

УДК 005, 519.254+57.087.1
DOI: 10.18799/29495407/2023/4/37
Шифр специальности ВАК 2.3.1

Анализ комплексных корней характеристического полинома преобразования Прони в скользящем окне при обработке записей ЭЭГ

М.М. Немирович-Данченко✉

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Россия, г. Томск

✉ michnd@mail.ru

Аннотация. Рассматривается преобразование Прони применительно к записям данных электроэнцефалограммы. На промежуточном этапе преобразования Прони вычисляются корни полинома, характеризующие частоту и затухание исследуемого сигнала. Для обрабатываемых рядов из действительных чисел корни полинома Прони всегда будут комплексно-сопряженными числами. Расположение этих корней внутри единичного круга наглядно характеризует преобразованный сигнал. Из исследовательской биометрической базы записей МГУ выбраны записи электроэнцефалограмм для операторов, находящихся в состоянии покоя и в состоянии выполнения мысленных движений. Выполнение для выбранных записей преобразования Прони в скользящем окне с последующим отображением полученных корней полинома Прони внутри единичного круга позволяет выявить паттерны ЭЭГ, отличающие состояние покоя человека от состояния мысленного движения, то есть выделить так называемые мысленные корреляты.

Ключевые слова: преобразование Прони, комплексные корни, электроэнцефалограмма, цифровая обработка, скользящее окно

Для цитирования: Немирович-Данченко М.М. Анализ комплексных корней характеристического полинома преобразования Прони в скользящем окне при обработке записей ЭЭГ // Известия томского политехнического университета. Промышленная кибернетика. – 2023. – Т. 1. – № 4. – С. 1–6. DOI: 10.18799/29495407/2023/4/37

UDC 005, 519.254+57.087.1
DOI: 10.18799/29495407/2023/4/37

Analysis of complex roots of the characteristic polynomial of Proni transformation in a sliding window when processing EEG recordings

M.M. Nemirovich-Danchenko✉

Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russian Federation

✉ michnd@mail.ru

Abstract. The Prony transform is considered in relation to recordings of electroencephalogram data. At the intermediate stage of the Prony transform, the roots of the polynomial are calculated, characterizing the frequency and attenuation of the signal under study. For processed series of real numbers, the roots of the Prony polynomial will always be complex conjugate numbers. The location of these roots inside the unit circle clearly characterizes the converted signal. From the research biometric database of MSU records, electroencephalogram records were selected for operators at rest and in a state of performing mental movements. Performing the Prony transformation for selected records in a sliding window, followed by displaying the resulting roots of the Prony polynomial inside the unit circle, makes it possible to identify EEG patterns that distinguish a person's state of rest from the state of mental movement, that is, to identify the so-called mental correlates.

Keywords: Prony transform, complex roots, electroencephalogram, digital processing, sliding window

For citation: Nemirovich-Danchenko M.M. Analysis of complex roots of the characteristic polynomial of Proni transformation in a sliding window when processing EEG recordings. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Industrial Cybernetics*, 2023, vol. 1, no. 4, pp. 1–6. DOI: 10.18799/29495407/2023/4/37

Введение

Для цифровых рядов чаще всего при обработке используется метод Фурье и его различные модификации. При этом спектральное разрешение метода определено длительностью выборки, другими словами – размерные значения частот спектра $F(\omega)$ определяются только шириной окна обработки. Не важно, говорим мы при этом о временных рядах или о просто неких числовых рядах – для обработки одного конкретного ряда с одним фиксированным размером окна набор частот всегда будет один и тот же – независимо от положения окна обработки и, что более важно, независимо от поведения значений ряда в окне. Динамические изменения функции в скользящем окне будут влиять только на значения комплексных амплитуд номеров гармоник ω ряда Фурье, значения гармоник в общем случае точно подобрать нельзя.

Иначе обстоит дело при применении преобразования Прони [1, 2]. Метод Прони является методом нелинейной регрессии, ряд авторов для обобщённого метода используют понятие «обобщённый метод наименьших квадратов Прони» [3, 4]. Применение метода Прони позволяет оценить не только амплитуды для отдельных частот, но и определять сами частоты, значения фазы и затухания с некоторой, наперёд заданной, точностью [5–7].

Известно несколько характерных примеров использования преобразования Прони при обработке числовых рядов самого разного генезиса и в самых разных областях знаний от геофизики [8, 9] до биометрии [10–12]. Метод Прони осуществляет приближение числовой последовательности с помощью суммы комплексных экспонент. Получающиеся при этом комплексные корни характеристического полинома полностью характеризуют исследуемый ряд. Настоящая работа посвящена изучению поведения комплексных корней характеристического полинома метода Прони.

Описание метода

Сам метод Прони, в своём современном виде наиболее полно изложенный в работе Марпла [2], состоит из трёх этапов. На первом этапе выполняется определение параметров линейного предсказания с подгонкой имеющихся данных, на втором из полученных коэффициентов предсказания формируется полином и определяются его корни и по ним оцениваются частоты и коэффициенты затухания. На последнем этапе получаются оценки фаз и амплитуд членов ряда Прони.

Число слагаемых ряда в методе Прони не зависит ни от шага наблюдений, ни от интервала обработки и определяется только значениями ряда.

Основную формулу преобразования порядка p для оценки значения n -го члена ряда будем записывать в виде [2]:

$$x(n) = \sum_{k=1}^p h_k z_k^{(n-1)}. \quad (1)$$

Входящие в формулу (1) функции и параметры в общем случае комплекснозначны. Комплексные амплитуды h_k и комплексные параметры z_k определяются выражениями:

$$h_k = A_k \exp(j\theta_k), \quad z_k = \exp[(\alpha_k + j2\pi f_k)T], \quad (2)$$

где A , θ , α , f – это амплитуда, фаза (в радианах), затухание (в с^{-1}) и частота (в Гц) k -го слагаемого соответственно.

Если рассматривать временные ряды из действительных чисел, формула (2) для каждой комплексной экспоненты будет содержать её комплексно-сопряжённую пару и ряд (1) примет вид

$$x(n) = \sum_{k=1}^{p/2} 2A_k \exp[\theta_k(n-1)T] \cos[2\pi f_k(n-1)T + \theta_k]. \quad (3)$$

Членов в таком ряде стало в два раза меньше ($p/2$ вместо p) именно в силу комплексной сопряжённости слагаемых, что, в свою очередь, является следствием временных рядов с действительными значениями.

С точки зрения вычислительной преобразование Прони разбивается на три шага (четвёртый шаг, необязательный в традиционном преобразовании, – это вычисление спектральной плотности энергии).

На первом шаге определяются параметры линейного предсказания (подгонка данных). На втором шаге из коэффициентов линейного предсказания формируется характеристический полином, корни которого z_k уже позволяют проводить анализ свойств исследуемого сигнала. В этом смысле второй шаг во многих расчётах может быть последним.

Полученные на втором шаге преобразования корни полинома уже однозначно определяют коэффициенты затухания и частоты синусоид для каждого экспоненциального члена, и зачастую эти оценки являются финишными в обработке. Но далее можно выполнить следующий шаг преобразования. На третьем шаге ищутся значения h_k как решение системы линейных уравнений. Это даёт оценки амплитуд и фаз синусоид ряда (3).

Рассмотрим эти этапы несколько более подробно, следуя [2, 3].

Уравнение (1) – это прогноз значения $x(n)$ по сумме из p значений, $1 < p < N$, N – общее число значений, n – текущее значение. Параметр p в данном тексте имеет смысл порядка преобразования Прони.

Выпишем сумму квадратов ошибки этого прогноза

$$\rho = \sum_{n=1}^N |\varepsilon[n]|^2, \quad (4)$$

где

$$\varepsilon[n] = x[n] - \sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1}.$$

Для решения задачи подгонки параметров оценивания нужно найти минимум квадрата ошибки (4). Это сводится к минимизации сразу по трём параметрам – h_k , z_k и числу p . Для примера в работе [2] рассмотрена модель с одной экспонентой и показано, что даже в таком простейшем случае поиск минимума (4) сводится к существенно нелинейной задаче.

Вклад Прони в решение этой нелинейной задачи как раз и состоял в том, чтобы заменить нелинейные соотношения (1) такой системой уравнений, в которой значение выборки данных $x[n]$ линейно зависит от предыдущих p значений.

Запишем эту линейную зависимость в матричной форме

$$T^* A = -X. \quad (5)$$

Здесь квадратная матрица T имеет размерность $p \times p$, вектор коэффициентов линейного предсказания A имеет размерность $p \times 1$, а X – наблюдаемые данные x_i в следующей точке, также $p \times 1$.

Важный вычислительный аспект формулы (5) состоит в том, что матрица T – трёхдиагональная. Академический и практический интерес к трёхдиагональным матрицам с годами не снижается [13], что способствует применению современных вычислительных мощностей при решении задач методом Прони [6].

Приведём для ясности и удобства первые две строки уравнения (5)

$$\begin{pmatrix} x[p] & x[p-1] & \dots & x[1] \\ x[p+1] & x[p] & \dots & x[2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a[1] \\ a[2] \\ \dots \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x[p+1] \\ x[p+2] \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Решение системы (5) доставляет нам числа a_i – это коэффициенты характеристического многочлена Прони (6). Это и есть *первый шаг* алгоритма, его первый крупный этап.

На *втором шаге* ищутся корни полинома, сформированного из чисел a_i :

$$z^p + a[1]z^{p-1} + a[2]z^{p-2} + \dots + a[p] = 0. \quad (6)$$

По найденным корням z_i значения частот f и коэффициентов затуханий α вычисляются следующим образом:

$$\alpha_i = \ln |z_i| / T, \text{ с}^{-1};$$

$$f_i = \arctg[\text{Im}(z_i) / \text{Re}(z_i)] / (2\pi T), \text{ Гц}. \quad (7)$$

После вычисления корней полинома наступает *третий этап* преобразования Прони. Он заключается в формировании элементов матрицы исходно-

го уравнения (1), при этом используются корни, полученные на втором этапе. Выпишем полученное уравнение в матричной форме

$$Z \times H = X \quad (8)$$

и приведем первые строки этого уравнения:

$$\begin{pmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \dots & z_p^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \dots & z_p^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x[1] \\ x[2] \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Уравнение (8) решается относительно параметров $h[1], \dots, h[p]$. Наконец, амплитуда A_i и начальная фаза θ_i определяются по найденным значениям h_i по формулам:

$$A_k = |h_k|, \text{ у. е.};$$

$$\theta_k = \arctg[\text{Im}(h_k) / \text{Re}(h_k)], \text{ рад}. \quad (9)$$

Итак, формулы (7) и (9) доставляют вычисление искомым параметров метода Прони – A , θ , α , f – амплитуду, фазу, затухание и частоту каждого слагаемого уравнения (1).

Для данной статьи вычисление корней Прони будет проводиться в среде MatLab, кроме того, при вычислениях будут использованы программы на языке FORTRAN [2, 12].

Обсуждение результатов

Рассмотрим некоторые аспекты применения метода Прони к обработке данных ЭЭГ. Интерес к обработке записей ЭЭГ методом Прони обусловлен не только сугубо медицинскими аспектами применения метода [14], но возможностями этого подхода для мультимодальной идентификации [15, 16].

Для удобства обратимся к обработке записей ЭЭГ из датасета кафедры нейробиологии МГУ [17].

На рис. 1 показаны записи электроэнцефалограммы одного и того же оператора на электроде F3 при стандартной расстановке 10–20 для состояния покоя (рис. 1, а) и при мысленном движении правой рукой (рис. 1, б). На рис. 1, а обозначено скользящее окно обработки. Для окна обработки было выполнено преобразование Прони, на рис. 2 приводятся первые четыре члена ряда (1) для $N=64$ (число значений в окне) и $p=15$ (число членов ряда (1)).

Первый член ряда (1) при нечётном p – это в данном случае затухающая из отрицательных значений экспонента, на рисунке выглядит как жирная сплошная линия, остальные 3 члена – затухающие синусоиды. Для большинства обычных временных сигналов ряд (1) сходится значительно быстрее, чем ряд Фурье.

Корни полинома, определяющие частоту и затухание каждой из кривых на рис. 2, можно изобразить в комплексной плоскости внутри единичного круга.

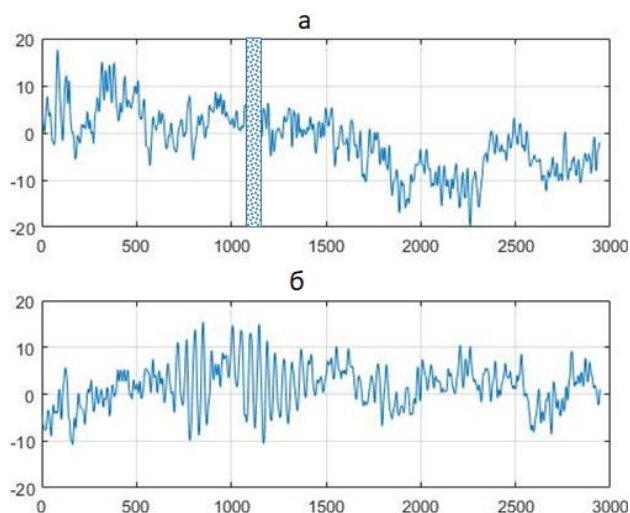


Рис. 1. Примеры записей ЭЭГ: а) в состоянии покоя (релаксация); б) при мысленном движении правой рукой

Fig. 1. Examples of EEG recordings: a) at rest (relaxation); б) with mental movement of the right hand

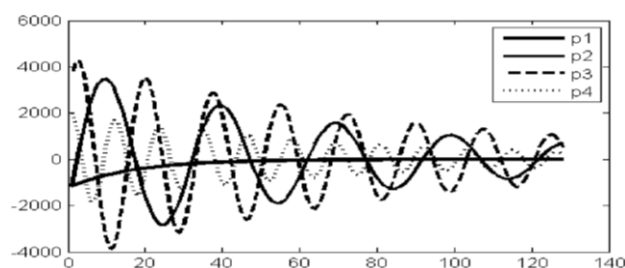


Рис. 2. Первые члены ряда Прони

Fig. 2. First terms of the Proni series

Единичный круг здесь удобен для дифференциации поведения кривых. Если корень расположен на единичном круге – колебание гармоническое незатухающее, если корень расположен внутри круга – затухающее. В редких для физических кривых случаях корни могут располагаться вне единичного круга, что характеризует локальное возрастание амплитуды электромагнитного импульса ЭЭГ. Визуальная предварительная оценка кривых ЭЭГ на рис. 1 позволяет предположить, что корни полинома Прони для записи с мысленным движе-

нием будут ближе к чисто гармоническим кривым. И действительно, если обратиться к рис. 3, на котором приведена карта корней полинома в малом скользящем окне при $p=3$, то можно видеть, что «чёрные» корни лежат либо на круге, либо близко к нему, а «серые» корни обладают большим затуханием, ни один из них не попал на единичную окружность. Кроме того, частота записей ЭЭГ при мысленном движении ниже, чем в состоянии покоя (релаксации).

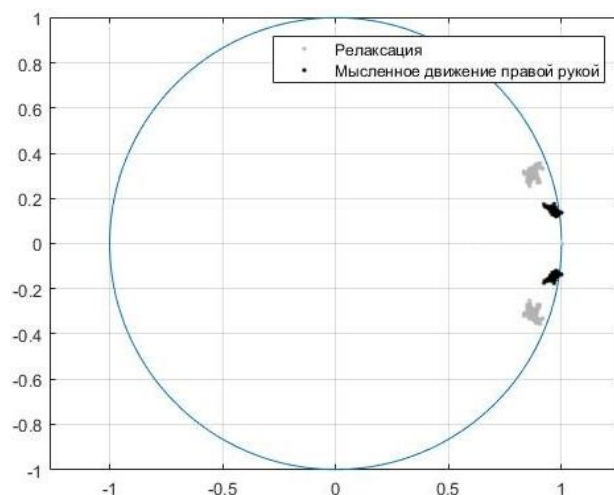


Рис. 3. Расположение комплексных корней полинома

Fig. 3. Location of complex roots of a polynomial

Заключение

В работе описано применение преобразования Прони для модельных биометрических данных. Показаны особенности применения комплексных корней характеристического полинома Прони. Целью работы было продемонстрировать особенности и возможности подхода Прони при обработке числовых рядов и поведение при этом комплексных корней характеристического полинома. Обработка велась на примере записей ЭЭГ. Показана возможность соотнесения расположения корней полинома внутри единичного круга с состоянием человека. В рассмотренном случае выделенные признаки можно рассматривать как корреляты мысленных движений оператора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Prony R. Essai expérimental et analytique: Sur les lois de la Dilatabilité des fluides élastiques et sur celles de la Force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alcool, à différentes températures // Journal de l'École Polytechnique Floréal et Plairial. – 1975. – № 3. – Vol. 1. – Cahier 22. – P. 24–79.
2. Marple S. Digital spectral analysis with applications. – New Jersey: Prentice Hall, 1987. – 584 p.
3. Kay S.M., Marple S.L. Spectrum analysis – a modern perspective // Proceedings of the IEEE. – 1981. – Vol. 69. – № 11. – P. 1380–1419. DOI: 10.1109/PROC.1981.12184
4. Marple S. Spectral line analysis via a fast Prony algorithm // ICASSP '82. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. – Paris, 1982. – P. 1375–1378. DOI: 10.1109/ICASSP.1982.1171448
5. Ando S. Frequency-domain Prony method for autoregressive model identification and sinusoidal parameter estimation // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2020. – Vol. 68. – P. 3461–3470. DOI: 10.1109/TSP.2020.2998929

6. Katz R., Diab N., Batenkov D. Decimated Prony's method for stable super-resolution // *IEEE Signal Processing Letters*. – 2023. – Vol. 30. – P. 1467–1471. DOI: <https://doi.org/10.1109/LSP.2023.3324553>
7. Hussen A., He W. Prony method for two-generator sparse expansion problem // *Math. Comput. Appl.* – 2022. – Vol. 27. – Iss. 60. DOI: <https://doi.org/10.3390/mca27040060>
8. Гриценко С.А., Фомель С.Б., Черняк В.С. Фильтрация по методу Прони // *Геофизика*. – 2001. – № S. – С. 25–26. EDN UCTRBF
9. Немирович-Данченко М.М. Возможности обнаружения множественной трещиноватости сплошной среды на основе оценки спектральной плотности энергии отраженного сигнала // *Физическая мезомеханика*. – 2013. – Т. 16. – № 1. – С. 105–110.
10. Анистратенко О.Ю., Варава Б.Н. Автоматизированная система для комплексной обработки клинично-лабораторных данных с помощью модифицированного метода Прони // *Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева*. – 2006. – № 2 (9). – С. 5–8.
11. Применение вейвлет-преобразования и метода Прони для идентификации биогенных сигналов / А.В. Коломейцева, Г.В. Мишугова, А.П. Мул, Г.Ю. Рябых // *Вестник Донского государственного технического университета*. – 2010. – Т. 10. – № 4 (47). – С. 455–465.
12. Coding Prony's method in Matlab and applying it to biomedical signal filtering / A.F. Rodríguez, R. L. de Santiago, E.L. Guillén, J.R. Ascariz, J.M. Jiménez, L. Boquete // *BMC bioinformatics*. – 2018. – № 19 (1). – P. 1–14. DOI: <https://doi.org/10.1186/s12859-018-2473-y>
13. A note on the structured perturbation analysis for the inversion formula of Toeplitz matrices / J. Wu, X.M. Gu, Y.L. Zhao, Y.Y. Huang, B. Carpentieri // *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*. – 2023. – Vol. 40. – Iss. 1. – P. 645–663. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13160-022-00543-w>
14. Osama A. Elsayed, Ayman Eldeib, Fatma M. Elhefnawi. Modeling of epilepsy EEG signal using Prony's method // *International Journal of Simulation: Systems, Science & Technology*. – 2012. – № 13 (6). – P 32–35. DOI:10.5013/IJSSST.a.13.06.05
15. Moctezuma L.A., Molinas M. Towards a minimal EEG channel array for a biometric system using resting-state and a genetic algorithm for channel selection // *Scientific Reports*. – 2020. – № 10. – Article number: 14917. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-020-72051-1>
16. Elenets M.V., Nemirovich-Danchenko M.M. Application of the Prony method for biometric data analysis // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2021. – Vol. 1862. – 012007. DOI: 10.1088/1742-6596/1862/1/012007
17. Научные ресурсы // Кафедра высшей нервной деятельности Биологического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. URL: <http://www.neurobiology.ru/doc/index.php?ID=78> (дата обращения: 20.10.2023)

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Михаил Михайлович Немирович-Данченко, доктор физико-математических наук, профессор кафедры комплексной информационной безопасности электронно-вычислительных систем факультета безопасности Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники, Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 40. michnd@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-4510-8045>

Поступила: 20.11.2023

Принята: 20.12.2023

Опубликована: 29.12.2023

REFERENCES

1. Prony R. Experimental and analytical test: On the laws of the Expandability of elastic fluids and on those of the Expansive Force of water vapor and alcohol vapor, at different temperatures. *Journal of the École Polytechnique Floréal et Plairial*, 1975, no. 3, vol. 1, cahier 22, pp. 24–79. (In French).
2. Marple S. *Digital spectral analysis with applications*. New Jersey, Prentice Hall, 1987. 584 p.
3. Kay S.M., Marple S.L. Spectrum analysis – a modern perspective. *Proceedings of the IEEE*, 1981, vol. 69, no. 11, pp. 1380–1419. DOI: 10.1109/PROC.1981.12184
4. Marple S. Spectral line analysis via a fast Prony algorithm. *ICASSP '82. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Paris, 1982. pp. 1375–1378. DOI: 10.1109/ICASSP.1982.1171448
5. Ando S. Frequency-domain Prony method for autoregressive model identification and sinusoidal parameter estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2020, vol. 68, pp. 3461–3470. DOI: 10.1109/TSP.2020.2998929
6. Katz R., Diab N., Batenkov D. Decimated Prony's method for stable super-resolution. *IEEE Signal Processing Letters*, 2023, vol. 30, pp. 1467–1471. DOI: <https://doi.org/10.1109/LSP.2023.3324553>
7. Hussen A., He W. Prony method for two-generator sparse expansion problem. *Math. Comput. Appl.*, 2022, vol. 27, Iss. 60. DOI: <https://doi.org/10.3390/mca27040060>
8. Gritsenko S.A., Fomel S.B., Chernyak V.S. Filtration using the Proni method. *Geophysics*, 2001, no. S, pp. 25–26. (In Russ.) EDN UCTRBF
9. Nemirovich-Danchenko M.M. Possibilities of detection of multiple cracking in a continuous medium from estimates of spectral energy density of reflected signal. *Physical mesomechanics*, 2013, vol. 16, no. 1, pp. 105–110. (In Russ.)
10. Anistratenko O.Yu., Varava B.N. Automated system for complex processing of clinical and laboratory data using a modified Prony method. *Bulletin of the Siberian State Aerospace University named after. Academician M.F. Reshetneva*, 2006, no. 2 (9), pp. 5–8. (In Russ.)

11. Kolomeytseva A.V., Mishugova G.V., Mul A.P., Ryabykh G.Yu. Application of the wavelet transform and the Prony method for identifying biogenic signals. *Bulletin of the Don State Technical University*, 2010, vol. 10, no. 4 (47), pp. 455–465. (In Russ.)
12. Rodríguez A.F., De Santiago L.R., Guillén E.L., Ascariz J.R., Jiménez J.M., Boquete L. Coding Prony's method in Matlab and applying it to biomedical signal filtering. *BMC bioinformatics*, 2018, no. 19 (1), pp. 1–14. DOI: <https://doi.org/10.1186/s12859-018-2473-y>
13. Wu J., Gu X.M., Zhao Y.L., Huang Y.Y., Carpentieri B. A note on the structured perturbation analysis for the inversion formula of Toeplitz matrices. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 2023, vol. 40, Iss. 1, pp. 645–663. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13160-022-00543-w>
14. Osama A. Elsayed, Ayman Eldeib, Fatma M. Elhefnawi. Modeling of Epilepsy EEG Signal using Prony's Method. *International Journal of Simulation: Systems, Science & Technology*, 2012, no. 13 (6), pp. 32–35. DOI: 10.5013/IJSSST.a.13.06.05
15. Moctezuma L.A., Molinas M. Towards a minimal EEG channel array for a biometric system using resting-state and a genetic algorithm for channel selection. *Scientific Reports*, 2020, no. 10, Article number: 14917. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-020-72051-1>
16. Elenets M.V., Nemirovich-Danchenko M.M. Application of the Prony method for biometric data analysis. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1862, 012007. DOI: 10.1088/1742-6596/1862/1/012007
17. Scientific resources. Department of Higher Nervous Activity, Faculty of Biology, Moscow State University named after M.V. Lomonosov. Available at: <http://www.neurobiology.ru/doc/index.php?ID=78> (accessed: 20.10.2023).

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mikhail M. Nemirovich-Danchenko, Dr. Sc., Professor, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, 40, Lenin avenue, Tomsk, 634050, Russian Federation; michnd@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-4510-8045>

Received: 20.11.2023

Received: 20.12.2023

Accepted: 29.12.2023