

АНАЛИЗ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ ЦИФРОВЫХ МОДЕЛЕЙ АПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ КОМПОНЕНТОВ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ

Глазырин А.С.¹, Попов Е.И.², Копырин В.А.³, Кладиев С.Н.⁴

¹ ТПУ, профессор, e-mail: asglazyrin@tpu.ru;

² Тюменский индустриальный университет, ассистент, e-mail: popovei72@mail.ru;

³ Тюменский индустриальный университет, доцент, e-mail: kopyrinva@gmail.com;

⁴ ТПУ, доцент, e-mail: kladiev@tpu.ru

Аннотация

Выполнен сравнительный анализ амплитудно- и фазо-частотных характеристик цифровых моделей апериодического звена, полученных различными методами Z-преобразования. Произведена оценка интегральной погрешности построенных характеристик каждого из методов. Установлены границы применимости методов в частотной области и даны рекомендации по применению методов в инженерной практике.

Ключевые слова: цифровая модель апериодического звена, Z-преобразование, частотные характеристики, метод Тастина.

Введение

Вопросы разработки цифровых двойников объектов электротехнических комплексов неразрывно связаны с проблемами построения их цифровых моделей [1, 2]. Под цифровой моделью, как правило, понимается дискретная математическая модель динамической системы, полученная применением к системе дифференциальных уравнений прямого преобразования Лапласа с последующим Z-преобразованием, то есть заменой оператора Лапласа p на некоторое выражение от переменной z [3]. Такой подход, известный как метод аналоговых прототипов, всегда влечет за собой некоторую потерю точностных свойств модели динамического объекта [4].

Кроме снижения точности во временной области, переход к дискретным моделям ведет к искажениям информации о поведении объекта в частотной области. Актуальность данной проблемы обусловлена возникновением эффекта элайсинга в цифровых фильтрах, заключающаяся в наложении периодических спектров дискретного сигнала [5]. Элайсинг возникает при несоблюдении требований, сформулированных в известной теореме Котельникова-Шеннона-Найквиста, то есть если частота дискретизации меньше удвоенной наибольшей частоты непрерывного сигнала, что означает невозможность однозначно восстановить исходный сигнал аналогового прототипа по его дискретным измерениям. Амплитудно-частотные характеристики цифровых фильтров также являются периодическими функциями, причем период повторения АЧХ зависит от периода дискретизации сигнала Δt [3], следовательно, возникает вопрос о границах применимости различных методов перехода в Z-область при построении цифровых моделей.

Объект исследования

Рассмотрим дифференциальное уравнение простейшей RL -цепи и представим его с помощью прямого преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях в виде апериодического звена $W(p)$ с входным сигналом напряжения $u(t)$ и выходным сигналом тока $i(t)$:

$$\begin{aligned}u(t) &= L \frac{d}{dt} i(t) + R \cdot i(t), \\U(p) &= I(p)(pL + R), \\W(p) &= \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{1}{pL + R},\end{aligned}\tag{1}$$

где p – оператор Лапласа; L – индуктивность цепи, Гн; R – активное сопротивление цепи, Ом, $W(p)$ – передаточная функция апериодического звена.

В качестве объекта исследования рассмотрим якорную цепь двигателя постоянного тока независимого возбуждения (ДПТ НВ), математическая модель электромагнитных процессов в режиме неподвижного ротора которого описывается уравнением (1). Параметры якорной цепи ДПТ НВ 2ПФ180МГ $R = 0,046$ Ом, $L = 0,68$ мГн [6].

Проанализируем наиболее распространенные подходы к построению цифровых моделей методом аналоговых прототипов. Аппроксимация оператора Лапласа p методом левых прямоугольников, правых прямоугольников и методом Тастина соответственно [3]:

$$p = \frac{z-1}{\Delta t}, \quad p = \frac{z-1}{\Delta t \cdot z}, \quad p = \frac{2}{\Delta t} \frac{z-1}{z+1}.$$

Рассмотрим также вариацию метода Тастина при аппроксимации натурального логарифма двумя членами ряда Тейлора – так называемое «трилинейное» преобразование:

$$p = \frac{2}{\Delta t} \left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 \right].$$

Исследование частотных характеристик цифровых моделей аperiodического звена

Произведем сравнительный анализ амплитудно- и фазо-частотных характеристик цифровых моделей аperiodических звеньев, полученных каждым из методов для двух вариантов периодов дискретизации: $\Delta t = \frac{1}{16} T_a$ и $\Delta t = \frac{1}{4} T_a$, где T_a – постоянная времени аperiodического звена, $T_a = \frac{L}{R}$.

Окно просмотра принято равным $\left[\frac{1}{64} \frac{2\pi}{T_a}; 64 \frac{2\pi}{T_a} \right]$ (рис. 1-б).

Эталонные АЧХ, логарифмическая АЧХ (ЛАЧХ) и фазо-частотная характеристика (ФЧХ) аperiodического звена построены по согласно следующим выражениям:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \left| \frac{1}{j\omega L + R} \right|, \quad \varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arg \left(\frac{1}{j\omega L + R} \right).$$

Частотные характеристики цифровых моделей были получены заменой $z = e^{j\omega\Delta t}$. Выражения АЧХ цифровых моделей аperiodического звена для методов левой и правой разностей, Тастина и «трилинейного» преобразования соответственно:

$$A(\omega) = \left| \left[\frac{L}{\Delta t} e^{j\omega\Delta t} + R - \frac{L}{\Delta t} \right]^{-1} \right|, \quad A(\omega) = \left| e^{j\omega\Delta t} \left[\left(\frac{L}{\Delta t} + R \right) e^{j\omega\Delta t} - \frac{L}{\Delta t} \right]^{-1} \right|,$$

$$A(\omega) = \left| \left(e^{j\omega\Delta t} + 1 \right) \cdot \left[\left(2 \frac{L}{\Delta t} + R \right) e^{j\omega\Delta t} + \left(R - 2 \frac{L}{\Delta t} \right) \right]^{-1} \right|,$$

$$A(\omega) = \left| 3 \left(e^{j\omega\Delta t} + 1 \right)^2 \cdot \left[\left(8 \frac{L}{\Delta t} + 3R \left(e^{j\omega\Delta t} \right)^3 + 9R \left(e^{j\omega\Delta t} \right)^2 + 9R \cdot e^{j\omega\Delta t} + \left(3R - 8 \frac{L}{\Delta t} \right) \right]^{-1} \right|$$

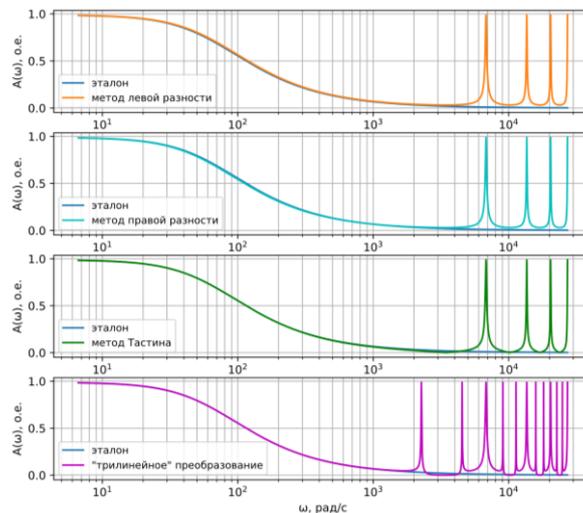


Рис. 1. АЧХ аperiodического звена при $\Delta t = \frac{1}{16} T_a$

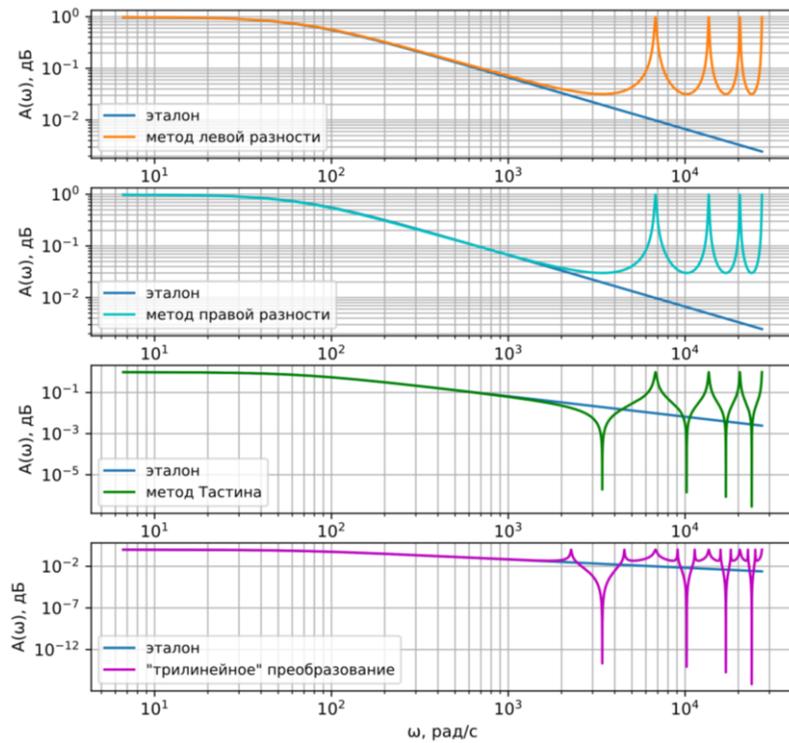


Рис. 2. ЛАЧХ апериодического звена при $\Delta t = \frac{1}{16} T_a$

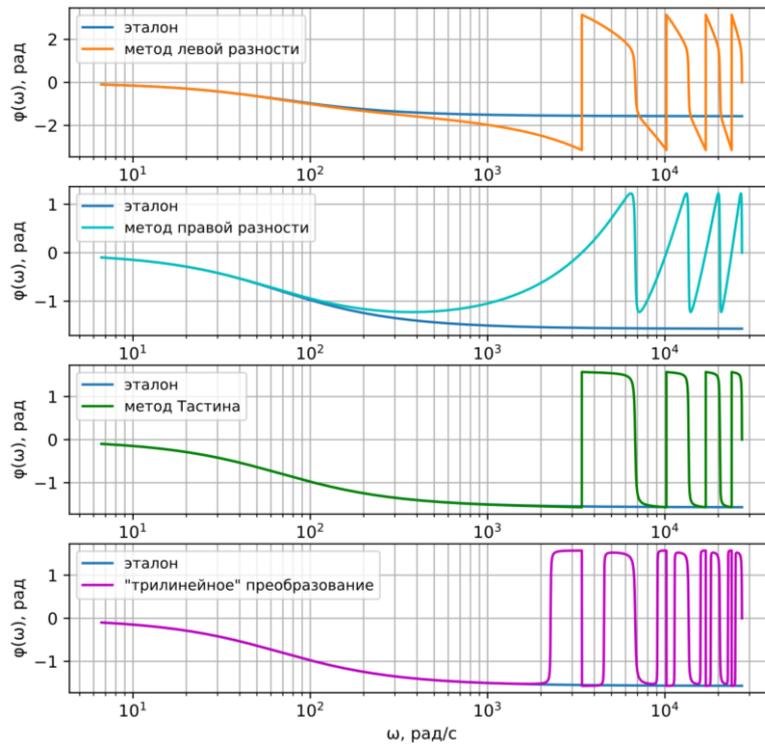


Рис. 3. ФЧХ апериодического звена при $\Delta t = \frac{1}{16} T_a$

Анализ АЧХ и ЛАЧХ на рис. 1-2 показывает, что для методов левой и правой разности характерны гладкие переходы между периодами полос пропускания апериодического звена, в то время как для метода Тастина и «трилинейного» преобразования границы между данными периодами строго определены. В первом случае гладкость переходов представляет собой явление элайсинга – наложения периодических спектров, во втором случае данного искажения сигнала в частотной области не наблюдается.

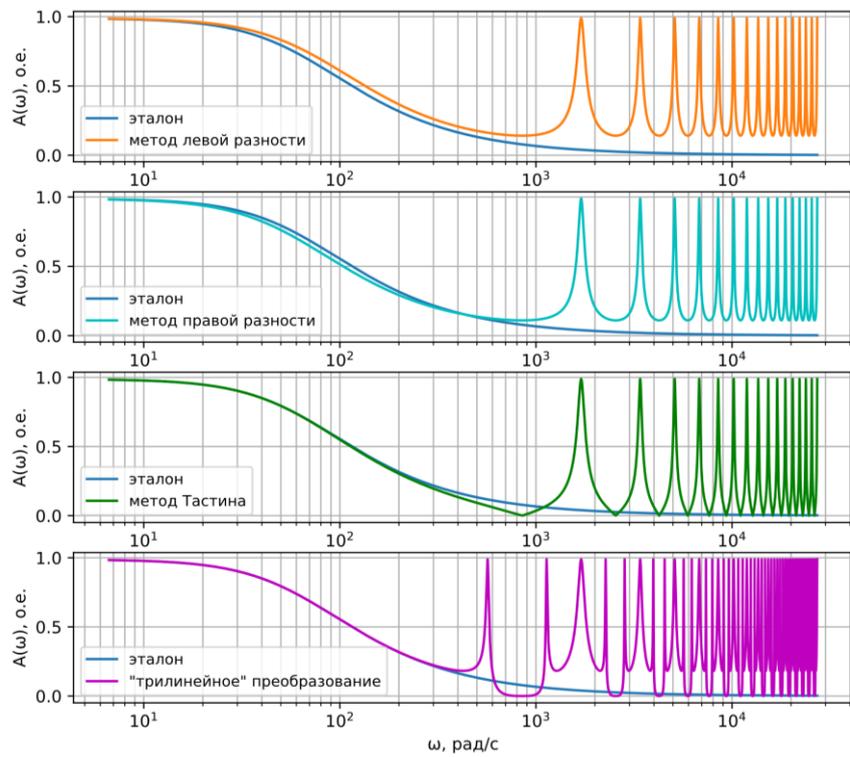


Рис. 4. АЧХ аperiodического звена при $\Delta t = \frac{1}{4} T_a$

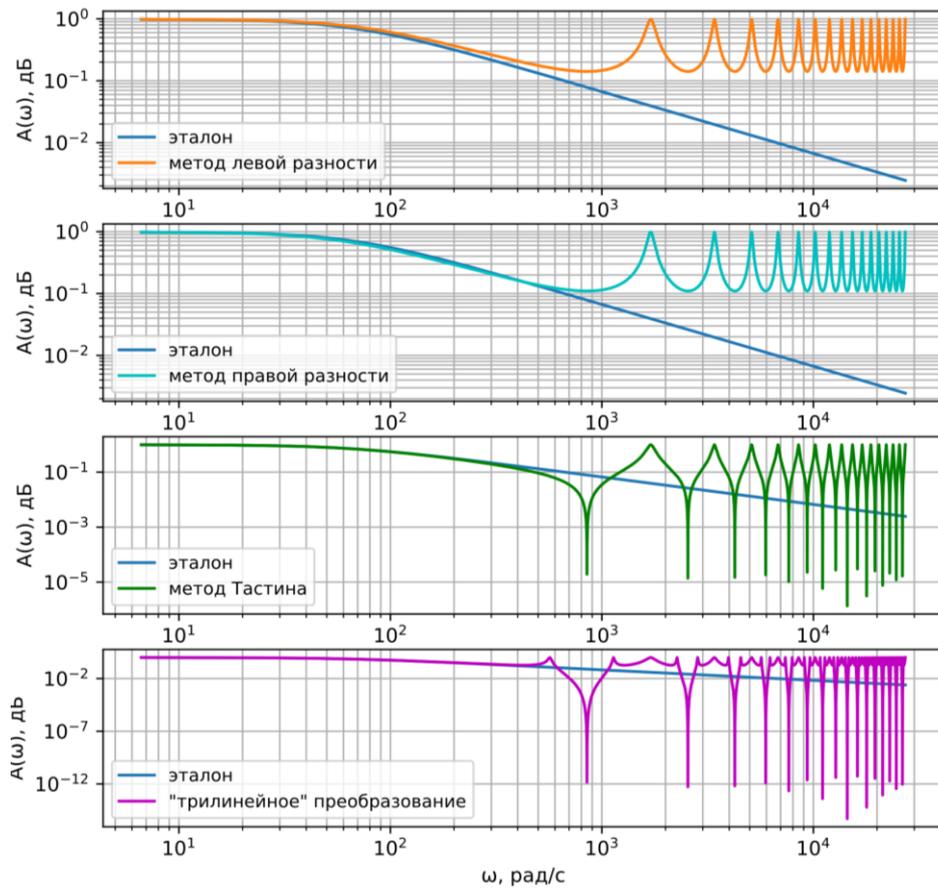


Рис. 5. ЛАЧХ аperiodического звена при $\Delta t = \frac{1}{4} T_a$

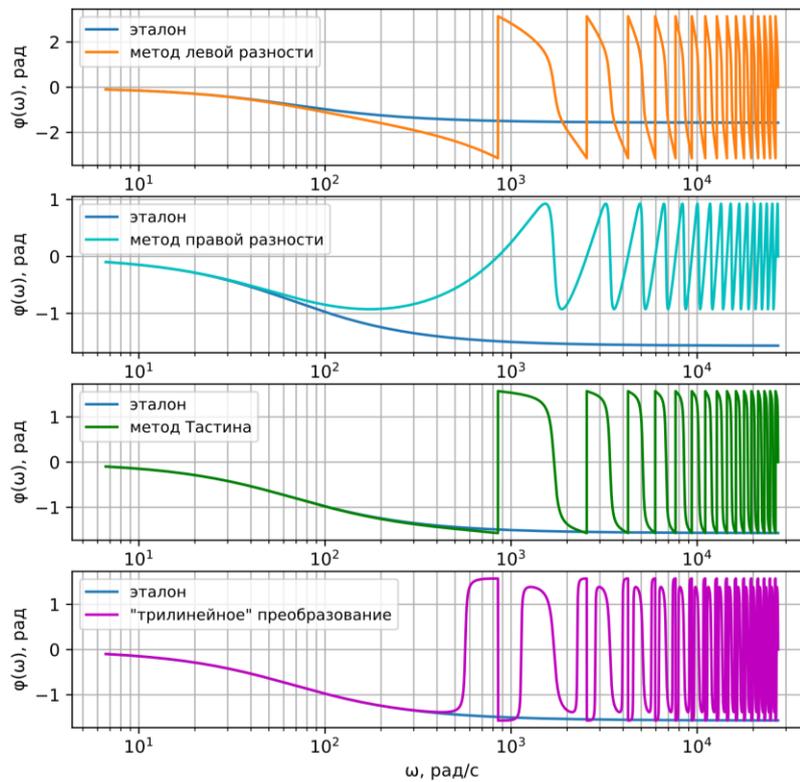


Рис. 6. ФЧХ аperiodического звена при $\Delta t = \frac{1}{4}T_a$

Как следует из рис. 3-6, при уменьшении частоты дискретизации количество периодов АЧХ цифровых моделей растет, следовательно, снижается частотная область применения модели. Для ФЧХ моделей, полученных методами левой и правой разности в отличие от метода Тастина и «трилинейного» преобразования характерны отклонения от эталонной ФЧХ даже в области первого периода частот, тем самым модель искажает информацию о фазе реального непрерывного сигнала. Наибольший диапазон аппроксимации ФЧХ имеет метод Тастина.

Для оценки границ применимости рассмотренных методов построения цифровых моделей выполним расчет интегральной погрешности σ каждого из методов методом трапеций:

$$\sigma = \frac{\int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} |A_{\text{эт}}(\omega) - A_{\text{дискр}}(\omega)| dt}{\int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} (A_{\text{эт}}(\omega)) dt} \cdot 100\% \approx \sum_{i=1}^n \frac{(\omega_i - \omega_{i-1}) \left| \frac{\Delta A(\omega_i) - \Delta A(\omega_{i-1})}{2} \right|}{(\omega_i - \omega_{i-1}) \frac{A_{\text{эт}}(\omega_i) + A_{\text{эт}}(\omega_{i-1})}{2}} \cdot 100\%,$$

$$\Delta A(\omega_i) = (A_{\text{эт}}(\omega_i) - A_{\text{дискр}}(\omega_i)),$$

где n – порядковый номер наибольшей частоты окна просмотра; $i = 1, 2, \dots, n$; $A_{\text{эт}}(\omega)$ – эталонная АЧХ аperiodического звена; $A_{\text{дискр}}(\omega)$ – АЧХ цифровой модели аperiodического звена, $\omega_{\max} = 64 \frac{2\pi}{T_a}$ –

верхний предел расчета оценки интегральной погрешности, рад/с; $\omega_{\min} = \frac{1}{64} \frac{2\pi}{T_a}$ – нижний предел расчета оценки интегральной погрешности, рад/с.

Диапазон частот повторения АЧХ цифровых моделей зависит от периода дискретизации и равен $\omega_c = \frac{\pi}{\Delta t}$. Следовательно, оценку интегральной погрешности выполним для двух выбранных периодов

дискретизации: $\Delta t_1 = \frac{1}{16}T_a$, $\Delta t_2 = \frac{1}{4}T_a$. Результаты расчета сведены в табл. 1.

Интегральная погрешность АЧХ вариантов построения цифровой модели апериодического звена, %

$\Delta t, c$	Окно просмотра, рад/с	Метод левой разности	Метод правой разности	Метод Тастина	«Трилинейное» преобразование
$\frac{1}{16}T_a$	$[\omega_{min}; \omega_{max}]$	502,4	474,8	423,6	556,9
	$[\omega_{min}; 0,5\omega_{max}]$	235,8	221,3	202,2	274,3
	$[\omega_{min}; 0,25\omega_{max}]$	89,3	82,1	80,8	117,7
$\frac{1}{4}T_a$	$[\omega_{min}; \omega_{max}]$	1753,8	1452,1	1273,4	1632,3
	$[\omega_{min}; 0,5\omega_{max}]$	935,0	768,6	677,7	878,7
	$[\omega_{min}; 0,25\omega_{max}]$	485,5	393,6	351,9	464,9

Интегральная погрешность АЧХ цифровых моделей при уменьшении окна просмотра снижается. Наименьшую погрешность во всех диапазонах расчета демонстрирует метод Тастина, полученный путем разложения экспоненты в ряд Тейлора с учетом первого члена ряда. Увеличение количества членов ряда для получения метода «трилинейного» преобразования не только не позволяет увеличить точность аппроксимации АЧХ, но и приводит к дополнительным существенным искажениям сигнала в частотной области.

Заключение

Анализ частотных характеристик вариантов построения цифровых моделей показывает, что реальный диапазон применимости методов в пространстве частот ограничен точностью аппроксимации амплитудно-фазовой характеристики аналогового прототипа. Основным методом построения цифровых моделей для большинства инженерных задач может быть рекомендован метод Тастина, демонстрирующий большую точность аппроксимации частотных характеристик.

Тем не менее, вывод о высокой точности аппроксимации методов в низкочастотной области справедлив только при допущении о стационарности динамической системы. Появление признаков нестационарности, зашумленности в измерительных каналах будет приводить к расхождению в интегральном смысле между дискретными моделями и их аналоговыми прототипами.

При построении регуляторов с особыми требованиями (например, прогнозные системы управления, наличие адаптивных алгоритмов) авторы рекомендуют обратить внимание на аналитические модели [7]. Получение информации с реальной динамической системы в дискретном виде не означает, что модель динамической системы также обязательно должна быть дискретной. Аналитические модели являются более гибким средством исследования динамических систем, позволяющим применять математический аппарат, недоступный при использовании дискретных моделей.

Список использованных источников

- ГОСТ Р 57700.37-2021. Компьютерные модели и моделирование. Цифровые двойники изделий. Общие положения: национальный стандарт Российской Федерации: издание официальное: дата введения 2022-01-01. – Москва: Стандартинформ, 2021. – 15 с.
- Бутырин, П.А. Цифровизация и аналитика в электротехнике. Цифровые двойники трансформаторов / П.А. Бутырин, М.Е. Алпатов. – Текст: непосредственный // Электричество. – 2021. – № 10. – С. 4-10.
- Белодедов, М.В. Методы проектирования цифровых фильтров: Учебное пособие / М.В. Белодедов. – Волгоград: Издательство Волгоградского государственного университета, 2005. – 64 с.
- Глазырин, А.С. Исследование погрешности различных вариантов построения цифровых моделей апериодических звеньев компонентов электротехнических комплексов / А.С. Глазырин, Е.И. Попов, В.А. Копырин, С.Н. Кладиев. – Текст: непосредственный // Современные проблемы машиностроения: XVI Междун. науч.-техн. конф. 27 ноябр. – 01 дек. 2023 г. – Томск. – 2024. – С. 131-135.
- Глинченко, А.С. Цифровая обработка сигналов: курс лекций / А.С. Глинченко. – Красноярск: ИПК СФУ. – 2008. – 242 с. – Текст: электронный.
- Справочник по электрическим машинам: В 2 т. / Под общ. ред. И.П. Копылова и Б.К. Клокова. Москва: Энергоатомиздат. – 1988. – Т. 1. – 456 с. – Текст: непосредственный.
- Глазырин, А.С. Аналитическая модель динамической системы «длинный кабель – погружной асинхронный двигатель с заторможенным ротором» в полярной системе координат / А.С. Глазырин, И.А. Набунский, С.С. Попов [и др.]. – Текст : непосредственный // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2023. – Т. 334. – № 12. – С. 220-233.
- Драница, Ю.П. О связи непрерывной и дискретной моделей для линейных динамических систем / Ю.П. Драница, А.Ю. Драница, О.В. Алексеевская // Дифференциальные уравнения и процессы управления, – 2010. – № 3. – С. 20-57.