ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА
Том 68, вып. 1 1951 г.

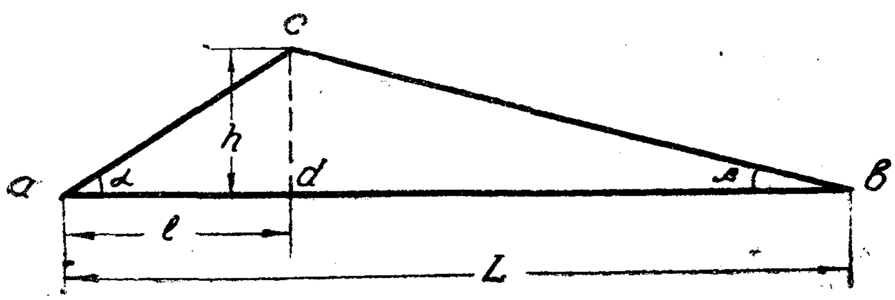
К ВОПРОСУ РАСЧЕТА ГИБКИХ НИТЕЙ

В. П. ШУБИН

1

В учебниках по курсу сопротивления материалов вопрос о расчете гибких нитей ограничивают рассмотрением деформации и натяжения нити под действием равномерно-распределенной нагрузки (собственный вес). Большой интерес представляет расчет гибкой нити под действием сосредоточенной силы, приложенной в каком-либо сечении по длине нити.

Представим себе гибкую нить конечной длины, закрепленную неподвижно в точках a и $в$ таким образом, что нить располагается горизонтально. Естественно, при этом возникает начальное натяжение нити, которое мы обозначим через H_0. Полагаем, что до приложения усилия H_0 нить имела длину L_0 и соответственно l_0.



Фиг. 1

Если теперь в сечении d нити приложить некоторое усилие, не выводящее материал нити за пределы упругости, то нить располагается по треугольнику $acв$ (фиг. 1.)

Обозначая увеличение длины гибкой нити через Δl, получим

$$\Delta l = \overline{ac} + \overline{cв} - \overline{aв}.$$

Проводя отрезок $\overline{cd} \perp \overline{aв}$ и учтя, что $\overline{aв} = \overline{ad} + \overline{dв}$, имеем

$$\Delta l = \overline{ac} + \overline{cв} - \overline{ad} - \overline{dв} = (\overline{ac} - \overline{ad}) + (\overline{cв} - \overline{dв})$$

или

$$\Delta l = \overline{ac}\left(1 - \frac{\overline{ad}}{\overline{ac}}\right) + \overline{cв}\left(1 - \frac{\overline{dв}}{\overline{cв}}\right) = \overline{ac}\left(1 - \cos\alpha\right) + \overline{cв}\left(1 - \cos\beta\right).$$

Обозначим отрезок $\overline{cd} = h$, тогда

$$\overline{ac} = \frac{h}{\sin\alpha}; \quad \overline{вc} = \frac{h}{\sin\beta}.$$

Таким образом

$$\Delta l = h \cdot \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + h \cdot \frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}.$$

Простыми тригонометрическими преобразованиями можно показать, что

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}; \quad \frac{1-\cos\beta}{\sin\beta} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Следовательно, удлинение гибкой нити выразится в виде

$$\Delta l = h \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + h \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}. \qquad (1)$$

Общее удлинение Δl можно разбить на две составляющие:

$$\Delta l_1 = h \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \text{ и } \Delta l_2 = h \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 \qquad (2)$$

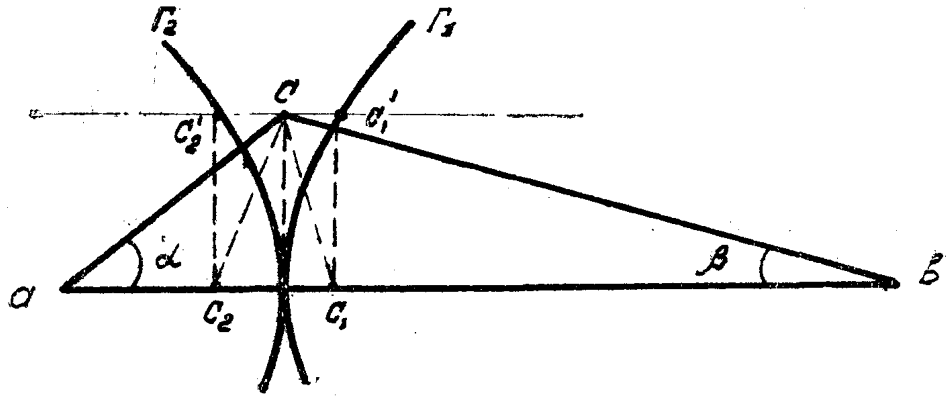
2.

Покажем, что при изменении силы, приложенной к гибкой нити, а следовательно, значения h точки c_1', c_2', c (фиг. 2) располагаются на гиперболах Γ_1 и Γ_2.

В самом деле, проводя из точки C (фиг. 2) прямую $\parallel \overline{ав}$, а из точек $а$ и $в$ радиусами $ас$ и $вс$ дуги CC_1 и CC_2, получим:

$$\overline{dc_1} = \overline{ac} - \overline{ad} = \Delta l_1$$

$$\overline{dc_2} = \overline{cв} - \overline{dв} = \Delta l_2$$



Фиг. 2

Очевидно, отрезок $C_2' CC_1' = \Delta l$, т. е. сумме значений

$$\Delta l_1 + \Delta l_2.$$

Применяя этот метод для различных значений сил и высоты h, легко показать, что геометрическое место точек, вроде C_1', C_2' и т. д., представляется гиперболой.

Обозначая

$$\overline{C'_1C} = \overline{cd} \text{ через } y,$$

$$\overline{ac_1} = \overline{ac} \text{ через } x,$$

ad через l, из треугольника acd имеем: $\overline{ac}^2 = \overline{ad}^2 + \overline{cd}^2$ или $x^2 = y^2 + l^2$, откуда

$$\frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{l^2} = 1 \tag{3}$$

Мы получили уравнение равносторонней гиперболы с вершиной в точке d и началом координат в точке a. Аналогично точка C_2' лежит на гиперболе с уравнением

$$\frac{x^2}{(L-l)^2} - \frac{y^2}{(L-l)^2} = 1. \tag{4}$$

3

Исследуем влияние высоты h на удлинение гибкой нити. Для этого вместо гипербол с достаточной степенью точности можно взять параболы. Для этого в равенстве (I), вместо $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, нужно принять половинные значения функций целых углов. Пока углы α и β лежат в пределах малых значений, разница между $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$ не превышает $(1 \div 1{,}5)\,\%$. Произведя эту замену, мы получим

$$\Delta l = \frac{h}{2}\left(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha\right),$$

$$\text{но } \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{l} \text{ и } \operatorname{tg}\beta = \frac{h}{L-l},$$

тогда

$$\Delta l = \frac{h}{2}\left(\frac{h}{l} + \frac{h}{L-l}\right) = \frac{h^2}{2}\cdot\frac{L}{l(L-l)}. \tag{5}$$

Считая Δl абсциссой, а h ординатой кривой $\Delta l = f(h)$, мы получим параболу вида:

$$y^2 = 2px.$$

Равенство (5) в этом случае представится в виде

$$h^2 = 2l.\left(\frac{L-l}{L}\right).\Delta l, \tag{6}$$

причем параметр

$$p = \frac{l(L-l)}{L}.$$

4

Выясним влияние длин l и $(L-l)$ на удлинение гибкой нити. Поставим условие: точка d приложения силы — переменная; высота h и длина нити L — постоянные величины

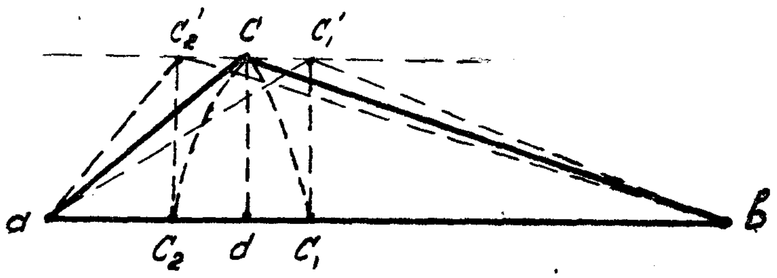
$$\Delta l = \overline{ac} + \overline{bc} - \overline{ab}.$$

Ясно, что геометрическое место всех точек C, которые дают разные значения удлинений, есть эллипс с фокусами в точках a и $в$. Рассмотрим фиг. 3.

Основное свойство эллипса: „сумма расстояний всякой точки эллипса от фокусов есть величина постоянная". Из фиг. 3 следует:

$$\overline{ac_1'} + \overline{c_1'b} = \overline{ac_2'} + \overline{c_2'b} = \overline{ac} + \overline{cb}.$$

Это же равенство говорит, что удлинение $\Delta l = \text{const}$, так как мы всегда его можем найти, вычитая одну и ту же величину $\overline{ab}$ из каждой суммы.



Фиг. 3

Если считать $\Delta l = \text{const}$ и так как $\Delta l = \overline{ac} + \overline{cb} - L$, то

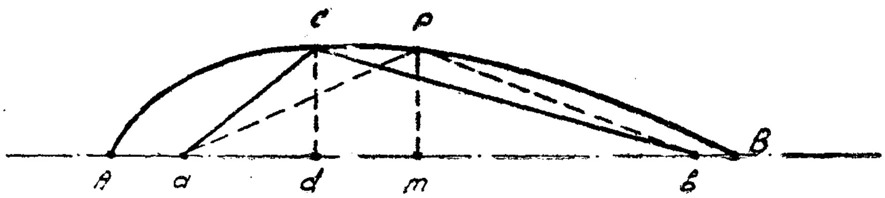
$$\overline{ac} + \overline{cb} = \Delta l + L = \text{const}.$$

Отметим средину длины $\overline{ab}$ (фиг. 4) точкой m. В этом случае, так как $\overline{ap} + \overline{pb} = L + \Delta l$, но $\overline{ap} = \overline{pb}$, следует

$$\overline{ap} = \frac{L + \Delta l}{2}, \tag{7}$$

$$mp = \sqrt{(\overline{ap})^2 - (\overline{am})^2} = \sqrt{\left(\frac{L + \Delta l}{2}\right)^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2\Delta l . L + \Delta l^2} \tag{8}$$



Фиг. 4

Легко показать, что отрезок $\overline{Am} = \overline{ap} = \dfrac{L + \Delta l}{2}$. В самом деле для точек C, p, A на основании свойства эллипса имеем

$$\overline{ac} + \overline{bc} = \overline{ap} + \overline{pb} = \overline{Aa} + \overline{Ab}.$$

Для средней точки эллипса

$$\overline{Aa} + \overline{Ab} = 2\,\overline{ap} = L + \Delta l = 2\,\overline{am} + \Delta l.$$

Из фиг. 4 следует

$$\overline{Ab} - \overline{Aa} = 2\,\overline{am},$$

Решая совместно два этих равенства, получаем

$$\overline{Aa} = \frac{\Delta l}{2}.$$

Следовательно,

$$\overline{Am} = \overline{Aa} + \overline{am} = \frac{\Delta l}{2} + \frac{L}{2} = \frac{L + \Delta l}{2}.$$

Итак, для нашего эллипса полуосями являются

$$r_1 = \frac{L + \Delta l}{2},$$

$$r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2\,\Delta l . L + \Delta l^2}.$$

Уравнение эллипса будет:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{L + \Delta l}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\,\Delta l L + \Delta l^2}\right)^2} \qquad (9)$$

На основании уравнения (5)

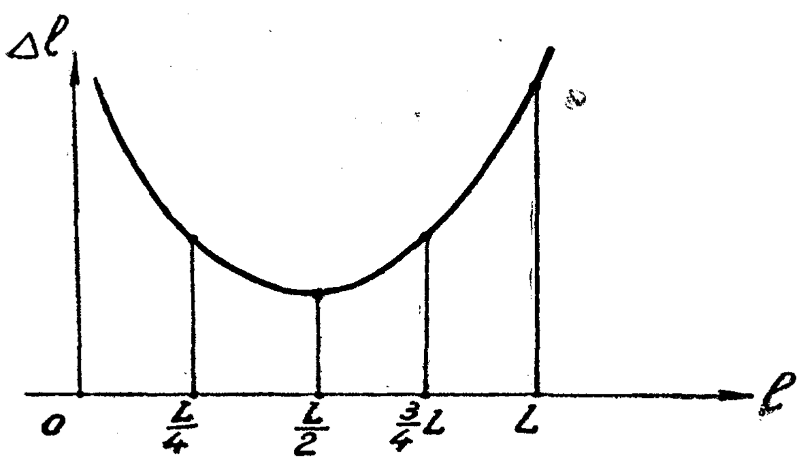
$$\Delta l = \frac{h^2}{2} \cdot \frac{L}{l(L - l)}$$

Если h и L постоянны, то Δl зависит только от l и $L - l$. Назовем $l(L - l) = \eta$ и, диференцируя, получим:

$\frac{d\eta}{dl} = L - 2l$ или, рассматривая как производную,

$$d\eta = dl\,(L - l) + l d\,(L - l) = dl\,(L - l) - l dl.$$

Для $L = 2l$ или $l = \frac{L}{2}$; $\frac{d\eta}{dl} = 0$; $\frac{d^2\eta}{dl^2} = -2.$



Фиг. 5

Значит вопрос идет о минимуме. В этом случае

$$\Delta l_{min} = \frac{h^2}{2} \cdot \frac{2\,l}{l\,(2\,l - l)} = \frac{h^2}{l} = \frac{2\,h^2}{L}.$$

Для всех других положений, когда $l \gtrless \frac{L}{2}$, значения Δl будут возрастать. На фиг. 5 показан график возрастания Δl от l.

Выясним влияние закрепленной длины гибкой нити на удлинение. Для этого полагаем, что высота h не меняется, а меняется только длина гибкой нити L, т. е. соответственно этому возрастает или убывает приложенное усилие и Δl.

Если при этом сохраняется расстояние l, то тогда Δl зависит только от $\frac{L}{L-l}$, которое всегда >1 и тем ближе к единице, чем больше выбранная величина L.

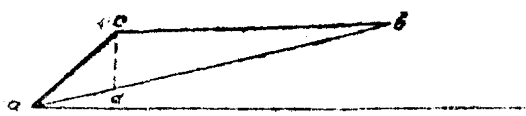
$$\text{Назовем } \frac{L}{L-l}=y, \text{ тогда } \frac{1}{y}=\frac{L-l}{L}=1-\frac{l}{L}.$$

С увеличением L величина $\frac{l}{L}$ уменьшается, а $1-\frac{l}{L}$ увеличивается и y уменьшается, и обратно, когда $1-\frac{l}{L}$ уменьшается с увеличением $\frac{l}{L}$ (уменьшается L), то y увеличивается.

Если теперь величина l изменяется с изменением L, но так, что каждый раз ее отношение к длине L остается постоянным, то Δl независимо от $\frac{L}{l(L-l)}$, причем $l=\frac{L}{h}$ для $h=\text{const}$ и

$$y=\frac{L}{\frac{L}{h}\left(L-\frac{L}{h}\right)}=\frac{h}{L\left(1-\frac{1}{h}\right)}=\frac{h^2}{h-1}\cdot\frac{1}{L}.$$

Мы видим, что также в этом случае с увеличением длины гибкой нити удлинение уменьшается. Можно сделать вывод, что если длина гибкой нити L увеличивается или уменьшается, то при постоянном значении l или при пропорциональном изменении l и L удлинение уменьшается или увеличивается.



Фиг. 6

На основании формулы (5) можно сделать заключение, что при постоянном h удлинение растет, если точка приложения силы отодвигается к точкам закрепления гибкой нити, т. е.

$$\Delta l_1>\Delta l_{сред}$$

$$\Delta l_2>\Delta l_{сред}$$

где $\Delta l_{сред}$ — удлинение для случая, когда сила приложена по средине длины гибкой нити, отсюда

$$\frac{\Delta l_{сред.}}{\Delta l_1}=\frac{\frac{h^2}{2}\cdot\frac{L}{l_1(L-l_1)}}{\frac{h^2}{2}\cdot\frac{L}{l_1(L-l_1)}}=\frac{l_1(L-l_1)}{l(L-l)}.$$

Если мы при одинаковой длине l будем передвигать точку закрепления $в$ в направлении ab вправо или влево, то изменяется величина L (фиг. 6).

Переместим точку $в$ на величину s.

Для $L = L + s$, $\frac{\Delta l}{\Delta l_1} = y = \frac{l_1 (L - l_1)}{l (L - l)}$ будет заменено

$$y_1 = \frac{l_1 (L + s - l_1)}{l (L + s - l)} = \frac{l_1}{l} \cdot \frac{(L - l_1) + s}{(L - l) + s}.$$

Выражения для y и y_1 содержат одинаковые величины $\frac{l_1}{l}$ (при сравнении их можно отбросить) и разные $\frac{L - l_1}{L - l}$ и $\frac{L - l_1 + s}{L - l + s}$, которые и надо сравнивать.

Если $s > 0$, т. е. точка $в$ отнесена вправо и L увеличивается, то отношение будет увеличиваться и, наоборот, при $m < 0$ —уменьшаться.

6

Исследуем влияние поднятия или опускания одной из точек закрепления гибкой нити на удлинение ее.

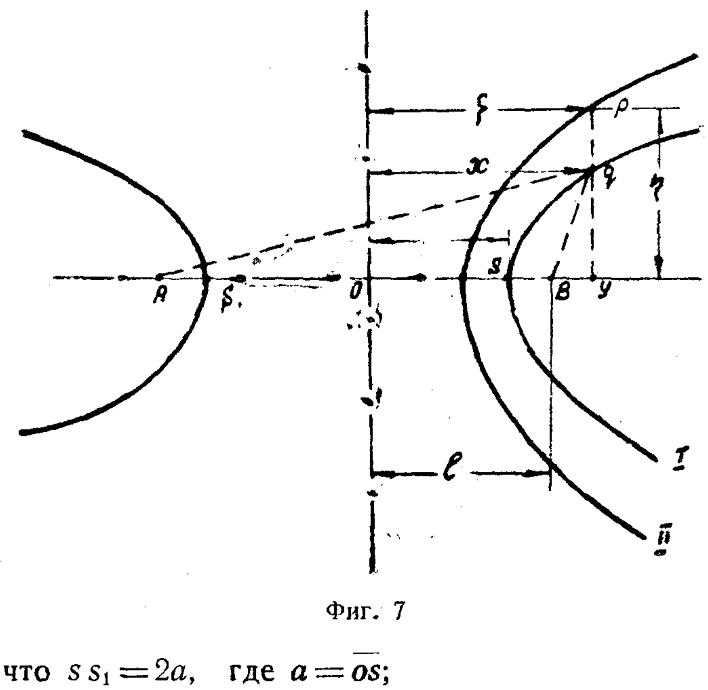
Если одну из точек закрепления гибкой нити, например b, поднять или опустить, то перпендикулярности линий $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ уже не будет.

Для того чтобы сделать в этом случае какие-либо выводы, придется рассмотреть некоторые свойства гиперболы.

Пусть в прямоугольной системе осей координат построена гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (10)$$

A и B—фокусы двух ветвей гиперболы; s и s_1—вершины их.



Фиг. 7

Известно, что $s s_1 = 2a$, где $a = \overline{os}$;

$$AB = 2l;$$

$$l^2 = a^2 + b^2;$$

$$b^2 = l^2 - a^2.$$

Известно также свойство гиперболы, а именно:

$$2a = Aq - Bq.$$

Возьмем где-либо на ординате точки q новую точку p. Величина ординаты этой точки η, а абсцисса $\xi = x$. Через точку p проводим новую гиперболу II, фокусы которой совпадают с фокусами A и B гиперболы I.

Уравнение гиперболы II будет:

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} - \frac{\eta^2}{b_1^2} = 1,$$

где a_1 и b_1 — большая и меньшая полуоси гиперболы, ξ и η — текущие координаты ее.

Сравнивая обе гиперболы, получим

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2 = l^2, \text{ так же } \xi = x$$

$$\text{и } \frac{\xi^2}{a_1^2} - \frac{\eta^2}{b_1^2} = \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{\eta^2}{b_1^2} = \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{\eta^2}{l^2 - a_1^2} = 1,$$

$$\text{отсюда } \eta^2 = \left(\frac{x^2}{a_1^2} - 1\right)\left(l^2 - a_1^2\right), \tag{11}$$

аналогично из равенства (10) получим

$$y^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)\left(l^2 - a^2\right). \tag{12}$$

Сравнивая правые части выражений 11 и 12, можем сделать заключение

$$a > a_1 \; y < \eta \text{ и обратно, когда}$$

$$\eta \gtreqless y_1, \text{ то } a_1 \gtreqless a.$$

Если $a_1 \gtreqless a$, то так же и $2a_1 \gtreqless 2a$, но

$$2a_1 = Ap - Bp,$$
$$2a = Aq - Bq.$$

Значит при $\eta \gtreqless y$ будет: $Ap - Bp \gtreqless Aq - Bq$ (13)

Отсюда можно сделать вообще следующее заключение: если имеем две закрепленные точки A и B в плоскости и возьмем в этой же плоскости третью точку q, которую соединяем лучами с A и B, то при перемещении её в направлении $\perp$ AB, разность $Ap - Bq$ будет тем меньше, чем больше расстояние q от прямой AB; разность эта будет максимум, когда q лежит на AB, и будет равна нулю, когда q бесконечно удалена от AB, ибо при этом будет $Aq \parallel Bq$.

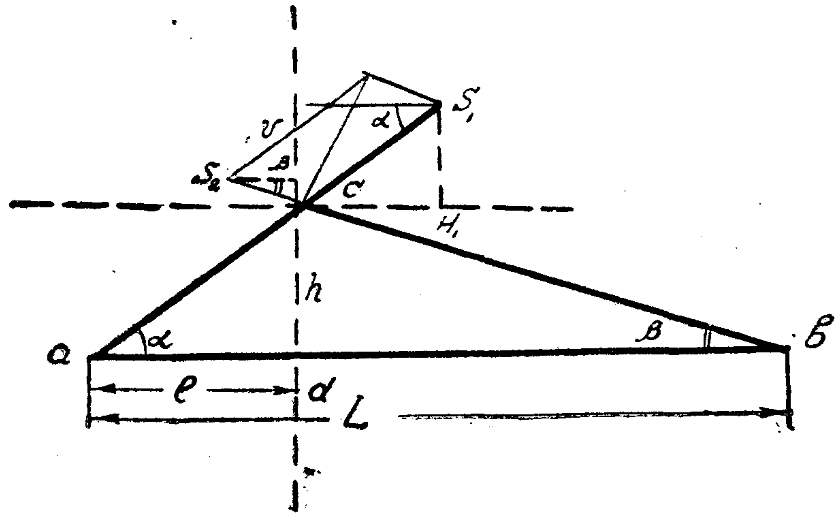
7

Рассмотрим вопрос об определении натяжения гибкой нити при приложении к ней некоторой сосредоточенной нагрузки. Для этого необходимо напомнить, что до приложения нагрузки нить, находясь в горизонтальном положении $ав$, была уже напряжена за счет натяжения концов, а при приложении новой силы получается дополнительное натяжение нити.

Пусть до приложения нагрузки натяжение нити было H_0, пусть дополнительные натяжения концов нити P_1 и P_2, тогда общее натяжение будет:

$$S_1 = P_1 + H_0; \qquad S_2 = P_2 + H_0$$

$$\Delta l_1 = h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx \frac{h^2}{2l}; \quad \Delta l_2 = h \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \approx \frac{h^2}{2(L-l)}.$$



Фиг. 8

Рассматривая задачу в области упругих деформаций, имеем

$$S_1 = H_0 + P_1 = \frac{EF}{l_0} \Delta l_{общ},$$

где l_0 — длина нити до приложения нагрузки H_0; $\Delta l_{общ}$ — общее удлинение под действием силы S_1.

Под влиянием только одной силы H_0 абсолютное удлинение нити будет:

$$\frac{L - L_0}{L_0},$$

поэтому

$$\Delta l_{общ} = \frac{L - L_0}{L_0} \cdot l_0 + \Delta l_1 = \frac{L - L_0}{L} l_0 + \frac{h^2}{2l}.$$

Тогда, соответственно

$$S_1 = \frac{EF}{l_0}\left(L - L_0\right) + \frac{EF}{l_0} \cdot \frac{h^2}{2l} \tag{14}$$

С некоторым приближением можно считать, что

$$\frac{h}{l_0} = \frac{h}{l} = \operatorname{tg} \alpha; \text{ тогда } P_1 = \frac{EF}{2} \cdot \frac{h^2}{l^2}$$

$$\text{и аналогично } P_2 = \frac{EF}{2} \cdot \frac{h^2}{(L-l)^2}.$$

Отсюда получим

$$P_1 : P_2 = (L - l)^2 : l^2$$

Дополнительные натяжения в нити прямо пропорциональны квадрату величины и обратно пропорциональны квадрату соответствующих длин нити.

До приложения нагрузки натяжение в частях гибкой нити было одинаково, поэтому отношение натяжений будет:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{H_0}{H_0} = 1$$

После приложения нагрузки

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{H_0 + P_1}{H_0 + P_2} = \frac{H_0 + \dfrac{EFh^2}{2l^2}}{H_0 + \dfrac{EFh^2}{2(L-l)^2}}.$$

Чем больше величина h, тем большее значение имеют P_1 и P_2 и тем ближе отношение $\frac{S_1}{S_2}$ подходит к величине $\frac{(L-l)^2}{l^2}$.

8

Для изгиба гибкой нити, закрепленной между точками a и $в$, необходимо выполнить механическую работу. Рассмотрим тот случай, когда точки нити a и $в$ закреплены и нить находится под натяжением H_0

$$S_1 = \frac{EF}{L_0}(L - L_0) + \frac{EF}{l_0} \cdot \frac{h^2}{2l},$$

$$S_2 = \frac{EF}{L_0}(L - L_0) + \frac{EF}{L_0 - l_0} \cdot \frac{h^2}{2(L-l)}.$$

По фиг. 8 вертикальная сила V_1 равная сумме проекций натяжений S_1 и S_2 на направление $\overline{cd}$ будет

$$V_1 = S_1 \sin\alpha + S_2 . \sin\beta. \tag{15}$$

Заменяя синусы углов тангенсами, имеем:

$$V_1 = S_1 \operatorname{tg}\alpha + S_2 \operatorname{tg}\beta \tag{16}$$

или

$$V_1 = S_1 \frac{h}{l} + S_2 \frac{h}{L-l}$$

Подставляя сюда значения S_1 и S_2, получаем

$$V_1 = \left(H_0 + \frac{EF}{2} \cdot \frac{h^2}{l^2}\right) \cdot \frac{h}{l} + \left(H_0 + \frac{EF}{2} \cdot \frac{h^2}{(L-l)^2}\right) \frac{h}{L-l}$$

или

$$V_1 = H_0 \left(\frac{h}{l} + \frac{h}{L-l}\right) + \frac{EF}{2}\left(\frac{h^3}{l^3} + \frac{h^3}{(L-l)^3}\right)$$

или наконец

$$V_1 = H_0 \frac{L}{l(L-l)} . h + \frac{EF}{2} . \frac{(L-l)^3 + l^3}{l^3(L-l)^3} . h^3 \tag{17}$$

При увеличении величины подъема нити на dh мы получим приращение работы

$$V_1 dh = S_1 d\Delta l_1 + S_2 d\Delta l_2, \tag{18}$$

собственно говоря, надо было бы написать

$$S_1 d(\overline{ac}) + S_2 d(\overline{bc}),$$

но
$$d(\overline{ac}) = d(l + \Delta l_1) = d\Delta l_1$$
$$d(\overline{bc}) = d(L - l + \Delta l_2) = d\Delta l_2$$

Деля уравнение (18) на dh, получим

$$V_1 = S_1 \frac{d\Delta l_1}{dh} + S_2 \frac{d\Delta l_2}{dh}.$$

Из формулы 5 следует:

$$\Delta l_1 = \frac{h^2}{2l}; \qquad \Delta l_2 = \frac{h^2}{2(L-l)};$$

следовательно,

$$\frac{d\Delta l_1}{dh} = \frac{h}{l}; \qquad \frac{d\Delta l_2}{dh} = \frac{h}{L-l};$$

Таким образом,

$$V_1 = S_1 \frac{h}{l} + S_2 \frac{h}{L-l}.$$

Введем обозначения в формуле (17)

$$\frac{H_0 L}{l(L-l)} = K_1; \qquad \frac{EF}{2} \cdot \frac{(L-l)^3 + l^3}{l^3 (L-l)^3} = K_2,$$

тогда

$$V_1 = K_1 h + K_2 h^3.$$

Величина работы

$$A_1 = \int_0^h V_1 dh = \int_0^h K_1 h dh + \int_0^h K_2 h^3 dh,$$

$$A_1 = \frac{K_1}{2} h^2 + \frac{K_2}{4} h^4. \tag{19}$$

Окончательно

$$A_1 = H_0 \frac{L}{2l(L-l)} h^2 + \frac{EF}{8} \frac{(L-l)^3 + l^3}{l^3 (L-l)^3} \cdot h^4 \tag{20}$$

Когда в значениях S_1 и S_2 величины P_1 и P_2 преобладают над H_0, как это обычно бывает, то равнодействующая имеет направление, указанное на фиг. 8. Если же оба частичные натяжения равновелики и равны S_0, то равнодействующая наклоняется в другую сторону.

При этом предположении очевидно $P_1 = P_2 = P$ и

$$S_0 = H_0 + P = \frac{EF}{L_0} (L - L_0 + \Delta l_0)$$

или

$$S_0 = \frac{EF}{L} (L - L_0) + \frac{EF}{L_0} \frac{h^2 L}{2l(L-l)} \tag{21}$$

Принимая во втором члене этого равенства $L_0 = L$, получим:

$$S_0 = \frac{EF}{L_0}(L - L_0) + \frac{EF}{2l} \cdot \frac{h^2}{(L-l)} = H_0 + \frac{EF}{2} \frac{h^2}{l(L-l)} \tag{22}$$

В этом случае

$$V_2 dh - S_0 (d\Delta l_1 + d\Delta l_2) = S_0 d\Delta l$$

$$V_2 = S_0 \frac{d\Delta l}{dh} = \left[H_0 + \frac{EF}{2} \cdot \frac{h^2}{l(L-l)} \right] \cdot \frac{d\Delta l}{dh}$$

Соответственно уравнение (21) при

$$\Delta l=\frac{h^2}{2}\ \frac{L}{l\,(L-l)};\ \frac{d\,\Delta\,l}{dh}=\frac{L}{l\,(L-l)}\cdot h$$

$$V_2=H_0\ \frac{L}{l\,(L-l)}\cdot h+\frac{EF}{2}\cdot\frac{L}{l^2\,(L-l)^2}\ h^3 \qquad (23)$$

Работа в этом случае будет:

$$A_2=\int_0^h V_2\,dh=\int_0^h H_0\,\frac{L}{l\,(L-l}\cdot hdh+\int_0^h\frac{EF}{2}\cdot\frac{L}{l^2\,(L-l)^2}\ h^3dh$$

или

$$A_2=H_0\,\frac{L}{2l\,(L-l)}\cdot h^2+\frac{EF}{8}\cdot\frac{L}{l^2\,(L-l)^2}\cdot h^4 \qquad (24)$$

Сравнивая 17 и 23, 20 и 24, мы видим, что силы будут функциями 1-й и 3-й степени высоты h, а величины работы зависят от 2-й и 4-й степени той же высоты.

Ранее нами были введены обозначения:

$$K_1=\frac{H_0\,L}{l\,(L-l)}$$

$$K_2=\frac{EF}{2}\cdot\frac{(L-l)^3+l^3}{l^3\,(L-l)^3}$$

$$K_3=\frac{EF}{2}\ \frac{L}{l^2\,(L-l)^2}$$

Исследуем влияние величины l при неизменной длине L на коэфициенты K_1; K_2; K_3.

Для коэфициента K_1 дробь $\frac{1}{l\,(L-l)}$ будет тем меньше, чем меньше l, поэтому K_1 будет тем больше, чем меньше l, но это будет только до тех пор, пока $l\leqslant\frac{L}{2}$ максимум при $l=\frac{L}{2}$.

Для коэфициента K_2

$$K_2=\frac{EF}{2}\cdot\frac{(L-l)^3+l^3}{l^3(L-l)^3}=\frac{EF}{2}\left[\frac{1}{l^3}+\frac{1}{(L-l)^3}\right]$$

Беря первую производную по l, получим

$$\frac{dK_2}{dl}=\frac{EF}{2}\left[-\frac{3l^2}{l^6}+\frac{-3\,(L-l)^2.(-1)}{(L-l)^6}\right]=\frac{3}{2}\ EF\left[\frac{1}{-l^4}+\frac{1}{(L-l)^2}\right],$$

при $l<L-l$ будет $l^4<(L-l)^4$ и

$$\frac{1}{l^4}>\frac{1}{(L-l)^4}\ \text{или}\ \frac{1}{(L-l)^4}-\frac{1}{l^4}<0,\ \text{достигая}$$

при $l=\frac{L}{2}$ значения, равного нулю.

Отсюда заключаем, что величина K_2 с увеличением l уменьшается, достигая при $l=\frac{L}{2}$ минимума,

ибо

$$\frac{dK^2_2}{dl}<0;\ a\ \frac{d^2K_2}{dl^2}=6\,EF\left[\frac{1}{l^5}+\frac{1}{(L-l)^5}\right]>0$$

Для коэфициента K_3 величина его меняется так же, как и для случая K_1, ибо он зависит от $l(L-l)$.

Выясним натяжение гибкой нити при наличии прогиба в ней равного величине h. Для этого рассмотрим, например,

$$S_1=\frac{EF}{L_0}(L-L_0)+\frac{EF}{l_0}\cdot\frac{h^2}{2l}.$$

Напряжение на единицу площади поперечного сечения гибкой нити

$$\sigma_{z1}=\frac{S_1}{F}=E\cdot\frac{L-L_0}{L_0}=E\frac{h^2}{2ll_0}.$$

Отбрасывая первоначальное напряжение в гибкой нити, мы получим

$$\sigma_{z1}=\frac{E}{2}\frac{h^2}{l^2}=\frac{E}{2}\ \mathrm{tg}^2\,\alpha\ \text{(если положить } l_0=l)$$

Значит напряжение зависит от угла α. Очевидно, по аналогии

$$\sigma_{z_2}=\frac{E}{2}\,\mathrm{tg}^2\beta.$$

Так как $\alpha>\beta$, то $\mathrm{tg}\,\alpha>\mathrm{tg}\,\beta$; $\sigma_{z1}>\sigma_{z2}$, поэтому при подсчете напряжения целесообразно принимать наибольший угол.

С уменьшением величины l, величина σ_z будет быстро повышаться.

Для случая, когда натяжение в обеих частях гибкой нити одинаково, очевидно, напряжение будет пропорционально общему удлинению Δl и мы имели бы

$$\sigma_z=E\frac{\Delta l}{L}=\frac{E}{L}\cdot\frac{h^2L}{2l(L-l)}\ \text{или}\ \sigma_z=\frac{E}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha.\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

Заключение

Нами рассмотрен круг вопросов, связанных с теорией гибких нитей. Допущение горизонтального расположения нити до приложения усилия, вызывающего прогиб нити, а также постоянство провисания h, при рассмотрении явления в пределах упругих деформаций, дают результаты близкие к действительным, рассчитанным в предположении предварительного провисания нити. В задаче длина гибкой нити конечна. Это позволило произвести исследование целого ряда частных случаев, интересных в практике расчета гибких нитей.