

К ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ ВИБРАЦИЙ ВАЛОВ ДВС

НЕЧАЕВ В. К.

Профессор, доктор технических наук

Введение

Современные методы расчета крутильных колебаний коленчатых валов поршневых двигателей позволяют определить, с большей или меньшей степенью точности, те дополнительные напряжения скручивания, которые возникнут в валу при работе двигателя на какой-либо из его критических скоростей, в условиях точного крутильного резонанса. Критерием наличия этого резонанса считается совпадение угловой η_h частоты резонирующих гармоник крутящего момента на валу двигателя с одной из угловых частот ω_0 собственных крутильных колебаний валопровода исследуемой установки. Отношение

$$\gamma = \frac{\eta_h}{\omega_0},$$

именуемое в дальнейшем коэффициентом настройки, получает в условиях резонанса значение $\gamma = 1$.

Внешним признаком резонансного характера колебательного процесса является обычно интенсивный рост амплитуд вынужденных колебаний. Подобный рост, или развитие амплитуд, продолжается до тех пор, пока приход энергии в колеблющейся системе за счет работы возбуждения, совершаемой резонирующими гармоническими крутящими моментами, не сравняется с расходом ее, обусловленным наличием демпфирующих сил в установке. Максимальная резонансная амплитуда колебания определяется из равенства этих работ за каждый цикл колебаний. Именно эту предельную амплитуду и дают известные в настоящее время методы расчета резонансных вибраций коленчатых валов [3, 15, 17, 18].

Но такие „благоприятные“ (для развития вибраций) идеальные условия достаточно продолжительной работы установки при точно постоянном значении коэффициента настройки $\gamma = 1$ по существу никогда не реализуются в практике, так как в действительных силовых установках с поршневыми двигателями всегда переменны как η_h , так и ω_0 .

Угловая частота η_h гармонического крутящего момента $M_h \sin \eta_h t$ связана с угловой скоростью вращения вала η и порядком h этого момента соотношением

$$\eta_h = h\eta.$$

Таким образом, η_h постоянно по времени лишь при условии $\eta = \text{const}$.

Вообще при динамическом исследовании установок с поршневыми двигателями надлежит различать:

а) среднюю (воображаемую или условную) угловую скорость η_0 вращения вала двигателя;

б) мгновенную угловую скорость η_s вращения вала двигателя, когда этот вал, вместе со всем валом установки, рассматривается как абсолютно жесткое (на скручивание) тело;

в) истинную мгновенную скорость η_i вращения какого-либо определенного сечения вала.

Средняя угловая скорость η_0 определяется формулой

$$\eta_0 = \frac{\pi n}{30} \text{ сек}^{-1}$$

через минутное число оборотов n двигателя, замеренное, например, суммарным счетчиком. Скорость η_0 обычно постоянна при постоянной нагрузке на двигатель и неизменной его регулировке.

Мгновенная скорость η_s непрерывно меняется вследствие неравенства между мгновенной величиной переменного крутящего момента на валу двигателя и моментом внешней нагрузки. Конкретная величина η_s для каждого момента времени может быть найдена, например, с помощью известного метода Виттенбауэра. Колебания этой скорости зависят от характера суммарной диаграммы тангенциальных усилий на валу двигателя и закона изменения момента внешней нагрузки по углу поворота коленчатого вала.

Очевидно, что η_s еще можно называть мгновенной скоростью вращения вала двигателя, т. е. всех его сечений и всех вращающихся с ним масс.

Истинная мгновенная угловая скорость η_i за счет крутильных колебаний валопровода не только переменна по времени, но и различна по длине вала установки. Скорости η_i аналитически определяются лишь путем детального расчета крутильных колебаний валопровода и построения торсиограммы для каждого интересующего нас сечения вала в отдельности.

Относительный размах колебаний скоростей η_s и η_i на протяжении одного цикла работы цилиндров двигателя характеризуется соответственно выражениями

$$\delta_s = \frac{\eta_{s \max} - \eta_{s \min}}{\eta_0},$$

$$\delta_i = \frac{\eta_{i \max} - \eta_{i \min}}{\eta_0}.$$

Величина δ_s — „жесткая“ степень неравномерности, или, как ее часто называют, — степень неравномерности маховика, подсчитывается по общеизвестным методам, в предположении абсолютной жесткости вала установки на скручивание. Естественно, что δ_s одинакова для всех сечений вала. Величина δ_i , которой мы присвоим наименование „упругой“ (или истинной) степени неравномерности, уже не одинакова для различных сечений вала. Экспериментально δ_i может быть найдена с помощью торсиографирования интересующего нас участка (или, точнее, — сечения) вала.

„Жесткая“ степень неравномерности δ_s , соответствующая так называемым безузловым колебаниям вала, входит в δ_i через вибрации, вызванные главными порядками гармоник крутящего момента, далекими от резонанса, если под этой δ_i понимать полную степень неравномерности, обусловленную воздействием на валопровод всего гармонического спектра, крутящего момента двигателя и момента внешней нагрузки.

Все общепринятые методы расчета вибраций коленчатых валов, в особенности вынужденных вибраций, предполагают замену всех масс шатунно-кривошипного механизма каждого цилиндра, переменным образом участвующих в колебательном процессе, вращающимися массами с

постоянным моментом инерции. Фактически же, как известно, момент инерции приведенных к радиусу кривошипа масс шатунно-кривошипного механизма является периодической функцией угла поворота α коленчатого вала. Соответственно периодически по α меняется и частота собственных колебаний валопровода в интервале от некоторой ω_{max} до ω_{min} . Здесь целесообразно ввести понятие о „внутренней“ степени неравномерности δ_0 колеблющейся системы, определяемой соотношением

$$\delta_0 = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_0}$$

и характеризующей диапазон колебаний (пульсаций) частоты собственных колебаний относительно среднего ее значения ω_0 . Частота этих пульсаций собственной частоты зависит как от скорости вращения вала двигателя, так и от числа его цилиндров и взаимного расположения коленвала.

В отличие от „внутренней“ степени неравномерности δ_0 , обусловленной целиком основными свойствами самой колеблющейся системы, можно величинам δ_s и δ_i присвоить наименование „внешних“ степеней неравномерности (соответственно „жесткой“ и „упругой“), так как последние, по существу, определяются внешними силами, действующими на систему.

В любой установке с поршневыми двигателями непрерывные колебания η и ω_0 (характеризуемые степенями неравномерности δ_s , δ_0 и δ_i) все время отклоняют систему от того состояния стационарного колебательного процесса, который только и рассматривается обычной теорией гармонических вибраций. Аналогичное же явление имеет место и при работе установки на какой-либо из ее критических скоростей.

Представляется достаточно очевидным, что такое перманентное нарушение резонансного колебательного процесса в валу поршневого двигателя за счет внешней и внутренней неравномерности (δ_s , δ_i , δ_0) исключает возможность развития тех резонансных амплитуд и напряжений, которые подсчитываются по обычным методам, предполагающим $\gamma = \text{const} = 1$. С увеличением δ в колеблющейся системе как бы возрастает дополнительное, так называемое кажущееся или динамическое, демпфирование. При этом, в отличие от демпфирования действительного (напр., внутреннее трение в валу, трение в подшипниках и т. п.), динамическое демпфирование не связано, по крайней мере в основном, с рассеянием энергии.

Однако вопрос о динамическом демпфировании крутильных колебаний почти не разработан. Аналитический учет влияния степени неравномерности (внешней и внутренней) на величину амплитуд резонансных вибраций валов ДВС может быть произведен в настоящее время только при помощи известной формулы Манси [14].

Эта формула, привлекающая своей простотой и наглядностью, цитируется во многих трудах по теории вибраций и рядом авторов [1, 4, 10, 11, 12] рекомендуется для применения в расчетной практике. Но в трактовке формулы Манси и в оценке степени ее точности нет единства мнений. Принципиальные основания ее нельзя считать убедительными. Больше того, критический анализ формулы Манси и некоторых связанных с ней взглядов на эффект динамического демпфирования заставляют признать ее явно неудовлетворительной [5]. Применение ее может привести к серьезным ошибкам не только в количественной, но и в качественной оценке тех динамических процессов, которые разыгрываются в валопроводе силовой установки с поршневым двигателем.

Цель настоящей работы—провести детальный анализ влияния неравномерности вращения вала двигателя на характер и развитие резонансных и нерезонансных вибраций в нем, а также установить истинный эффект динамического демпфирования, обусловленного этой неравномерностью.

1. Общие определения

При изучении вибраций валов ДВС необходимо иметь в виду коренное различие между „внешней“ (δ_s, δ_i) и „внутренней“ (δ_θ) степенями неравномерности в установках с поршневыми двигателями.

„Внутренняя“ неравномерность ($\delta_\theta > 0$), обусловленная периодическими изменениями моментов инерции приведенных масс двигателя, целиком связана с основными характеристиками установки. Здесь приведенная система, по крайней мере при не слишком малой δ_θ , теряет свойства гармонического резонатора, а ее колебания приобретают квази гармонический характер.

„Внешняя“ неравномерность (δ_s, δ_i), то-есть неравномерность вращения вала, не вносит столь существенных изменений в колеблющуюся систему, которая, как и в идеальном случае ($\delta_s = 0$), при некоторых указанных ниже ограничениях, обычно может быть описана линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Таким образом, при исследовании вибраций установок с постоянными приведенными массами ($\delta_\theta = 0$), имеющих $\delta_s > 0$ (а, в известной мере $\delta_i > 0$), у нас сохраняется возможность использовать весь основной аппарат теории гармонических колебаний с ее спектральным подходом к анализу эффекта сложного периодического возбуждения.

В реальных колебательных системах, какими являются установки ДВС, обычно одновременно имеются $\delta_\theta > 0$ и $\delta_s > 0$ или, точнее, $\delta_\theta > 0$ и $\delta_i > 0$. Однако исследование вибраций в этих условиях представляет исключительные трудности.

Мы ограничимся здесь лишь анализом случая $\delta_\theta = 0$, для того чтобы выявить в чистом виде эффект наличия $\delta_s > 0$ (или $\delta_i > 0$) в линейной системе, и тем установить конкретное значение неравномерности вращения вала, как фактора динамического демпфирования крутильных колебаний в установках с ДВС.

Каждый цилиндр работающего двигателя создает на коленчатом валу переменный крутящий момент, $M_{кр}$, величина которого, при любом угле поворота коленчатого вала α , может быть определена обычными способами, по индикаторной диаграмме. По полученным подобным образом данным выстраивается кривая $M_{кр}$ в функции α , имеющая, в зависимости от тактности двигателя, период 2π или 4π .

Гармонический анализ этой кривой, как правило, всегда удовлетворяющей условиям Дирихле, позволяет представить крутящий момент одного цилиндра в виде тригонометрического ряда

$$M_{кр} = M_0 + \sum_{h=1}^{\infty} A_h \sin h\alpha + \sum_{h=1}^{\infty} B_h \cos h\alpha = M_0 + \sum_{h=1}^{\infty} M_h \sin(h\alpha + \varepsilon_h) \quad (1)$$

($h = 1, 2, 3, \dots$)

для двухтактных двигателей и

$$M_{кр} = M_0 + \sum_{h=1/2}^{\infty} M_h \sin(h\alpha + \varepsilon_h) \quad (2)$$

($h = 1/2, 1, 1 1/2, 2, \dots$)

для четырехтактных двигателей. Здесь:

M_0 — постоянная слагающая крутящего момента $M_{кр}$,

M_h — амплитуда гармонического момента (или короче — амплитуда гармоники) h — порядка, определяемая формулой:

$$M_h = \sqrt{A_h^2 + B_h^2},$$

ε_h — фазовый угол этой гармоник, подсчитываемый по формуле:

$$\varepsilon_h = \operatorname{arctg} B_h/A_h$$

и характеризующий положение вектора M_h относительно кривошипа в момент, соответствующий $\alpha = 0$, то-есть $ВМТ$.

В дальнейшем, ради простоты всех выкладок, мы будем рассматривать лишь двухтактные двигатели, то есть принимать $h = 1, 2, 3, \dots$ Для получения же результатов, пригодных и для четырехтактных машин, достаточно в итоговых формулах понимать под h не только целые, но и половинные порядки.

Угол поворота кривошипа α , входящий в (1) и (2), связан со временем t очевидным соотношением

$$\alpha = \int_0^t \eta dt, \quad (3)$$

где η — мгновенная угловая скорость вращения вала, или точнее — мгновенная угловая скорость вращения кривошипа рассматриваемого цилиндра. Теперь из (1):

$$\begin{aligned} M_{кр} &= M_0 + \sum_{h=1}^{\infty} A_h \sin \left(h \int_0^t \eta dt \right) + \sum_{h=1}^{\infty} B_h \cos \left(h \int_0^t \eta dt \right) = \\ &= M_0 + \sum_{h=1}^{\infty} M_h \sin \left(h \int_0^t \eta dt + \varepsilon_h \right). \end{aligned} \quad (4)$$

В общепринятых методах расчета вибраций коленчатых валов предполагается прямая пропорциональность между α и t :

$$\alpha = \eta_0 t, \quad (5)$$

где η_0 , очевидно, представляет собою некоторую среднюю угловую скорость вращения вала во всем рассматриваемом промежутке времени, то-есть, по крайней мере, на протяжении одного цикла рабочего процесса в цилиндре.

Подстановка (5) в (1) дает обычное спектральное представление крутящего момента $M_{кр}$ в виде суммы элементарных моментов (гармоник), каждый из которых рассматривается как простая гармоническая функция времени

$$M_{кр} = M_0 + \sum_{h=1}^{\infty} A_h \sin h \eta_0 t + \sum_{h=1}^{\infty} B_h \cos h \eta_0 t = M_0 + \sum_{h=1}^{\infty} M_h \sin (h \eta_0 t + \varepsilon_h). \quad (6)$$

Здесь все M_h , A_h , B_h , ε_h принято считать постоянными, не зависящими от времени. Но это допущение тем менее справедливо, чем менее стабилен режим работы двигателя и, как будет показано ниже, чем больше неравномерность вращения его вала.

При постоянной нагрузке на двигатель и установившемся протекании тепловых процессов в цилиндре, точность ряда (6), как характеристики истинного (то-есть гармонического по времени) спектра крутящего момента $M_{кр}$, целиком определяется погрешностями соотношения (5), на базе которого в результате чисто геометрического (то-есть без учета фактора времени) гармонического анализа кривой $M_{кр} = f_0(\alpha)$ введено время и получен ряд (6).

Очевидно, что во всех реальных задачах практики

$$\eta \neq \text{const}$$

и, следовательно, ряд (1) переходит в (4), где каждое слагаемое вида:

$$(M_h) = M_h \sin \left(h \int_0^t \eta dt + \varepsilon_h \right) \quad (7)$$

оказывается часто очень сложной функцией времени t .

Таким образом, „геометрический“ гармонический анализ кривой $M_{кр} = f_0(\alpha)$, результаты которого записываются в виде обычного ряда (1), далеко еще не дает ответа на вопрос о конкретных характеристиках гармонического спектра крутящего момента $M_{кр}$, компоненты которого, в условиях исследования вынужденных вибраций линейных систем с постоянными параметрами, должны быть чистыми моногармоническими функциями времени. Для непосредственного получения этих моногармонических компонент крутящего момента необходимо было бы провести гармонический анализ кривой $M_{кр}$, построенной в виде функции времени t . Однако построение такой кривой, по крайней мере в начале расчетов, вибраций вала, представляет непреодолимые затруднения, так как зависимость η от t заранее недостаточно известна.

К тому же, кривая $M_{кр} = f_0(\alpha)$ имеет и вполне определенный физический смысл, так как основные тепловые процессы, происходящие в цилиндре двигателя, являются не столько явной функцией времени, сколько функцией переменного объема рабочей полости цилиндра, то-есть, следовательно, угла поворота кривошипа α . Наконец, просто не имеет смысла отказываться от использования результатов больших вычислительных работ по гармоническому анализу типичных диаграмм крутящих моментов, проведенных рядом исследователей [3, 10, 15] и представленных или в виде графиков или таблиц, дающих конкретные значения гармонических коэффициентов $\frac{M_h}{Fr}$ (где F —площадь поршня) для каждого h и различной

величины среднего индикаторного давления в цилиндре p_i . Применение подобных графиков облегчает работу конструктора, так как освобождает его от необходимости каждый раз проводить кропотливые вычисления по гармоническому анализу кривой $M_{кр}$.

Таким образом, все же целесообразно начать наше исследование с ряда (1), каждый компонент которого:

$$(M_h) = M_h \sin(h\alpha + \varepsilon_h) = M_h \sin \left(h \int_0^t \eta dt + \varepsilon_h \right) \quad (8)$$

представляет простую гармоническую функцию α и, одновременно, сложную модулированную¹⁾ функцию времени t .

В соответствии с принятыми в радиотехнике определениями и терминологией [7], будем различать следующие основные типы модуляции функции (8):

1) Модуляция по амплитуде, или амплитудная модуляция. Здесь:

$$\eta = \eta_0 = \text{const},$$

$$\varepsilon_h = \text{const},$$

¹⁾ Мы понимаем, как обычно, под модуляцией внесение в чисто синусоидальный колебательный процесс каких-либо специальных, особых периодических отклонений.

то-есть

$$\alpha = h\eta_0 t$$

и

$$(M_h) = M_h \sin(h\eta_0 t + \varepsilon_h), \quad (9)$$

где амплитуда момента M_h переменна по времени. Степень отклонения (M_h) от чисто синусоидальной функции t определяется характером изменений по t амплитуды M_h .

2) Модуляция по частоте, или частотная модуляция. Здесь:

$$M_h = \text{const}, \quad \varepsilon_h = \text{const},$$

а угловая частота η —переменна по t .

3) Модуляция по фазе, или фазовая модуляция, характеризующаяся условиями:

$$\eta = \eta_0 = \text{const},$$

$$M_h = \text{const},$$

а фазовый угол ε_h —меняется в зависимости от времени. Легко показать, что фазовая модуляция аналогична модуляции частотной. Частотная модуляция через переменную скорость вращения вектора M_h , очевидно, неизбежно ведет к изменениям ε_h и потому одновременно является модуляцией по фазе. Ввиду этого рассматривать фазовую модуляцию особо нет необходимости.

4) Смешанная, модуляция,—когда переменны по времени M_h и η .

Для удобства дальнейшего исследования введем понятия о газовых и инерционных гармониках крутящего момента на валу двигателя. Будем называть газовыми гармониками—гармонические компоненты крутящего момента на валу, создаваемые давлением газов на поршень, а инерционными гармониками—компоненты этого момента, обусловленные силами инерции поступательно двигающихся масс шатунно-кривошипного механизма.

Такая дифференциация компонент $M_{кр}$ целесообразна уже при обычном анализе вибраций валов установок, работающих в широком диапазоне чисел оборотов. Она особо необходима в нашем исследовании, так как цикличные колебания угловой скорости вращения вала двигателя соответствующим образом меняют величину сил инерции поступательно движущихся частей шатунно-кривошипного механизма, и, с другой стороны, практически не оказывают какого-либо влияния на величину сил давления газов на поршень.

При $\eta = \text{const}$ инерционные гармоники легко подсчитываются аналитически, по известным формулам, [5]. Это позволяет нам использовать для проведения гармонического анализа (напр., графическими или табличными методами) кривую крутящих моментов, построенную на основании индикаторной диаграммы без учета сил инерции. Но, конечно, в итоговых результатах этого анализа, то-есть во всех M_h и ε_h , входящих в ряд (1), в дальнейшем необходимо соответствующим образом учесть амплитуды и фазы инерционных гармоник.

Очевидно, что неравномерность вращения вала двигателя приводит к частотной модуляции газовых гармоник в разложении (1), и к смешанной модуляции гармоник инерционных.

Конкретный эффект этой модуляции, несомненно, различный для газовых и инерционных гармоник, зависит от закона изменения мгновенной угловой скорости вращения колена вала η по времени.

2. Газовые гармоники с моногармонической модуляцией частоты

Как известно, [6], действительное движение кривошипа (или всего колленчатого вала, если считать его абсолютно жестким) складывается из равномерного вращения его с средней скоростью η_0 и наложенных на это вращение гармонических колебаний:

$$\alpha = \eta_0 t + \sum_{h=1}^{\infty} \varphi_h \sin(h\eta_0 t - \zeta_h) \quad (10)$$

Здесь:

φ_h — амплитуда вынужденных колебаний кривошипа под действием гармонических компонент h -го порядка всех крутящих моментов на валу установки,

ζ_h — фазовый угол этих колебаний.

В случае очень большой жесткости вала двигателя (по сравнению с жесткостью всего вала установки) можно считать, что вынужденные колебания его вызываются только главными гармониками крутящего момента, причем наибольший эффект дают, конечно, главные гармоники низших порядков¹⁾.

Учитывая пока только наиболее сильную из этих гармоник, имеющую порядок h_0 , запишем уравнение движения кривошипа в виде

$$\alpha = \eta_0 t + \varphi_0 \sin(h_0 \eta_0 t - \zeta), \quad (11)$$

или

$$\alpha = \eta_0 t + \varphi_0 \sin(vt - \zeta), \quad (12)$$

где:

h_0 — порядок гармоники M_{h_0} крутящего момента на валу, вызывающей неравномерное вращение вала со степенью неравномерности δ_s , или, короче, — порядок циклической неравномерности δ_s ,

$h_0 \eta_0 = v$ — угловая частота этой гармоники или угловая частота циклической неравномерности δ_s ,

φ_0 — амплитуда вынужденных колебаний кривошипа (вала), вызванных действием момента M_{h_0} (о методике определения ее для случая абсолютно жесткого вала — см. работу автора [6]),

ζ — фазовый угол этих колебаний или фазовый угол циклической неравномерности δ_s .

Дифференцирование (11) дает мгновенную угловую скорость вращения кривошипа

$$\eta = \frac{d\alpha}{dt} = \eta_0 + h_0 \eta_0 \varphi_0 \cos(h_0 \eta_0 t - \zeta)$$

и экстремальные значения ее

$$\eta_{min}^{max} = \eta_0 \pm h_0 \eta_0 \varphi_0.$$

Отсюда степень неравномерности

$$\delta_s = \frac{\eta_{max} - \eta_{min}}{\eta_0} = 2h_0 \varphi_0 \quad (13)$$

и

$$\varphi_0 = \frac{\delta_s}{2h_0}. \quad (14)$$

¹⁾ Здесь, на данном этапе нашего исследования, мы исключаем возможность работы двигателя на каком-либо критическом числе оборотов, так как только при этих условиях:

$$\delta_s \cong \delta_i.$$

Теперь

$$\eta = \eta_0 \left[1 + \frac{\delta_s}{2} \cos(vt - \zeta) \right]$$

и переменная угловая частота гармонического (по α) момента M_h

$$h\eta = h\eta_0 \left[1 + \frac{\delta_s}{2} \cos(vt - \zeta) \right]$$

или

$$h\eta = \eta_h \left[1 + \frac{\delta_s}{2} \cos(vt - \zeta) \right],$$

где величину η_h , определяемую выражением

$$\eta_h = h\eta_0. \quad (15)$$

можно рассматривать как среднюю, „несущую“ частоту момента M_h . Смысл этого термина будет пояснен ниже.

Пользуясь соотношениями (12) и (14), установим связь между истинным углом поворота кривошипа α и степенью неравномерности δ_s :

$$\alpha = \eta_0 t + \frac{\delta_s}{2h_0} \sin(vt - \zeta) \quad (16)$$

и подставим это значение α в (8)

$$(M_h) = M_h \sin \left[h\eta_0 t + \frac{\delta_s}{2} \frac{h}{h_0} \sin(vt - \zeta) + \epsilon_h \right]$$

или на основании (15)

$$(M_h) = M_h \sin [\eta_h t + \xi \sin(vt - \zeta) + \epsilon_h], \quad (17)$$

где введено обозначение

$$\xi = \frac{h}{h_0} \frac{\delta_s}{2}. \quad (18)$$

Выражение (17) характеризует теперь действительную форму каждого из гармонических (по α) компонент ряда (1), полученного в результате гармонического анализа кривой $M_{кр} = f_0(\alpha)$.

Назовем далее коэффициент ξ , определяемый формулой (18) или, на основании (14) выражением

$$\xi = h\varphi_0, \quad (19)$$

амплитудой модуляции. Очевидно, что ξ представляет собою увеличенную в h раз абсолютную амплитуду колебания φ_0 рассматриваемого кривошипа или всего коленчатого вала, если нас интересует здесь только эффект жесткой степени неравномерности δ_s .

Введем обозначение

$$m_h = \frac{(M_h)}{M_h}. \quad (20)$$

Тогда из (17) получим выражение для „единичного“, гармонического по α (но, конечно, уже не гармонического по t), компонента ряда (1), соответствующего значению $M_h = 1$:

$$m_h = \sin [\eta_h t + \xi \sin(vt - \zeta) + \epsilon_h] \quad (21)$$

Перейдем к детальному анализу этого выражения. В итоге анализа мы должны получить ответ на вопрос о влиянии циклических колебаний скорости вращения вала на характеристики истинно гармонического (то-есть гармонического по времени) спектра крутящего момента $M_{кр}$.

Развертываем (21):

$$m_h = \sin(\eta_h t + \varepsilon_h) \cdot \cos[\xi \sin(vt - \zeta)] + \\ + \cos(\eta_h t + \varepsilon_h) \cdot \sin[\xi \sin(vt - \zeta)]. \quad (22)$$

Но, как известно, [2, 4]:

$$\cos(x \sin \varphi) = I_0(x) + 2 \sum_{q=1}^{\infty} I_{2q}(x) \cos 2q\varphi, \quad (23)$$

$$\sin(x \sin \varphi) = 2 \sum_{q=0}^{\infty} I_{2q+1}(x) \sin(2q+1)\varphi, \quad (24)$$

где $I_q(x)$ —функция Бесселя первого рода, определяемая общим выражением:

$$I_q(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^q \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}}{p! \Gamma(q+p+1)}.$$

Здесь Γ —обычный символ для гамма-функции.

Теперь по формуле (23)

$$\cos[\xi \sin(vt - \zeta)] = I_0(\xi) + 2 \sum_{q=1}^{\infty} I_{2q}(\xi) \cos 2q(vt - \zeta)$$

и, следовательно

$$\sin(\eta_h t + \varepsilon_h) \cdot \cos[\xi \sin(vt - \zeta)] = I_0(\xi) \cdot \sin(\eta_h t + \varepsilon_h) + \\ + 2 \sum_{q=1}^{\infty} I_{2q}(\xi) \sin(\eta_h t + \varepsilon_h) \cdot \cos 2q(vt - \zeta).$$

Отсюда после элементарных преобразований получаем окончательное выражение для первого слагаемого в формуле (22)

$$\sin(\eta_h t + \varepsilon_h) \cdot \cos[\xi \sin(vt - \zeta)] = I_0(\xi) \sin(\eta_h t + \varepsilon_h) + \\ + \sum_{q=1}^{\infty} I_{2q}(\xi) \cdot \sin[(\eta_h t + \varepsilon_h) + 2q(vt - \zeta)] + \\ + \sum_{q=1}^{\infty} I_{2q}(\xi) \sin[(\eta_h t + \varepsilon_h) - 2q(vt - \zeta)]. \quad (25)$$

Далее на основании формулы (24):

$$\sin[\xi \sin(vt - \zeta)] = 2 \sum_{q=0}^{\infty} I_{2q+1}(\xi) \sin(2q+1)(vt - \zeta)$$

и аналогично предыдущему

$$\begin{aligned} \cos(\eta_h t + \varepsilon_h) \cdot \sin[\xi \sin(vt - \zeta)] = & \sum_{q=0}^{\infty} I_{2q+1}(\xi) \sin[(\eta_h t + \varepsilon_h) + (2q+1)(vt - \zeta)] + \\ & + \sum_{q=0}^{\infty} I_{2q+1}(\xi) \sin[-(\eta_h t + \varepsilon_h) + (2q+1)(vt - \zeta)]. \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь подстановка выражений (25) и (26) в (22) после некоторых преобразований дает

$$\begin{aligned} m_h = & I_0(\xi) \sin(\eta_h t + \varepsilon_h) + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(\xi) \sin[(\eta_h t + \varepsilon_h) + q(vt - \zeta)] + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(\xi) \sin[(\eta_h t + \varepsilon_h) - q(vt - \zeta)]. \end{aligned}$$

Отсюда получаем искомую, окончательную, развертку по времени единичного, гармонического по углу поворота кривошипа α , момента m_h , представляемого уравнением (21):

$$\begin{aligned} m_h = & \sin[\eta_h t + \xi \sin(vt - \zeta) + \varepsilon_h] = I_0(\xi) \sin(\eta_h t + \varepsilon_h) + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(\xi) \sin[(\eta_h + qv)t + (\varepsilon_h - q\zeta)] + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(\xi) \sin[(\eta_h - qv)t + (\varepsilon_h + q\zeta)]. \end{aligned} \quad (27)$$

Входящая сюда амплитуда модуляции ξ определяется формулами (18) и (19). Она прямо пропорциональна циклической степени неравномерности δ_s и отношению порядка h рассматриваемой гармоники крутящего момента к порядку h_0 гармоники, вызывающей эту неравномерность δ_s .

Но, как известно,

$$\begin{aligned} I_0(0) &= 1, \\ I_q(0) &= 0, \quad (q \neq 0) \end{aligned}$$

поэтому выражение (27) при $\xi = 0$, то-есть в случае абсолютно равномерного вращения вала, переходит в элементарную зависимость

$$m_h = \sin(\eta_h t + \varepsilon_h),$$

или

$$(M_h) = M_h \sin(h\eta_0 t + \varepsilon_h),$$

лежащую в основе всех обычных расчетов вибраций коленчатых валов, не учитывающих неравномерности вращения вала двигателя.

Рассмотрим некоторые частные случаи моногармонической частотной модуляции, гармонических по α моментов (M_h) и m_h , представленных формулами (17) и (21) и входящих слагаемыми в ряд (1).

1-й случай. Чисто синусоидальная модуляция:

$$\zeta = 0; \quad \varepsilon_h = 0.$$

При этих условиях из (27):

$$\begin{aligned} m_h = & \sin[\eta_h t + \xi \sin vt] = I_0(\xi) \sin \eta_h t + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(\xi) \sin(\eta_h t + qv)t + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q \sin(\eta_h t - qv)t. \end{aligned} \quad (28)$$

или в развернутой форме:

$$m_h = \sin(\eta_h t + \xi \sin vt) = I_0(\xi) \sin \eta_h t + \\ + I_1(\xi) \sin(\eta_h + v) t + I_2(\xi) \sin(\eta_h + 2v) t + I_3(\xi) \sin(\eta_h + 3v) t + \dots \\ - I_1(\xi) \sin(\eta_h - v) t + I_2(\xi) \sin(\eta_h - 2v) t - I_3(\xi) \sin(\eta_h - 3v) t + \dots \quad (29)$$

2-й случай. Чисто косинусоидальная модуляция:

$$\zeta = \pi/2; \quad \varepsilon_h = 0$$

Здесь из (27)

$$m_h = \sin(\eta_h t + \xi \cos vt) = I_0(\xi) \sin \eta_h t \\ + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(\xi) \sin \left[(\eta_h + qv) t - q\pi/2 \right] + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(\xi) \sin \left[(\eta_h - qv) t + q\pi/2 \right] \quad (30)$$

или конкретно, в развернутой форме

$$m_h = \sin(\eta_h t + \xi \cos vt) = I_0(\xi) \sin \eta_h t \\ + I_1(\xi) \cos(\eta_h + v) t - I_2(\xi) \sin(\eta_h + 2v) t - I_3(\xi) \cos(\eta_h + 3v) t + \dots \\ + I_1(\xi) \cos(\eta_h - v) t - I_2(\xi) \sin(\eta_h - 2v) t - I_3(\xi) \cos(\eta_h - 3v) t + \dots \quad (31)$$

3-й случай.

$$\zeta = 0; \quad \varepsilon_h = -\pi/2.$$

Из (27):

$$m_h = \cos(\eta_h t + \xi \sin vt) = I_0(\xi) \cos \eta_h t + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(\xi) \cos(\eta_h + qv) t + \\ + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(\xi) \cos(\eta_h - qv) t = I_0(\xi) \cos \eta_h t + \\ + I_1(\xi) \cos(\eta_h + v) t + I_2(\xi) \cos(\eta_h + 2v) t + \dots \\ - I_1(\xi) \cos(\eta_h - v) t + I_2(\xi) \cos(\eta_h - 2v) t - \dots \quad (32)$$

4-й случай.

$$\zeta = -\pi/2; \quad \varepsilon_h = 0.$$

Здесь

$$m_h = \sin(\eta_h t - \xi \cos vt).$$

Учитывая, что по общим свойствам функций Бесселя [2,4] при $q=0$ и любом четном q :

$$I_q(-\xi) = I_q(\xi),$$

и при нечетном q :

$$I_q(-\xi) = -I_q(\xi),$$

мы можем воспользоваться непосредственно разложением (31), вводя лишь соответствующие изменения знаков отдельных слагаемых. Тогда в нашем случае

$$m_h = \sin(\eta_h t - \xi \cos vt) = I_0(\xi) \sin \eta_h t \\ - I_1(\xi) \cos(\eta_h + v) t + I_2(\xi) \sin(\eta_h + 2v) t + I_3(\xi) \cos(\eta_h + 3v) t + \dots \\ - I_1(\xi) \cos(\eta_h - v) t + I_2(\xi) \sin(\eta_h - 2v) t + I_3(\xi) \cos(\eta_h - 3v) t - \dots \quad (33)$$

Совершенно аналогично из (32) можно было бы получить разложение в ряд функции

$$m_h = \cos(\eta_h t - \xi \sin vt).$$

Приведенные выше формулы (27)—(33) уже дают некоторый материал для ряда заключений о влиянии неравномерности вращения вала двигателя на обычный, гармонический по α , спектр крутящего момента от давления газов, получаемый в результате проведения гармонического анализа кривой $M_{кр} = f_0(\alpha)$. Отметим наиболее существенные из этих заключений.

1. Циклическая (то-есть периодическая) неравномерность вращения коленчатого вала обуславливает частотную модуляцию каждой газовой гармоники M_h , входящей в ряд (1). В результате такой модуляции момент M_h оказывается сложной периодической функцией времени и, согласно

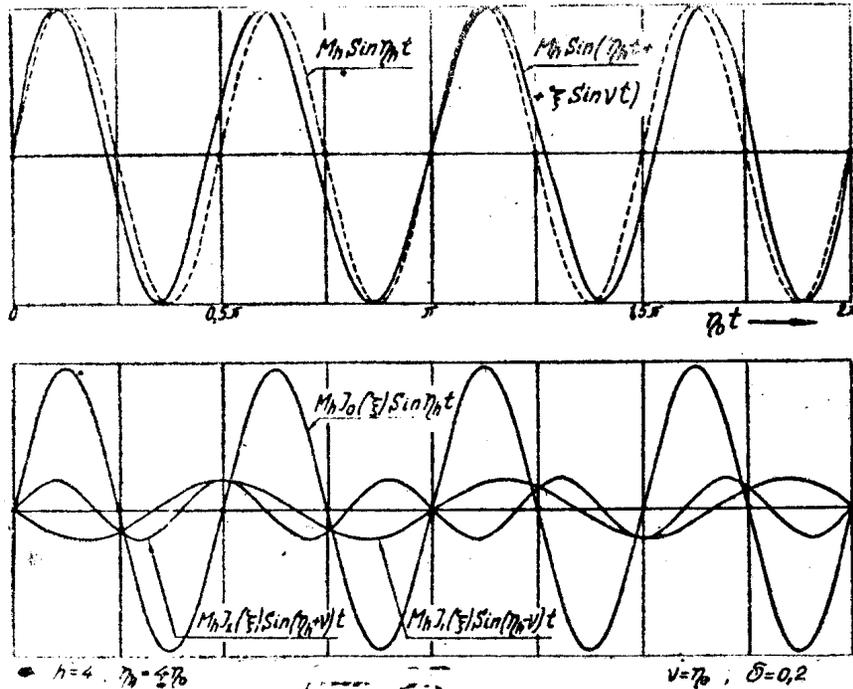


Рис. 1

формулам (27)—(33), распадается на целый ряд чисто гармонических, по времени, слагающих моментов.

На рис. 1 вверху, сплошной линией, показан частотно-модулированный момент

$$(M_h) = M_h \sin(\eta_h t + \xi \sin \nu t)$$

для одного частного случая, когда

$$h = 4; \quad \eta_h = 4\eta_0; \quad \nu = \eta_0; \quad \delta_s = 0,2,$$

то-есть для отношения частоты рассматриваемой гармоники к частоте циклических колебаний скорости вращения вала

$$\frac{\eta_h}{\nu} = \frac{h}{h_0} = 4$$

и амплитуды модуляции

$$\xi = \frac{h}{h_0} \cdot \frac{\delta_s}{2} = 0,4.$$

Пунктирной линией нанесена, для сравнения, чисто гармоническая, по времени, функция $M_h \sin \eta_h t$.

В нижней половине рис. 1 представлен в развернутой форме гармонический спектр момента M_4 , компоненты которого, согласно формуле (29), в нашем конкретном случае определяются выражениями

$$\begin{aligned} & M_4 I_0(0,4) \sin 4\eta_0 t; \quad M_4 I_1(0,4) \sin 5\eta_0 t; \\ & -M_4 I_1(0,4) \sin 3\eta_0 t; \quad M_4 I_2(0,4) \sin 6\eta_0 t; \\ & M_4 I_2(0,4) \sin 2\eta_0 t; \dots \end{aligned}$$

На диаграмме показаны лишь первые три компонента; компоненты же более высоких порядков—в виду незначительной их величины в нашем частном случае—отброшены.

Диаграмма на рис. 1 может, между прочим, служить иллюстрацией к отмеченному выше положению о том, что частотная модуляция всегда одновременно является и модуляцией фазовой, так как приводит, напр., к сдвигу по времени, максимумов функции (M_h) относительно равномерно распределенных по времени максимумов функции $M_h \sin \eta_h t$.

2. При моногармонической частотной модуляции гармонические по t компоненты момента M_h имеют частоты:

$$\dots (\eta_h - 2\nu); \quad (\eta_h - \nu); \quad \eta_h; \quad (\eta_h + \nu); \quad (\eta_h + 2\nu) \dots$$

и амплитуды, пропорциональные соответствующим функциям Бесселя первого рода от амплитуды модуляции, то-есть $I_q(\xi)$, где $q = 0, 1, 2, \dots$

3. Так как вообще

$$I_0(\xi) < 1,$$

то, следовательно, за счет моногармонической частотной модуляции, вызванной неравномерным вращением вала, происходит уменьшение амплитуды момента M_h от M_h до $M_h I_0(\xi)$. Степень этого уменьшения зависит от амплитуды модуляции ξ , определяемой формулой (18).

4. Но одновременно с этим в гармоническом, по времени, спектре, гармонического по α , момента Mh появляются дополнительные гармонические компоненты или „спутники“ вида:

$$M_h I_q(\xi) \sin(\eta_h \pm q\nu) t,$$

где $q = 1, 2, 3, \dots$, располагающиеся в спектре симметрично по обе стороны от основной, средней „несущей“ гармоники

$$M_h I_0(\xi) \sin \eta_h t,$$

имеющей „несущую“ частоту η_h , определяемую формулой (15) через среднюю угловую скорость вращения вала η_0 .

5. Амплитуды „несущей“ гармоники $M_h I_0(\xi)$ и спутников $M_h I_q(\xi)$ не зависят от фазового угла ϵ_h и фазы частотной модуляции ζ и целиком определяются амплитудой модуляции ξ , то-есть согласно (18), циклической неравномерностью δ_s , отношением несущей частоты η_h к частоте ν циклических колебаний скорости вращения вала, и, конечно, известными законами изменения функций Бесселя $I_q(\xi)$ с увеличением аргумента ξ .

6. В верхней части рис. 2 и рис. 3 показаны гармонические спектры момента M_h , определяемые формулой (29), соответственно для двух частных случаев:

$$\frac{\eta_h}{\nu} = \frac{h}{h_0} = 20; \quad \delta_s = 0,1;$$

$$\frac{\eta_h}{\nu} = \frac{h}{h_0} = 4; \quad \delta_s = 0,2,$$

а в нижней их части представлена конкретная связь функций $I_q(\xi)$ со степенью неравномерности δ_s .

7955

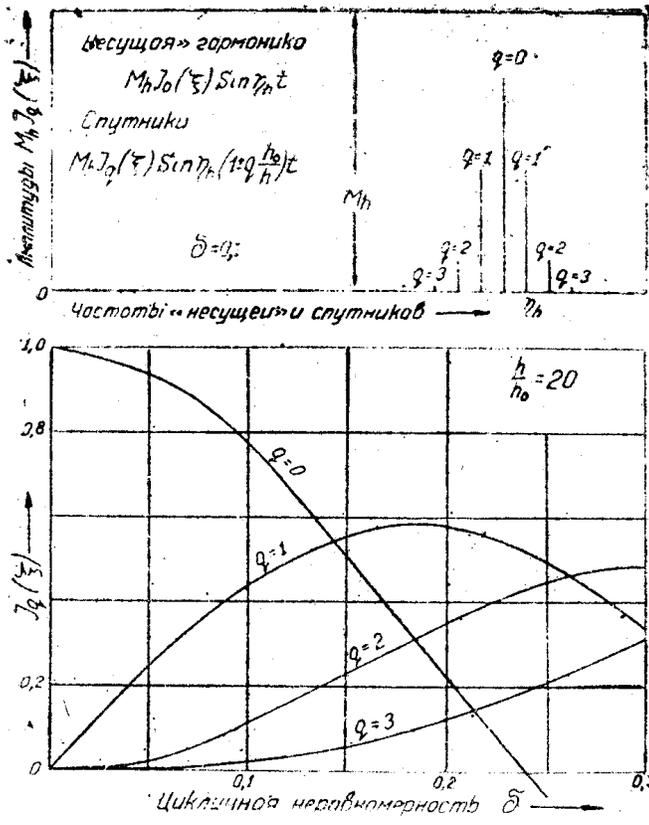


Рис. 2

Эти диаграммы указывают на определенную зависимость амплитуд несущей гармоник и ее спутников от степени неравномерности δ , в осо-

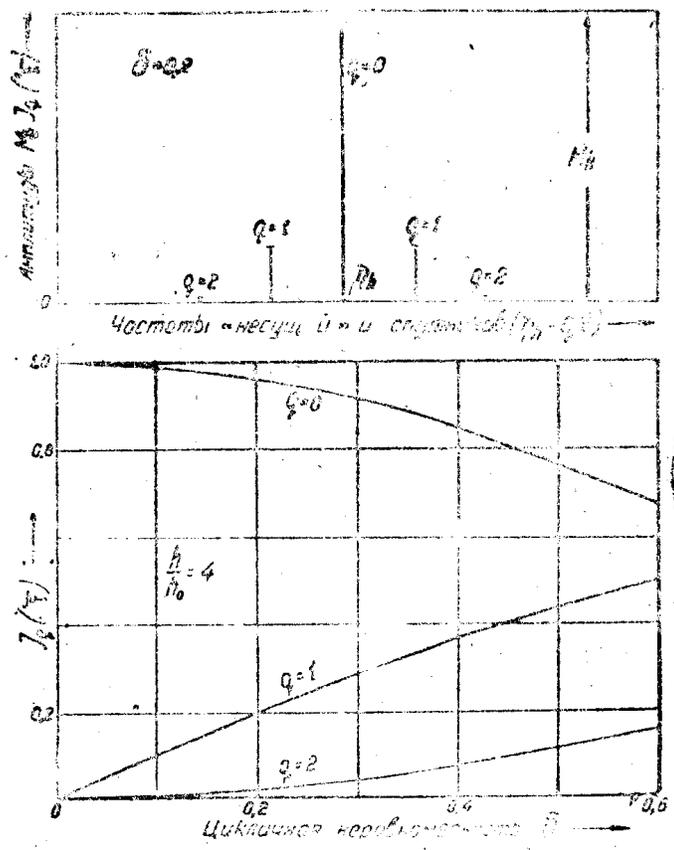


Рис. 3



бенности при большом отношении h/h_0 . Динамический эффект δ_s , то-есть эффект частотной модуляции, тем больше, чем медленнее эта модуляция, чем меньше частота ее ν по сравнению с несущей частотой η_h рассматриваемого, гармонического по α , момента M_h .

7. При большом h/h_0 , то-есть при медленной модуляции, уже небольшая неравномерность вращения вала может привести к значительному уменьшению амплитуды $M_h I_0(\xi)$ несущей гармоники и даже вызвать полное исчезновение последней, когда амплитуда модуляции ξ окажется корнем функции $I_0(\xi)$ Бесселя. Однако с уменьшением амплитуды несущей гармоники одновременно быстро возрастают амплитуды спутников.

8. Сравнение, напр., формул (32) и (33) и анализ общего выражения (27) показывают, что фазовый угол частотной модуляции ζ , не меняя амплитуд

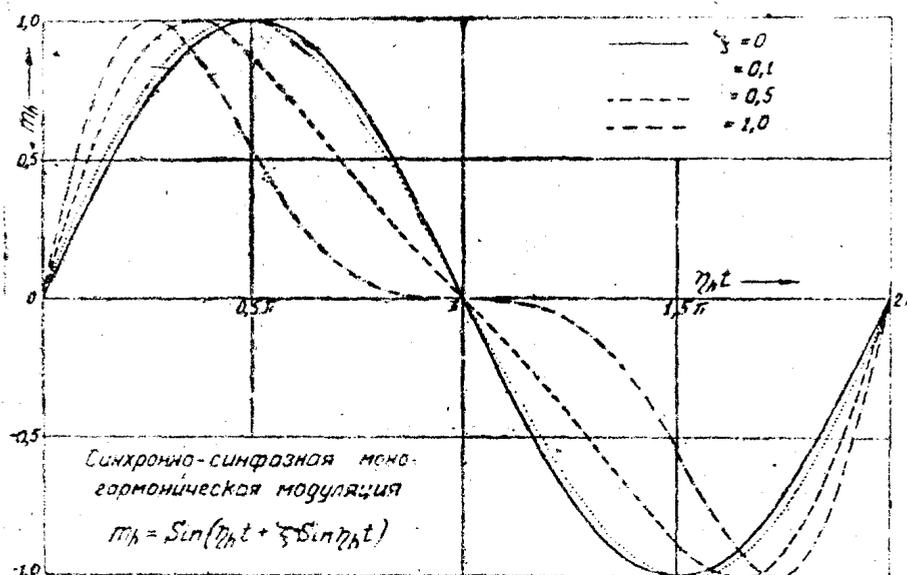


Рис. 4

несущей и спутников, влияет на фазы этих спутников относительно фазы несущей гармоники и на всю форму модулированного момента M_h .

Зависимость формы M_h от ζ иллюстрируется графиками на рис. 4 и 5. На рис. 4 представлен случай синхронно-синфазной модуляции, когда частота модуляции ν равна несущей частоте η_h и, кроме того,

$$\zeta = 0; \epsilon_h = 0.$$

В этих условиях формула (27) переходит в

$$m_h = \sin[\eta_h t + \xi \sin \eta_h t] = I_0(\xi) \sin \eta_h t + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(\xi) \sin(1+q)\eta_h t + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(\xi) \sin(1-q)\eta_h t.$$

Отсюда

$$m_h = [I_0(\xi) - I_2(\xi)] \sin \eta_h t + [I_1(\xi) + I_3(\xi)] \sin 2\eta_h t + [I_2(\xi) - I_4(\xi)] \sin 3\eta_h t + [I_3(\xi) + I_5(\xi)] \sin 4\eta_h t + \dots$$

или в общем виде

$$m_h = \sin(\eta_h t + \xi \sin \eta_h t) = \sum_{q=1}^{\infty} [I_{q-1}(\xi) + (-1)^q I_{q+1}(\xi)] \sin q \eta_h t. \quad (34)$$

На рис. 5 приведены конкретные случаи (при различных значениях ξ) синхронной моногармонической модуляции с разностью фаз $\pi/2$, то-есть

$$\nu = \eta_h ; \zeta = -\pi/2 ; \varepsilon_h = 0.$$

При этих данных из (30) имеем после некоторых преобразований

$$m_h = \sin(\eta_h t + \xi \cos \eta_h t) = I_1(\xi) + \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q [I_{2q}(\xi) + I_{2q+2}(\xi)] \sin(2q+1)\eta_h t + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q [I_{2q+1}(\xi) - I_{2q-1}(\xi)] \cos 2q\eta_h t \quad (35)$$

9. При синхронной модуляции ($\eta_h = \nu$) полностью нарушается симметричность расположения спутников относительно средней несущей гармо-

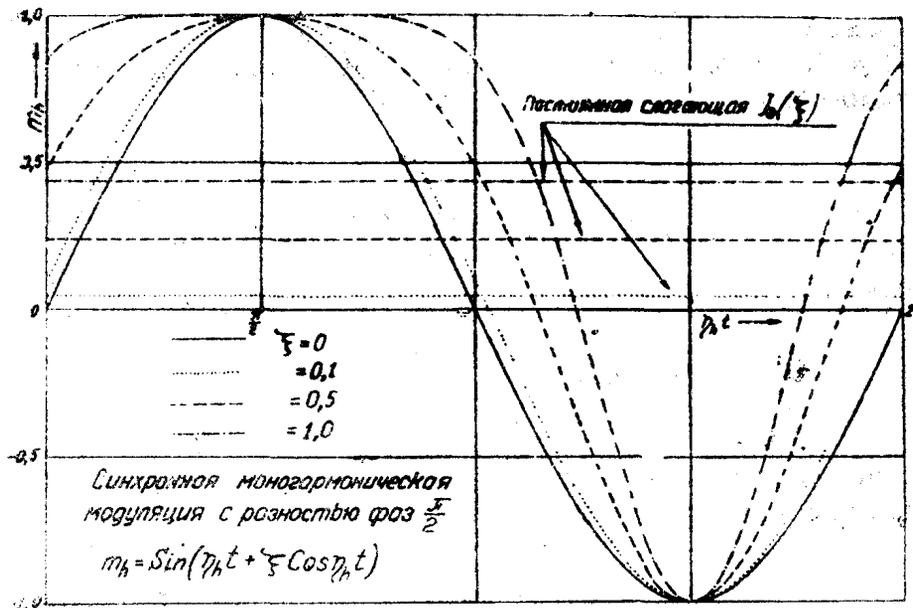


Рис. 5

ники $M_h I_0(\xi) \sin \eta_h t$. Здесь все спутники находятся по одну сторону от несущей гармоники, в области более высоких частот.

10. Наконец, формула (35) и рис. 5 показывают, что при синхронной модуляции с фазой $\zeta = \pi/2$, в истинно гармоническом спектре момента M_h появляется постоянное слагаемое $M_h I_1(\xi)$, величина которого возрастает с увеличением амплитуды модуляции ξ , то-есть с увеличением δ и отношения h/h_0 .

3. Газовые гармоники со сложной модуляцией частоты

Рассмотренные выше случаи моногармонической частотной модуляции, гармонических по α , моментов M_h , конечно еще не отображают всех реальных форм неравномерности вращения вала двигателя. Моногармоническая модуляция есть следствие чисто синусоидальных колебаний мгновенной угловой скорости η вращения колена вала. Но фактически в любом двигателе скорость η меняется по сложному периодическому закону.

Предполагая, как и ранее, коленчатый вал очень жестким (стр. 10), мы получаем этим основания считать, что неравномерность его вращения обуславливается лишь действием гармонических моментов главных поряд-

ков. При таких условиях формулу (10) можно записать в следующем виде, соответственно для двухтактных и четырехтактных двигателей:

$$\alpha = \eta_0 t + \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_{pz} \sin(pz\eta_0 t - \zeta_{pz}) \quad (36)$$

и

$$\alpha = \eta_0 t + \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_{pz} \cdot \sin\left(\frac{pz}{2} \eta_0 t - \zeta_{p\frac{z}{2}}\right),$$

если z — число цилиндров двигателя.

Но, аналогично (14),

$$\varphi_{pz} = \frac{\delta_{pz}}{2pz},$$

где δ_{pz} — частная степень неравномерности вращения коленчатого вала, вызванная действием на вал гармонических моментов порядка pz .

Обозначим далее

$$\nu = z\eta_0, \quad (37)$$

$$\xi_p = h\varphi_{pz} = \frac{h}{pz} \cdot \frac{\delta_{pz}}{2}. \quad (38)$$

Тогда из (36)

$$\alpha = \eta_0 t + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\xi_p}{h} \sin(p\nu t - \zeta_{pz}).$$

Подстановка этого выражения для α в формулу (8) даёт мгновенную величину, гармонического по α , газового момента M_h уже в функции времени

$$(M_h) = M_h \sin \left[\eta_h t + \sum_{p=1}^{\infty} \xi_p \sin(p\nu t - \zeta_{pz}) \right] \quad (39)$$

Здесь

ν — угловая частота наименьшей главной гармоники крутящего момента на валу, определяемая для двухтактных двигателей очевидным выражением (37),

ξ_p — амплитуда частотной модуляции, имеющей место при изолированном действии на систему гармоник порядка pz ,

η_h — как обычно, средняя, несущая частота момента M_h , то-есть

$$\eta_h = h\eta_0.$$

Легко показать, что в обычных условиях (кроме случаев резонанса) величины ξ_p быстро уменьшаются с увеличением индекса p , в особенности при больших z . Учитывая эти обстоятельства, рассмотрим здесь конкретно лишь сравнительно простой случай модуляции момента M_h , за счет циклических колебаний скорости вращения вала, вызванных первыми двумя главными гармониками крутящего момента $M_{кр}$ (то есть порядков z и $2z$ в двухтактных двигателях и порядков $z/2$ и z — в четырехтактных).

Ограничимся в (39) значениями $p=1$ и $p=2$ и примем для простоты:

$$\zeta_z = 0; \quad \zeta_{2z} = 0.$$

тогда вместо (39) будет иметь

$$(M_h) = M_h \sin[\eta_h t + \xi_1 \sin \nu t + \xi_2 \sin 2\nu t] \quad (40)$$

или для единичной гармоникки ($M_h = 1$):

$$m_h = \sin[\eta_h t + \xi_1 \sin \nu t + \xi_2 \sin 2\nu t]. \quad (41)$$

Развертываем выражение (41):

$$m_h = \sin(\eta_h t + \xi_1 \sin \nu t) \cdot \cos(\xi_2 \sin 2\nu t) + \cos(\eta_h t + \xi_1 \sin \nu t) \cdot \sin(\xi_2 \sin 2\nu t), \quad (42)$$

но по формулам (28) и (23)

$$\begin{aligned} \sin(\eta_h t + \xi_1 \sin \nu t) &= I_0(\xi_1) \sin \eta_h t + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(\xi_1) \sin(\eta_h t + q\nu t) + \\ &+ \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(\xi_1) \sin(\eta_h - q\nu) t, \end{aligned}$$

$$\cos(\xi_2 \sin 2\nu t) = I_0(\xi_2) + 2 \sum_{q=1}^{\infty} J_{2q}(\xi_2) \cos 4q\nu t.$$

Далее, согласно (32) и (24),

$$\begin{aligned} \cos(\eta_h t + \xi_1 \sin \nu t) &= I_0(\xi_1) \cos \eta_h t + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(\xi_1) \cos(\eta_h + q\nu) t + \\ &+ \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(\xi_1) \cos(\eta_h - q\nu) t, \end{aligned}$$

$$\sin(\xi_2 \sin 2\nu t) = 2 \sum_{q=0}^{\infty} I_{2q+1}(\xi_2) \sin(2q+1)2\nu t.$$

Подстановка всех этих выражений в (42) дает:

$$\begin{aligned} m_h &= I_0(\xi_2) \cdot \left[I_0(\xi_1) \sin \eta_h t + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(\xi_1) \sin(\eta_h + q\nu) t + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(\xi_1) \sin(\eta_h - q\nu) t \right] \\ &+ \sum_{q=1}^{\infty} I_{2q}(\xi_2) \cos 4q\nu t \left[I_0(\xi_1) \sin(\eta_h t + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(\xi_1) \sin(\eta_h + q\nu) t + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(\xi_1) \sin(\eta_h - q\nu) t \right] + \\ &+ \sum_{q=0}^{\infty} I_{2q+1}(\xi_2) \sin(2q+1)2\nu t \left[I_0(\xi_1) \cos \eta_h t + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(\xi_1) \cos(\eta_h + q\nu) t + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(\xi_1) \cos(\eta_h - q\nu) t \right]. \end{aligned}$$

Развертывая это выражение, после перегруппировки слагаемых и элементарных тригонометрических преобразований получаем

$$\begin{aligned}
 m_h &= \sin(\eta_h t + \xi_1 \sin \nu t + \xi_2 \sin 2\nu t) = \\
 &= I_0(\xi_1) \cdot I_0(\xi_2) \sin \eta_h t + I_1(\xi_1) \cdot [I_0(\xi_2) - I_1(\xi_2)] \sin(\eta_h + \nu)t + \\
 &+ [I_0(\xi_2) \cdot I_2(\xi_1) + I_2(\xi_1) I_2(\xi_2) + I_1(\xi_2) I_0(\xi_1)] \sin(\eta_h + 2\nu)t + \dots \\
 &+ I_1(\xi_1) [-I_0(\xi_2) - I_1(\xi_2)] \sin(\eta_h - \nu)t + [I_0(\xi_2) I_2(\xi_1) + I_2(\xi_1) I_2(\xi_2) - \\
 &- I_1(\xi_2) I_0(\xi_1)] \sin(\eta_h - 2\nu)t + \dots
 \end{aligned} \tag{43}$$

Здесь отброшены все слагаемые, содержащие множителями функции Бесселя $I_q(\xi)$ с индексом $q \geq 3$, ввиду малой их величины при обычных значениях ξ .

Сопоставление (43) с гармоническим спектром (28) единичного момента

$$m_h = \sin(\eta_h t + \xi \sin \nu t)$$

показывает, что при бигармонической (в рассмотренном выше случае) неравномерности вращения вала двигателя появляются следующие основные отличия гармонического спектра M_h от соответствующего спектра для случая моногармонической неравномерности:

1. Амплитуда несущей гармоники уменьшается в отношении

$$\frac{I_0(\xi_1) \cdot I_0(\xi_2)}{I_0(\xi_1)}$$

2. Амплитуды симметричных спутников, расположенных в частотном гармоническом спектре на прежних расстояниях по обе стороны несущей гармоники, оказываются уже не одинаковыми. Так, например, амплитуды первых спутников, имеющих частоты $\eta_h + \nu$ и $\eta_h - \nu$, находятся между собою в отношении

$$\frac{I_0(\xi_2) - I_1(\xi_2)}{I_0(\xi_2) + I_1(\xi_2)}$$

отличном от единицы.

3. Амплитуды всех спутников, в общем, растут с увеличением ξ (конкретные числовые значения которой ограничены в практике диапазоном интересующих нас δ и h), то-есть с замедлением частотной модуляции.

Согласно формулы (37) амплитуда частотной модуляции ξ_p , при ограниченной всегда (или по крайней мере во внерезонансных условиях) степени неравномерности δ_{pz} , быстро уменьшается с увеличением порядка pz , вызывающей эту модуляцию, гармоники крутящего момента на валу. Следовательно, даже при наличии очень сложной периодической частотной модуляции учет в ней только одной или, максимум, двух первых основных гармонических составляющих можно считать достаточно надежным и обоснованным. При большом z (многоцилиндровые двигатели) уже вторая из указанных составляющих получается ничтожно малой.

Таким образом, при исследовании эффекта частотной модуляции крутящего момента в установках ДВС обычно вполне допустимо принимать угловую скорость вращения вала двигателя (или его колена) колеблющейся по простому синусоидальному закону. Погрешности, вытекающие из этого допущения, быстро уменьшаются с увеличением числа цилиндров двигателя.

4. Инерционные гармоники крутящего момента и неравномерность вращения вала

Как известно [3], крутящий момент, создаваемый на валу двигателя силами инерции поступательно двигающихся масс шатуно-кривошипного механизма одного цилиндра, представляется рядом

$$M_{ин} = \sum_{h=1}^{\infty} M_h' \sinh \eta_0 t, \quad (44)$$

где

$$h = 1, 2, 3, \dots$$

Коэффициенты M_h' , то-есть амплитуды гармонических компонент $M_{ин}$ имеют следующие значения

$$\left. \begin{aligned} M_1' &= \frac{G_2}{g} r^2 \eta_0^2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{r}{l} \right) + \frac{1}{16} \left(\frac{r}{l} \right)^3 + \frac{15}{512} \left(\frac{r}{l} \right)^5 + \dots \right] \\ M_2' &= \frac{G_2}{g} r^2 \eta_0^2 \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{32} \left(\frac{r}{l} \right)^4 - \frac{1}{32} \left(\frac{r}{l} \right)^6 - \dots \right] \\ M_3' &= \frac{G_2}{g} r^2 \eta_0^2 \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{r}{l} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{r}{l} \right)^4 - \frac{1}{16} \left(\frac{r}{l} \right)^6 - \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Здесь:

G_2 — вес поступательно движущихся частей шатуно-кривошипного механизма одного цилиндра,

r — радиус кривошипа,

l — длина шатуна.

Фазовые углы составляющих гармонических моментов в формуле (44) равны 0 или π , в зависимости от знака соответствующей амплитуды M_h' , определяемой формулами (45). При обычно малом отношении r/l решающую роль в (44) играет гармонический крутящий момент второго порядка, угловая частота которого равна $2\eta_0$.

Выражения (44) и (45) получены аналитическим путем, в предположении абсолютно равномерного вращения вала, то-есть $\eta = \text{const} = \eta_0$. Несомненно, что вращение вала с переменной, колеблющейся, скоростью вносит определенные изменения в весь гармонический спектр (44) инерционных крутящих моментов на валу двигателя.

Выше было установлено, что цикличная неравномерность вращения вала вызывает как бы некоторую трансформацию кривой „газового“ крутящего момента $M_{кр}$, выстроенной первоначально по углу поворота кривошипа α . Вследствие отсутствия точной пропорциональности между α и t , при $\delta_s > 0$, эта кривая, при переносе ее на ось t , получает неравномерную вытяжку вдоль оси абсцисс. Естественно, что при такой неравномерной линейной деформации меняется как форма кривой $M_{кр}$, так и все компоненты ее разложения в ряд Фурье. Однако кривая $M_{кр}$ не получает какой-либо деформации вдоль оси ординат, так как, как это было уже отмечено выше, давление газов в цилиндре практически не зависит от колебаний мгновенной скорости вращения кривошипа η .

Иной характер имеет влияние колебаний скорости η на крутящий момент от сил инерции поступательно-движущихся масс. Здесь эти колебания η не только нарушают пропорциональность между α и t , но приводят и к соответствующим изменениям величины сил инерции и их моментов на валу. Таким образом, у кривой $M_{кр} = f(\alpha)$, построенной по обыч-

ным формулам прикладной механики, в действительности оказываются переменными масштабы по обеим координатным осям. В этом, собственно, и заключается „геометрический“ эффект смешанной модуляции.

Установим связь между гармоническим, по времени, спектром инерционного момента $M_{ин}$ и степенью неравномерности вращения вала δ_s , предполагая чисто синусоидальный закон колебания угловой скорости вала

$$\eta = \eta_0 \left[1 + \frac{\delta_s}{2} \cos(vt - \zeta) \right], \quad (46-a)$$

чему соответствует, согласно (16), следующее выражение для угла поворота вала

$$\alpha = \eta_0 t + \frac{\delta_s}{2h_0} \sin(vt - \zeta). \quad (46)$$

Обозначим

$$\frac{\delta_s}{2h_0} = \frac{\delta_s}{2} \cdot \frac{\eta_0}{v} = \lambda. \quad (47)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \eta_0 t + \lambda \sin(vt - \zeta), \\ \eta &= \eta_0 [1 + h_0 \lambda \cos(vt - \zeta)], \end{aligned} \right\} \quad (47-a)$$

где v — угловая частота колебаний скорости вала, h_0 — порядок этих колебаний.

Исходим из известного приближенного, но практически достаточно точного, выражения для пути поршня

$$x = r(1 - \cos\alpha) + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l} \right) r \sin^2 \alpha. \quad (48)$$

Это уравнение, полученное из чисто геометрических соображений, непосредственно не содержит в себе времени t и, следовательно, не налагает каких-либо ограничений на формы связи между α и t .

Из (48) скорость и ускорение поршня

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = r \left(\sin\alpha + \frac{1}{2} \frac{r}{l} \sin 2\alpha \right) \cdot \frac{d\alpha}{dt}, \\ j &= \frac{d^2x}{dt^2} = r \left(\sin\alpha + \frac{1}{2} \frac{r}{l} \sin 2\alpha \right) \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \\ &+ r \left(\cos\alpha + \frac{r}{l} \cos 2\alpha \right) \cdot \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2. \end{aligned} \quad (49)$$

Сила инерции поступательнодвигающихся масс шатунно-кривошипного механизма

$$P = \frac{G_2}{g} j$$

создает на валу двигателя крутящий момент $M_{ин}$, величина которого определится из очевидного соотношения:

$$M_{ин} \frac{d\alpha}{dt} = P \frac{dx}{dt}$$

или

$$M_{ин} = \frac{P \frac{dx}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Отсюда, пользуясь выражениями (46) и (49), получим:

$$M_{ин} = \frac{G_2}{g} r^2 \eta_0^2 \left\{ \left(\cos \alpha + \frac{r}{l} \cos 2\alpha \right) \left[1 + \frac{\delta_s}{2} \cos (vt - \zeta) \right]^2 - \right. \\ \left. - \chi \left(\sin \alpha + \frac{1}{2} \frac{r}{l} \sin 2\alpha \right) \sin (vt - \zeta) \right\} \cdot \left(\sin \alpha + \frac{1}{2} \frac{r}{l} \sin 2\alpha \right), \quad (50)$$

где введено обозначение

$$\chi = \frac{\delta_s}{2} \frac{\nu}{\eta_0}. \quad (50-a)$$

Детальное исследование этого уравнения, в условиях $\delta_s > 0$, представляет значительные затруднения, ввиду исключительной сложности всех выкладок. Поэтому мы ограничимся здесь анализом случая $\frac{r}{l} = 0$ (шатун бесконечно большой длины). Качественные выводы при таком допущении едва ли изменятся сколько-нибудь существенно.

При $\frac{r}{l} = 0$ из (50), после элементарных преобразований, имеем

$$M_{ин} = \frac{1}{2} \frac{G_2}{g} r^2 \eta_0^2 \left\{ \left[1 + \frac{\delta_s}{2} \cos (vt - \zeta) \right]^2 \sin 2\alpha - \chi \sin (vt - \zeta) \sin^2 \alpha \right\}. \quad (51)$$

При абсолютно равномерном вращении вала ($\delta_s = 0$) это выражение переходит в

$$M_{ин} = \frac{1}{2} \frac{G_2}{g} r^2 \eta_0^2 \sin 2\alpha, \quad (52)$$

что целиком совпадает с данными формул (45) при $r/l = 0$. Таким образом, величина

$$\frac{1}{2} \frac{G_2}{g} r^2 \eta_0^2$$

представляет собою амплитуду инерционной гармоники второго порядка при $\delta_s = 0$ и $r/l = 0$ (единственную гармоническую компоненту $M_{ин}$ в этом случае). Пользуясь этим обстоятельством, назовем в формуле (51) отношение

$$m_{ин} = \frac{M_{ин}}{\frac{1}{2} \frac{G_2}{g} r^2 \eta_0^2} \quad (53)$$

единичным инерционным гармоническим моментом.

Тогда из (51):

$$m_{ин} = \left[1 + \frac{\delta_s}{2} \cos (vt - \zeta) \right] \sin 2\alpha - \chi \sin (vt - \zeta) + \chi \sin (vt - \zeta) \cos 2\alpha \quad (54)$$

или в общем виде:

$$M_{ин} = A + B + C + D + E, \quad (55)$$

где:

$$A = \left(1 + \frac{\delta_s^2}{8}\right) \sin 2\alpha, \quad (56)$$

$$B = \delta_s \sin 2\alpha \cdot \cos (vt - \zeta), \quad (57)$$

$$C = \frac{\delta_s^2}{8} \cos (2vt - 2\zeta) \sin 2\alpha, \quad (58)$$

$$D = \chi \sin (vt - \zeta) \cos 2\alpha, \quad (59)$$

$$E = -\chi \sin (vt - \zeta). \quad (60)$$

Входящий сюда угол поворота кривошипа α определяется приведенной выше формулой (47-а).

Рассмотрим каждое из слагаемых в (55) по-отдельности. Так, из (56) и (47-а):

$$A = \left(1 + \frac{\delta_s^2}{8}\right) \sin [2\eta_0 t + 2\lambda \sin (vt - \zeta)]$$

и отсюда, на основании формулы (27), полагая в ней $\varepsilon_n = 0$, получаем:

$$A = \left(1 + \frac{\delta_s^2}{8}\right) I_0(2\lambda) \sin 2\eta_0 t + \left(1 + \frac{\delta_s^2}{8}\right) \sum_{q=1}^{\infty} I_q(2\lambda) \sin [(2\eta_0 + qv)t - q\zeta] + \\ + \left(1 + \frac{\delta_s^2}{8}\right) \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(2\lambda) \sin [(2\eta_0 - qv)t + q\zeta] \quad (61)$$

Далее аналогично из (57):

$$B = \delta_s \left\{ I_0(2\lambda) \sin 2\eta_0 t \cdot \cos (vt - \zeta) + \right. \\ \left. + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(2\lambda) \sin [(2\eta_0 + qv)t - q\zeta] \cos (vt - \zeta) + \right. \\ \left. + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(2\lambda) \sin [(2\eta_0 - qv)t + q\zeta] \cos (vt - \zeta) \right\}$$

или, после некоторых преобразований,

$$B = \frac{1}{2} \delta_s \left\{ I_0(2\lambda) \sin [(2\eta_0 + v)t - \zeta] + I_0(2\lambda) \sin [(2\eta_0 - v)t + \zeta] \right\} + \\ + \frac{1}{2} \delta_s \sum_{q=1}^{\infty} I_q(2\lambda) \sin \left\{ [2\eta_0 + (q+1)v]t - (q+1)\zeta \right\} + \\ + \frac{1}{2} \delta_s \sum_{q=1}^{\infty} I_q(2\lambda) \sin \left\{ [2\eta_0 + (q-1)v]t - (q-1)\zeta \right\} + \\ + \frac{1}{2} \delta_s \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(2\lambda) \sin \left\{ [2\eta_0 - (q-1)v]t + (q-1)\zeta \right\} + \\ + \frac{1}{2} \delta_s \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(2\lambda) \sin \left\{ [2\eta_0 - (q+1)v]t + (q+1)\zeta \right\}. \quad (62)$$

Преобразовывая подобным же образом выражение (58) для C в итоге получим:

$$\begin{aligned}
 C = \frac{\delta s_2}{16} & \left\{ I_0(2\lambda) \sin [(2\eta_0 + 2\nu)t - 2\zeta] + I_0(2\lambda) \sin [(2\eta_0 - 2\nu)t + 2\zeta] + \right. \\
 & + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(2\lambda) \sin \left\{ [2\eta_0 + (q+2)\nu]t - (q+2)\zeta \right\} + \\
 & + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(2\lambda) \sin \left\{ [2\eta_0 + (q-2)\nu]t - (q-2)\zeta \right\} + \\
 & + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(2\lambda) \sin \left\{ [2\eta_0 - (q-2)\nu]t + (q-2)\zeta \right\} + \\
 & \left. + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(2\lambda) \sin \left\{ [2\eta_0 - (q+2)\nu]t + (q+2)\zeta \right\} \right\}. \quad (63)
 \end{aligned}$$

Положим в формуле (27)

$$\varepsilon_h = \pi/2$$

и заменим в ней ξ и η_h соответственно через 2λ и $2\eta_0$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \cos [2\eta_0 t + 2\lambda \sin (\nu t - \zeta)] & = I_0(2\lambda) \cos 2\eta_0 t + \\
 & + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(2\lambda) \cos [(2\eta_0 + q\nu)t - q\zeta] + \\
 & + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(2\lambda) \cos [(2\eta_0 - q\nu)t + q\zeta].
 \end{aligned}$$

На основании этого соотношения имеем из (59), после ряда преобразований:

$$\begin{aligned}
 D = \frac{\chi}{2} & \left\{ I_0(2\lambda) \sin [(2\eta_0 + \nu)t - \zeta] - I_0(2\lambda) \sin [(2\eta_0 - \nu)t + \zeta] \right\} + \\
 & + \frac{\chi}{2} \left\{ \sum_{q=1}^{\infty} I_q(2\lambda) \sin \left\{ [2\eta_0 + (q+1)\nu]t - (q+1)\zeta \right\} - \right. \\
 & - \sum_{q=1}^{\infty} I_q(2\lambda) \sin \left\{ [2\eta_0 + (q-1)\nu]t - (q-1)\zeta \right\} + \\
 & + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(2\lambda) \sin \left\{ [2\eta_0 - (q-1)\nu]t + (q-1)\zeta \right\} - \\
 & \left. - \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(2\lambda) \sin \left\{ [2\eta_0 - (q+1)\nu]t + (q+1)\zeta \right\} \right\}. \quad (64)
 \end{aligned}$$

Теперь подстановка выражений (61)—(64) в (55) после соответствующей перегруппировки слагаемых дает:

$$\begin{aligned}
 M_{ин} = & -\chi \sin(vt - \zeta) + \\
 & + \left[\left(1 + \frac{\delta_s^2}{8} \right) I_0(2\lambda) - \chi I_1(2\lambda) + \frac{\delta_s^2}{8} I_2(2\lambda) \right] \sin 2\eta_0 t + \\
 & + \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\delta_s^2}{16} I_{q-2}(2\lambda) + \frac{1}{2} (\delta_s + \lambda) I_{q-1}(2\lambda) + \right. \right. \\
 & + \left. \left(1 + \frac{\delta_s^2}{8} \right) I_q(2\lambda) + \frac{1}{2} (\delta_s - \lambda) I_{q+1}(2\lambda) + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\delta_s^2}{16} I_{q+2}(2\lambda) \right] \cdot \sin [(2\eta_0 + qv)t - q\zeta] \right\} + \\
 & + \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ (-1)^q \left[\frac{\delta_s^2}{16} I_{q-2}(2\lambda) - \frac{1}{2} (\delta_s - \lambda) I_{q-1}(2\lambda) + \right. \right. \\
 & + \left. \left(1 + \frac{\delta_s^2}{8} \right) I_q(2\lambda) - \frac{1}{2} (\delta_s + \lambda) I_{q+1}(2\lambda) + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\delta_s^2}{16} I_{q+2}(2\lambda) \right] \sin [(2\eta_0 - qv)t + q\zeta] \right\}. \quad (65)
 \end{aligned}$$

Выражение (65), полученное нами из (54), представляет собою, очевидно, искомый гармонический (по времени) спектр единичного инерционного крутящего момента при $\delta_s > 0$ и $r/l = 0$.

Почленное умножение (65) на

$$\frac{1}{2} \frac{G_2}{g} r^2 \eta_0^2$$

дает абсолютные значения гармонических компонент инерционного момента одного цилиндра, в зависимости от степени неравномерности вращения вала двигателя (или, точнее—кривошипа данного цилиндра).

Из ряда (65) для $m_{ин}$ следует, что при наличии циклической моногармонической неравномерности вращения вала, характеризуемой уравнением (46-а), в двигателе с очень длинным шатуном ($r/l \rightarrow 0$) кроме „несущей“ гармоники инерционного момента

$$(m_2) = \left[\left(1 + \frac{\delta_s^2}{8} \right) I_0(2\lambda) - \chi I_1(2\lambda) + \frac{\delta_s^2}{8} I_2(2\lambda) \right] \sin 2\eta_0 t \quad (66)$$

с угловой частотой $2\eta_0$, появляются боковые спутники вида

$$(m_q) = m_q \sin [(2\eta_0 \pm qv)t \mp q\zeta] \quad (67)$$

с частотами $2\eta_0 \pm qv$, расположенными, в общем случае, симметрично относительно основной, несущей частоты $2\eta_0$.

Формула (65), в своих общих чертах, напоминает выражение (27), полученное нами выше, для гармонического спектра газовой гармоник. Однако здесь, в случае инерционных моментов, спутники (67) уже не

симметричны по своей величине (амплитуде). Кроме того, в спектре (65) в отличие от спектра (27), появляется новая гармоническая компонента

$$\chi \sin(\nu t - \zeta),$$

синхронная частотной модуляции и противоположная ей по фазе.

Амплитуды m_q спутников в спектре (65), в общем, быстро уменьшаются с увеличением их индекса q , в соответствии с поведением функции $I_q(2\lambda)$ Бесселя при увеличении ее порядка и небольшом аргументе.

Амплитуды m_q в сильной степени зависят от коэффициента λ и, следовательно, согласно (47), от степени неравномерности δ_s и относительной частоты модуляции ν/η_0 .

Для более детального анализа этих зависимостей рассмотрим некоторые основные частные случаи частотной модуляции инерционного момента $m_{ин}$.

а) Синхронная моногармоническая модуляция

Здесь, при

$$\nu = 2\eta_0$$

ряд (65) может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} m_{ин} = & m'_2 \sin 2\eta_0 t + m''_2 \sin (2\eta_0 t - \zeta) + \\ & + m'_4 \sin (4\eta_0 t - \zeta) + m''_4 \sin (4\eta_0 t - 2\zeta) + \\ & + m'_6 \sin (6\eta_0 t - 2\zeta) + m''_6 \sin (6\eta_0 t - 4\zeta) + \\ & + \dots \end{aligned} \quad (68)$$

На основании формул (47) и (50 - а) при $\nu = 2\eta_0$

$$\chi = \delta_s; \quad \lambda = \delta_s/2.$$

Теперь коэффициенты m , входящие в правую часть (68), согласно (65) определяются выражениями:

$$\begin{aligned} m'_2 &= \left(1 + \frac{\delta_s^2}{8} \right) I_0(\delta_s) - \delta_s I_1(\delta_s) + \frac{\delta_s^2}{8} I_2(\delta_s), \\ m''_2 &= -\delta_s, \\ m'_4 &= \frac{\delta_s^2}{16} I_{-1}(\delta_s) + \delta_s I_0(\delta_s) + \left(1 + \frac{\delta_s^2}{8} \right) I_1(\delta_s) \\ &+ \frac{\delta_s^2}{16} I_3(\delta_s), \\ m''_4 &= \frac{\delta_s^2}{16} I_0(\delta_s) + \left(1 + \frac{\delta_s^2}{8} \right) I_2(\delta_s) - \delta_s I_3(\delta_s) \\ &+ \frac{\delta_s^2}{16} I_4(\delta_s). \end{aligned} \quad (69)$$

Конечно здесь, при малой, обычно, величине δ_s , можно отбросить целый ряд слагаемых, содержащих функции Бесселя высоких порядков.

Амплитуда и фазовый угол единичного гармонического момента второго порядка m_2 , входящего в спектр (68), определяются геометрическим суммированием m'_2 и m''_2 с учетом их фазовых углов 0 и ζ . Совершенно аналогично определяются амплитуды m_4, m_6, \dots следующих компонент в

(68). Результаты подобных подсчетов для различных конкретных значений степени неравномерности приведены на рис. 6.

Анализ этого графика, а также формул (68) и (69), позволяет сделать следующие выводы в отношении влияния циклической неравномерности вращения вала на инерционный момент $M_{ин}$ в условиях равенства частоты ν этой неравномерности удвоенной средней угловой скорости вращения вала:

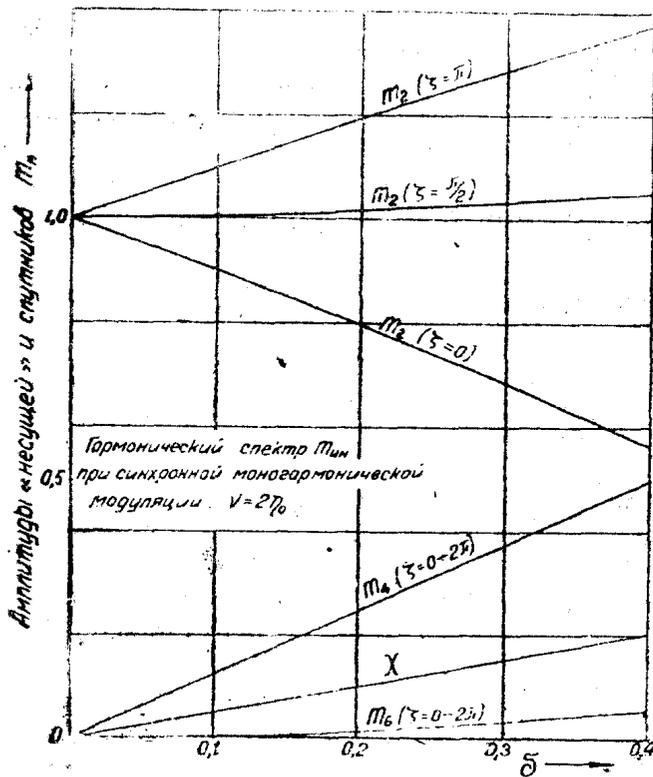


Рис. 6

а) Циклическая неравномерность вращения вала приводит к появлению, в спектре инерционного момента $M_{ин}$, целого ряда гармонических компонент с частотами, кратными $2\eta_0$.

б) Как правило, из всех этих компонент наибольшую величину имеет „несущая“ гармоника m_2 с частотой $2\eta_0$. Все остальные гармоники, являющиеся односторонне расположенными спутниками несущей гармоники, имеют небольшие (при умеренной δ) амплитуды, изменяющиеся с увеличением их индекса q .

в) При абсолютно равномерном вращении вала $\delta_s = 0$ и из (69):

$$m_2' = 1,$$

$$m_2'' = m_4' = m_4'' = \dots = 0,$$

то-есть (68) переходит в

$$m_{ин} = 1 \cdot \sin 2\alpha.$$

Следовательно отклонение m_2 от единицы может рассматриваться как некоторая характеристика динамического эффекта неравномерности вращения вала.

г) Амплитуда m_2 „несущей“ гармоники инерционного момента зависит не только от величины δ_s , но и от фазового угла ζ циклической неравномерности (или частотной модуляции). Диаграмма на рис. 6 показывает, что характер влияния δ_s на амплитуду m_2 в сильной степени определяется величиной ζ . Здесь m_2 сравнительно быстро падает с увеличением δ_s при $\zeta = 0$, остается почти неизменной при $\zeta = \pi/2$ и сравнительно быстро возрастает при $\zeta = \pi$.

д) В отличие от m_2 амплитуды следующих гармоник m_4, m_6, \dots практически уже не зависят от ζ и непрерывно возрастают с увеличением δ_s ,

β) Моногармоническая модуляция с частотой $\nu = \eta_0$

Здесь (68) приобретает вид:

$$m_{ин} = \left. \begin{aligned} & m_1' \sin(\eta_0 t + \zeta) + m_1'' \sin(\eta_0 t - \zeta) + \\ & + m_2' \sin 2\eta_0 t + m_2'' \sin(2\eta_0 t - 4\zeta) + \\ & + m_3' \sin(3\eta_0 t - \zeta) + m_3'' \sin(3\eta_0 t - 5\zeta) + \\ & + \dots \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Значения всех входящих сюда коэффициентов m' и m'' могут быть найдены из (69) при

$$\chi = \delta_s/2; \quad \lambda = \delta_s/2;$$

амплитуды же m_1 и $m_2 \dots$ гармонических компонент инерционного момента $m_{ин}$ определяются геометрическим суммированием соответствующих m' и m'' .

Результаты подобных подсчетов для различных значений δ_s показаны на рис. 7, анализ которого приводит к следующим заключениям об эффекте частотной модуляции инерционного момента $M_{ин}$ в условиях $\nu = \eta_0$:

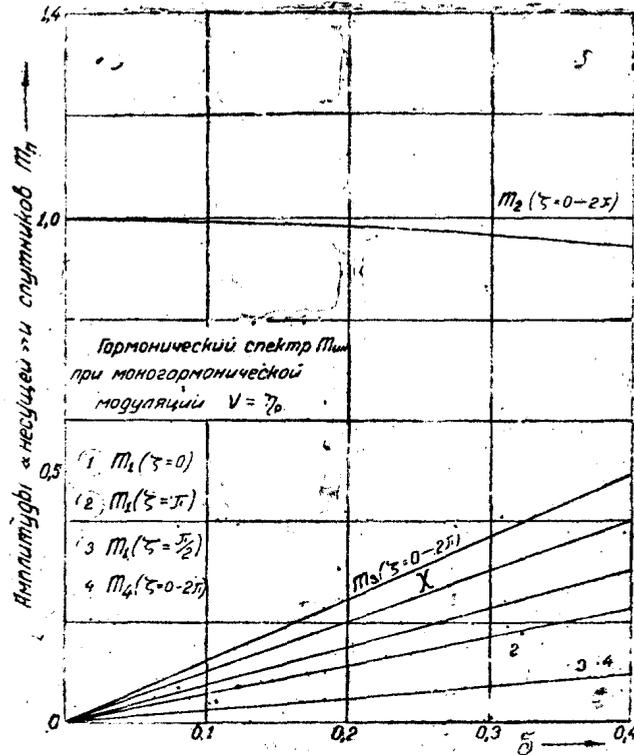


Рис. 7

а) В отличие от предыдущего случая ($\nu = 2\eta_0$) здесь спутники имеют частоты, кратные угловой скорости вращения вала η_0 .

б) Амплитуда несущей гармоники m_2 практически совершенно не зависит от фазового угла ζ и лишь очень медленно убывает с увеличением δ_s . Следовательно, динамическое влияние неравномерности вращения вала на несущую гармонику инерционного момента здесь совершенно ничтожно.

в) Амплитуды первых спутников m_1 и m_3 сравнительно быстро возрастают с увеличением неравномерности вращения вала.

Аналогичным образом можно было бы рассмотреть спектр (68) и при любых других значениях отношения ν/η_0 частоты циклических колебаний скорости вращения вала к его средней скорости η_0 . Некоторые результаты подобных исследований приведены на рис. 8, где представлена зависимость амплитуды m_2 „несущей“ гармоники инерционного момента на валу двигателя для различных δ_s и при двух различных частотах модуляции (то-есть частотах колебаний угловой скорости вращения вала):

$$\nu = 4\eta_0; \quad \nu = 6\eta_0$$

Эта диаграмма показывает, что в первом случае, при $\nu = 4\eta_0$, еще имеется довольно резко выраженная зависимость m_2 от ζ и δ_s . Здесь, так же как и в рассматриваемом выше случае синхронной модуляции ($\nu = 2\eta_0$),

оказываются возможными случаи увеличения амплитуды несущей гармоники m_2 , а, следовательно, и вызванных ею вынужденных колебаний системы, при ухудшении равномерности вращения вала (эффект отрицательного динамического демпфирования). При $\nu = 6\eta_0$ влияние ζ и δ_s на m_2 фактически исчезает. Подобную же картину мы получаем и при еще больших значениях ν .

Теперь, суммируя все изложенное выше, следует признать, что влияние неравномерности вращения вала двигателя на инерционный крутящий

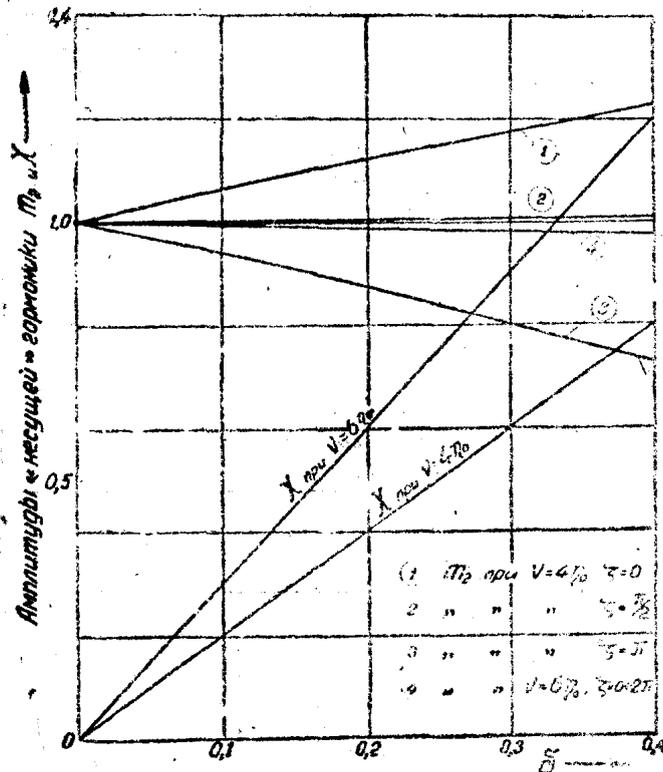


Рис. 8

момент $M_{ин}$ в общем незначительно, по крайней мере, при тех умеренных значениях δ_s , с которыми обычно приходится иметь дело в практике. Это влияние более существенно лишь в случае синхронной модуляции, когда частота колебаний скорости вала равна частоте второй, то-есть самой сильной гармоники инерционного момента. Но и здесь динамический эффект неравномерного вращения вала в основном определяется фазой ζ .

5. Вынужденные колебания линейной системы при возбуждении, моногармоническом по углу поворота кривошипа α .

В предыдущих разделах данной статьи было показано, что обычное разложение кривой крутящего момента на валу двигателя в тригонометрический ряд (1) по углу поворота кривошипа α еще не дает того гармонического спектра, который необходим нам при анализе вынужденных колебаний линейной системы. По существу, каждый компонент M_h ряда (1) достаточно сложен по своему спектральному содержанию и включает в себе целый ряд гармонических по времени (то-есть истинно гармонических) моментов в виде "несущей" гармоники и боковых спутников различной интенсивности, конкретные величины которых могут быть определены по приведенным выше формулам.

Поводом к расщеплению каждой M_h ряда (1) на несущую гармонику и спутников является, прежде всего, неравномерность вращения коленчатого

вала двигателя. Физические же причины этого расщепления заложены в основных механических свойствах линейных колебательных систем с постоянными массами и жесткостями [8, 9].

С увеличением неравномерности вращения вала, как правило, возрастают амплитуды боковых спутников в спектре M_h .

Однако соотношение амплитуд несущей и спутников и степень увеличения или уменьшения их с ростом δ ,¹⁾ еще не могут служить достаточно хорошими критериями для оценки влияния неравномерности вращения вала на его вынужденные колебания.

Амплитуды вынужденных колебаний, вызываемых в системе действием гармонической (по времени) силы определяются не только амплитудой этой силы, но и целым рядом других факторов, как, например, соотношением частоты силы и частоты собственных колебаний системы, интенсивностью и характером демпфирования в элементах установки и т. д. Поэтому для оценки фактического влияния степени неравномерности вращения δ на вынужденные вибрации вала необходимо детально исследовать эффект действия на линейную колебательную систему возбуждающего момента M_h , моногармонического по α , но сложного по своему истинному гармоническому спектру, характеризующему, напр. рядом (27).

Рассмотрим вынужденные колебания установки по рис. 9, состоящей из одноцилиндрового двигателя, имеющего приведенную массу со средним моментом инерции Θ_1 и маховик (винт) с моментом инерции Θ_2 . Предположим, для простоты, что демпфирующий момент в системе пропорционален мгновенной скорости закрутки вала во время вибраций. Дифференциальные уравнения движения обеих масс здесь имеют вид:

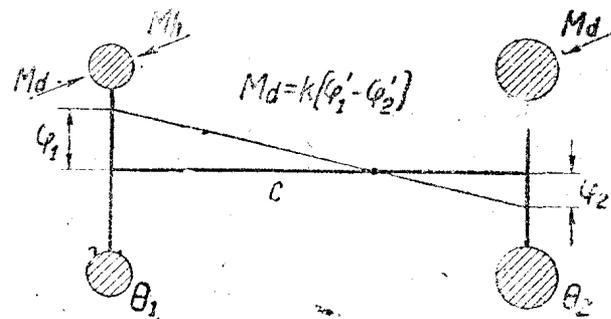


Рис. 9

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + k \left(\frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right) + c(\varphi_1 - \varphi_2) &= M_I, \\ \Theta_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} - k \left(\frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right) - c(\varphi_1 - \varphi_2) &= M_{II}, \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

где M_I и M_{II} — внешние крутящие моменты, действующие, соответственно, на колено вала и маховик, k — коэффициент скоростного демпфирования.

Момент M_{II} , в общем случае, меняется по времени (или по углу поворота кривошипа α):

$$M_{II} = -M_0 + f_{II}(t), \quad (72)$$

где M_0 — средняя величина внешнего момента сопротивления, равная среднему крутящему моменту, развиваемому двигателем²⁾,

M_I — крутящий момент на валу двигателя, создаваемый давлением газов в цилиндре и силами инерции поступательно-двигающихся масс шатунно-кривошипного механизма. Как указывалось выше, M_I , в основном, является явной функцией угла поворота кривошипа α .

1) Здесь и в дальнейшем δ означает степень неравномерности вращения кривошипа в общем случае. В частных случаях $\delta = \delta_s$ или $\delta = \delta_i$.

2) Мы предполагаем здесь установившийся режим работы двигателя.

Гармонический анализ кривой $M_1 = f_1(\alpha)$ в пределах одного цикла работы цилиндра дает обычный тригонометрический ряд

$$M_1 = M_0 + \sum_{p=1}^{\infty} M_p \sin(p\alpha + \varepsilon_p'), \quad (73)$$

аналогичный (1).

Здесь

$$\alpha = \omega_0 t + \varphi_1. \quad (74)$$

Теперь вместо (71) можно записать:

$$\Theta_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + k \left(\frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right) + c(\varphi_1 - \varphi_2) = M_0 + \sum_{p=1}^{\infty} M_p \sin(p\alpha + \varepsilon_p') \quad (75)$$

$$\Theta_2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} - k \left(\frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right) - c(\varphi_1 - \varphi_2) = -M_0 + f_{II}(t). \quad (76)$$

Представим правую переменную часть уравнения (75) в виде суммы, трех слагаемых

$$\sum_{p=1}^{\infty} M_p \sin(p\alpha + \varepsilon_p') = f_1(\alpha) + f_2(\alpha) + f_3(\alpha), \quad (77)$$

где

$$f_1(\alpha) = M_h \sin(h\alpha + \varepsilon_h') \quad (78)$$

какой-либо один, конкретно интересующий нас, гармонический по α компонент момента M_1 на валу двигателя, вызывающий резонансные или близрезонансные вибрации в диапазоне рабочих чисел оборотов установки.

Далее, здесь

$$f_2(\alpha) = M_z \sin(z\alpha + \varepsilon_z') \quad (79)$$

есть один из низших по своему порядку, гармонических по α , компонентов момента M_1 , являющийся, даже во внерезонансных условиях, основной причиной неравномерного вращения вала, то есть прежде всего обуславливающий существование в системе значительной, почти жесткой, степени неравномерности δ_s .

В многоцилиндровых двигателях порядок этой гармонике z равен числу цилиндров двигателя или половине этого числа, в зависимости от тактности двигателя.

Наконец,

$$f_3(\alpha) = \sum_{p=1}^{\infty} M_p \sin(p\alpha + \varepsilon_p') - f_1(\alpha) - f_2(\alpha) \quad (80)$$

включает в себе все остальные компоненты M_1 . При резонансной ситуации для $f_1(\alpha)$ все слагаемые, входящие в $f_3(\alpha)$, находятся вне резонанса и поэтому не дают особо сильных вынужденных колебаний вала. (Как будет показано ниже, последнее утверждение не всегда является достаточно точным).

Все три слагаемые в правой части равенства (77) выражены в виде явных функций от α , но, конечно, в итоге, через уравнение (74), оказываются функцией времени t . Однако точная конкретная форма зависимости (74) нам неизвестна, ввиду отсутствия какой-либо практической возможности решения системы уравнений (75)—(76) в их полном виде.

Исследование этих, уже нелинейных дифференциальных уравнений, даже в случае малого числа компонент в правой части уравнения (75) представляет исключительные затруднения. Сложность системы уравнений (75)—(76) вызвана зависимостью вынужденных колебаний φ_1 приведенной массы двигателя от действующих на нее возбуждающих моментов и одновременной зависимостью закона изменения этих моментов по времени от вынужденных колебаний φ_1 через эффект частотной, и даже смешанной (в отношении инерционных моментов), модуляции.

Ввиду нелинейности уравнений (75) и (76), здесь уже невозможно непосредственное и безоговорочное применение принципа суперпозиции.

Обозначим через $\varphi_{1,h}$, $\varphi_{1,z}$, $\varphi_{1,\beta}$, $\varphi_{1,\Pi}$ колебания первой массы нашей системы, которые были бы вызваны соответственно моментами $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $f_{II}(t)$, в случае совершенно независимого, раздельного действия их на систему, поодиночке, в течение достаточного промежутка времени.

При одновременном действии всех четырех указанных моментов полное колебание первой массы φ_1 уже не будет равно сумме:

$$\varphi_{1,h} + \varphi_{1,z} + \varphi_{1,\beta} + \varphi_{1,\Pi},$$

так как за счет взаимной модуляции изменится истинный (гармонический по t) спектр каждого из этих моментов, а, следовательно, изменится и эффект действия их на колеблющуюся систему. Здесь неравномерность вращения колена вала и маховика будет не только различна, но и очень сложна по характеру.

Для получения возможности, хотя бы приближенного, решения задачи о вынужденных колебаниях системы по рис. 9 сделаем следующие упрощающие допущения:

а) Примем момент внешнего сопротивления (внешней, полезной нагрузки на двигатель) постоянным, то-есть положим в формуле (72)

$$f_{II}(t) = 0.$$

б) Исключим, пока, полностью из рассмотрения все моменты, входящие в $f_3(\alpha)$, то-есть примем в (77)

$$f_3(\alpha) = 0.$$

в) Учитывая обычно большую величину низшей главной гармоники $f_2(\alpha)$ и низкую ее частоту, и, следовательно, возможность лишь высокочастотной модуляции $f_2(\alpha)$ за счет колебаний кривошипа, вызванных моментом $f_1(\alpha)$,—полностью пренебрежем эффектом этой модуляции, то-есть заменим в формуле (74) угол φ_1 углом φ_{1z} . Тогда из (79)

$$f_2(\alpha) = M_z \sin [z(\eta_0 t + \varphi_{1z}) + \varepsilon_z']. \quad (81)$$

г) Будем считать, наконец, что неравномерность вращения вала, вызванная моментом M_z , значительно больше той „упругой“ неравномерности, которую получает кривошип за счет вынужденных колебаний системы под действием момента M_h .

Модулированный согласно (81) момент M_z вызывает сложные вынужденные колебания всей системы и, в частности, приведенной массы двигателя, то-есть кривошипа. Несущая гармоника момента M_z дает колебания кривошипа по закону:

$$(\varphi_{1z}) = \varphi_{1z} \cdot \sin(z\eta_0 t - \zeta)$$

на „несущей“ частоте $z\eta_0$.

Соответственная дополнительная вибрационная скорость кривошипа:

$$(\dot{\varphi}_{1z})^1 = \varphi_{1z} v \cos(vt - \zeta),$$

где для „несущей“ частоты момента M_z введено обозначение:

$$v = z\eta_0.$$

Теперь степень неравномерности вращения:

$$\delta = 2\varphi_{1z} \cdot \frac{v}{\eta_0}.$$

Отсюда полная мгновенная угловая скорость вращения кривошипа

$$\eta = \eta_0 \left[1 + \frac{\delta}{2} \cos(vt - \zeta) \right] \quad (82-a)$$

и мгновенный угол его поворота

$$\alpha = \int_0^t \eta dt = \eta_0 t + \eta_0 \frac{\delta}{2v} \sin(vt - \zeta).$$

Введем это выражение для α в (78)

$$f_1(\alpha) = M_h \sin [h\eta_0 t + \xi \sin(vt - \zeta) + \varepsilon_h'], \quad (82)$$

где

$$\xi = \frac{h\eta_0}{v} \frac{\delta}{2} = \frac{h\delta}{z2}, \quad (83)$$

как и ранее, представляет собою амплитуду частотной модуляции гармонического по α , момента $f_1(\alpha)$.

Соотношение (82) дает зависимость интересующего нас, гармонического по α , момента $f_1(\alpha)$ от времени и учитывает, по крайней мере приближенно, эффект действия неравномерности вращения вала, вызванной моментом M_z на истинный, гармонический по времени, спектр $f_1(\alpha)$, то-есть M_h .

Теперь, отбрасывая в (75) и (76) моменты M_0 , $f_3(\alpha)$ и $j_{11}(\alpha)$, в соответствии с принятыми выше допущениями, запишем дифференциальные уравнения движения обеих масс в следующей форме:

$$\begin{aligned} \Theta_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + k \left(\frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right) + c(\varphi_1 - \varphi_2) = \\ = M_h \sin [h\eta_0 t + \xi \sin(vt - \zeta) + \varepsilon_h'] + \\ + M_z \sin [z(\eta_0 t + \varphi_{1z}) + \varepsilon_z'], \end{aligned} \quad (84)$$

$$\Theta_2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} - k \left(\frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right) - c(\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \quad (85)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (84) не зависит от вызванных им колебаний обеих масс φ_{1h} и φ_{2h} ; равным образом от φ_{1h} и φ_{2h} не зависит и второе слагаемое, M_z .

Следовательно уравнения (84) и (85) уже не полностью нелинейны и к ним возможно частичное применение принципа суперпозиции. Учитывая это обстоятельство, разобьем систему уравнений (84)–(85) на две пары уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1 \frac{d^2\varphi_{1h}}{dt^2} + k \left(\frac{d\varphi_{1h}}{dt} - \frac{d\varphi_{2h}}{dt} \right) + c(\varphi_{1h} - \varphi_{2h}) = \\ = M_h \sin [h\eta_0 t + \xi \sin(vt - \zeta) + \varepsilon_h'] \\ \Theta_2 \frac{d^2\varphi_{2h}}{dt^2} - k \left(\frac{d\varphi_{1h}}{dt} - \frac{d\varphi_{2h}}{dt} \right) - c(\varphi_{1h} - \varphi_{2h}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1 \frac{d^2\varphi_{1z}}{dt^2} + k \left(\frac{d\varphi_{1z}}{dt} - \frac{d\varphi_{2z}}{dt} \right) + c(\varphi_{1z} - \varphi_{2z}) &= \\ &= M_z \sin [z(\eta_0 t + \varphi_{1z}) + \varepsilon_z'], \\ \Theta_2 \frac{d^2\varphi_{2z}}{dt^2} - k \left(\frac{d\varphi_{1z}}{dt} - \frac{d\varphi_{2z}}{dt} \right) - c(\varphi_{1z} - \varphi_{2z}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Здесь уравнения (87) нелинейны, в отличие от линейных уравнений (86).

Обе эти системы уравнений связаны между собою величинами ξ , ν и ζ , зависящими от φ_{1z} и z и входящими в правую часть первого из уравнений (86). В дальнейшем мы будем считать ξ , ν и ζ заранее известными, определенными хотя бы экспериментальным путем через торсиографирование исследуемого двигателя. Тогда анализ вынужденных вибраций неравномерно вращающегося вала, вызванных действием одного, гармонического по α момента, M_h сведется к исследованию двух линейных дифференциальных уравнений (86).

Делим первое из уравнений (86) на Θ_1 , второе на Θ_2 и вычитаем второе уравнение из первого, тогда

$$\Theta_1 \frac{d^2\Psi}{dt^2} + k_1 \frac{d\Psi}{dt} + c_1\Psi = M_h \sin[h\eta_0 t + \xi \sin(\nu t - \zeta) + \varepsilon_h'], \quad (88)$$

где

$$\Psi = \varphi_{1h} - \varphi_{2h}$$

представляет собою мгновенный угол закрутки вала нашей системы, вызванный действием на нее момента M_h . Здесь

$$k_1 = k \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\Theta_1 \Theta_2},$$

$$c_1 = c \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\Theta_1 \Theta_2}.$$

Фазовый угол ε_h' , входящий в уравнение (88) и появившийся при гармоническом (по α) анализе кривой крутящего момента двигателя, не играет сколько-нибудь существенной роли в рассматриваемом колебательном процессе, определяя собою лишь сдвиг кривой вынужденных колебаний по времени. Учитывая это, полагаем для простоты

$$\varepsilon_h' = 0.$$

Тогда вместо (88) имеем

$$\Theta_1 \frac{d^2\Psi}{dt^2} + k_1 \frac{d\Psi}{dt} + c_1\Psi = M_h \sin[\eta_h t + \xi \sin(\nu t - \zeta)], \quad (89)$$

где

$$\eta_h = h\eta_0$$

есть угловая частота рассматриваемой гармоники M_h , h -го порядка.

Уравнение (89), как и уравнение (88), — линейно, и к нему полностью применим принцип суперпозиции, согласно которому полное вынужденное колебание может быть получено суммированием всех тех отдельных колебаний, которые вызовет в системе каждая из гармонических (по времени t) компонент правой части (89), при изолированном ее действии на систему.

Возбуждающий момент, в правой части дифференциального уравнения (89), представляет собою частотно-модулированную, моногармоническую

по α функцию, гармонический спектр которой по времени может быть определен по приведенным ранее формулам. Предполагая h не очень малым ($h > 2$), мы имеем достаточные основания считать M_h чисто газовым моментом.

Теперь, пользуясь выражением (27) и полагая в нем $\varepsilon_h = 0$, вместо (89) получаем

$$\begin{aligned} \Theta_1 \frac{d^2 \Psi}{dt^2} + k_1 \frac{d\Psi}{dt} + c_1 \Psi = M_h I_0(\xi) \sin \eta_h t + \\ + \sum_{q=1}^{\infty} M_h I_q(\xi) \sin [(\eta_h + q\nu) t - qz] + \\ + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q M_h I_q(\xi) \sin [(\eta_h - q\nu) t + qz] \end{aligned} \quad (90)$$

Здесь произведения

$$M_h I_q(\xi)$$

представляют собою амплитуды, гармонических по t , компонент момента M_h . Каждая из этих слагающих совершенно независимо от других, вызывает гармонические колебания угла закрутки вала с определенной амплитудой, фазой и частотой.

Очевидно, что уравнение (90), в полном соответствии с принципом суперпозиции, имеет следующее стационарное решение:

$$\begin{aligned} \Psi = \Phi_0 \sin(\eta_h t - \varepsilon_0) + \\ + \sum_{q=1}^{\infty} \Phi_q \sin[(\eta_h + q\nu) t - qz - \varepsilon_q] + \\ + \sum_{q=1}^{\infty} \Phi_{-q} \sin[(\eta_h - q\nu) t + qz - \varepsilon_{-q}] \end{aligned} \quad (91)$$

Здесь введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \beta_0 \frac{M_h I_0(\xi)}{c_1} = \beta_0 \Psi_{cm} I_0(\xi), \\ \Phi_q &= \beta_q \frac{M_h I_q(\xi)}{c_1} = \beta_q \Psi_{cm} I_q(\xi), \\ \Phi_{-q} &= \beta_{-q} \frac{M_h I_{-q}(\xi)}{c_1} = \beta_{-q} \Psi_{cm} I_q(\xi), \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

где

$$\Psi_{cm} = \frac{M_h}{c_1},$$

как обычно, представляет собою статический угол закрутки вала системы под действием постоянного момента величиною M_h .

Очевидно, что Φ_0 есть амплитуда вынужденных колебаний угла закрутки вала, созданных „несущей“ гармонической слагающих

$$M_h I_0(q) \sin \eta_h t$$

сложного по времени, но моногармонического о α п момента M_h .

Равным образом, Φ_q и Φ_{-q} означают амплитуды колебаний, вызываемых действием соответственно каждого верхнего

$$M_n I_q(\xi) \sin [(\eta_n + q\nu)t - q\zeta] \quad (q = 1, 2, 3, \dots)$$

и нижнего

$$M_n I_q(\xi) \sin [(\eta_n - q\nu)t + q\zeta] \quad (q = 1, 2, 3, \dots)$$

спутников в спектре M_n .

В формулах (92) β —динамический коэффициент, определяющийся формулами:

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= \frac{1}{\sqrt{(1-\gamma_0^2)^2 + 4\left(\frac{k_1}{k_c}\right)^2 \gamma_0^2}} \\ \beta_q &= \frac{1}{\sqrt{(1-\gamma_q^2)^2 + 4\left(\frac{k_1}{k_c}\right)^2 \gamma_q^2}} \\ \beta_{-q} &= \frac{1}{\sqrt{(1-\gamma_{-q}^2)^2 + 4\left(\frac{k_1}{k_c}\right)^2 \gamma_{-q}^2}} \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

соответственно для несущей гармоник, верхних и нижних ее спутников
Здесь коэффициент настройки для несущей гармоник

$$\gamma_0 = \frac{\eta_n}{\omega_0},$$

где ω_0 —частота собственных колебаний нашей системы. Аналогично для каждого из верхних и нижних спутников:

$$\gamma_q = \frac{\eta_n + q\nu}{\omega_0},$$

$$\gamma_{-q} = \frac{\eta_n - q\nu}{\omega_0}.$$

Наконец, k_c , в формулах (93), представляет собою обычный критический коэффициент демпфирования:

$$k_c = \sqrt{2\theta_1 c_1}.$$

Теперь фазовые углы ε , характеризующие отставание вынужденных колебаний от соответствующих возбуждающих моментов и входящие в уравнение (81), могут быть вычислены по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 &= \arctg 2 \frac{k_1}{k_c} \frac{\gamma_0}{1-\gamma_0^2}, \\ \varepsilon_q &= \arctg 2 \frac{k_1}{k_c} \frac{\gamma_q}{1-\gamma_q^2}, \\ \varepsilon_{-q} &= \arctg 2 \frac{k_1}{k_c} \frac{\gamma_{-q}}{1-\gamma_{-q}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (93-a)$$

Уравнение (91) показывает, что при действии на линейную систему одного возбуждающего момента M_h , синусоидального по углу поворота кривошипа α и потому частотно модулированного по t , в ней возникает целый комплекс гармонических вынужденных колебаний с различными амплитудами, частотами и фазами.

Здесь гармоническим анализатором функции M_h является сама линейная колебательная система. Именно она и ее основные физические свойства обеспечивают физическую реальность рассмотренного выше аналитического разложения M_h на несущую гармонику и спутников. Каждая из этих гармонических компонент M_h вызывает вполне определенный гармонический колебательный процесс, все характеристики которого могут быть подсчитаны по приведенным выше формулам.

Легко видеть, что в системе, находящейся под действием момента M_h , представленного формулой (82), возможен целый ряд случаев резонанса:

а) основной резонанс с „несущей“ гармоникой $M_h I_0(\xi)$ при

$$\eta_h = \omega_0;$$

б) „боковой“ резонанс с каждым из верхних спутников $M_h I_q(\xi)$ при

$$\eta_h + q\nu = \omega_0,$$

$$\eta_h = \omega_0 - q\nu; \quad (q = 1, 2, 3, \dots)$$

в) „боковой“ резонанс с каждым из нижних спутников $M_h I_q(\xi)$ при

$$\eta_h = \omega_0 + q\nu \quad (q = 1, 2, 3, \dots)$$

При указанных здесь значениях средней угловой частоты η_h момента M_h , соответствующий динамический коэффициент β , определяемый одной из формул (93), становится очень большим или даже неограниченно большим при отсутствии демпфирования в системе.

Здесь мы впервые встречаемся с некоторыми новыми обстоятельствами, совершенно неизвестными в общепринятой теории вибраций валов поршневых двигателей.

Согласно этой обычной теории, каждый момент M_h , получающийся при гармоническом анализе кривой $M_{кр} = f(\alpha)$ и имеющий среднюю угловую частоту

$$\eta_h = h\eta_0,$$

дает установке одну определенную критическую скорость вращения вала

$$\eta_{0кр} = \frac{\omega_0}{h}.$$

Но из сказанного выше очевидно, что здесь, в случае неравномерного вращения вала, даже при изолированном действии одного момента M_h , можно ожидать появления целого ряда критических скоростей:

$$\eta_{qкр} = \frac{\omega_0 \pm q\nu}{h}, \quad (q = 0, 1, 2, \dots)$$

при которых в системе возникают условия для развития сильных резонансных вибраций.

При точном резонансе с несущей гармоникой $M_h I_0(\xi)$, то-есть при основной критической скорости вращения вала

$$\eta_{0кр} = \frac{\omega_0}{h},$$

все верхние спутники имеют частоты $\eta_h + q\nu$, большие, чем ω_0 , то-есть находятся уже в зарезонансной области, и для них коэффициент настройки $\gamma_q > 1$, а все нижние спутники имеют $\gamma_{-q} < 1$.

Согласно, например, формулы (90), расстояние между каждыми двумя компонентами в гармоническом спектре M_h одинаково и равно ν , то-есть средней угловой скорости вращения вала, умноженной на порядок циклической неравномерности. Это расстояние (по оси частот), а также и абсолютные величины частот несущей гармоники $\eta_h = h\eta_0$ и всех спутников:

$$\eta_h \pm q\nu = \eta_0 (h \pm qz) \quad (q = 1, 2, 3\dots)$$

непосредственно зависят от абсолютной величины средней угловой скорости вращения вала и порядка частотной модуляции z . Следовательно, при изменении числа оборотов двигателя весь гармонический спектр M_h (напр., в верхней части рис. 2) будет перемещаться в соответствующую сторону и подвергаться, одновременно с этим, сокращению или расширению вдоль от абсцисс, пропорционально изменению η_0 .

Для устранения возникающих здесь затруднений в графическом представлении ряда интересующих нас зависимостей поступим следующим образом. Построим гармонический спектр M_h (рис. 10¹) вверху), откла-

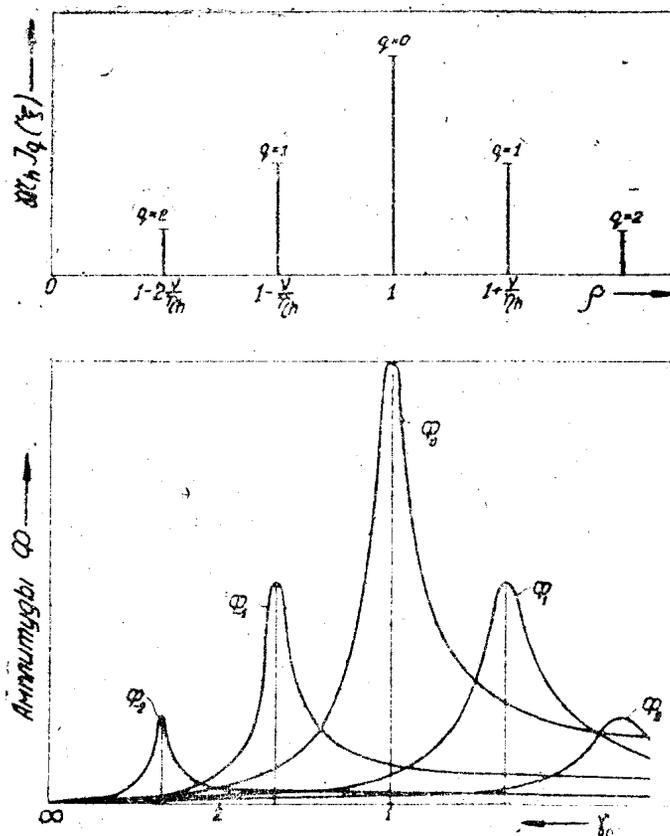


Рис. 10

ывая по оси абсцисс не абсолютные значения частот соответствующих гармоник, а отношения этих частот к частоте несущей гармоники:

$$\rho = \frac{\eta_h \pm q\nu}{\eta_h} = 1 \pm q \frac{z}{h}, \quad (q = 0, 1, 2, \dots) \quad (94)$$

Очевидно, что при малых значениях η_0 в резонанс могут вступать лишь гармонические компоненты высоких порядков. По мере увеличения η_0 , то-есть числа оборотов двигателя, в резонанс будут вступать гармоники все более низких порядков. Таким образом, движению по оси абс-

1) На рис. 10, 13, 14, 15, 16 и 18 момент M_h обозначен через \mathcal{M}_h .

цисс ρ вправо соответствует уменьшение коэффициента настройки несущей гармоники (то-есть основного коэффициента настройки) и, обратно, значению $\rho = 0$ отвечают

$$\gamma_0 = \infty; \quad \eta_0 = \infty.$$

При $\gamma_0 = 1$ мы имеем резонанс с несущей гармоникой. Резонанс же с каким-либо спутником номера $\pm q$ наступит при выполнении равенства

$$\frac{\eta_{h \pm q\nu}}{\omega_0} = 1, \quad (95)$$

то-есть при следующей величине основного коэффициента настройки:

$$\gamma_0 = \frac{1}{1 \pm q \frac{\nu}{\eta_h}} = \frac{1}{\rho}. \quad (96)$$

К какому-либо произвольному значению γ_0 отвечает следующая величина коэффициента настройки, например, верхнего спутника, с частотой $\eta_h + q\nu$:

$$\gamma_q = \frac{\eta_h + q\nu}{\omega_0} = \frac{\eta_h}{\omega_0} \left(1 + \frac{q\nu}{\eta_h} \right) = \rho \gamma_0. \quad (97)$$

Здесь, конечно, для каждого конкретного спутника коэффициент ρ является вполне определенной, не зависящей от η_0 , величиной.

Формулы (96) и (97) позволяют провести конкретную числовую разметку оси абсцисс γ_0 в нижней части рис. 10. Эта ось служит основой для построения резонансных кривых $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_{-1}, \dots$ по формулам (92) и (93), при любом принятом значении относительного коэффициента демпфирования k к k_c .

Для определения амплитуд Φ всех гармонических колебаний, вызванных действием момента M_h при каком-либо заданном числе оборотов двигателя n , достаточно подсчитать теперь соответствующий основной коэффициент настройки

$$\gamma_0 = \frac{h\eta_0}{\omega_0},$$

где

$$\eta_0 = \pi n / 30.$$

Тогда пересечение вертикали, отвечающей этому значению γ_0 с кривыми Φ (рис. 11 и 12)¹⁾ дает искомые амплитуды вынужденных гармонических колебаний, входящих в ряд (91). Фазы этих колебаний легко вычисляются по формулам (93-а).

Теперь графическим суммированием всех членов ряда (91) получим кривую полных колебаний угла закрутки вала под действием, гармонического по α , крутящего момента M_h , в случае неравномерного вращения этого вала по уравнению (82-а).

Амплитуды $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_{-1}, \dots$ всех суммируемых здесь моногармонических колебательных процессов зависят, согласно (92) и (93), от целого ряда факторов и, прежде всего, от числа оборотов двигателя n , то-есть от основного коэффициента настройки γ_0 . При некоторых конкретных „критических“ значениях γ_0 , определяемых формулой (96), вынужденные вибрации

¹⁾ На рис. 11 и 12 показаны лишь кривые $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_{-1}$ и отброшены все кривые Φ для следующих спутников.

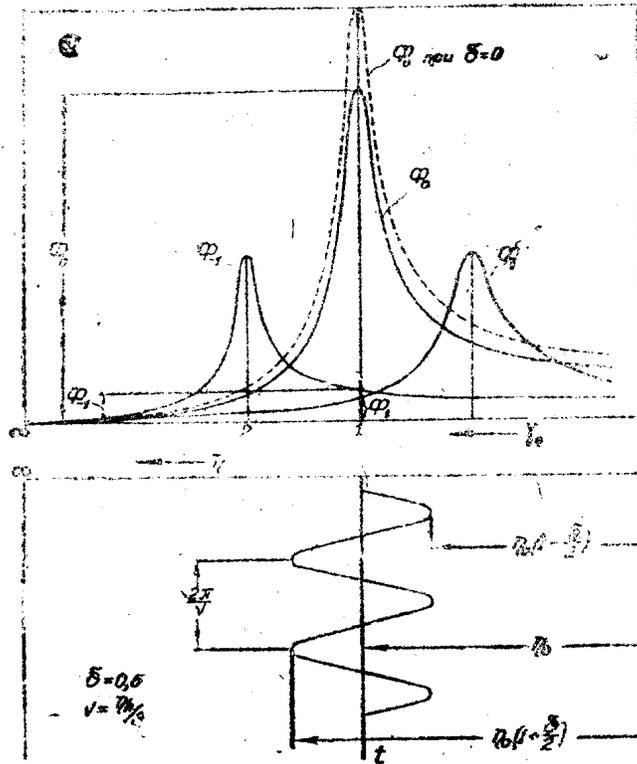


Рис. 11.

приобретают более или менее резко выраженный резонансный характер за счет возникновения резонансной ситуации для одной из компонент гармонического спектра $M_{\text{н}}$.

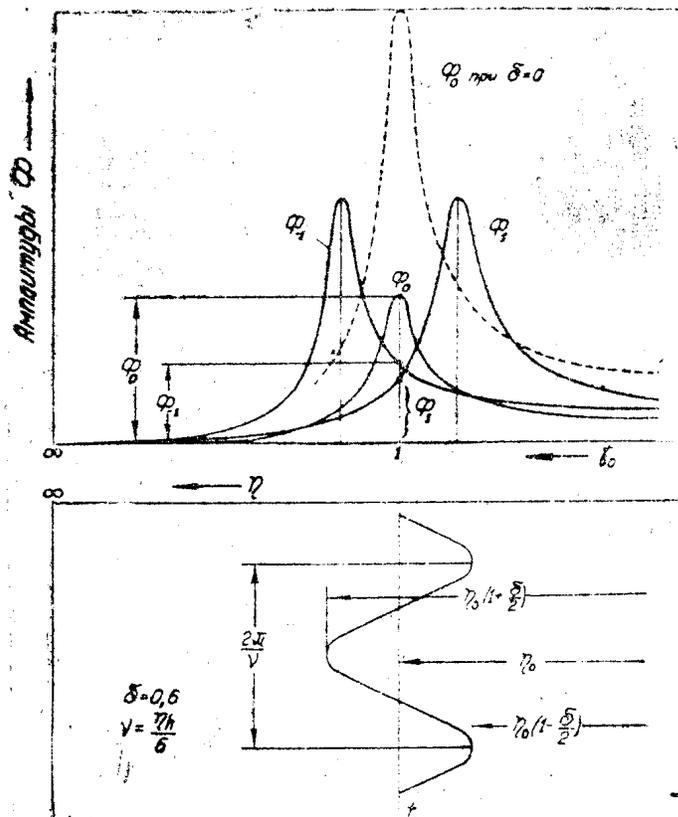


Рис. 12

Степень интенсивности боковых резонансов во многом зависит от абсолютной величины амплитуд Φ_0, Φ_1, \dots и соотношения между ними. Высота пиков кривых Φ на рис. 10 определяется как величиной коэффициента демпфирования k в системе, так и амплитудами $M_h I_q(\xi)$ соответствующих гармонических компонент M_h , то-есть, в частности, конкретными числовыми значениями функций Бесселя $I_q(\xi)$.

Но по (84):

$$\xi = \frac{\eta_h \delta}{\nu 2},$$

то-есть амплитуды Φ тесно связаны с величиной степени неравномерности δ и частотой этой неравномерности ν , или, точнее, —отношением η_h/ν .

Связь между Φ и δ совершенно аналогична зависимости амплитуд гармонических компонент момента M_h от δ , рассмотренной выше и иллюстрированной, напр., графиками на рис. 6—8. Как правило, с увеличением δ возрастают амплитуды Φ_q и Φ_{-q} вынужденных колебаний, создаваемых спутниками.

Влияние δ на величину амплитуды Φ_0 вынужденных колебаний, вызванных несущей гармоникой момента M_h , может быть значительно более сложным. Увеличение δ неизменно приводит к некоторому уменьшению Φ_0 , если M_h —газовая гармоника, то-есть компонента крутящего момента на валу, создаваемого давлением газов в цилиндре. Увеличение δ может привести к возрастанию или уменьшению Φ_0 , или даже почти совсем не сказаться на величине Φ_0 , если M_h —инерционная гармоника. Эффект влияния δ на Φ_0 здесь в сильной степени зависит от фазы ζ , напр., в формуле (46).

Из (84) следует, что увеличение отношения η_h/ν , то-есть уменьшение частоты циклических колебаний скорости вращения вала, действует на все амплитуды Φ (в случае газовых гармоник) в ту же сторону, что и увеличение δ . Неравномерность вращения вала наиболее сильно сказывается на составе гармонических спектров моментов M_h высоких порядков. Именно при больших η_h/ν следует ожидать наиболее сильного эффекта динамического демпфирования вибраций вала за счет неравномерности его вращения, проявляющегося в уменьшении резонансных вибраций вала с ростом δ .

Формула (94) показывает далее, что от отношения η_h/ν зависит и расположение спутников в частотном спектре M_h (рис. 10, вверху). С уменьшением ν , то-есть с замедлением циклических колебаний скорости вращения вала, сокращаются частотные интервалы между спутниками, и все спутники приближаются к основной несущей гармонике $M_h I_0(\xi)$. Одновременно с этим возрастают амплитуды Φ_q, Φ_{-q} колебаний, вызванных спутниками, и, большей частью, уменьшаются амплитуды Φ_0 вибраций, вызванных несущей гармоникой (рис. 12).

Очень медленные колебания угловой скорости вращения вала, то-есть малые значения ν , могут значительно уменьшить амплитуду $M_h I_0(\xi)$ несущей гармоники и даже свести ее к нулю. Так, при уменьшении ν постепенно ослабевает старый, основной резонанс с несущей гармоникой, но одновременно возрастает действие спутников.

Особо велика здесь роль первой пары спутников, дающих сильные вынужденные колебания с амплитудами Φ_1 и Φ_{-1} . Суммирование этих колебаний, происходящих соответственно с частотами $\eta_h + \nu$ и $\eta_h - \nu$, близкими одна к другой при малом ν , дает сложный закон суммарных колебаний с биениями, имеющими частоту

$$(\eta_h + \nu) - (\eta_h - \nu) = 2\nu.$$

Эти биения будут выражены тем более резко и чисто, чем меньше скажутся здесь $\Phi_0, \Phi_2, \Phi_{-2}$ и т. д. Глубина биений, в общем, увеличивается с ростом δ .

При $\nu \rightarrow \infty$ все кривые Φ сливаются в одну резонансную кривую Φ_0 обычного типа (соответствующую случаю $\delta = 0$) и циклические колебания скорости вращения вала η здесь будут динамически равноценны соответствующим периодическим колебаниям основной, несущей частоты η_0 . Рассмотрим в самой элементарной форме этот предельный переход.

Предположим, что при любых значениях ν сохраняются неизменными δ, η_0 и h . Тогда по формулам (93 а) при $\nu \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \gamma_q &\rightarrow \gamma_0; & \gamma_{-q} &\rightarrow \gamma_0 \\ \bar{\varepsilon}_q &\rightarrow \bar{\varepsilon}_0; & \bar{\varepsilon}_{-q} &\rightarrow \bar{\varepsilon}_0 \end{aligned}$$

и по (93):

$$\beta_q \rightarrow \beta_0; \quad \beta_{-q} \rightarrow \beta_0.$$

Следовательно, теперь из (91):

$$\Psi \rightarrow \beta_0 \left[I_0(\xi) + 2 \sum_{q=1}^{\infty} I_{2q}(\xi) \right] \sin(\eta_h t - \bar{\varepsilon}_0).$$

Но, как известно из общей теории функций Бесселя [2], при любом ξ

$$I_0(\xi) + 2 \sum_{q=1}^{\infty} I_{2q}(\xi) = 1,$$

то-есть при $\nu \rightarrow 0$

$$\Psi \rightarrow \beta_0 \sin(\eta_h t - \bar{\varepsilon}_0).$$

Мы получили обычное уравнение вынужденных колебаний линейной системы, находящейся под действием моногармонического по времени возбуждающего момента. Однако здесь β_0 , конечно, медленно меняется (при $\nu \neq 0$) в соответствии с периодическими колебаниями η_0, η_h и γ_0 .

При точном основном резонансе, то-есть при $\eta_h = \omega_0$, а также небольшим ξ ($\nu \gg 0$) и достаточно малом демпфировании в системе, эффектом спутников, вызывающих колебания с амплитудами Φ_q и Φ_{-q} ($q = 1, 2, 3, \dots$), можно пренебречь. Тогда зависимость амплитуды полных вынужденных колебаний Ψ , вызванных моментом M_h , от величины степени неравномерности δ будет совпадать с связью Φ_0 и δ .

Но при $\gamma_0 = \text{const}$, согласно (92), амплитуды Φ_0 пропорциональны амплитуде несущей гармоники $M_h I_0(\xi)$. Следовательно, показанный выше, напр., на рис. 2 и 3 закон изменения $I_0(\xi)$ с ростом δ , является, одновременно, приближенной характеристикой степени уменьшения амплитуды Ψ_{max} полных вынужденных резонансных вибраций в системе за счет динамического демпфирования, обусловленного циклическими колебаниями скорости вращения вала.

При изменении числа оборотов двигателя, то-есть с изменением η_0 в ту или иную сторону от критического ее значения $\eta_{\text{окр}} = \omega_0/h$ соответствующим образом сдвигаются все спутники в спектре M_h , нарушается состояние основного резонанса и появляется отмеченная уже выше возможность боковых резонансов. Очевидно, что вне основного резонанса, при $\gamma_0 \neq 1$, связь между Φ_0 и δ уже не характеризует действительной зависимости Ψ_{max} от δ . Здесь, для выяснения эффекта динамического демпфи-

рования за счет δ необходим каждый раз конкретный подсчет величины Ψ_{max} по уравнению (91) и сравнение этого Ψ_{max} с Φ_0 при $\delta = 0$.

Но, во всяком случае очевидно, что во время работы двигателя в условиях бокового резонанса, напр., с первым спутником, принципиально вполне возможно проявление эффекта отрицательного динамического демпфирования, когда неравномерность вращения вала приводит не к уменьшению, а к увеличению суммарной амплитуды Ψ_{max} , по сравнению с тем ее значением, которое получилось бы при $\delta = 0$. Вероятность возникновения такого отрицательного демпфирования, конечно, тем больше, чем больше амплитуда резонирующего спутника и чем меньше действительное демпфирование в системе.

Повидимому, отрицательное динамическое демпфирование вполне возможно и во внерезонансных областях, в случае большой δ и медленной модуляции, за счет большой величины, напр., Φ_1 и Φ_{-1} по сравнению с Φ_0 .

Мы рассмотрели, в общих чертах, явление динамического демпфирования вынужденных вибраций неравномерно вращающегося вала, находящегося под действием одного, моногармонического по α , крутящего момента M_h .

Здесь предполагался случай как бы внешнего, независимого динамического демпфирования, когда цикличная неравномерность вращения вала вызывалась какими-либо другими, а не M_h , компонентами крутящего момента на валу двигателя. Эта неравномерность, через эффект частотной (в основном) модуляции, воздействовала на гармонический спектр момента M_h , но, согласно принятым нами условным допущениям, совершенно не зависела от самого момента M_h и от вызванных им колебаний системы.

Таким образом, степень неравномерности δ у нас пока не включала в себя ту „упругую“ неравномерность вращения, которая возникает в системе за счет действия именно этого момента M_h .

Теперь нам необходимо остановиться на возможности своеобразного „автодемпфирования“ вибраций, обусловленного тем, что „упругая“ неравномерность вращения вала, порожденная моментом M_h , также дает частотную модуляцию этого момента и тем, опять же, меняет эффект его действия на колеблющуюся систему. Для приближенного анализа подобных явлений „автомодуляции“ воспользуемся полученными выше результатами нашего исследования эффекта частотной модуляции, полагая в соответствующих местах

$$\nu = \eta_h.$$

Ранее, принимая ряд упрощающих допущений, приведенных на стр., 35, мы исключали из рассмотрения случай

$$h = z \text{ или } \nu = \eta_h.$$

Сейчас это ограничение для нас уже совершенно не обязательно.

Но пока, временно, предположим и здесь, что моногармоническая неравномерность вращения вала, имеющая частоту $\nu = \eta_h$, вызвана действием на систему извне, со стороны, каких либо других, не зависящих от M_h , моментов.

Тогда момент M_h получит частотную модуляцию моногармонического же характера.

Рассмотрим частный случай синфазной модуляции

$$(M_h) = M_h \sin(\eta_h t + \xi \sin \eta_h t),$$

где по формуле (84), при $\eta_h = \nu$,

$$\xi = \delta/2.$$

Но, согласно (34),

$$M_h \sin(\eta_h t + \frac{\delta}{2} \sin \eta_h t) = \\ = M_h \sum_{q=1}^{\infty} \left[I_{q-1} \left(\frac{\delta}{2} \right) + (-1)^q I_{q+1} \left(\frac{\delta}{2} \right) \right] \sin q \eta_h t,$$

то-есть здесь все спутники, в гармоническом (по времени t) спектре момента M_h , располагаются по одну сторону от несущей гармоники и имеют частоты, кратные η_h .

Теперь аналогично (89) получаем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний угла закрутки вала нашей двухмассовой системы по рис. 9:

$$\Theta_1 \frac{d^2 \Psi}{dt^2} + k_1 \frac{d \Psi}{dt} + c_1 \Psi = \\ = M_h \sum_{q=1}^{\infty} \left[I_{q-1} \left(\frac{\delta}{2} \right) + (-1)^q I_{q+1} \left(\frac{\delta}{2} \right) \right] \sin q \eta_h t$$

Стационарная часть решения этого уравнения имеет, очевидно, следующую форму:

$$\Psi = \sum_{q=1}^{\infty} \Phi_{q-1} \cdot \sin(q \eta_h t - \varepsilon_q), \quad (98)$$

где

$$\Phi_{q-1} = \beta_{q-1} \frac{M_h}{c_1} \left[I_{q-1} \left(\frac{\delta}{2} \right) + (-1)^q I_{q+1} \left(\frac{\delta}{2} \right) \right], \quad (99)$$

$$\beta_{q-1} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \gamma_{q-1}^2)^2 + 4 \left(\frac{k_1}{k_c} \right)^2 \gamma_{q-1}^2}} \quad (100)$$

$$\gamma_{q-1} = \frac{q \eta_h}{\omega_0},$$

$$\varepsilon_{q-1} = \text{arctg} \left(2 \frac{k_1}{k_c} \frac{\gamma_{q-1}}{1 - \gamma_{q-1}^2} \right).$$

Развертывая уравнение вынужденных колебаний (98), получаем:

$$\Psi = \Phi_0 \sin(\eta_h t - \varepsilon_0) + \Phi_1 \sin(2\eta_h t - \varepsilon_1) + \Phi_2 \sin(3\eta_h t - \varepsilon_2) + \dots \quad (101)$$

Здесь:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \beta_0 \frac{M_h}{c_1} \left[I_0 \left(\frac{\delta}{2} \right) - I_2 \left(\frac{\delta}{2} \right) \right], \\ \Phi_1 &= \beta_1 \frac{M_h}{c_1} \left[I_1 \left(\frac{\delta}{2} \right) + I_3 \left(\frac{\delta}{2} \right) \right] \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

причем Φ_0, Φ_1, \dots представляют собою амплитуды вынужденных колебаний, вызванных отдельными, гармоническими по t , компонентами момента M_h .

Аналогично, полагая в (27)

$$\zeta = \pi/2; \quad \varepsilon_n = 0,$$

рассмотрим момент

$$(M_h) = M_h \sin(\eta_h t + \xi \cos \eta_h t)$$

Для этого случая по формуле (35) при

$$\xi = \delta/2$$

имеем

$$\begin{aligned} M_h \sin\left(\eta_h t + \frac{\delta}{2} \cos \eta_h t\right) &= M_h \left\{ I_1\left(\frac{\delta}{2}\right) + \right. \\ &+ \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \left[I_{2q}\left(\frac{\delta}{2}\right) + I_{2q+2}\left(\frac{\delta}{2}\right) \right] \sin(2q+1)\eta_h t + \\ &\left. + \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \left[I_{2q+1}\left(\frac{\delta}{2}\right) - I_{2q+3}\left(\frac{\delta}{2}\right) \right] \cos 2q\eta_h t \right\}. \end{aligned}$$

Теперь уравнение вынужденных колебаний вместо (98) получает вид: ¹⁾

$$M_h I_1\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

$$\Psi = \Phi_0 \sin(\eta_h t - \varepsilon_0) + \Phi_1 \cos(2\eta_h t - \varepsilon_1) + \Phi_2 \sin(\eta_h t - \varepsilon_2) + \dots, \quad (103)$$

где:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \beta_0 \frac{M_h}{c_1} \left[I_0\left(\frac{\delta}{2}\right) + I_2\left(\frac{\delta}{2}\right) \right] \\ \Phi_1 &= \beta_1 \frac{M_h}{c_1} \left[I_1\left(\frac{\delta}{2}\right) - I_3\left(\frac{\delta}{2}\right) \right] \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (104)$$

Входящие сюда величины β и ε определяются предыдущими формулами (100).

На рис. 13 и 14 показаны кривые вынужденных колебаний угла закрутки Ψ вала рассматриваемой двухмассовой системы, подсчитанные по уравнениям (98) и (103) при следующих конкретных данных:

$$\delta = 2, \quad \frac{k_1}{k_c} = 0,1, \quad \eta_h = \omega_0 \quad (\text{основной резонанс}).$$

Значение $\delta = 2$ соответствует настолько большой неравномерности вращения вала, что угловая скорость его колеблется в пределах от 0 до $2\eta_0$. Конечно, такой случай практически едва ли возможен, даже в экспериментальных условиях, однако он все же принят нами на рис. 13 и 14, с целью получения наиболее наглядной характеристики влияния δ .

Из подобных же соображений принято и большое значение относительного демпфирования k_1/k_c , так как с увеличением демпфирования в системе усиливается эффект наложения вибраций, вызванных спутниками, на вибрации, создаваемые несущей гармоникой в условиях ее резонанса.

Диаграммы на рис. 13 и 14 показывают, что несмотря на очень сильное искажение кривой возбуждающего момента M_h по времени (по срав-

¹⁾ Здесь мы отбрасываем статический эффект постоянного слагаемого: $M_h I_1\left(\frac{\delta}{2}\right)$

нению с чисто синусоидальной кривой M_h по α), за счет большой δ —кривая суммарных вынужденных колебаний Ψ лишь немного отличается от чистой синусоиды. Но неравномерность вращения вала заметно уменьшает амплитуду вынужденных колебаний Ψ_{max} по сравнению с той амплитудой

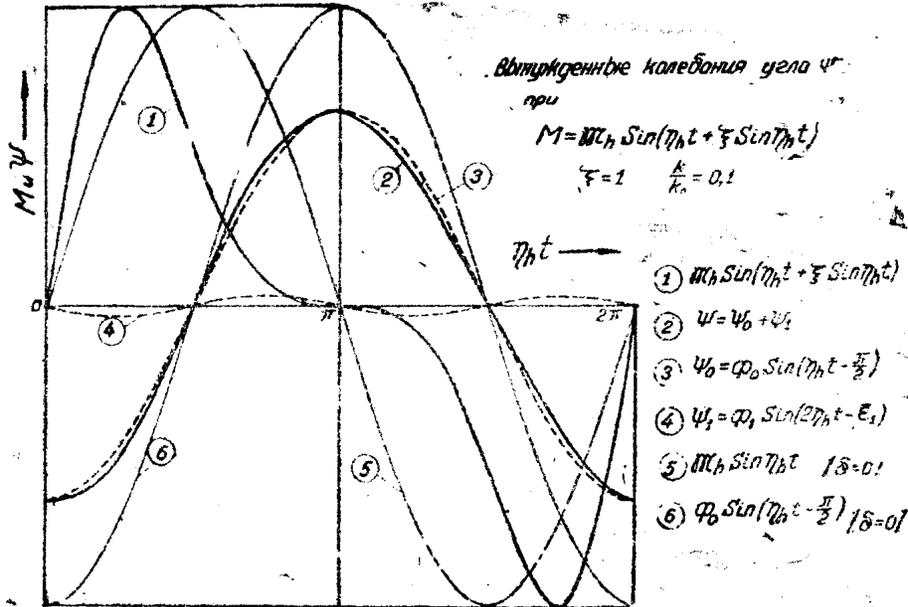


Рис. 13

тудой, которая установилась бы в системе под действием момента M_h при $\delta = 0$ (сравнить кривые 2 и 6 на рис. 13, 14).

Как уже отмечалось выше, в системе, имеющей $\delta > 0$, возможно появление новых критических скоростей вращения вала, вследствие наличия

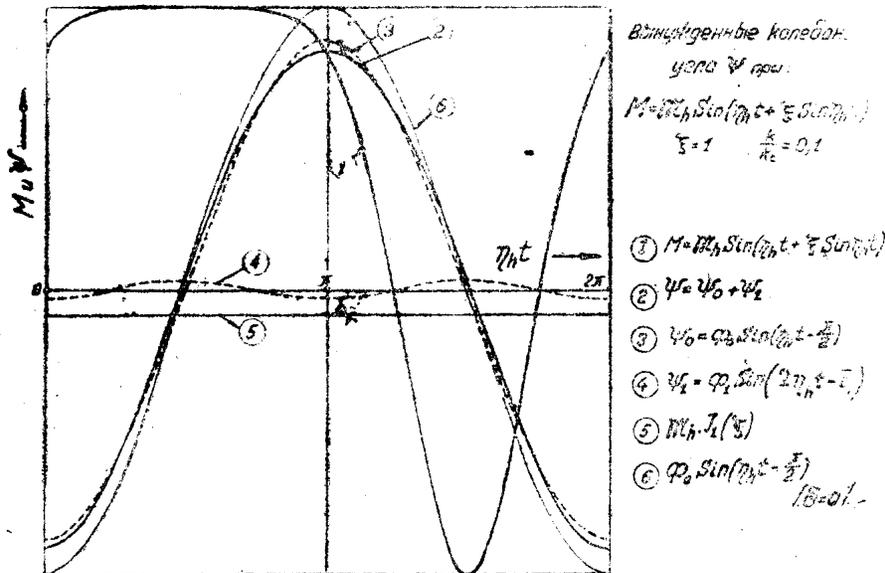


Рис. 14

в гармоническом спектре момента M_h спутников с различными частотами. Это положение иллюстрируется диаграммами на рис. 15 и 16, где показаны резонансные кривые Ψ_{res}/Ψ_{cm} , вычисленные нами по уравнениям (98) и (103) для различных δ и k_1/k_c . Здесь легко заметить, что интенсивность боковых резонансов резко возрастает с уменьшением демпфирования в системе и с увеличением δ . Однако, в большинстве практически возможных случаев ($\delta < 0.2$), боковые резонансы едва ли могут иметь какое-либо существенное значение.

Наконец, эти диаграммы указывают на очень незначительное (при $\delta < 0,2$) влияние степени неравномерности вращения вала на амплитуды резонансных вибраций (основной резонанс) в условиях:

$$\eta_h = \nu.$$

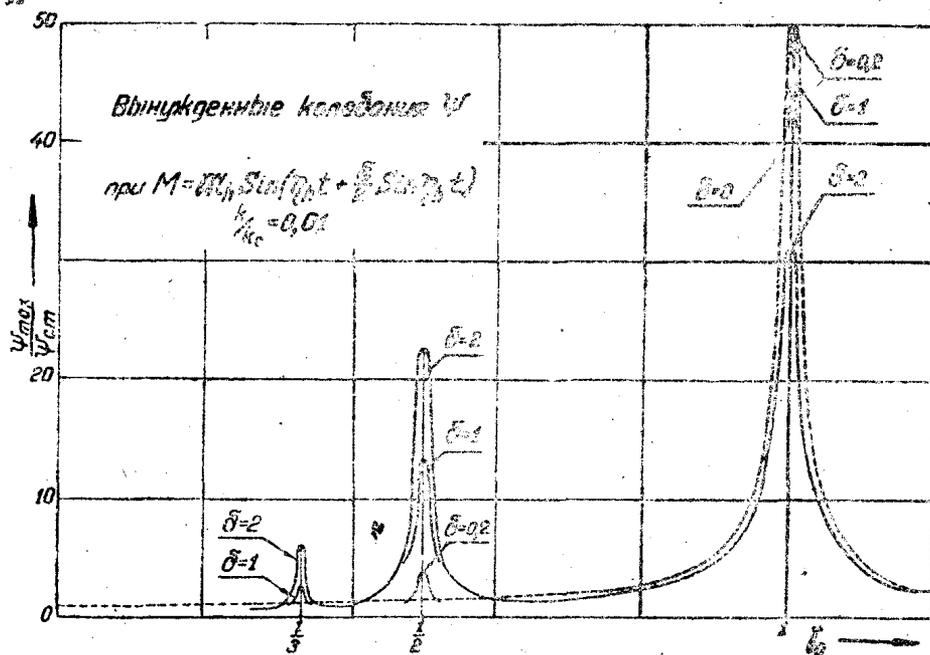


Рис. 15

Из ряда конкретных расчетов, проведенных нами в связи с построением кривых на рис. 15 и 16, следует, что при не слишком большом демп-

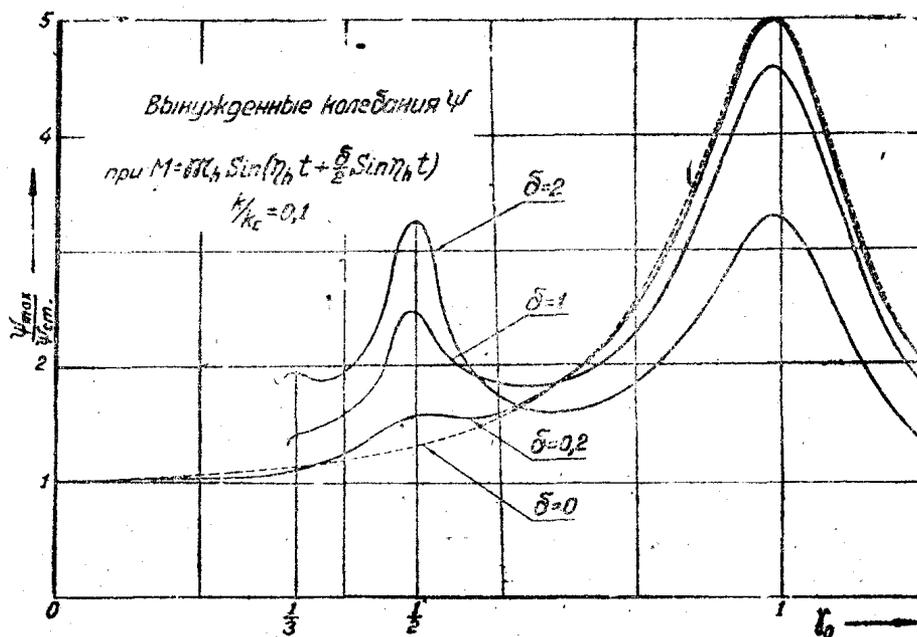


Рис. 16

фировании ($k_1/k_c \leq 0,1$), в условиях резонанса с несущей частотой ($\eta_h = \omega_0$), амплитуды Φ_1, Φ_2, \dots колебаний, вызванных спутниками, очень малы по

сравнению с Φ_0 . Поэтому для случая основного резонанса уравнения (99) и (104) можно переписать в виде

$$\Phi_{0res} = \beta_{0res} \frac{M_h}{c_1} \left[I_0 \left(\frac{\delta}{2} \right) - I_2 \left(\frac{\delta}{2} \right) \right] \quad (105)$$

при возбуждающем моменте

$$M_h \sin \left[\eta_h t + \frac{\delta}{2} \sin \eta_h t \right]$$

и

$$\Phi_{0res} = \frac{M_h}{c_1} \beta_{0res} \left[I_0 \left(\frac{\delta}{2} \right) + I_2 \left(\frac{\delta}{2} \right) \right] \quad (106)$$

при возбуждающем моменте

$$M_h \sin \left[\eta_h t + \frac{\delta}{2} \cos \eta_h t \right].$$

Сопоставление этих выражений, а также рис. 12 и 13 показывает, что фаза частотной модуляции ζ в общей формуле (27) для спектра M_h , имеет достаточно сильное влияние на величину динамического демпфирования вынужденных колебаний при больших значениях δ .

При $\delta = 0$ выражения (105) и (106) переходят в самую обычную форму

$$\Phi_{res} = \beta_{0res} \frac{M_h}{c_1}$$

и дают амплитуду тех резонансных вибраций, которые установятся в системе в случае равномерного вращения вала. Соответствующее отношение:

$$\frac{\Phi_{0res}}{\Phi_{res}} = I_0 \left(\frac{\delta}{2} \right) \pm I_2 \left(\frac{\delta}{2} \right) \quad (107)$$

представлено в функции от δ на рис. 17.

Здесь заштрихованная область устанавливает диапазон возможных колебаний отношения Φ_{0res}/Φ_{res} в зависимости от фазового угла модуляции ζ , при каждой конкретной δ .

Из диаграммы по рис. 17 следует, что динамический эффект δ , проявляющийся в уменьшении амплитуд резонансных колебаний, в условиях синхронной модуляции $\eta_h = \nu$ очень невелик, по крайней мере в области достаточно малых, обычно встречающихся в практике, значений δ . В среднем этот эффект можно охарактеризовать отношением

$$\frac{\Phi_{0res}}{\Phi_{res}} \approx I_0 \left(\frac{\delta}{2} \right).$$

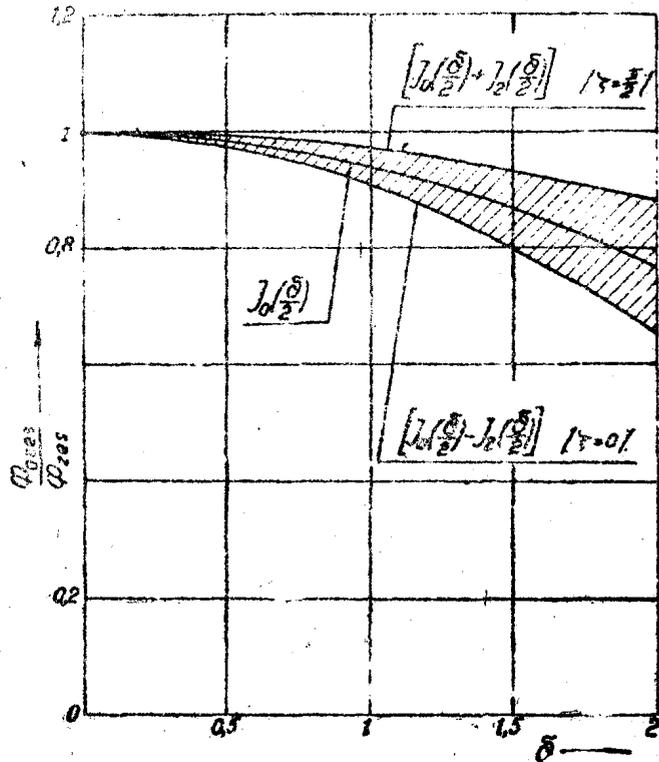


Рис. 17

При наложенной извне неравномерности δ вращения вала конкретная величина ζ зависит от целого комплекса условий, в которых развиваются колебательные процессы в установке. Учет этих условий в общем случае, при $\eta_h \neq \nu$, очень сложен.

Вопрос о величине ζ решается более просто в случае „автодемпфирования“.

При основном резонансе ($\eta_h = \omega_0$) несущая гармоника

$$M_h I_0 \left(\frac{\delta}{2} \right) \sin \eta_h t$$

вызывает вынужденные колебания

$$\Phi_{ores} \sin (\eta_h t - \pi/2)$$

с обычным для резонанса сдвигом фаз в 90° .

Теперь мгновенный угол поворота кривошипа (пренебрегая малыми Φ_1, Φ_2, \dots):

$$\alpha = \eta_0 t + \Phi_{ores} \sin (\eta_h t - \pi/2).$$

Следовательно, в рассматриваемом случае гармонический

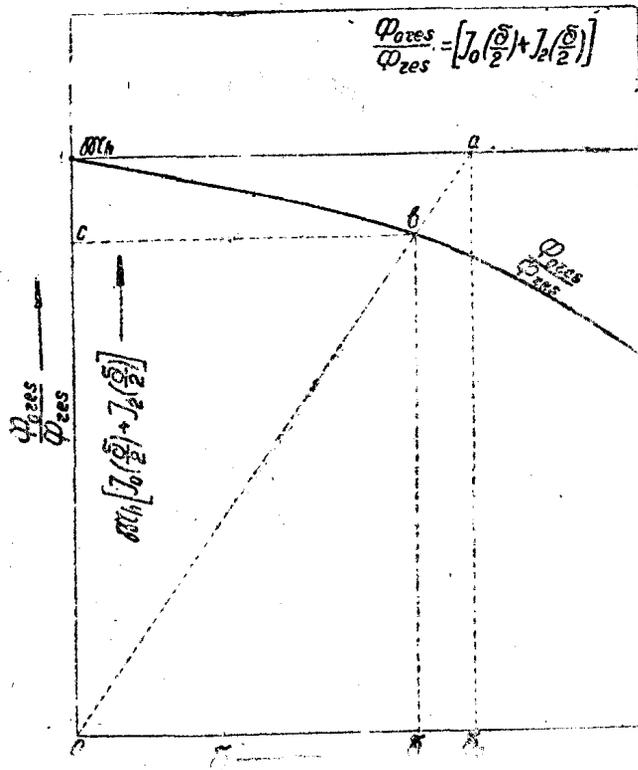


Рис. 18

момент $M_h \sin \alpha$ оказывается модулированным по закону

$$(M_h) = M_h \sin [\eta_h t + \Phi_0 h \sin (\eta_h t - \pi/2)].$$

Сравнение этого выражения с (27) показывает, что здесь

$$\zeta = \pi/2,$$

то-есть для оценки эффекта автодемпфирования, на рис. 17 надлежит пользоваться кривой

$$\frac{\Phi_{ores}}{\Phi_{res}} = I_0 \left(\frac{\delta}{2} \right) + I_2 \left(\frac{\delta}{2} \right). \quad (107-a)$$

Но в условиях автодемпфирования уже нельзя считать величину „упругой“ δ наперед заданной, ввиду круговой связи между δ и Φ_{ores} через соотношение

$$\delta = 2h\Phi_{ores} \quad (108)$$

и кривую динамического демпфирования (107-а). Эта „упругая“ δ должна быть определена из следующих соображений.

На рис. 18 построена кривая по уравнению (107-а). Очевидно, что ось ординат здесь можно считать и осью моментов, на которой откладываются величина амплитуды несущей гармоники:

$$M_h \left[I_0 \left(\frac{\delta}{2} \right) + I_2 \left(\frac{\delta}{2} \right) \right]$$

в функции от δ . Горизонталь 1-а дает амплитуду M_h этой несущей в случае $\delta = 0$.

Подсчитаем резонансную амплитуду Φ_{res} при $\delta=0$ по обычной формуле

$$\Phi_{res} = \beta_{0res} \cdot \frac{M_h}{c_1}$$

и определим по ней соответствующую степень неравномерности

$$\delta_0 = \beta_{0res} \frac{M_h}{c_1} 2h.$$

Откладывая δ_0 на оси абсцисс (рис. 18), проведем через найденную точку вертикаль до пересечения с кривой Φ_{0res}/Φ_{res} в точке a и соединим a прямой с началом координат. Пересечение этой прямой с кривой $\frac{\Phi_{0res}}{\Phi_{res}}$ в точке b дает истинную „упругую“ δ , а, следовательно, через формулу (107-а), и истинную амплитуду вынужденных колебаний Φ_0 с учетом явления „автодемпфирования“. Относительный же эффект автодемпфирования характеризуется ординатой точки b .

Подведем некоторые итоги изложенного выше анализа влияния величины степени неравномерности вращения вала на амплитуды вынужденных колебаний его под действием момента $M_h \sin h\alpha$, моногармонического по углу поворота кривошипа α .

а) Даже чисто моногармоническая неравномерность вращения вала приводит к появлению искажений и отклонений кривой вынужденных колебаний от чистой синусоиды по времени, за счет суммирования вибраций с различными частотами, равными частотам гармонических компонент момента M_h .

б) Сложная, не синусоидальная, неравномерность вращения вала оказывает почти такое же влияние на гармонический спектр момента M_h , как и моногармоническая неравномерность. Поэтому динамическое влияние сложной неравномерности на вынужденные вибрации вала не намного отличаются от влияния основной гармонической слагающей кривой скорости вращения вала η по времени.

в) Неравномерность вращения вала сказывается на его вынужденных вибрациях через эффект частотной (иногда смешанной) модуляции действующих на вал возбуждающих моментов.

г) Частотная модуляция, гармонического по α , момента M_h никогда, кроме случаев когда ξ —корень функции $I_0(\xi)$, не устраняет явления стационарного, то-есть установившегося резонанса на несущей частоте $h\eta_0$. Резонансная ситуация сохраняется здесь неизменно, при любых значениях степени неравномерности δ . Но с ростом δ уменьшается амплитуда $M_h I_0(\xi)$ резонирующей „несущей“ гармоники а, следовательно, и амплитуда вызванных ею резонансных колебаний, в соответствии с законом изменения функции Бесселя $I_0(\xi)$.

(Это последнее заключение, об уменьшении амплитуды несущей гармоники при увеличении δ , не всегда справедливо в отношении инерционных моментов $M_{ин}$).

Таким образом, обычная неравномерность вращения вала (обусловленная характером диаграммы тангенциальных усилий на валу двигателя) вообще не препятствует развитию резонансных вибраций во время работы установки на критических числах оборотов. Периодические колебания угловой скорости вала η могут привести лишь к некоторому изменению (уменьшению) амплитуд резонансных колебаний и искажению их чисто синусоидального (при $\delta=0$) характера.

Поэтому общепринятое объяснение эффекта динамического демпфирования за счет $\delta > 0$ перманентным нарушением резонанса, невозможностью установления его даже на малый промежуток времени вследствие непрерывного периодического изменения частоты $h\eta$ каждого, действующего на вал гармонического крутящего момента, нельзя принимать верным.

Такое объяснение основано на формальном и ошибочном применении основных выводов элементарной теории гармонических колебаний. Здесь, в условиях неравномерного вращения вала двигателя, каждая гармоника M_h крутящего момента $M_{кр}$ рассматривается как „синусоидальная“ функция времени, имеющая переменную частоту.

Но, как показано выше, „синусоидальный“ момент с переменной частотой (то-есть частотно-модулированный момент) коренным образом отличается от истинно-синусоидального момента как по своим внешним характеристикам, так и по эффекту действия его на линейную колебательную систему. Резонансная кривая для частотно-модулированного момента M_h имеет свои законы и специфические особенности, неизвестные в обычной теории вибраций валов.

6. Вынужденные колебания линейной системы при сложном периодическом возбуждении

В предыдущих разделах данной статьи было показано, что каждая гармоническая по углу поворота кривошипа α , слагающая M_h крутящего момента $M_{кр}$ на валу двигателя, входящая в обычное разложение $M_{кр}$ в ряд Фурье (1), уже перестает быть моногармонической функцией времени в случае вращения вала с переменной, колеблющейся скоростью. За счет эффекта частотной (а в отношении инерционных гармоник и смешанной) модуляции при $\delta > 0$, истинный, гармонический по t , спектр каждого момента M_h , а, следовательно, и всех A_h и B_h в формуле (1), содержит целый ряд моногармонических компонент—несущую гармонику и спутников.

Суммирование этих компонент, вычисленных для всех A_h и B_h , дает полный, гармонический по времени, частотный спектр крутящего момента $M_{кр}$ на валу. Очевидно, что теперь, при $\delta > 0$, кривая $M_{кр} = f_0(\alpha)$ отличается от кривой $M_{кр} = f(t)$ по своей форме, и, может быть, характеру¹⁾.

Для конкретного изучения влияния δ на сложный крутящий момент $M_{кр}$ двигателя примем, как и ранее, простейший случай колебаний угловой скорости вращения кривошипа по моногармоническому закону (82-а). При этом условии мгновенный угол поворота кривошипа

$$\alpha = \eta_0 t + \lambda \sin(\nu t - \zeta), \quad (109)$$

где

$$\lambda = \frac{\eta_0 \delta}{\nu^2}. \quad (110)$$

Подстановка значения α из (109) в ряд (1) дает

$$M_{кр} = M_0 + M_{кр}' + M_{кр}'' \quad (111)$$

Здесь

$$M_{кр}' = \sum_{h=1}^{\infty} A_h \sin h [\eta_0 t + \lambda \sin(\nu t - \zeta)], \quad (112)$$

¹⁾ Здесь под δ следует понимать степень неравномерности вращения кривошипа рассматриваемого цилиндра. Эта δ может быть „жесткой“ или „увругой“, но в последнем случае необходимо считать исключенным или очень малым эффект автомодуляции.

$$M_{кр}'' = \sum_{h=1}^{\infty} B_h \cos h[\eta_0 t + \lambda \sin(\nu t - \zeta)]. \quad (113)$$

Для упрощения дальнейшего исследования предположим, что в крутящий момент $M_{кр}$, представленный выражениями (1), (111)—(113), входят лишь газовые гармоники. Это равнозначно условию, что исходная кривая $M_{кр} = f_0(\alpha)$ была построена по индикаторной диаграмме без учета сил инерции шатунно-кривошипного механизма. Инерционные же моменты могут быть учтены особо.

Первое, постоянное, слагаемое M_0 в (1) и (111) не представляет какого-либо интереса. Рассмотрим второе слагаемое, $M_{кр}'$ в (111), определяемое рядом (112).

Для развертывания этого выражения воспользуемся формулой (27), полагая в ней

$$\varepsilon_h = 0; \quad \eta_h = h\eta_0; \quad \xi = h\lambda.$$

Тогда из (112)

$$\begin{aligned} M_{кр}' = & \sum_{h=1}^{\infty} A_h \left\{ I_0(h\lambda) \sin h\eta_0 t + \right. \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(h\lambda) \sin [(h\eta_0 + q\nu) t - q\zeta] + \\ & \left. + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(h\lambda) \sin [h\eta_0 - q\nu) t + q\zeta] \right\} \end{aligned} \quad (114)$$

Равным образом, принимая в (27)

$$\varepsilon_h = \pi/2; \quad \eta_h = h\eta_0; \quad \xi = h\lambda,$$

имеем из (113):

$$\begin{aligned} M_{кр}'' = & \sum_{h=1}^{\infty} B_h \left\{ I_0(h\lambda) \cos h\eta_0 t + \right. \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(h\lambda) \cos [(h\eta_0 + q\nu) t - q\zeta] + \\ & \left. + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(h\lambda) \cos [(h\eta_0 - q\nu) t + q\zeta] \right\}. \end{aligned} \quad (115)$$

Теперь подставляя (114) и (115) в (111) и принимая обозначение

$$h_0 = \nu/\eta_0,$$

получаем уже более конкретную форму выражения крутящего момента $M_{кр}$ в функции времени:

$$\begin{aligned}
 M_{кр} = M_0 + & \sum_{h=1}^{\infty} A_h \left\{ I_0(h\lambda) \sin h\eta_0 t + \right. \\
 & + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(h\lambda) \sin [(h + qh_0)\eta_0 t - q\zeta] + \\
 & \left. + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(h\lambda) \sin [(h - qh_0)\eta_0 t + q\zeta] \right\} + \\
 & + \sum_{h=1}^{\infty} B_h \left\{ I_0(h\lambda) \cos h\eta_0 t + \right. \\
 & + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(h\lambda) \cos [(h + qh_0)t - q\zeta] + \\
 & \left. + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q I_q(h\lambda) \cos [(h - qh_0)t + q\zeta] \right\}. \quad (116)
 \end{aligned}$$

При каждом конкретном и, конечно, всегда целом (для двухтактных двигателей) значении h_0 порядка циклической неравномерности вращения вала выражение (116) после разворачивания сумм и соответствующей перегруппировки слагаемых может быть приведено к виду:

$$M_{кр} = \bar{M}_0 + \sum_{h=1}^{\infty} \bar{A}_h \sin h\eta_0 t + \sum_{h=1}^{\infty} \bar{B}_h \cos h\eta_0 t \quad (117)$$

или

$$M_{кр} = \bar{M}_0 + \sum_{h=1}^{\infty} \bar{M}_h \sin (h\eta_0 t + \varepsilon_h) \quad (118)$$

где

$$\bar{M}_h = \sqrt{\bar{A}_h^2 + \bar{B}_h^2}, \quad (119)$$

$$\varepsilon_h = \operatorname{arctg} \frac{\bar{B}_h}{\bar{A}_h}. \quad (120)$$

Входящие сюда величины \bar{A}_h , \bar{B}_h , \bar{M}_h представляют собою амплитуды моногармонических, уже по времени t , слагающих крутящего момента $M_{кр}$ на валу двигателя ¹⁾.

¹⁾ В четырехтактных двигателях индекс h здесь, конечно, будет принимать не только целые, но и дробные значения:

$$h = 1/2, 1, 1 1/2, 2, \dots$$

Все A_h , B_h и M_h в формулах (117)—(120), очевидно, являются сложными функциями всех A_h и B_h , входящих в ряд (1), а также зависят от h , h_0 , λ и δ .

Детальный анализ ряда (116) в общем виде представляет значительные затруднения и не может дать достаточно наглядных результатов.

Выше было показано, что эффект частотной модуляции за счет δ , каждой гармонической по α слагающей M_h крутящего момента $M_{кр}$ на валу двигателя возрастает с увеличением отношения η_h/ν . В двухтактных двигателях минимальная возможная частота ν циклических колебаний скорости вала на протяжении одного оборота, очевидно, равна средней угловой скорости его вращения, то-есть

$$\nu = \eta_0,$$

и, следовательно,

$$h_0 = 1.$$

Рассмотрим этот, особо интересный для нас случай, когда динамическое демпфирование, обусловленное неравномерностью вращения вала, оказывается наиболее эффективным.

Полагая в (114) $\nu = \eta_0$, после ряда не особенно сложных, но достаточно громоздких преобразований, получим:

$$\begin{aligned} M_{кр}' &= \sum_{h=1}^{\infty} A_h \sin h [\eta_0 t + \lambda \sin (\eta_0 t - \zeta)] = \\ &= A_0 + \sum_{h=1}^{\infty} A_h' \sin h \eta_0 t + \sum_{h=1}^{\infty} B_h' \cos h \eta_0 t, \end{aligned} \quad (121)$$

где

$$A_0 = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p A_p I_p(p\lambda) \sin p\zeta, \quad (122)$$

$$\begin{aligned} A_h' &= \sum_{p=1}^{\infty} A_p [I_{h-p}(p\lambda) \cos (h-p)\zeta - \\ &- (-1)^{h+p} I_{h+p}(p\lambda) \cos (h+p)\zeta], \end{aligned} \quad (123)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{\infty} A_p [-I_{h-p}(p\lambda) \sin (h-p)\zeta + \\ &+ (-1)^{h+p} I_{h+p}(p\lambda) \sin (h+p)\zeta]. \end{aligned} \quad (124)$$

Аналогичным образом из (115), при $\nu = \eta_0$:

$$\begin{aligned} M_{кр}' &= \sum_{h=1}^{\infty} B_h \cos h [\eta_0 t + \lambda \sin (\eta_0 t - \zeta)] = \\ &= B_0 + \sum_{h=1}^{\infty} A_h'' \sin h \eta_0 t + \sum_{h=1}^{\infty} B_h'' \cos h \eta_0 t \end{aligned} \quad (125)$$

Здесь

$$\bar{B}_0 = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p B_p I_p(p\lambda) \cos p\zeta, \quad (126)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_h'' = & \sum_{p=1}^{\infty} B_p [I_{h-p}(p\lambda) \sin(h-p)\zeta + \\ & + (-1)^{h+p} I_{h+p}(p\lambda) \sin(h+p)\zeta], \end{aligned} \quad (127)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_h'' = & \sum_{p=1}^{\infty} B_p [I_{h-p}(p\lambda) \cos(h-p)\zeta + \\ & + (-1)^{h+p} I_{h+p}(p\lambda) \cos(h+p)\zeta]. \end{aligned} \quad (128)$$

Теперь, подставляя все это в общее выражение (111), получим, подобно (117), истинный гармонический спектр момента $M_{кр}$:

$$\begin{aligned} M_{кр} = & M_0 + \sum_{h=1}^{\infty} A_h \sin h [\eta_0 t + \lambda \sin(\eta_0 t - \zeta)] + \\ & + \sum_{h=1}^{\infty} B_h \cos h [\eta_0 t + \lambda \sin(\eta_0 t - \zeta)], \end{aligned}$$

или

$$M_{кр} = \bar{M}_0 + \sum_{h=1}^{\infty} \bar{A}_h \sin h \eta_0 t + \sum_{h=1}^{\infty} \bar{B}_h \cos h \eta_0 t, \quad (117)$$

где уже конкретно:

$$\begin{aligned} \bar{M}_0 = & M_0 + \bar{A}_0 + \bar{B}_0 = \\ = & M_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p I_p(p\lambda) [A_p \sin p\zeta + B_p \cos p\zeta] \end{aligned} \quad (129)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_h = & \bar{A}_h' + \bar{A}_h'' = \\ = & \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ [(A_p \cos(h-p)\zeta + B_p \sin(h-p)\zeta) I_{h-p}(p\lambda) + \right. \\ & \left. + [-A_p \cos(h+p)\zeta + B_p \sin(h+p)\zeta] (-1)^{h+p} I_{h+p}(p\lambda)] \right\} \end{aligned} \quad (130)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_h = & \bar{B}_h' + \bar{B}_h'' = \\ = & \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ [-A_p \sin(h-p)\zeta + B_p \cos(h-p)\zeta] I_{h-p}(p\lambda) + \right. \\ & \left. + [A_p \sin(h+p)\zeta + B_p \cos(h+p)\zeta] (-1)^{h+p} I_{h+p}(p\lambda) \right\} \end{aligned}$$

Наконец, эти же выражения можно было бы записать и в более общей форме (108), причем входящие сюда значения \overline{M}_h и ϵ_h определяются формулами (119) и (120).

Формулы (129)—(131) значительно упрощаются в частном случае, когда фазовый угол циклической неравномерности

$$\zeta = 0.$$

При этом условии в выражении (117):

$$\overline{M}_0 = M_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p B_p I_p(p\lambda), \quad (132)$$

$$\overline{A}_h = \sum_{p=1}^{\infty} [I_{h-p}(p\lambda) - (-1)^{h+p} I_{h+p}(p\lambda)] A_p, \quad (133)$$

$$\overline{B}_h = \sum_{p=1}^{\infty} B_p [I_{h-p}(p\lambda) + (-1)^{h+p} I_{h+p}(p\lambda)]. \quad (134)$$

Примерные расчеты показывают, что при

$$\lambda = \frac{\delta}{2} < 1 \quad \text{и} \quad h > 1$$

(первое из этих условий безусловно всегда выполняется на практике) можно, без существенной погрешности, пренебречь вторым слагаемым под знаком суммы в правой части выражений (130) и (131) и записать их в более простой форме:

$$\overline{A}_h = \sum_{p=1}^{\infty} [A_p \cos(h-p)\zeta + B_p \sin(h-p)\zeta] I_{h-p}(p\lambda), \quad (135)$$

$$\overline{B}_h = \sum_{p=1}^{\infty} [-A_p \sin(h-p)\zeta + B_p \cos(h-p)\zeta] I_{h-p}(p\lambda), \quad (136)$$

так как при умеренном λ и $h > 1$ функции Бесселя первого рода всегда удовлетворяют неравенству

$$I_{h-p}(p\lambda) \gg I_{h+p}(p\lambda).$$

Лишь для $h=1$ (порядок h исследуемой гармоники равен порядку h , частотной модуляции), при большом значении δ , необходимо применять точные выражения (130) и (131).

Для выявления конкретной связи между степенью неравномерности вращения вала δ и истинным гармоническим спектром крутящего момента $M_{кр}$ мы провели детальные расчеты по формулам (129)—(136), для одного одноцилиндрового двухтактного дизеля с средним индикаторным давлением $p_i = 7,0 \text{ кг/см}^2$.

Амплитуды гармонических составляющих (отнесенных к 1 см^2 площади поршня и 1 см радиуса кривошипа) крутящего момента, создаваемого на валу этого двигателя давлением газов, приведены в таблице (см. ниже).

h	M_h кгсм	A_h кгсм	B_h кгсм
1	4,60	4,29	+1,65
2	4,10	4,08	-0,36
3	2,84	2,80	-0,39
4	1,76	1,67	-0,54
5	1,06	0,98	-0,41
6	0,64	0,57	-0,30
7	0,40	0,34	-0,21
8	0,26	0,22	-0,15
9	0,18	0,14	-0,11
10	0,10	0,08	-0,07
11	0,07	0,05	-0,05
12	0,06	0,04	-0,04

Дальше, как и ранее, предполагаем, что угловая скорость вращения кривошипа меняется по моногармоническому закону (82-а), причем

$$\nu = \eta_0.$$

Принимая конкретные числовые значения для степени неравномерности δ и фазового угла ζ , по формулам (129)—(136), вычисляем моменты \overline{M}_h , \overline{A}_h , \overline{B}_h истинного гармонического по t , спектра $M_{кр}$ и по (120) фазовые углы $\overline{\epsilon}_h$.

Теперь подсчитываем отношение

$$\mu_h = \frac{\overline{M}_h}{M_h},$$

характеризующее конкретное влияние неравномерности вращения вала (или, точнее,—кривошипа) на каждый, гармонический по α , момент M_h в разложении (1). Величина μ_h , с известной степенью условности, может быть названа коэффициентом динамического демпфирования за счет δ .

Результаты наших подсчетов приведены на рис. 19—22.

На рис. 19¹⁾ показан закон изменения коэффициента динамического демпфирования

$$\mu_1 = \frac{\overline{M}_1}{M_1}$$

для гармонического момента первого порядка, в функции от δ и ζ .

На рис. 20 более детально представлена зависимость μ_1 от фазового угла ζ , при некоторых конкретных значениях степени неравномерности δ .

Диаграмма на рис. 21 характеризует связь коэффициента динамического демпфирования μ_h со степенью неравномерности δ при различных h .

Здесь иллюстрируется уже сделанное ранее заключение об усилении эффекта динамического демпфирования с увеличением отношения h/h_0 , то-есть при относительном замедлении колебаний скорости вращения вала машины.

Наконец, рис. 22 дает связь между δ , ζ и истинным фазовым углом $\overline{\epsilon}_1$, гармонического (по времени), момента $M_1 \sin(\eta_0 t + \overline{\epsilon}_1)$ первого порядка.

Здесь везде мы совершенно намеренно проводили расчеты даже для очень больших, и едва ли возможных в практике, значений δ , имея целью наиболее резко и отчетливо выявить динамический эффект неравномерности вращения вала.

1) На рис. 19, 20 и 21 коэффициент динамического демпфирования μ обозначен через D .

Анализ рис. 19—22 и все предыдущие выкладки дают достаточные основания для следующих выводов об эффекте δ .

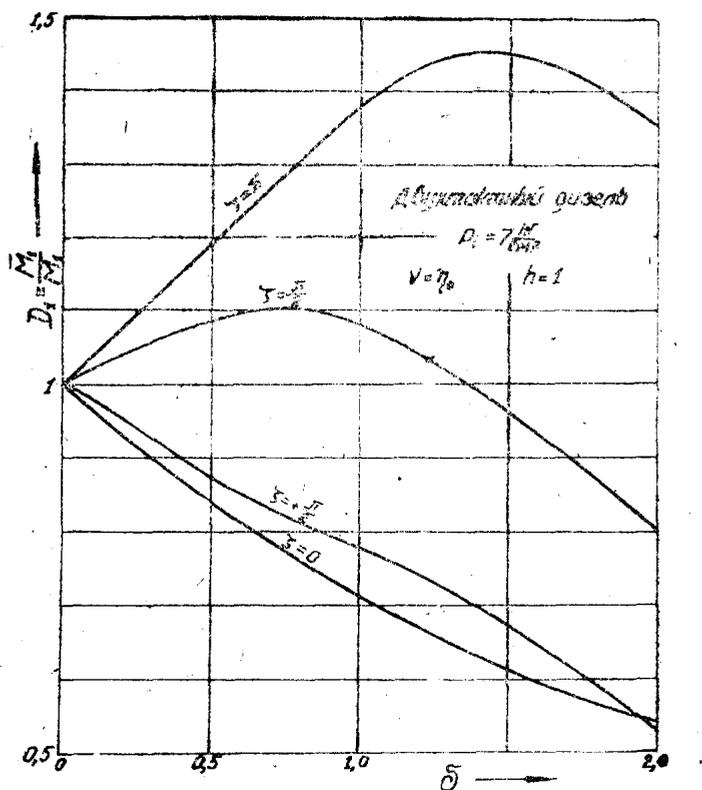


Рис. 19

Периодическая неравномерность вращения вала, нарушая точную, прямую пропорциональность между углом поворота кривошипа α и време-

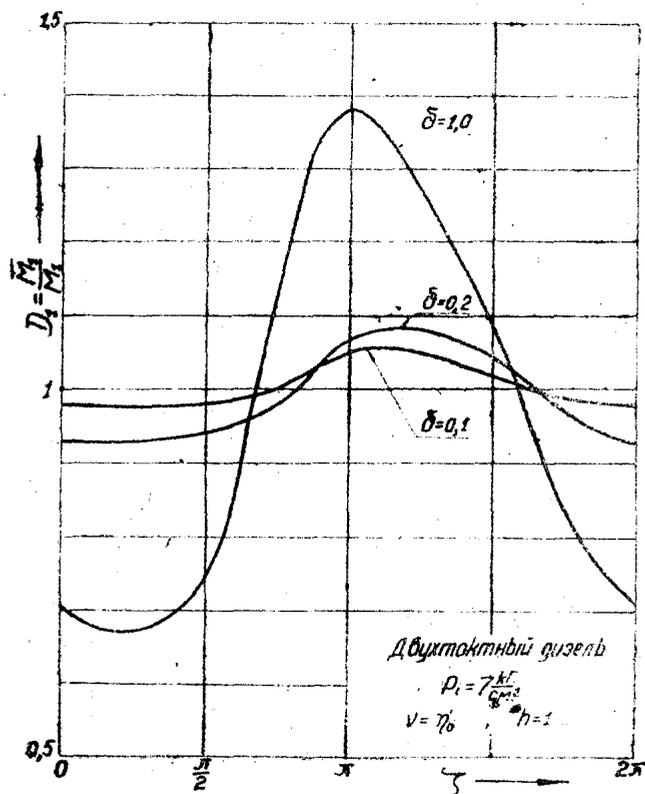


Рис. 20

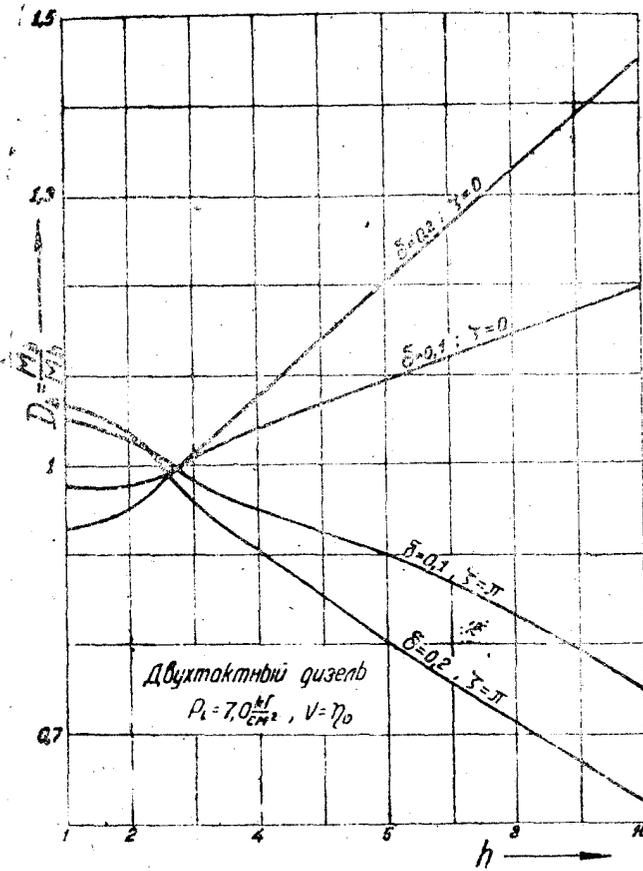


Рис. 21

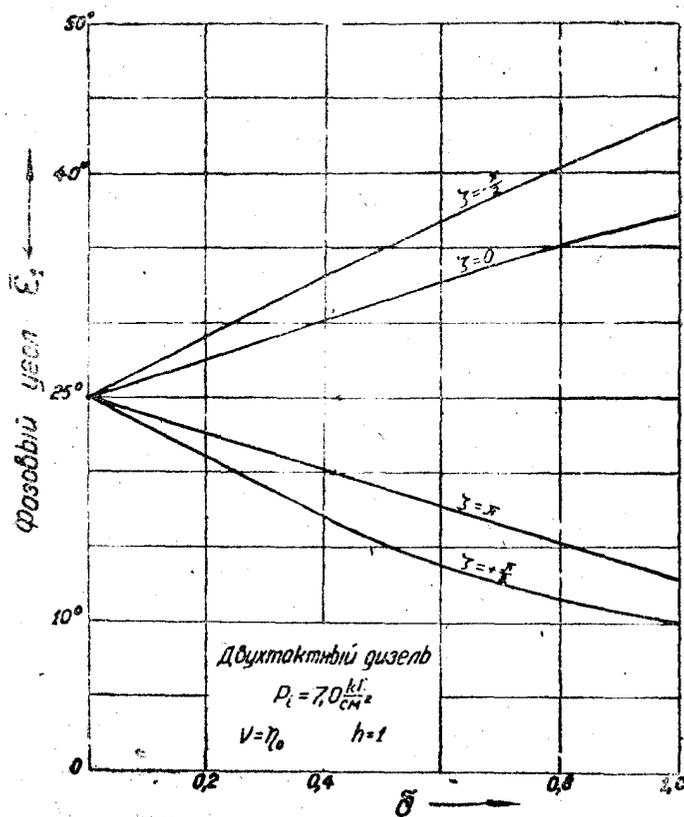


Рис. 22

нем t , через эффект частотной (а в отношении инерционных гармоник—и смешанной) модуляции, трансформирует всю диаграмму крутящих моментов $M_{кр} = f_0(\alpha)$ на валу двигателя. Эта трансформация, обнаруживающаяся, напр., при перестройке диаграммы с оси абсцисс α на ось абсцисс t , ведет к изменению всех гармонических слагающих крутящего момента как по амплитуде, так и по фазе. Так, например, момент

$$M_h \sin(h\alpha + \varepsilon_h)$$

переходит в

$$\overline{M}_h \sin(h\eta_0 t + \overline{\varepsilon}_h).$$

Влияние неравномерности вращения вала на его вынужденные вибрации может, в известной мере, характеризоваться коэффициентом динамического демпфирования

$$\mu_h = \frac{\overline{M}_h}{M_h}.$$

В линейной системе, со скоростным демпфированием амплитуда вынужденных колебаний при резонансе пропорциональна амплитуде резонирующей гармоники (если, конечно, пренебречь при этом эффектом всех остальных, не резонирующих гармоник). При $\delta = 0$ на систему действует гармонический момент M_h , вызывающий, в условиях резонанса, вынужденные колебания с амплитудой Ψ_{res} . В случае же неравномерного вращения вала ($\delta > 0$) резонансное состояние не нарушается, но резонирующая („несущая“) гармоника уже имеет амплитуду

$$\overline{M}_h = \mu_h M_h$$

и, следовательно, дает вынужденные колебания системы с амплитудой

$$\overline{\Psi}_{res} = \mu_h \Psi_{res}.$$

Таким образом, коэффициент μ_h учитывает динамическое влияние неравномерности вращения вала на амплитуды его резонансных колебаний. Этим оправдывается принятое нами наименование μ_h как коэффициента динамического демпфирования за счет δ .

Коэффициент μ_h различен для каждой гармоники крутящего момента и зависит не только от величины степени неравномерности δ , но и от ряда других факторов, а именно от:

а) отношения h/h_0 порядка рассматриваемого гармонического момента M_h к порядку циклических колебаний скорости вала (точнее—к порядку главной гармонической составляющей кривой мгновенной угловой скорости вращения соответствующего кривошипа);

б) вида и характера индикаторной диаграммы двигателя или, точнее, характера, гармонического по α , спектра крутящего момента $M_{кр}$, соотношения амплитуд отдельных компонент M_h этого спектра, их фаз и т. д.;

в) фазового угла циклической неравномерности вращения вала ζ .

Согласно рис. 22, неравномерность вращения вала сказывается наиболее сильно на гармонических (по α) моментах M_h высоких порядков. Это обстоятельство целиком соответствует сделанным ранее заключениям об увеличении эффективности влияния δ на структуру спектра $M_{кр}$ с уменьшением частоты ν по сравнению с $h\eta_0$.

Зависимость коэффициентов μ_h от характеристик спектра $M_{кр}$ по α находит себе объяснение в том, что при воздействии частотной модуляции, напр., на один моногармонический по α момент

$$M_h \sin(h\alpha + \varepsilon_h), \quad (a)$$

этот момент выделяет из себя целый ряд спутников, располагающихся по обеим сторонам несущей гармоники. Поэтому в итоге каждый, гармонический по t , момент

$$\overline{M}_h \sin(h\eta_0 t - \varepsilon_h)^*$$

в истинном гармоническом спектре $M_{кр}$ (формула 116) включает в себя не только несущую гармонику, выделившуюся из момента (a), но и всех совпадающих с ней по частоте спутников других слагающих M_h крутящего момента.

Конкретные подсчеты показывают, что изменение среднего индикаторного давления p_i в двигателе в умеренных пределах:

$$p_i = 5 - 9 \text{ кг/см}^2$$

приводит лишь к небольшим коррективам в графиках на рис. 19—22, выполненных для $p_i = 7,0$. Этот факт не находится в противоречии с приведенным выше заключением о связи между коэффициентом μ и формой индикаторной диаграммы, так как умеренное изменение p_i не вносит существенных изменений в общую закономерность диаграммы тангенциальных усилий для данного двигателя.

Согласно рис. 21, коэффициент μ_h , в зависимости от фазы ζ , может оказаться как меньшим, так и большим единицы. Но значение

$$\mu_h > 1$$

характеризует увеличение амплитуд вынужденных резонансных колебаний одновременно с ухудшением равномерности вращения вала.

Ранее мы установили такую возможность усиления вибраций за счет увеличения δ лишь в отношении инерционных гармоник, которые при $\delta > 0$ получали смешанную модуляцию. Здесь же у нас выясняются условия и причины возникновения явления отрицательного демпфирования и в системе, находящейся под действием только „газовых“ крутящих моментов.

Как отмечено выше, в амплитуду каждого гармонического по t момента \overline{M}_h входит не только амплитуда „несущей“ части гармонического по α момента M_h , но и амплитуды ряда спутников, выделившихся за счет $\delta > 0$ из состава других гармонических по α компонент крутящего момента $M_{кр}$. Таким образом, напр., в условиях „резонанса“ момента M_h , то есть при

$$\eta_h = h\eta_0 = \omega_0$$

резонансные вибрации будут создавать не только несущая часть „резонирующего“ M_h , но и соответствующие спутники других слагающих момента M_p , названные выше. Амплитуда суммы этих синхронных вибраций, конечно, зависит от соотношения фаз всех резонирующих одновременно гармоник, то есть прежде всего — от фазы ζ .

Теперь очевидно, что коэффициент динамического демпфирования μ_h может получить значения > 1 , если на помощь „резонирующей“ ¹⁾ гармонике M_h , через своих резонирующих сейчас спутников, придет и ряд других, не резонирующих в обычном смысле этого слова, гармонических по α компонент $M_{кр}$.

Фазовый угол частотной модуляции ζ впервые появился у нас в выражениях для истинного угла поворота кривошипа в случае простой моногармонической неравномерности его вращения (формула 109).

¹⁾ Мы применяем здесь кавычки, учитывая, что момент M_h имеет периодически переменную частоту.

Приближенное определение конкретной величины ζ , в каждом отдельном случае, не представляет особо больших затруднений.

Очевидно, что второе слагаемое в (109) характеризует колебательный процесс, наложенный на равномерное вращение вала и вызванный действием момента

$$\overline{M}_v \sin(\nu t + \epsilon_h).$$

При сравнительно малой, в большинстве случаев практики, величине степени неравномерности δ , в первом приближении можно пренебречь явлением автомодуляции и принять:

$$\overline{M}_v = M_v,$$

$$\overline{\epsilon}_h = \epsilon_h,$$

где величины M_v и ϵ_h заимствуются из результатов обычного гармонического анализа кривой $M_{кр} = f_0(\alpha)$.

Но, как всегда, вынужденные колебания отстают от возбуждающей силы на некоторый угол σ . Следовательно, в нашем случае кривошип будут колебаться по закону

$$\lambda \sin(\nu t + \epsilon_h - \sigma).$$

Сравнение этого выражения с правой частью уравнения (109) дает

$$\zeta = \sigma - \epsilon_h. \quad (137)$$

Входящий сюда угол σ , как обычно, зависит от величины действительных скоростных демпфирующих сил в системе и от коэффициента настройки

$$\gamma_v = \frac{\nu}{\omega_0}$$

и может быть подсчитан по известным формулам, при каждом, конкретно заданном значении γ_v . Теперь, при известных уже ζ и δ , напр., по графикам, аналогичным рис. 22, определяется и соответствующее значение коэффициента динамического демпфирования μ_h для всех интересующих нас порядков гармоник h .

Очевидно, что угол ζ , в зависимости от ряда конкретных обстоятельств, может приобретать самые различные значения и, соответственно, менять не только величину, но и знак динамического демпфирования вибраций системы, обусловливаемого неравномерностью вращения вала двигателя. Поэтому, вопреки обычным взглядам, у нас нет никаких оснований исключать вероятность усиления тех или иных вынужденных вибраций вала с ростом δ , за счет эффекта отрицательного динамического демпфирования.

7. Выводы

1. Периодические колебания скорости вращения вала на протяжении каждого его оборота сказываются на вынужденных вибрациях вала, в основном, только за счет „деформации“ диаграммы крутящих моментов. При этом гармонические (по t) моменты с амплитудами \overline{M}_h и фазами $\overline{\epsilon}_h$ отличаются от тех M_h и ϵ_h , которые определяются гармоническим анализом обычной диаграммы тангенциальных усилий, построенной по углу поворота кривошипа α , а не по времени t , как это следовало бы сделать по существу, при правильном применении к линейной системе общей методики разложения заданной силовой функции в ряд Фурье.

2. Переход от M_h и ε_h к \overline{M}_h и $\overline{\varepsilon}_h$ то-есть гармонический анализ кривой $M_{кр}$ по времени, проводит сама колеблющаяся система, откликающаяся (в условиях ее линейности) именно на гармонические по t компоненты $M_{кр}$. Объяснение эффекта модуляции, конечно, следует искать не в каких-либо математических операциях, а в самых основных свойствах линейной колебательной системы, как гармонического резонатора.

3. Критерием интенсивности влияния δ на вынужденные резонансные вибрации вала, вызываемые, напр., гармоническими моментами h -го порядка, можно считать коэффициент динамического демпфирования

$$\mu_h = \frac{\overline{M}_h}{M_h} = \frac{\overline{\Psi}_{res}}{\Psi_{res}},$$

характеризующий изменение амплитуды вынужденных колебаний системы Ψ_{res} за счет $\delta > 0$, по сравнению с той амплитудой Ψ_{res} , которая установилась бы в системе при $\delta = 0$.

4. Вопреки единственной пока теории учета влияния δ , предложенной Кьером и Манси [13, 14], этот коэффициент динамического демпфирования является очень сложной функцией не только δ и отношения $\frac{h}{h_0}$ но и целого ряда других факторов.

5. Вопреки общепринятым взглядам, следует признать, что периодическая неравномерность вращения вала не ликвидирует возможности развития стационарных резонансных вибраций в системе и, очевидно, не всегда, может привести к уменьшению амплитуд вынужденных колебаний. Не исключены случаи, когда неравномерность вращения вала будет стимулировать развитие вынужденных резонансных вибраций.

6. Эти обстоятельства и все наши предыдущие выводы показывают, что теория о сбивании резонанса в системе, имеющей $\delta > 0$, предложенная Кьером и Манси, совершенно не соответствует действительности. Она не отражает существа динамического демпфирования и физической картины этого явления. Применение ее может привести лишь к ошибочной оценке роли и относительного значения динамического демпфирования вибраций валов установок ДВС и, вообще, установок с поршневыми двигателями.

7. Конечно, и предлагаемая нами теория учета эффекта неравномерности вращения вала не является совершенной. Очевидно, что с увеличением неравномерности вращения вала не только усиливается модуляция крутящих моментов, но возрастает и действительное демпфирование в системе за счет дополнительной потери энергии в валу, усиления ударов в подшипниках и т. д. Но все эти потери зависят от индивидуальных особенностей каждой конкретной силовой установки и едва ли могут быть обобщены каким-либо теоретическим анализом или экспериментом. Равным образом их не в состоянии учесть и формула Манси.

8. Сложная зависимость коэффициента μ_h от целого ряда факторов, исключает повидимому, возможность получения какой-либо, достаточно надежной, теоретической или экспериментальной универсальной формулы для подсчета динамического демпфирования вибраций валов установок, имеющих $\delta > 0$.

Но, как показывают примерные подсчеты, при малых, обычно, значениях δ :

$$\delta < \frac{1}{20} + \frac{1}{40}$$

и

$$\frac{h}{h_0} < 6 + 10$$

можно полностью пренебречь эффектом динамического демпфирования, вызванного неравномерным вращением вала, так как при этих условиях колебания μ_h около единицы в зависимости от h и ζ , очень не велики. Формула же Манси дает здесь крайне преувеличенную оценку эффекта δ . В более редких в практике случаях, когда

$$\delta > \frac{1}{20}$$

и

$$h > 6 + 10,$$

для детального учета влияния δ целесообразно провести подробный анализ и подсчет μ_h в соответствии с изложенными выше соображениями. Подобный же анализ необходим и при экспериментальных исследованиях вибраций, имеющих целью выяснение роли отдельных типов демпфирования в общем балансе демпфирующих сил в установках ДВС.

9. Наконец, следует отметить, что при обычных в практике значениях δ и h/h_0 , можно совершенно пренебречь эффектом неравномерности вращения вала во всех расчетах ширины запретных резонансных зон в области рабочих скоростей двигателя.

Только при очень больших δ и h/h_0 , необходимо соответствующим образом передвинуть границы каждой из этих зон, исходя из детального учета динамического эффекта неравномерности вращения вала, на основе изложенной выше теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Житомирский В. К.—Дизелестроение, 1937, № 24.
2. Кузьмин Р.—Бесселевы функции, ОНТИ, 1935.
3. Лурье И. А.—Крутильные колебания в дизельных установках, Военмориздат, 1940.
4. Уиттекер Е. и Ватсон Г.—Курс современного анализа, т. II, ГИТИ, 1934.
5. Нечаев В. К.—Динамическое демпфирование вибраций и формула Манси (рукопись).
6. Нечаев В. К.—Теоретические торсиограммы для валов ДВС Известия ТИИ, т. 58 (1937), вып. 2.
7. Рытов С.—Модулированные колебания и волны. Труды Физического ин-та АН СССР, т. II (1940), вып. 1.
8. Рытов С. М.—Успехи физич. наук, т. XXIX (1946), вып. 1—2.
9. Папалекси Н. Д.—Успехи физич. наук, т. XXXI (1947), вып. 4.
10. Серенсен С. В. и Тетельбаум И. М.—Динамическая прочность в машиностроении, Машгиз, 1945.
11. Гогин А.—Судостроение, 1940, № 12.
12. Гогин А.—Сб. докладов по динамической прочности деталей машин, А. Н. СССР, 1946.
13. Kjaer V. A.—Vibrations de torsion dans les vilebrequins des moteurs Diesel, Bulletin Technique du Bureau Veritas, 1931, May.
14. Mancy I.—Théorie des oscillations de torsion des lignes d'arbres de moteurs a combustion interne, Bull. Techn. du Bureau Veritas, 1931, Aout.
15. Lewis F.—Trans. Soc. Nav. Arch. and Mar. Eng., 1925.
16. Tuplin W. A.—Torsional Vibrations, New-York, 1934.
17. Ker Wilson W.—Practical Solution of Torsional Vibration Problems, New-York, 1935.
18. Wydler H.—Drehschwingungen in Kolbenmaschinenanlagen, Berlin, 1922.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
7	3 снизу	результате	результаты
9	2 сверху	$\alpha = h r_{10} t$	$\alpha = r_{10} t$
10	1 снизу	$\delta_s \cong b_i$	$\delta_s \cong \delta_i$
19	6 сверху	$+ \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q [J_{2q}(\xi) +$	$+ \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q [J_{2q}(\xi) +$
19	7 сверху	$- J_{2q} + 3(\xi)]$	$- J_{2q} + 3(\xi)]$
21	4 снизу	$[J_0(\xi_1) \sin(r_{1h} t +$	$[J_0(\xi_1) \sin r_{1h} t +$
22	7 сверху	$\sin(r_{1h} - 2\nu) t$	$\sin(r_{1h} - 2\nu) t + \dots$
25	3 снизу	$\left[1 + \frac{\delta_s}{2} \cos(\nu t - \xi) \right]$	$\left[1 + \frac{\delta_s}{2} \cos(\nu t - \xi) \right]^2$
27	3 сверху	$C = \frac{\delta_s^2}{16} \left\{$	$C = \frac{\delta_s^2}{16} \left\{$
30	25 сверху	изменяющиеся	уменьшающиеся
31	2 сверху	(69)	(65)
31	13 снизу	m_9	m_3
34	12 сверху	$\sum_{p=1}^{\infty} M_p \sin(p\alpha - \varepsilon_p')$	$\sum_{p=1}^{\infty} M_p \sin(p\alpha + \varepsilon_p')$
38	3 снизу	слагающих	слагающей
42	20 сверху	$k k_c$	k/k_c
47	14 сверху	$\Psi = \sum_{q=1}^{\infty} \Phi_{q-1}$	$\Psi = \sum_{q=1}^{\infty} \Phi_{q-1}$
48	12 сверху	$M_h J_1\left(\frac{\delta}{2}\right)$	—
51	5 сверху	$\frac{\delta}{2} \sin r_{1h} t$	$\frac{\delta}{2} \sin r_{1h} t$
52	23 сверху	Φ_0	Φ_{0res}
54	5 сверху	принимать	признать
55	17 сверху	$\sum_{q=1}^{\infty} (-1)_d$	$\sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q$
57	2 снизу	$M_{кр}'$	$M_{кр}''$
58	3 снизу	$\bar{B}_h = \bar{B}_h' = \bar{B}_h''$	$\bar{B}_h = \bar{B}_h' + \bar{B}_h''$
64	4 сверху	$\bar{M}_h \sin(h r_{10} t - \bar{\varepsilon}_h)$	$\bar{M}_h \sin(h r_{10} t + \bar{\varepsilon}_h)$
79	4 снизу	+ 1,0229	+ 1,0223
87	2 снизу	$(\varphi_i \text{ отн} - \varphi_{i+1, \text{отн}}^2)$	$(\varphi_i \text{ отн} - \varphi_{i+1, \text{отн}})^2$
90	6 сверху	$M_h' =$	$M_r' =$
92	5 сверху	$+ c'_{1H} \varphi_{1 \text{ отн}} =$	$+ c'_{1H} \varphi_{1 \text{ отн}}^2 =$