

# ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ЗВЕНА ЗАПАЗДЫВАНИЯ ДРОБЯМИ ПАДЕ

Ли Цзюмин<sup>1</sup>, Сидорова А.А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский Томский политехнический университет, ИШИТР, студент 2 курса магистратуры, e-mail: [czyumin1@tpu.ru](mailto:czyumin1@tpu.ru)

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Томский политехнический университет, ИШИТР, ст. преподаватель, e-mail: [sidorova@tpu.ru](mailto:sidorova@tpu.ru)

## Введение

При исследовании объектов технических системах управления часто встречаются объекты с транспортным запаздыванием. Обычно транспортное запаздывание наблюдается в теплоэнергетических промышленных областях, а также в НГО, например, нефтегазовый сепаратор является объектом управления с транспортным запаздыванием. Настройку систем автоматического управления, умеющих управлять объектами с транспортным запаздыванием, значительно труднее обеспечивать из-за существенного влияния на качество процессов управления и, соответственно, на устойчивость системы управления, в целом, звена запаздывания.

Основной проблемой при синтезе систем автоматического управления с запаздыванием является аппроксимация данного звена в дробно-рациональную форму представления. Для решения данной проблемы используют разные методы, наиболее известными являются методы на основе разложения в ряд Тейлора, представления дробями Паде и др.

Целью данной статьи является рассмотрение способа аппроксимации звена запаздывания дробями Паде.

## Выбор метода и решение

В большинстве случаев передаточную функцию объекта управления можно представить в виде отношения полиномов или дробно-рациональной функцией:

$$W(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (1)$$

Устойчивость системы или объекта управления, описываемых передаточной функцией (1), можно рассчитывать по классическим методам, выполняя определенные расчеты, основанные на нахождении полюсов и нулей.

Наличие запаздывания в системе или объекте управления будет усложнять настройку параметров системы [1] и, в целом, затруднит оценивание показателей качества, так как в передаточной функции замкнутой системы управления звено запаздывания (2) будет присутствовать в полиноме числителя и в знаменателе:

$$W(s) = e^{-sT} \quad (2)$$

Для решения этой проблемы выполняют дополнительные расчеты на основе применения аппроксимации звена запаздывания. Среди многих методов приближения, Паде является наиболее часто используемым методом для аппроксимации транспортного запаздывания рациональной функцией.

Изображение аппроксимации Паде для функции  $e^{-\tau s}$  выглядит следующим образом [2]:

$$e^{-\tau s} \approx \sum_{i=0}^{m+n} (-1)^i \frac{(\tau s)^i}{i} = \frac{\sum_{i=0}^m p_i (\tau s)^i}{\sum_{i=0}^n q_i (\tau s)^i} \quad (3)$$

Аппроксимация имеет недостатки, поскольку является приближительной и приводит к дополнительной погрешности в результате синтеза. Необходимо определить насколько значительной будет погрешность при аппроксимации.

В качестве объекта исследования принимается следующая передаточная функция с запаздыванием:

$$W(s) = \frac{0.3}{20s + 1} \cdot e^{-50 \cdot s} \quad (4)$$

Для нахождения приближенного значения данной передаточной функции используем MATLAB.

Разработанная программа для расчета представлена на рис. 1.

```
S = tf('s');
sys = 0.3*exp(-50*s)/(20*s+1);
for i=1:5
    m=i;
    sysx = pade(sys,m);
    plot(step(sysx),'LineWidth',1);
    hold on;grid on
end
plot(step(sys),'BLACK','LineWidth',1.2);
legend('Order [1,1]','Order [2,2]','Order [3,3]','Order [4,4]','Order [5,5]')
title('0.3*exp(-50*s)/(20*s+1)Pade Approximant')
```

Рис. 1. Разработанная программа для аппроксимации дробями Паде

В результате использования разложения в ряд Паде были получены передаточные функции звена запаздывания (1) в дробно рациональном виде. В таблице 1 представлены приближения Паде для исходной передаточной функции с равными степенями в числителе и знаменателе.

Таблица 1

Приближение Паде для исходной передаточной функции

| Степень<br>m=n | $R_{n,n}(\tau s)$   |
|----------------|---|
| 1              | $\frac{-0.3s + 0.012}{20s^2 + 1.8s + 0.04}$   |
| 2              | $\frac{0.3s^2 - 0.036s + 0.00144}{20s^3 + 3.4s^2 + 0.216s + 0.0048}$  |
| 3              | $\frac{-0.3s^3 + 0.072s^2 - 0.0072s + 0.000288}{20s^4 + 5.8s^3 + 0.72s^2 + 0.0432s + 0.00096}$  |
| 4              | $\frac{0.3s^4 - 0.12s^3 + 0.0216s^2 - 0.002016s + 8.064e-05}{20s^5 + 9s^4 + 1.84s^3 + 0.2064s^2 + 0.0121s + 0.0002688}$                                 |
| 5              | $\frac{-0.3s^5 + 0.18s^4 - 0.0504s^3 + 0.008064s^2 - 0.0007258s + 2.903e-05}{20s^6 + 13s^5 + 3.96s^4 + 0.7056s^3 + 0.07526s^2 + 0.004355s + 9.677e-05}$ |

Графики переходных процессов для соответствующих степеней при аппроксимации дробями Паде представлены на рис. 2.

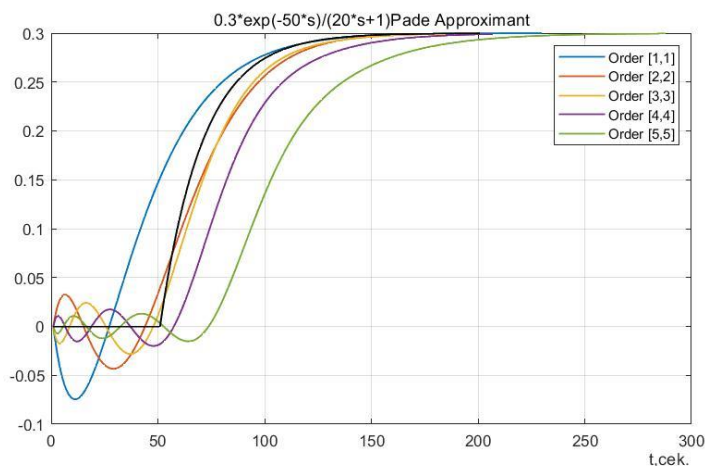


Рис. 2. Аппроксимация передаточной функции дробями Паде с равными степенями полиномов

Анализируя графики на рис. 2, можно сделать вывод: чем выше порядок аппроксимации дробей Паде, тем меньше амплитуда колебаний в диапазоне времени [0; 50]. На рис. 3 представлены графики аппроксимации заданной передаточной функции (4) дробями Паде.

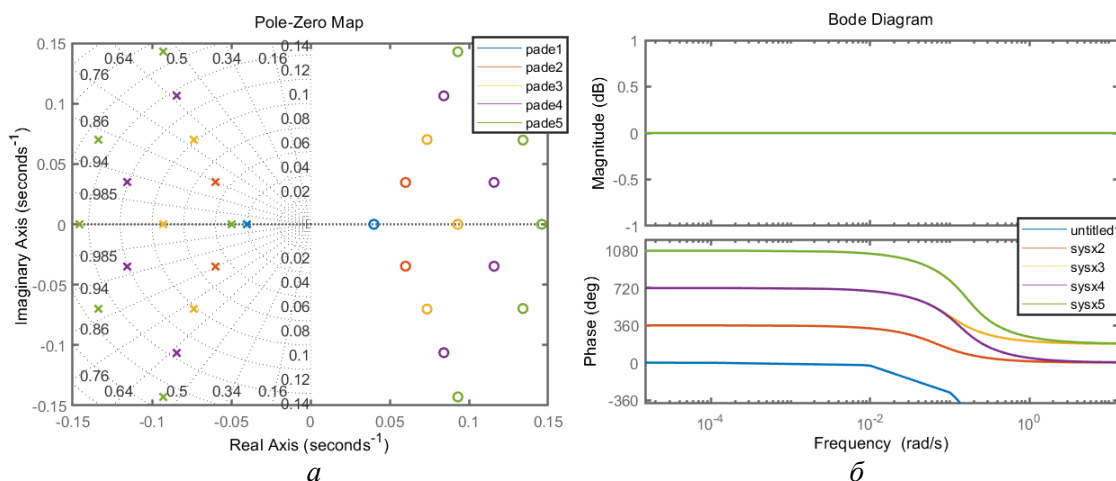


Рис. 3. Графики аппроксимированной передаточной функции дробями Паде с равными степенями полиномов:

*a* – нули и полюса;  
*б* – АЧХ и ФЧХ

На рис. 3, б видно, что коэффициент усиления аппроксимированной передаточной функции всегда равен 1, или 0 дБ, при условии равенства  $m = n$  степеней полинома числителя и знаменателя исследуемой передаточной функции. Аппроксимация не усиливает и не уменьшает амплитуду сигнала.

Оценивая данные графики расположения полюсов, амплитудно-частные и фазо-частные показатели качества, можно сделать вывод о качестве полученных переходных процессов – переходный процесс приближения Паде передаточной функции с транспортным звеном становится более точным по мере увеличения степени полинома. Однако, наблюдается зависимость между снижением колебательности на начальном участке переходного процесса при увеличении полиномов и точности полученного переходного процесса.

### Заключение

В данной работе исследована аппроксимация передаточной функции с транспортным запаздыванием наиболее известным методом – дробями Паде. Разработана программа и алгоритм для аппроксимации Паде исходной передаточной функции в MATLAB. Проведено сравнение результатов аппроксимации для различных порядков. С увеличением порядка аппроксимации Паде переходный процесс становится менее колебательным на начальном временном участке, отклонение (ошибка) от эталонного переходного процесса исследуемой передаточной функции минимизируется крайне нехарактерно. Таким образом, аппроксимация дробями Паде позволяет получить передаточные функции в виде рациональных чисел для аппроксимации звеньев транспортного запаздывания с приемлемой точностью для порядков степени числителя и знаменателя  $m = n$  равных 3.

### Список использованных источников

1. Сидорова А.А., Гончаров В.И. Применение численного метода синтеза САУ объектом с запаздыванием. Молодежь и современные информационные технологии: сборник трудов XVIII Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых/ Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2021. – С. 487 – 488.
2. Ибряева О.Л. Новый алгоритм вычисления аппроксимаций Паде и его реализация в Matlab // Вестник ЮУрГУ, Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – № 10. – С. 99-107. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/novyy-algoritm-vychisleniya-approksimatsiy-pade-i-ego-realizatsiya-v-matlab> (дата обращения: 04.10.2023).