
31. Лукомский Ю. А., Чугунов В. С. Системы управления морскими подвижными объектами //Л.: Судостроение. – 1988. – С. 272.
32. Матвиенко Ю. В. и др. Перспективы повышения эффективности автономных подводных роботов //Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2016. – №. 1 (174).
33. Раговский А. П. Интеллектуальная динамическая система формирования заданий для автономных необитаемых подводных аппаратов //Проблемы развития корабельного вооружения и судового радиоэлектронного оборудования. – 2015. – №. 4. – С. 100-108.
34. Пшихопов В. Х. и др. Разработка интеллектуальной системы управления автономного подводного аппарата //Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2014. – №. 3 (152).
35. Инзарцев А. В., Сидоренко О. Ю., Хмельков Д. Б. Архитектурные конфигурации систем управления АНПА //Подводные исследования и робототехника. – 2006. – №. 1. – С. 18-30.

36. Боровик А. И., Наумов Л. А. Компонентно-ориентированная система управления АНПА ММТ-2012 //Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2014. – №. 3 (152).
37. Инзарцев А. В. Методы формирования поведения и проектирования программного обеспечения обследовательского автономного подводного робота: диссертация ... доктора технических наук: 05.13.11; [Место защиты: Ин-т проблем упр. им. В.А. Трапезникова РАН]. – Владивосток, 2012. – 297 с.
38. Лямина Е. А. Подходы к построению системы управления угловым положением необитаемого подводного аппарата без ограничений на углы наклона //Труды Крыловского государственного научного центра. – 2018. – №. Спецвыпуск 1.
39. Гостилович С. О., Гостилович А. О. Разработка и исследование системы управления движением подводного аппарата в вертикальной плоскости. Синтез контура дифферента. – 2018.
40. Сосновский К. И. Алгоритм управления движением необитаемым подводным аппаратом в продольной плоскости //Неделя науки Санкт-Петербургского государственного морского технического университета. – 2019. – Т. 1. – №. 1. – С. 99-99.
41. Юхимец Д. А., Филаретов В. Ф. Системы контурного управления для автономного подводного аппарата //Робототехника и техническая кибернетика. – 2015. – №. 2. – С. 56-60.
42. Егоров С. А., Молчанов А. В. Обзор алгоритмов локальных контуров управления движением подводных аппаратов //Машиностроение и компьютерные технологии. – 2011. – №. 13.
43. Костенко В. В., Толстоногов А. Ю. Управление глубиной погружения необитаемого подводного аппарата, оснащенного системой регулирования плавучести //Подводные исследования и робототехника. – 2019. – №. 1. – С. 4-11.
44. Lakhekar G. V. et al. Robust Diving Motion Control of an Autonomous Underwater Vehicle Using Adaptive Neuro-Fuzzy Sliding Mode Technique //IEEE Access. – 2020. – Т. 8. – С. 109891-109904.

45. Joo M. G., Qu Z. An autonomous underwater vehicle as an underwater glider and its depth control //International Journal of Control, Automation and Systems. – 2015. – Т. 13. – №. 5. – С. 1212-1220.
46. Abdullah A. M. et al. Review of the control system for an unmanned underwater remotely operated vehicle //Engineering Applications for New Materials and Technologies. – Springer, Cham, 2018. – С. 609-631.
47. Киселев Л. В., Медведев А. В. О параметрических соотношениях гидродинамики и устойчивости движения автономного подводного робота //Подводные исследования и робототехника. – 2013. – №. 1. – С. 17-22.
48. Киселев Л. В., Медведев А. В. Траекторное обследование границ морских акваторий группой автономных подводных роботов //Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2018. – №. 3 (197).
49. Гуренко Б. В. и др. Разработка и исследование позиционно-траекторного регулятора для управления движением подводного глайдера //Инженерный вестник Дона. – 2019. – №. 6 (57).
50. Костенко В. В. и др. Оценка требований к гребному электроприводу автономного необитаемого подводного аппарата //Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2017. – №. 1 (186).
51. Борисенко Н. А., Белоусов М. О. Разработка упрощенной математической модели телеуправляемого необитаемого подводного аппарата //Интеллектуальные системы, управление и мехатроника-2019. – 2019. – С. 5-9.
52. Mohan S., Kim J. Coordinated motion control in task space of an autonomous underwater vehicle–manipulator system //Ocean Engineering. – 2015. – Т. 104. – С. 155-167.
53. He B. et al. A distributed parallel motion control for the multi-thruster autonomous underwater vehicle //Mechanics Based Design of Structures and Machines. – 2013. – Т. 41. – №. 2. – С. 236-257.
54. Watson S. A., Crutchley D. J. P., Green P. N. The design and technical challenges of a micro-autonomous underwater vehicle ( $\mu$ AUV) //2011 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. – IEEE, 2011. – С. 567-572.

55. Li Z. et al. Robust adaptive motion control for underwater remotely operated vehicles with velocity constraints //International Journal of Control, Automation and Systems. – 2012. – Т. 10. – №. 2. – С. 421-429.
56. Du X. et al. Analysis of hydrodynamic characteristics of unmanned underwater vehicle moving close to the sea bottom //Defence Technology. – 2014. – Т. 10. – №. 1. – С. 76-81.
57. Jeong S. K. et al. Design and control of high speed unmanned underwater glider //International Journal of Precision Engineering and Manufacturing-Green Technology. – 2016. – Т. 3. – №. 3. – С. 273-279.
58. Valeriano-Medina Y. et al. Dynamic model for an autonomous underwater vehicle based on experimental data //Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems. – 2013. – Т. 19. – №. 2. – С. 175-200.
59. García-Valdovinos L. G. et al. Modelling, design and robust control of a remotely operated underwater vehicle //International Journal of Advanced Robotic Systems. – 2014. – Т. 11. – №. 1. – С. 1.
60. Вельтищев В. В. Анализ влияния скошенного потока на рабочие характеристики движителей необитаемых подводных аппаратов //Вестник Московского государственного технического университета им. НЭ Баумана. Серия «Машиностроение». – 2010.
61. Бражко А. С., Король Ю. М. Моделирование работы гребного винта в насадке в косом набегающем потоке //Збірник наукових праць Національного університету кораблебудування. – 2013. – №. 1. – С. 30-36.
62. Подводные робототехнические комплексы: системы, технологии, применение / А. В. Инзарцев, Л. В. Киселев, В. В. Костенко, Ю. В. Матвиенко, А. М. Павин, А. Ф. Щербатюк; [отв. ред. Л. В. Киселев]; ФГБУН Ин-т проблем морских технологий ДВО РАН. – Владивосток, 2018. – 368 С.
63. Васильев И. А., Вохминцев Д. А., Половко С. А. Возникновение сил сопротивления движению подводных роботов и других объектов морского базирования при работе подруливающих устройств //Робототехника и техническая кибернетика. – 2017. – №. 1. – С. 51.

64. Костенко В. В., Толстоногов А. Ю. Задача декомпозиции управления движением АНПА с учетом изменяющихся ограничений маршевых движителей //Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2019. – №. 1 (203).
65. Смольников А. В. Пример синтеза системы динамического позиционирования автономного подводного аппарата // Системы управления и обработки информации. – 2017. – №. 4. – С. 43-51.
66. Зуев А. В., Жирабок А. Н. Разработка системы функционального диагностирования движителей подводных аппаратов //Известия ЮФУ. Технические науки. – 2020. – №. 1.
67. Костенко В. В., Михайлов Д. Н. Разработка телеуправляемого подводного аппарата "МАКС-300" //Подводные исследования и робототехника. – 2012. – №. 1. – С. 36-45.
68. Костенко В. В., Михайлов Д. Н., Найдено Н. А. Аппаратно-программные средства идентификации характеристик движителя подводного аппарата //Материалы восьмой научно-практической конференции «Перспективные системы и задачи управления». – 2013. – С. 63.
69. Aras M. S. M. et al. Thruster modelling for underwater vehicle using system identification method //International Journal of Advanced Robotic Systems. – 2013. – Т. 10. – №. 5. – С. 252.
70. Bessa W. M., Dutra M. S., Kreuzer E. Dynamic positioning of underwater robotic vehicles with thruster dynamics compensation //International Journal of Advanced Robotic Systems. – 2013. – Т. 10. – №. 9. – С. 325.
71. Palmer A., Hearn G. E., Stevenson P. Modelling tunnel thrusters for autonomous underwater vehicles //IFAC Proceedings Volumes. – 2008. – Т. 41. – №. 1. – С. 91-96.
72. Tran N. H. et al. Study on Design, Analysis and Control an Underwater Thruster for Unmanned Underwater Vehicle (UUV) //International Conference on Advanced Engineering Theory and Applications. – Springer, Cham, 2017. – С. 753-764.



73. Патент № 2609618 С1 Российская Федерация, МПК В63G 8/00, В63С 11/48. Подводный робототехнический комплекс : № 2015147580 : заявл. 05.11.2015 : опубл. 02.02.2017 / В. В. Чернявец.
74. Патент на полезную модель № 201786 U1 Российская Федерация, МПК В63G 5/00, G01S 5/02. Автоматическое устройство пространственной ориентации подвижного подводного объекта : № 2020101510 : заявл. 09.06.2018 : опубл. 13.01.2021 / В. И. Поленин, А. В. Новиков, А. О. Попко ; заявитель Федеральное государственное казенное военное образовательное учреждение высшего образования "Военный учебно-научный центр Военно-Морского Флота "Военно-морская академия им. Адмирала Флота Советского Союза Н.Г. Кузнецова".
75. Патент № 2483327 С2 Российская Федерация, МПК G01S 15/88. Интегрированный комплекс навигации и управления движением для автономных необитаемых подводных аппаратов : № 2011131950/28 : заявл. 01.08.2011 : опубл. 27.05.2013 / С. Я. Суконкин, В. В. Чернявец, В. Н. Афанасьев [и др.] ; заявитель Российская Федерация, от имени которой выступает Министерство промышленности и торговли Российской Федерации.
76. Филаретов В. Ф. Устройства и системы управления подводных роботов / В. Ф. Филаретов, А. В. Лебедев, Д. А. Юхимец ; [отв. редактор Ю.Н. Кульчин]; Ин-т автоматизации и процессов управления ДВО РАН. – М.: Наука, 2005. – 270 С.
77. Фам В. Т. Нечеткое управление процессом стабилизации телеуправляемого подводного робота //Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям. – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина), 2020. – Т. 1. – С. 119-122.
78. Сакович С. Ю., Сиек Ю. Л. Позиционное управление движением необитаемого подводного аппарата по видеоинформации при осмотре подводного трубопровода //Морские интеллектуальные технологии. – 2018. – №. 2-1. – С. 127-133.

79. Pham T. V., Shpektorov A. G. Comparative analysis of fuzzy regulators for controlling the movement of an autonomous underwater vehicle //2018 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus). – IEEE, 2018. – С. 954-957.
80. Hassanein O., Anavatti S. G., Ray T. Fuzzy modeling and control for autonomous underwater vehicle //The 5th International Conference on Automation, Robotics and Applications. – IEEE, 2011. – С. 169-174.
81. Wang Y. et al. Fuzzy controller used smoothing function for depth control of autonomous underwater vehicle //OCEANS 2016-Shanghai. – IEEE, 2016. – С. 1-5.
82. Свищев Н. Д., Рыбаков А. В. Интеллектуальное управление подводным роботом на основе искусственной нейронной сети //Biological cybernetics. – 2017. – Т. 111. – №. 1. – С. 105-127.
83. Цвенгер И. Г., Низамов И. Р. Применение нейросетевых регуляторов в системах управления электроприводами //Вестник Казанского технологического университета. – 2017. – Т. 20. – №. 8.
84. Еременко Ю. И., Полещенко Д. А., Глущенко А. И. О применении нейросетевого оптимизатора параметров ПИ-регулятора для управления нагревательными печами в различных режимах работы //Управление большими системами: сборник трудов. – 2015. – №. 56.
85. Величко Е. П., Сокольчик П. Ю. Применение нейросетевого регулятора в системах позиционного регулирования //Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Химическая технология и биотехнология. – 2015. – №. 2.
86. Еременко Ю. И., Глущенко А. И., Фомин А. В. О применении нейросетевого настройщика параметров ПИ-регулятора на тепловых объектах горно-металлургической отрасли в режиме отработки возмущений //Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2017. – №. 12.
87. Стафейчук Б. Г., Шакирова А. Я. Исследование адаптивной системы автоматического регулирования с применением нейросетевых технологий на

- имитационной модели реактора //Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Химическая технология и биотехнология. – 2019. – №. 2.
88. Лебедев А. В., Филаретов В. Ф. Самонастраивающаяся система с эталонной моделью для управления движением подводного аппарата //Автометрия. – 2015. – Т. 51. – №. 5. – С. 42-52.
89. Караваев Ю. Л. и др. Нейросетевая система управления многозвенным колесным мобильным роботом //XXX Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС-2018). – 2019. – С. 468-471.
90. Гайдук А. Р., Капустян С. Г., Шаповалов И. О. Алгоритм управления движением группы мобильных роботов в условиях неопределенности //Инженерный вестник Дона. – 2018. – №. 3 (50). – С. 89.
91. Дарьина А. Н., Прокопьев И. В. Метод нейросетевого управления в реальном времени на основе синтеза функции выбора //Надежность и качество сложных систем. – 2019. – №. 4 (28). – С. 41-50.
92. Гайдук А. Р. и др. Синтез системы управления движением группы мобильных роботов в условиях неопределенности //Известия Юго-Западного государственного университета. – 2018. – Т. 22. – №. 4. – С. 112-122.
93. Рыбин И. А., Рубанов В. Г. Робастная модальность мобильного робота с интервальной неопределенностью параметров и запаздыванием в канале управления //Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2017. – №. 2 (187). – С. 209-220.
94. Жуков Н. А. Исследование робастной устойчивой системы автоматического управления мобильным роботом //Международная научно-техническая конференция молодых ученых БГТУ им. ВГ Шухова. – 2015. – С. 2839-2844.
95. Vehí J., Figueras A., Luo N. Interval pi velocity control of a non-holonomic mobile robot //IFAC Proceedings Volumes. – 2000. – Т. 33. – №. 4. – С. 379-383.

96. Иванова К. Ф. Модальное управление системами в условиях ограниченной интервальности параметров //Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2018. – Т. 61. – №. 3. – С. 210-218.
97. Несенчук, А. А. Обеспечение робастной устойчивости интервального технического объекта с использованием корневого подхода / А. А. Несенчук // Энергосбережение – важнейшее условие инновационного развития АПК : материалы Международной научно-технической конференции, посвященной 65-летию агроэнергетического факультета и 100-летию И. Ф. Кудрявцева, Минск, 21-22 декабря 2022 г. – Минск : БГАТУ, 2023. – С. 301-304.
98. Суходоев М. С. Корневой анализ и синтез систем с интервальными параметрами на основе вершинных характеристических полиномов: диссертация ... кандидата технических наук: 05.13.01; [Место защиты: Том. политехн. ун-т]. – Томск, 2008. – 135 с.
99. Азаров М. М., Ляпин В. И., Кудинов О. Б. Методы и алгоритмы автоматического управления движением судов по линии заданного радиуса поворота //Системы управления и обработки информации. – 2016. – №. 4. – С. 28-47.
100. Маркова Н.В., Багаев А.В. Оценка скоростей глубоководных течений в Черном море по данным дрейфующих буев-профилемеров Argo // Морской гидрофизический журнал. 2016. №3 (189)
101. Гусев Ю. М. и др. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). I. Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов //Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. – 1991. – №. 1. – С. 3-23.
102. Удерман Э. Г. Метод корневого годографа в теории автоматических систем. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1972. – 448 С.
103. Поляк Б. Т. Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. – М.: Наука, 2002. – 303 С.
104. Хожаев И.В., Определение вершинных полиномов для анализа степени робастной устойчивости интервальной системы / С.А. Гайворонский, Т.А.

Езангина, И.В. Хожаев, А.А. Несенчук // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2019. – Т. 20, № 5. – С. 266-273.

105. Khozhaev I.V., Determination of Vertices and Edges in a Parametric Polytope to Analyze Root Indices of Robust Control Quality / S. Gayvoronskiy, T. Ezangina, I. Khozhaev, V. Kazmin // International Journal of Automation and Computing. – 2019. – Vol. 16, No. 6. – P. 828-837.

106. Хожаев И.В., Параметрический синтез робастного регулятора на основе метода доминирующих полюсов / С.А. Гайворонский, Т.А. Езангина, И.В. Хожаев // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2020. – Т. 21, № 1. – С. 14-20.

107. Khozhaev, I.V. Motion control system for a remotely operated vehicle with interval parameters / S.A. Gayvoronskiy, I.V. Khozhaev, T.A. Ezangina // International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research. – 2017. – Vol. 6, No. 5. – P. 378-384.

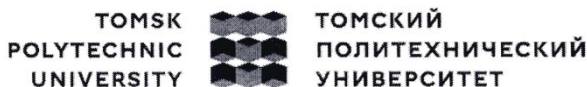
108. Khozhaev I.V., Parametrical synthesis of linear controllers in aperiodical systems on basis of decomposition approach / S.A. Gayvoronskiy, I. Khozhaev, M. Pushkarev, T. Ezangina // International Review of Automatic Control. – 2019. – Vol. 12, No. 4. – P. 192-199.

109. Хожаев, И.В. Адаптивно-робастная стабилизация корневых показателей качества интервальных систем на основе метода доминирующих полюсов / И.В. Хожаев, С.А. Гайворонский, Т.А. Езангина // Проблемы управления. – 2019. – № 6. – С. 22-31 (Khozhaev, I.V. Adaptive-Robust Stabilization of Interval Control System Quality on a Base of Dominant Poles Method/ Khozhaev I.V., Gayvoronskiy S.A., Ezangina T.A. // Automation and Remote Control. – 2021. – Vol. 82. – P. 132-144).

110. Khozhaev I.V. Adaptive Robust Stabilization of an Aperiodic Transient Process Control Quality in Systems with Interval Parametric Uncertainty // IFAC-PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, No 32. – P. 826-831.

111. Khozhaev I.V., Multivariable control system of vertical motion for an unmanned underwater vehicle with interval parameters / I.V. Khozhaev, T.A. Ezangina, S.A. Gayvoronskiy, M.S. Sukhodoev // International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research. – 2018. – Vol. 7, No. 6. – P. 679-683.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
 федеральное государственное автономное  
 образовательное учреждение высшего образования  
 «Национальный исследовательский Томский политехнический университет» (ТПУ)

№ \_\_\_\_\_ «УТВЕРЖДАЮ»  
 на № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ Заместитель проректора по науке и  
 стратегическим проектам  
 И.Б. Степанов  
 \_\_\_\_\_ 2023 г.



о внедрении результатов диссертационной работы ассистента Томского политехнического университета Хожаева Ивана Валерьевича на тему «Синтез адаптивного и робастного регуляторов для модального двухрежимного управления движением необитаемого подводного аппарата» в научно-исследовательской лаборатории телекоммуникаций, приборостроения и морской геологии Инженерной школы информационных технологий и робототехники ФГАОУ ВО НИ ТПУ.

Настоящим актом подтверждаем, что результаты диссертационной работы И.В. Хожаева используются в научно-исследовательской лаборатории телекоммуникаций, приборостроения и морской геологии при разработке систем автоматического управления движением необитаемых подводных аппаратов.

К данным результатам относятся:

– математическая модель исполнительного уровня системы автоматического управления движением необитаемого подводного аппарата с интервальными параметрами;

– методика параметрического синтеза робастных модальных регуляторов пониженного порядка, гарантирующих желаемые квазипостоянные значения корневых показателей качества систем автоматического управления движением необитаемых подводных аппаратов;

– методика параметрического синтеза адаптивно-робастных модальных регуляторов пониженного порядка, гарантирующих желаемые постоянные значения корневых показателей качества систем автоматического управления движением необитаемых подводных аппаратов.

Результаты диссертационной работы получены при выполнении грантов Госзадание «Наука» (проектная часть) №4.1751.ГЗП.2017 «Программно-измерительный комплекс для управления движением необитаемых подводных аппаратов в условиях нестационарности параметров» и РФФ №18-79-00264 «Разработка многорежимной системы управления движением необитаемого подводного аппарата с нестационарными параметрами на основе анализа взаимовлияния каналов регулирования».

Внедренные результаты позволяют упростить структуру и повысить качество работы системы управления движением необитаемого подводного аппарата при наличии подводных течений.

Директор ИШИТР ТПУ,  
 к.т.н., доцент

А.С. Фадеев

И.о. заведующего НИЛ ТПМГ,  
 к.т.н., доцент

Ю.А. Чурсин





Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Томский политехнический университет» (ТПУ)

№ \_\_\_\_\_ «УТВЕРЖДАЮ»  
на № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ И. О. проректора по  
образовательной деятельности  
М.А. Соловьев  
» \_\_\_\_\_ 2023 г.



**АКТ**  
о внедрении результатов диссертационной работы ассистента Томского политехнического университета Хожаева Ивана Валерьевича на тему «Синтез адаптивного и робастного регуляторов для модального двухрежимного управления движением необитаемого подводного аппарата» в учебный процесс Отделения автоматизации и робототехники Инженерной школы информационных технологий и робототехники ФГАОУ ВО НИ ТПУ.

Комиссия в составе председателя – директора ИШИТР, к.т.н., доцента А.С. Фадеева и ее членов: руководителя ОАР ИШИТР, к.т.н., доцента А.А. Филипаса; к.т.н., доцента М.С. Суходоева; к.т.н., доцента В.В. Курганова, составила настоящий акт о внедрении в учебный процесс ОАР следующих результатов диссертационной работы Хожаева И.В.:

– математическая модель исполнительного уровня системы автоматического управления движением необитаемого подводного аппарата с интервальными параметрами;





– методика параметрического синтеза робастных модальных регуляторов пониженного порядка, гарантирующих желаемые квазипостоянные значения корневых показателей качества систем управления с интервальными параметрами;

– методика параметрического синтеза адаптивно-робастных модальных регуляторов пониженного порядка, гарантирующих желаемые постоянные значения корневых показателей качества систем управления с интервальными параметрами.

Указанные результаты используются для подготовки бакалавров по направлению 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств» и 15.03.06 «Мехатроника и робототехника» при проведении лабораторных работ по дисциплинам «Теория автоматического управления» и «Моделирование систем управления», а также при выполнении исследовательских, курсовых и выпускных квалификационных работ студентов.

Председатель

Члены комиссии

 А.С. Фадеев  
 А.А. Филипас  
 М.С. Суходоев  
 В.В. Курганов



634045, г. Томск,

ул. Нефтяная,

д. 5а, к. 161

Тел: +7-923-408-0408

E-mail: [alexey.kalentyev@50ohm.tech](mailto:alexey.kalentyev@50ohm.tech)

ОКПО 01605389, ОГРН 1167031056301, ИНН 7017398640, КПП 701701001

## АКТ

об использовании результатов диссертационной работы Хожаева Ивана Валерьевича на тему «Синтез адаптивного и робастного регуляторов для модального двухрежимного управления движением необитаемого подводного аппарата» по специальности 2.3.1 «Системный анализ, управление и обработка информации, статистика» в ООО «50ом Технолоджиз».

В диссертационном исследовании Хожаева И.В. был получен следующий результат:

– правило поиска наборов вершин многогранника коэффициентов интервальных характеристических полиномов различных порядков, включающих в себя прообразы заданных комплексно-сопряженных доминирующих полюсов и граничных свободных полюсов систем управления.

В научно-исследовательской деятельности предприятия методы интервального анализа были применены для вычислительно эффективной оценки технологического разброса параметров радиоэлектронной схемы по известным допускам номиналов её элементов. Применение правила поиска наборов вершин многогранника коэффициентов интервальных характеристических полиномов позволяет определить схемы, устойчивые к технологическому разбросу.

Директор ООО «50ом Тех.»



/ Калентьев А.А. /

07.07.2023