

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТИ РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТОВ ПОСТРОЕНИЯ ЦИФРОВЫХ МОДЕЛЕЙ АПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ КОМПОНЕНТОВ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ

Глазырин А.С.¹, Попов Е.И.², Копырин В.А.³, Кладиев С.Н.⁴

¹НИ ТПУ, профессор

E-mail: asglazyrin@tpu.ru

²Тюменский индустриальный университет

E-mail: popovei72@mail.ru

³Тюменский индустриальный университет, доцент

E-mail: kopyrinva@gmail.com

⁴НИ ТПУ, доцент

E-mail: kladiev@tpu.ru

В теории автоматического управления под динамической системой понимается объект или процесс, для которого определено понятие состояния и задан закон эволюции во времени с помощью математического аппарата систем дифференциальных, интегральных, разностных или иных уравнений [1]. Примером динамической системы является электротехнический комплекс (ЭТК), включающий кабельную линию, трансформатор, электрический привод с преобразователем частоты и своей системой управления, а также другие элементы.

Любая динамическая система может быть представлена в виде совокупности подсистем [2]. Компонентом ЭТК электропривода при его математическом моделировании является апериодическое звено первого порядка – рассматриваемая в статье подсистема. Оно входит в состав как математической модели самого объекта, так и различных регуляторов и фильтров в системе управления электроприводом.

При разработке фильтров и регуляторов объектов управления система дифференциальных уравнений последних приводится к операторному виду согласно преобразованию Лапласа и представляется в виде передаточных функций, работающих в непрерывном времени. Представление регуляторов, фильтров и элементов электропривода в виде апериодического звена позволяет перейти от описания модели в непрерывном времени к описанию в дискретном, поскольку апериодическое звено является динамической системой с одним входом и одним выходом, а значит может быть представлено в виде цифрового фильтра на основе какой-либо разностной схемы [3].

На основе цифровых фильтров могут быть реализованы алгоритмы цифровых систем управления (ЦСУ), поскольку они могут принимать и выдавать сигналы только в дискретной форме в виде конечных упорядоченных последовательностей отсчетов сигнала [4]. Применение систем управления с цифровыми фильтрами обусловлено меньшей ресурсоемкостью вычислений управляющих воздействий цифрового регулятора в сравнении с аналоговым, следовательно, расширяется арсенал микроконтроллерных средств для аппаратной реализации ЦСУ. Современные системы цифрового управления позволяют расширить функциональные возможности электроприводов для применения в сложных технологических процессах.

Основным подходом при синтезе современных цифровых систем управления является метод аналоговых прототипов, который заключается в том, что для динамических систем в дискретном времени применяются те же принципы регулирования, что и систем в непрерывном времени при условии выполнения теоремы Котельникова-Шеннона при дискретизации сигналов. В некоторых специальных случаях, когда невозможно применить достаточно малый период дискретизации, метод аналоговых прототипов всегда будет приводить к нежелательным результатам, например, искажениям в частотной области.

Применение метода аналоговых прототипов всегда приводит к потере точностных свойств фильтра, и для обеспечения корректности его работы (сохранения фундаментальных свойств) к цифровому фильтру предъявляется ряд требований [4]:

1. Мнимая ось p -плоскости должна отображаться в единичную окружность z – плоскости.

2. Левая полуплоскость p -плоскости $\text{Re}(p) < 0$ должна отображаться во внутреннюю часть единичного круга z -плоскости $|z| < 1$.

3. Преобразование должно быть дробно-рациональным, поскольку именно такое преобразование будет отображать отношение полиномов от аргумента p в отношение полиномов от аргумента z^{-1} , что позволит реализовывать цифровые фильтры с сосредоточенными параметрами.

Рассмотрим дифференциальное уравнение простейшей RL -цепи и представим его с помощью прямого преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях в виде аperiодического звена $W(p)$ с входным сигналом напряжения $u(t)$ и выходным сигналом тока $i(t)$:

$$u(t) = L \frac{d}{dt} i(t) + R \cdot i(t), \quad (1)$$

$$U(p) = I(p)(pL + R), \quad W(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{k_n}{T_a p + 1},$$

где p – оператор Лапласа; L – индуктивность цепи, Гн; R – активное сопротивление цепи, Ом; $k_n = 1/R$ – коэффициент передачи, Ом $^{-1}$; $T_a = L/R$ – постоянная времени, с.

$W(p)$ – исходная передаточная функция. Примем период дискретизации $T_d = 1$ с, индуктивность цепи $L = 10$ Гн, активное сопротивление $R = 1$ Ом. Следовательно, $T_a = 10$ с, $k_n = 1$ Ом $^{-1}$.

Простейшие способы перехода от дифференциальных к конечно-разностным уравнениям системы: метод левых прямоугольников, метод правых прямоугольников, метод трапеций (билинейное преобразование или преобразование Тастина) рассмотрены в [4, 5]. Построим цифровые передаточные функции и соответствующие им разностные уравнения аperiодического звена каждого из методов согласно [5].

Аппроксимация оператора Лапласа p методом левых прямоугольников:

$$p = \frac{z-1}{T_d}, \quad W_{\text{л}}(z) = \frac{1}{10 \frac{z-1}{T_d} + 1} = \frac{0,1}{z-0,9} = \frac{0,1z^{-1}}{1-0,9z^{-1}},$$

$$I_{\text{л}}[k] = k_n \frac{T_d}{T_a} U[k-1] + \frac{T_a - T_d}{T_a} I_{\text{л}}[k-1] = 0,1U[k-1] + 0,9I_{\text{л}}[k-1], \quad (2)$$

метод правых прямоугольников:

$$p = \frac{z-1}{T_d z}, \quad W_{\text{п}}(z) = \frac{1}{10 \frac{z-1}{T_d z} + 1} = \frac{z}{11z-10} = \frac{1}{11-10z^{-1}},$$

$$I_{\text{п}}[k] = \frac{k_n T_d}{T_a + T_d} U[k] + \frac{T_a}{T_a + T_d} I_{\text{п}}[k-1] = \frac{1}{11} U[k] + \frac{10}{11} I_{\text{п}}[k-1], \quad (3)$$

метод трапеций (билинейное преобразование или преобразование Тастина):

$$p = \frac{2}{T_d} \frac{z-1}{z+1}, \quad W_{\text{т}}(z) = \frac{1}{10 \frac{2}{T_d} \frac{z-1}{z+1} + 1} = \frac{z+1}{21z-19} = \frac{1+z^{-1}}{21-19z^{-1}},$$

$$I_T[k] = \frac{k_n T_D}{2T_a + T_D} U[k] + \frac{k_n T_D}{2T_a + T_D} U[k-1] + \frac{2T_a - T_D}{2T_a + T_D} I_T[k-1] = \frac{1}{21} U[k] + \frac{1}{21} U[k-1] + \frac{19}{21} I_T[k-1], \quad (4)$$

где $I[k]$, $I[k-1]$ – выходные сигналы тока на текущем и предыдущем шаге дискретизации, А; $U[k]$, $U[k-1]$ – входные сигналы напряжения на текущем и предыдущем шаге дискретизации, В.

Рассмотрим обработку скачка задания $u(t) = 1(t)$ В (реакцию на функцию Хевисайда) полученных аналоговой и цифровых передаточных функций. Точное решение дифференциального уравнения (1):

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right] = 1 - \exp\left(-\frac{1}{10}t\right). \quad (5)$$

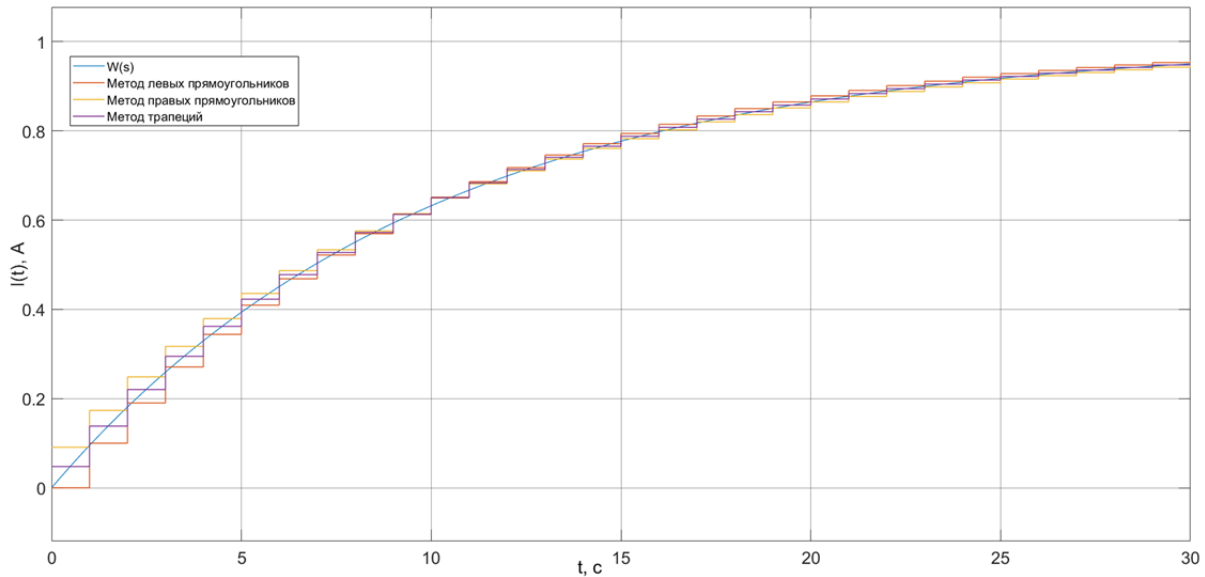


Рис. 1. Обработка скачка задания $u(t) = 1(t)$ В исходной аналоговой и аппроксимирующими дискретными передаточными функциями

Полученные результаты показывают, что рассмотренные способы аппроксимации оператора p дают хорошее приближение к исходной передаточной функции. Однако в каждом случае возникает абсолютная ошибка интегрирования, поскольку ни в одном из узлов временной сетки данные преобразования не дают точного совпадения с исходным процессом.

Произведем расчет накопленной абсолютной погрешности $\varepsilon_{\text{абс}}$ как разность действующего значения функции (5) в непрерывном времени и значения соответствующей ей аппроксимирующей функции (2), (3), (4) в дискретном времени на k -ом интервале интегрирования для каждого из методов аппроксимации оператора p и сведем в таблицу 1. Вычисление площади исходной функции $S_{\text{исх}}$ производится по пределам интегрирования, соответствующим интервалу расчета. Площадь для дискретной функции S_Z определяется как произведение значения функции на k -ом шаге на период дискретизации.

$$\varepsilon_{\text{абс}} = \sum_{k=1}^N I_{\text{исх}_k} - \sum_{k=1}^N I_{Z_k}, \quad I_{\text{исх}_k} = \sqrt{\frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (i(t))^2 dt}, \quad I_{Z_k} = I[k],$$

где $N = 30$, $k = 0, 1, \dots, N$, $I_{\text{исх}_k}$ – действующее значение исходной функции (5) на k -м интервале интегрирования, А; $t_k = T_D \cdot k$, с; S_{Z_k} – значение аппроксимирующей функции на k -м шаге интегрирования, А; $I[k]$ – выходной сигнал тока соответствующего метода аппроксимации на k -ом шаге согласно (2), (3), (4), А.

Таблица 1

Накопленная абсолютная погрешность при аппроксимации оператора дифференцирования методами левых прямоугольников, правых прямоугольников и методом трапеций (Гастина)

Шаг расчета k	Точное решение	Метод левых прямоугольников		Метод правых прямоугольников		Метод трапеций (билинейное преобразование)	
	Значение $I_{исх_k}, A$	Значение $I_{Z_k,Л}, A$	Погрешность $\epsilon_{абс,Л}, A$	Значение $I_{Z_k,П}, A$	Погрешность $\epsilon_{абс,П}, A$	Значение $I_{Z_k,Т}, A$	Погрешность $\epsilon_{абс,Т}, A$
0	—	0	—	0,0909	—	0,0476	—
1	0,0484	0,1	0,0484	0,1736	-0,0425	0,1383	0,00076
2	0,1389	0,19	0,0873	0,2487	-0,0772	0,2204	0,00137
3	0,2209	0,271	0,1182	0,3170	-0,1050	0,2946	0,00185
4	0,2950	0,3439	0,1422	0,3791	-0,1269	0,3618	0,00224
5	0,3621	0,4095	0,1604	0,4355	-0,1439	0,4226	0,00253
6	0,4228	0,4686	0,1737	0,4868	-0,1566	0,4776	0,00275
7	0,4777	0,5217	0,1829	0,5335	-0,1657	0,5273	0,00290
8	0,5274	0,5695	0,1886	0,5759	-0,1718	0,5724	0,00300
9	0,5724	0,6126	0,1915	0,6145	-0,1753	0,6131	0,00305
10	0,6131	0,6513	0,1920	0,6495	-0,1766	0,6499	0,00307
11	0,6499	0,6862	0,1906	0,6814	-0,1762	0,6833	0,00305
12	0,6832	0,7176	0,1876	0,7103	-0,1744	0,7134	0,00301
13	0,7134	0,7458	0,1835	0,7367	-0,1713	0,7407	0,00296
14	0,7407	0,7712	0,1783	0,7606	-0,1673	0,7654	0,00288
15	0,7653	0,7941	0,1724	0,7824	-0,1626	0,7878	0,00279
16	0,7877	0,8147	0,1659	0,8022	-0,1573	0,8080	0,00269
17	0,8079	0,8332	0,1591	0,8201	-0,1516	0,8263	0,00259
18	0,8262	0,8499	0,1520	0,8365	-0,1456	0,8428	0,00248
19	0,8427	0,8649	0,1448	0,8514	-0,1394	0,8578	0,00237
20	0,8577	0,8784	0,1376	0,8649	-0,1331	0,8713	0,00226
21	0,8712	0,8906	0,1304	0,8772	-0,1267	0,8836	0,00214
22	0,8835	0,9015	0,1233	0,8883	-0,1204	0,8947	0,00203
23	0,8946	0,9114	0,1163	0,8985	-0,1142	0,9047	0,00192
24	0,9046	0,9202	0,1095	0,9077	-0,1081	0,9138	0,00182
25	0,9137	0,9282	0,1030	0,9161	-0,1021	0,9220	0,00171
26	0,9219	0,9354	0,0966	0,9237	-0,0963	0,9294	0,00161
27	0,9293	0,9419	0,0906	0,9307	-0,0907	0,9361	0,00151
28	0,9360	0,9477	0,0848	0,9370	-0,0853	0,9422	0,00142
29	0,9421	0,9529	0,0792	0,9427	-0,0802	0,9477	0,00133
30	0,9476	0,9576	0,0740	0,9479	-0,0752	0,9527	0,00124

Представим изменение накопленной абсолютной погрешности аппроксимации $\epsilon_{абс}$ каждого из методов в течение времени переходного процесса в полулогарифмическом масштабе на рис. 2.

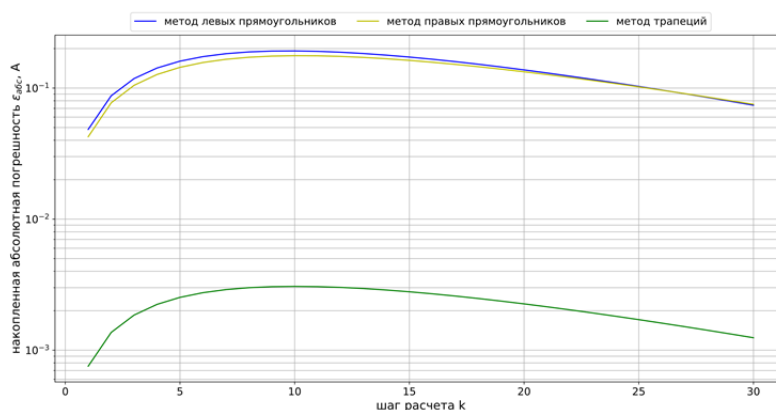


Рис. 2. Накопленная абсолютная погрешность методов аппроксимации оператора p в полулогарифмическом масштабе за время переходного процесса

Сравнительный анализ методов аппроксимации оператора Лапласа p позволяет сделать вывод, что метод Тастина обеспечивает большую точность по сравнению с методами левой и правой разности. Порядок ошибки метода Тастина – 10^{-3} , порядок ошибки методов левой и правой разности – 10^{-1} .

Выводы:

1. Переход от моделей в непрерывном времени к цифровым моделям динамических систем имеет ряд преимуществ: отстройка от шумов в аналоговых регуляторах на операционных усилителях, простота реализации на цифровых устройствах. Применение распространённого инженерного способа перехода от математического описания динамических систем в непрерывном времени к описанию в дискретном времени, метода аналоговых прототипов, всегда сопровождается потерей точности математической модели. Синтез цифровых моделей данным способом накладывает существенные ограничения на минимальную частоту дискретизации. Невыполнение теоремы Котельникова-Шеннона применительно к выбору периода дискретизации приводит к некорректной работе цифровой модели и потере ее фундаментальных свойств. Построение цифровой модели динамической системы всегда связано с поиском компромисса между необходимой точностью и сложностью вычислений.

2. Метод аналоговых прототипов подразумевает применение z -преобразования к аналоговым фильтрам для получения цифровых. Для большинства инженерных задач при соблюдении рекомендаций по выбору шага дискретизации может быть рекомендован метод Тастина (билинейного преобразования), обеспечивающий как сохранение гарантированной устойчивости цифрового фильтра, так и более высокую точность аппроксимации по сравнению с методами левой и правой разности.

Список литературы

1. Strogatz, Steven H. Nonlinear dynamics and chaos: with application to physics, biology, chemistry, and engineering / Steven H. Strogatz. – New York: Perseus Books Publishing, L.L.C., 1994. – 504 p. – Direct text.

2. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / под ред. К.А. Пупков, Н.Д. Егупова. – Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 656 с. – Текст: непосредственный.

3. Глазырин, А.С. Динамическая идентификация параметров объекта управления электропривода на основе разностных схем / А.С. Глазырин. – Текст: непосредственный // Электротехнические комплексы и системы управления. – 2012. – № 2. – С. 42–48.

4. Белодедов, М.В. Методы проектирования цифровых фильтров: Учебное пособие / М.В. Белодедов. – Волгоград: Издательство Волгоградского государственного университета, 2005. – 64 с. – Текст: непосредственный.

5. Анучин, А.С. Системы управления электроприводов: учебник для вузов / А.С. Анучин. – Москва: Издательский дом МЭИ, 2015. – 373 с. – Текст: непосредственный.