ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
Том 85 ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА 1957 г.

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО УПРУГОГО СОСТОЯНИЯ

Г. А. ДОЩИНСКИЙ

(Представлено научным семинаром кафедры сопротивления материалов)

Задачей теории предельного упругого состояния является определение величины напряжений для сложно-напряженного состояния, при достижении которых нарушается упругое поведение материала. В ряде случаев нормальные условия работы элементов конструкций могут быть обеспечены только при незначительных остаточных деформациях или даже их отсутствии. Для теоретического решения этого вопроса может быть использовано условие пластичности. Однако условие пластичности определяет соотношение напряжений уже в процессе пластической деформации. Переход при наличии жестких требований к расчету по пределу упругости вместо предела текучести с оставлением прежних расчетных выражений (как это иногда рекомендуется [1]) вряд ли можно считать достаточно обоснованным. Смена закономерностей упругой деформации преобладающими закономерностями пластической деформации происходит в пределах некоторой переходной области, поэтому расчетное условие, строго говоря, может быть функцией допуска на величину остаточной деформации.

К решению задачи исключения остаточной деформации можно подойти и с другой стороны, на основе анализа упругой деформации и использования обоснованного критерия, определяющего величины напряжений, после достижения которых нарушается преобладание упругих свойств над остальными. Подобная теория — теория предельного упругого состояния может строиться на основе линейной связи между напряжениями и деформациями. Заметим, что большинство „теорий прочности" построены на линейной связи напряжений и деформаций и поэтому являются теориями предельного упругого состояния.

Рассмотрим некоторые предпосылки, которые должны быть приняты во внимание теорией, оценивающей возможность сохранения упругих свойств материалом при сложно-напряженном состоянии.

Надежное определение пределов упругой связи возможно лишь в том случае, если теория достаточно полно и правильно отражает поведение материала в процессе предшествующей упругой деформации. Статическое и геометрическое обследование поведения материального тела приводит к понятиям: напряжение и деформация. Математически напряженное состояние окрестности точки может быть охарактеризовано тензором напряжений — T_σ, деформированное — тензором деформаций — T_e. Как показывают опыты с различным загружением тел для большого числа материалов в пределах упругости может быть принята линейная связь между напряжениями и деформациями, дающая наиболее простые решения с достаточной для ряда практических задач точностью. Поскольку здесь рассматривается вопрос определения предельного упругого состояния, то все положения относятся к идеализируемому линейной теорией упругости материальному телу, к тому же одинаково работающему на растяжение и сжатие.

В общей математической форме зависимость между напряжениями и деформациями может быть отражена уравнением:

$$T_\sigma = f(T_e). \tag{1}$$

В предположении пропорциональности напряжения деформации зависимость (1) можно представить в простейшей форме следующим образом:

$$T_\sigma = C . T_e \tag{2}$$

т. е. считать, что любой компонент тензора напряжений прямо пропорционален соответствующему компоненту тензора деформации. Коэффициент пропорциональности C в таком случае был бы единственной константой упругости материала. Однако материалы, описываемые этим уравнением, далеки от большинства реальных материалов. Это видно на примере простого растяжения, для которого, как известно из опыта, продольная деформация сопровождается поперечным сужением

$$e_{попер} = \mu . e_{прод}$$

вследствие чего, тензор напряжений не пропорционален тензору деформаций, и лишь для материалов с $\mu = 0$ выполняется условие (2). Таким образом зависимость (2) может рассматриваться лишь как частный случай. Линейная теория упругости устанавливает более общую связь между напряжениями и деформациями в виде системы уравнений, в которой каждый компонент тензора напряжений имеет линейную зависимость от всех компонентов тензора деформаций. Анализ этих зависимостей показывает, что для изотропного упругого тела независимыми упругими постоянными являются только две. Это соответствует разложению тензоров напряжений и деформаций на две части, определяющие изменение объема и формы (шаровую и девиаторную часть).

$$T_\sigma = T_\sigma^\circ + D_\sigma \qquad T_e = T_e^\circ + D_e, \tag{3}$$

причем

$$T_\sigma^\circ = 3\,K\,T_e^\circ \qquad D_\sigma = 2\,G\,D_e .$$

Числовые коэффициенты здесь—результат соответствующего способа разложения, поэтому можно записать:

$$T_\sigma^\circ = \alpha \cdot T_e^\circ \qquad D_\sigma = \beta \cdot D_e \tag{4}$$

и вместо двух различных линейных зависимостей между соответствующими частями тензоров на основе синтеза уравнений (3) и (4) представить обобщенный закон упругости в форме линейной тензор-функции двух независимых переменных:

$$T_\sigma = \alpha \cdot T_e^\circ + \beta \cdot D_e \qquad \text{для напряжений} \tag{5}$$

или

$$T_e = \frac{1}{\alpha} \cdot T_\sigma^\circ + \frac{1}{\beta} D_\sigma \qquad \text{для деформаций.} \tag{6}$$

Возможность такого представления обобщенного закона упругости следует из того, что оно позволяет получить из этой исходной формы все основные соотношения, свойственные упругой деформации. В матричном представлении уравнение (5) получает вид:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ . & \sigma_y & \tau_{yz} \\ . & . & \sigma_z \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} e_{cp} & 0 & 0 \\ . & e_{cp} & 0 \\ . & . & e_{cp} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} e_x - e_{cp} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ . & e_y - e_{cp} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ . & . & e_z - e_{cp} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

где

$$e_{cp}=\frac{e_x+e_y+e_z}{3}=\frac{e_1+e_2+e_3}{3}.$$

Из (7) можно выразить компоненты напряжений через компоненты деформации:

$$\sigma_x=\alpha\cdot e_{cp}+\beta\ (e_x-e_{cp})\qquad \tau_{xy}=\tau_{yx}=\frac{\beta}{2}\gamma_{xy}=\frac{\beta}{2}\ \gamma_{yx}$$

$$\sigma_y=\alpha\cdot e_{cp}+\beta\ (e_y-e_{cp})\qquad \tau_{yz}=\tau_{zy}=\frac{\beta}{2}\gamma_{yz}=\frac{\beta}{2}\ \gamma_{zy}$$

$$\sigma_z=\alpha\cdot e_{cp}+\beta\ (e_z-e_{cp})\qquad \tau_{zx}=\tau_{xz}=\frac{\beta}{2}\gamma_{zx}=\frac{\beta}{2}\ \gamma_{xz}.$$

Аналогично можно получить выражения и для компонентов деформации. Коэффициенты пропорциональности определяют две основные константы, характеризующие материал. Всякое соотношение этих величин может рассматриваться как производная константа.

Для сравнения упругого поведения различных материалов напишем обобщенный закон упругости в указанной форме для двух материалов:

$$T_{\sigma 1}=\alpha_1\cdot T_e{}^\circ{}_1+\beta_1\cdot D_{e1},\qquad T_{\sigma 2}=\alpha_2\cdot T_e{}^\circ{}_2+\beta_2\cdot D_{e2}.$$

При одинаковых напряженных состояниях

$T_{\sigma 1}=T_{\sigma 2}$ и, следовательно $\alpha_1\cdot T_e{}^\circ{}_1+\beta_1\cdot D_{e1}=\alpha_2\cdot T_e{}^\circ{}_2+\beta_2, D_{e2}$,

но в общем случае для различных материалов

$$\alpha_1\neq\alpha_2,\qquad \beta_1\neq\beta_2$$

и равенство становится возможным при условии:

$$T_e{}^\circ{}_1\neq T_e{}^\circ{}_2\quad \text{и}\quad D_{e1}\neq D_{e2}.$$

Следовательно, для различных материалов при одинаковых напряженных состояниях деформированные состояния могут отличаться не только по величине компонентов, но и характеру. Очевидно, наоборот, у различных материалов при одинаковых деформированных состояниях напряженные состояния могут быть различными. А особенности объемной деформации и формоизменения проявляются в различных материалах по-разному.

Для одного и того же материала при разных напряженных состояниях:

$$T_{\sigma 1}=T_\sigma{}^\circ{}_1+D_{\sigma 1},\qquad T_{\sigma 2}=T_\sigma{}^\circ{}_2+D_{\sigma 2},$$

где

$$T_\sigma{}^\circ{}_1\neq T_\sigma{}^\circ{}_2,\qquad D_{\sigma 1}\neq D_{\sigma 2}$$

деформированные состояния на основании (6) определяются:

$$T_{e1}=\frac{1}{\alpha}\ T_\sigma{}^\circ{}_1+\frac{1}{\beta}\ D_{\sigma 1},\qquad T_{e2}=\frac{1}{\alpha}\ T_\sigma{}^\circ{}_2+\frac{1}{\beta}\ D_{\sigma 2}.$$

Откуда можно видеть, что в общем случае вследствие различной связи составляющих тензора напряжений и деформаций напряженное и деформированное состояние будут неодинаковы по характеру. Это возможно лишь в частных случаях: $\alpha=\beta$; $\alpha=\infty$; $\beta=\infty$ или когда все компоненты T_σ° или D_σ обращаются в 0. При этом условие (6) переходит в (2).

Следовательно, как для разных материалов при одинаковых напряженных состояниях, так и для одного материала при различных напряженных состояниях через посредство двух упругих постоянных определяется влияние вида напряженного состояния на характер деформированного состояния. Это обстоятельство не должно выпадать из внимания при формулировании критерия эквивалентности состояний. Принимаемые за определяющие параметры напряженного или деформированного состояния могут входить в исходное условие эквивалентности лишь вместе с двумя упругими постоянными материалов. В противном случае такое условие не сможет отразить особенности упругого поведения различных материалов. При сравнении эквивалентных состояний обе постоянные не могут одновременно выпадать из уравнения, что равносильно отрицанию различной склонности материалов в разных условиях к объемной деформации и деформации без изменения плотности. Однако если записать обобщенный закон упругости для двух напряженных состояний одного материала в форме:

$$T_{\sigma 1} = \alpha \cdot T^{\circ}_{\sigma 1} + \beta \cdot D_{e1} = \alpha \cdot \left[T^{\circ}_{e 1} + \frac{\beta}{\alpha} D_{e1} \right],$$

$$T_{\sigma 2} = \alpha \cdot T^{\circ}_{e 2} + \beta \cdot D_{e2} = \alpha \cdot \left[T^{\circ}_{e 2} + \frac{\beta}{\alpha} D_{e2} \right],$$

то можно предполагать возможность сокращения одной из упругих констант в уравнении эквивалентности. Но при сокращении одной из постоянных для отражения особенностей упругого поведения материалов должно сохраняться некоторое соотношение характеристик материалов, т. е. некоторая производная константа. К выводу о необходимости сохранения в условии эквивалентности какой-нибудь характеристики, отражающей особенности упругого поведения различных материалов, можно подойти и с энергетических позиций.

С точки зрения затраты работы на деформацию можно сказать, что работа затрачивается на изменение плотности материала и изменение конфигурации данного материального тела. Значение удельной работы деформации (или численно ей равной удельной потенциальной энергии) для упругого изотропного тела определяется следующими соотношениями:

$$A = A_{об} + A_{ф},$$

$$A = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right],$$

$$A_{об} = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2,$$

$$A_{ф} = \frac{1+\mu}{3E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right],$$

где A — полная работа деформации,
$A_{об}$ — работа, затрачиваемая на изменение объема элемента,
$A_{ф}$ — работа формоизменения,
E и μ — упругие константы материала.

Как крайний случай можно допустить, что вся работа затрачивается только на изменение объема

$$A = A_{об},$$

откуда после преобразований получаем:

$$\frac{1}{E}(1+\mu)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) = 0.$$

Последнее равенство возможно при $\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2=\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1$, т. е. при определенном напряженном состоянии (таким является гидростатическое давление), а для любого напряженного состояния при $\mu=-1$. Значит материал с $\mu=-1$ был бы нечувствителен к характеру напряженного состояния, при любом напряженном состоянии его деформация происходила бы только определенным образом, а именно была бы только объемной. Другое предельное значение можно получить допуская, что вся работа деформирования идет на изменение формы (деформация без изменения плотности):

$$A=A_{\phi}.$$

После преобразований получаем $\frac{1}{E}(1-2\mu)(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2=0.$

Равенство возможно при $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0$ или $\mu=0{,}5$. Значит такая деформация будет происходить при любом силовом воздействии у материала с $\mu=0{,}5$, т. е. такой материал безразличен к характеру напряженного состояния. Вытекающая из обоих условий возможность $E=\infty$ соответствует абсолютно твердому телу. Для материалов с $\mu\neq 0{,}5$ и $\mu\neq -1$ деформированное состояние будет различным не только от величины напряжений, но и их соотношения, т. е. от вида напряженного состояния. А для реальных материалов $\mu=0\div 0{,}5$.

Величина μ определяет соотношение работ, идущих на объемную деформацию и формоизменение при одинаковых напряженных состояниях в зависимости от вида материала, т. е. отражает деформационные особенности материала. Поэтому роль этой константы может быть определена как показателя деформационной способности материала. Для двух материалов с разными μ при одинаковых напряженных состояниях характер деформированного состояния будет различным и наоборот. К тому же объемная деформация и формоизменение обусловливаются определенной совокупностью трех главных напряжений. Теория, не учитывающая хотя бы один из компонентов напряженного или деформированного состояния, допускает для этого компонента значительный произвол, тем самым внося некоторую неопределенность в характеристике поведения материального тела. Теория, не отражающая полностью картину упругого поведения, не может учитывать особенности объемной деформации и формоизменения различных материалов, а потому надежно предопределить и предельное упругое состояние. Поэтому следует признать не вполне совершенными для определения предельного упругого состояния все те теории, основанные на анализе напряженного, деформированного состояния или их совокупности, которые не учитывают деформационных особенностей материала.

Посмотрим, в какой мере это может быть отнесено к основным „теориям прочности“ [2].

Теория наибольших нормальных напряжений $\sigma_{max}\leq[\sigma]$ является весьма ограниченной; в исходном условии не отражено полностью напряженное состояние и упругие свойства материала, поэтому является грубо приближенной.

Теория наибольшей деформации $e_{max}\leq[e]$ вводит в исходное условие только одну составляющую деформированного состояния, тем самым деформированное состояние охарактеризовывается неполностью.

Теория максимального касательного напряжения $\tau_{max}\leq[\tau]$ (а также Теория Мора $\sigma_1-\nu\sigma_3\leq[\sigma]$) не охватывает полностью напряженное состояние и не вводит в условие упругие характеристики материалов.

Теория удельной потенциальной энергии формоизменения $\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_3\sigma_1}\leq[\sigma]$, полностью характеризуя напряженное состояние не учитывает деформационных особенностей материала и утверждает невозможность остаточных объемных деформаций, что не соответствует некоторым экспериментальным фактам.

Наиболее соответствующей отмеченному представляется теория полной потенциальной энергии $\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\mu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)}\leq[\sigma]$, полностью отражающая напряженное и деформированное состояние, а также прочностную и деформационную характеристики материалов ($[\sigma]$ и μ). Наиболее существенным возражением против этой теории является факт повышенной способности пластичных материалов к сохранению упругих свойств при гидростатическом давлении, в то время как по теории это состояние, почти равноопасно простому растяжению—сжатию.

Ограничимся здесь лишь анализом основных теорий; для других присущи еще более произвольные допущения и менее четкий физический смысл. Заметим также, что экспериментальная проверка нередко не позволяет вынести определенную оценку, поскольку она проводилась при допусках, соответствующих уже достаточно развитой пластической деформации, а иногда и не правильных. Для проверки теории предельного упругого состояния эти допуски должны быть максимально жесткими. Поэтому можно считать, что вопрос теоретического предсказания пределов упругой связи при сложно-напряженном состоянии не является окончательно решенным в пользу какой-либо теории. Отсюда необходимость теоретических и экспериментальных исследований в этом направлении.

Ниже рассматривается одна из возможностей теоретического определения предельной упругости материалов при сложно-напряженном состоянии.

Так как в пределах упругости существует определенная связь между напряжениями и деформациями, то выбор той или иной стороны для формулировки исходного условия теории предельного упругого состояния несуществен и определяется принятием соответствующего критерия. Для того чтобы полностью отразить статическую, геометрическую и физическую стороны упругого поведения материала, необходимо, чтобы исходное условие содержало все составляющие напряженного ($\sigma_1;\sigma_2;\sigma_3$) или деформированного состояния ($e_1;e_2;e_3$) вместе с двумя характеристиками упругих свойств материала в том и другом случае. При этом условии одна из взятых сторон полностью отражает и другую. Поскольку речь идет о различном силовом воздействии и напряженность является произвольной стороной, то в качестве определяющего фактора может быть принято деформированное состояние. Физическое состояние материала, подверженного различным силовым воздействиям, можно предполагать одинаковым, если в процессе этих воздействий материал претерпел одинаковое деформирующее действие, т. е. находится в равнодеформированном состоянии. То же самое можно сказать и о состоянии материала, предшествующем возникновению пластических деформаций, т. е. предельно упругом. Если установлено это состояние из какого-либо опыта, например, растяжения, то величина напряжений при любом другом загружении определится из условия, когда это загружение переведет материал в такое же деформированное состояние, в какое привело растяжение к моменту появления остаточных деформаций. Для материала сплошного, линейно упругого и полностью изотропного (т. е. также одинаково работающего и на растяжение и сжатие) будем предполагать, что мерой для сравнения деформированных состояний является величина средней деформации, значение которой для предельных состояний будем предполагать постоянным. Допущение об одинаковой работе материала на растяжение и сжатие делает существенным только учет абсолютных значений компонентов деформации. В подобных случаях, как известно из теории средних, более удобной и предпочтительной является величина средне квадратическая в сравнении со средне арифметической

$$e_{cp}=\sqrt{\frac{e_1^2+e_2^2+e_3^2}{2}}=C\ . \tag{8}$$

Полные относительные деформации в направлениях главных удлинений соответственно выражаются:

$$e_1=\frac{1}{E}\,(\sigma_1-\mu\sigma_2-\mu\sigma_3)\qquad e_2=\frac{1}{E}\,(\sigma_2-\mu\sigma_3-\mu\sigma_1)\qquad e_3=\frac{1}{E}\,(\sigma_3-\mu\sigma_1-\mu\sigma_2).$$

Подставляя в исходное условие, имеем:

$$\frac{1}{E\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\mu\sigma_2-\mu\sigma_3)^2+(\sigma_2-\mu\sigma_3-\mu\sigma_1)^2+(\sigma_3-\mu\sigma_1-\mu\sigma_2)^2}=C$$

откуда после преобразований

$$\frac{1}{E\sqrt{2}}\sqrt{(1+2\mu^2)(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)+(2\mu^2-4\mu)(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)}\ .$$

Для эквивалентного растяжения $\sigma_2=\sigma_3=0$; $\sigma_1=\sigma_o$, где σ_o предельное растягивающее напряжение, при котором материал еще сохраняет упругие свойства

$$\frac{1}{E\sqrt{2}}\sqrt{(1+2\mu^2)\sigma_o^2}=C.$$

Приравнивая и сокращая получим:

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+\frac{2\mu^2-4\mu}{1+2\mu^2}(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)=\sigma_o^2. \tag{9}$$

Окончательное выражение условия, обеспечивающего сохранение упругих свойств материала при сложно-напряженном состоянии можно представить в следующем виде:

$$\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-k_e(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)}\leqslant k_\sigma, \tag{10}$$

где: $k_e=\frac{4\mu-2\mu^2}{1+2\mu^2}$ — деформационная характеристика материала,

k_σ — прочностная характеристика материала (предел упругости, пропорциональности).

μ — коэффициент Пуассона.

Выражения условий полной энергии

$$\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\mu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)}\leqslant[\sigma] \tag{11}$$

и энергии формоизменения

$$\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)}\leqslant[\sigma] \tag{12}$$

можно рассматривать как частные случаи уравнения (10) для которых соответственно

$$k_e=2\mu \ \text{ и } \ k_e=1.$$

Приравнивая $\frac{4\mu-2\mu^2}{1+2\mu^2}=2\mu$, получаем $2\mu^3+\mu^2-\mu=0$.

Последнее уравнение дает три корня: $\mu=0$; $\mu=-1$; $\mu=0,5$. Значит для материалов, тела из которых могут изменять при деформации только объем или только форму и материала у которого продольная деформация образца не сопровождается поперечной, условие полной потенциальной энергии отражает равнодеформированные (в отмеченном смысле) состояния.

При $\frac{4\mu-2\mu^2}{1+2\mu^2}=1$ имеем единственным корнем этого уравнения $\mu=0,5$. Следовательно условие энергии формоизменения рассматривает равнодеформированные состояния только материала, не изменяющего при деформации плотности.

Сопоставим значения k_e для различных материалов по условиям (9, 11, 12), (табл. 1).

Таблица 1

Условие \ μ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	−1
Условие (9)	0	0,362	0,667	0,865	0,970	1	−2
Условие (11)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	−2
Условие (12)	1	1	1	1	1	1	1

Из таблицы видно, что влияние вида материала (его деформационных свойств) на расчетное условие в группе металлов с $\mu=0,3\div0,4$ отрицаемое полностью условием (12) согласно условию (9) будет значительно меньшим, чем это считает теория (11).

Для того чтобы отметить различие предельных значений напряжений по условиям (9), (11), (12) в зависимости от вида напряженного состояния приведем графическую интерпретацию этих условий для плоского напряженного состояния ($\sigma_3=0$).

Имеем: $\sigma_1^2+\sigma_2^2-k_e\cdot\sigma_1\sigma_2\leqslant k_\sigma^2$.

Переходя к обозначениям $\sigma_1=x$, $\sigma_2=y$ и заменяя неравенство равенством получим уравнение предельной кривой

$$x^2+y^2-k_e\cdot xy=k_\sigma^2.$$

Повернем координатную систему на угол $\alpha=45°$ производя преобразование координат по формулам:

$$x=\xi\cdot\cos\alpha-\eta\cdot\sin\alpha,\qquad y=\xi\cdot\sin\alpha+\eta\cdot\cos\alpha.$$

Подставляя $\sin\alpha=\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x=(\xi-\eta)\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad y=(\xi+\eta)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

и заменяя в исходном уравнении предельной кривой x и y получаем:

$$\frac{(\xi-\eta)^2}{2}+\frac{(\xi+\eta)^2}{2}-\frac{k_e}{2}(\xi-\eta)(\xi+\eta)=k_\sigma^2,$$

откуда после преобразований следует:

$$\frac{\xi^2}{\frac{2k_\sigma}{2-k_e}} + \frac{\eta^2}{\frac{2k_\sigma}{2+k_e}} = 1.$$

Вводя обозначение:

$$a = \frac{k_\sigma}{\sqrt{1-\frac{k_e}{2}}}, \qquad b = \frac{k_\sigma}{\sqrt{1+\frac{k_e}{2}}}$$

видим, что предельные кривые теорий (9), (11) и (12) в системе координат ξ и η эллипсы с различными полуосями в зависимости от вида материала

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Для сравнения приведем значения a и b некоторых материалов (табл. 2).

Таблица 2

μ	Условие (9)	Условие (11)	Условие (12)
0	$a = k_\sigma$ $b = k_\sigma$	$a = k_\sigma$ $b = k_\sigma$	$a = 1{,}42\ k_\sigma$ $b = 0{,}82\ k_\sigma$
0,1	$a = 1{,}11\ k_\sigma$ $b = 0{,}92\ k_\sigma$	$a = 1{,}05\ k_\sigma$ $b = 0{,}95\ k_\sigma$	$a = 1{,}42\ k_\sigma$ $b = 0{,}82\ k_\sigma$
0,3	$a = 1{,}32\ k_\sigma$ $b = 0{,}84\ k_\sigma$	$a = 1{,}20\ k_\sigma$ $b = 0{,}88\ k_\sigma$	$a = 1{,}42\ k_\sigma$ $b = 0{,}82\ k_\sigma$
0,5	$a = 1{,}42\ k_\sigma$ $b = 0{,}82\ k_\sigma$	$a = 1{,}42\ k_\sigma$ $b = 0{,}82\ k_\sigma$	$a = 1{,}42\ k_\sigma$ $b = 0{,}82\ k_\sigma$

Наглядное представление дает фиг. 1, где показано также условие максимального касательного напряжения.

В пространстве напряжений σ_1, σ_2, σ_3 условие (9) представляет в сравнении с условием (11) значительно более вытянутый в направлении оси изотропии эллипсоид, обращающийся в цилиндр Губера-Мизеса-Генки у материала с $\mu = 0{,}5$. Это в некоторой степени устраняет основные недостатки теорий (11) и (12) для напряженных состояний близких к трехстороннему растяжению-сжатию.

Специфика гидростатических напряжений исключает возможность сдвиговой деформации, но не исключает возможности остаточного изменения объема, что отмечается и экспериментально [6].

Для гидростатического сжатия-растяжения теории (9), (11), (12) дают:

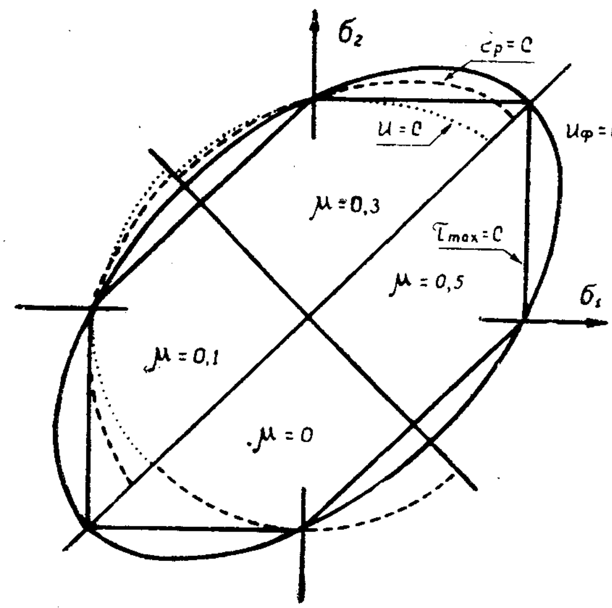
$$\sqrt{3p^2 - k_e \cdot 3p^2} \leqslant k_\sigma,$$

откуда давление, превышение которого приводит к остаточной объемной деформации

$$p = \frac{k_\sigma}{\sqrt{3(1-k_e)}}.$$

По теории энергии формоизменения для любого материала $p = \infty$, что отрицает возможность существования остаточного изменения объема. По теории полной энергии это давление для большинства материалов примерно одной величины с пределом упругости, в то время как опыты устанавливают его значительно большим. По теории равнодеформированных состояний давление при котором начинает появляться остаточное изменение объема для металлов с $\mu = 0,3 \div 0,45$

$$p = (1,6 \div 6)\ k_\sigma.$$



Фиг, 1

Предельное касательное напряжение при чистом сдвиге по теории равнодеформированных состояний выражается следующим значением:

$$\sqrt{\tau^2 + \tau^2 + k_e \cdot \tau^2} \leqslant k_\sigma, \qquad \text{откуда} \qquad \tau_o = \frac{k_\sigma}{\sqrt{2 + k_e}}.$$

Для различных материалов

$$\tau_o = (0,577 \div 0,71)\, k_\sigma$$

в то время, как по теории энергии формоизменения оно для всех материалов — $0,577\ k_\sigma$.

Условие (9) можно привести к несколько иному виду

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - k_e(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) - 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} =$$

$$= \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - (2 + k_e)\ (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leqslant k_\sigma$$

или

$$\sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - \frac{2(1+\mu)^2}{1 + 2\mu^2}\ (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leqslant k_\sigma.$$

Откуда видно, что условие выражается через постоянные и первый и второй инварианты тензора напряжений, следовательно оно удовлетворяет одному из необходимых требований—инвариантности. Используя значения инвариантов можно представить данное условие как непрерывную функцию координат, что бывает удобным при исследовании неоднородных напряженных состояний

$$\sqrt{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - (2 + k_e)\ \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau^2_{yz} - \tau_{zx}^2)} \leqslant k_\sigma.$$

В таком виде оно позволяет оценивать возможность нарушения упругих свойств при сложно-напряженном состоянии без предварительного вычисления главных напряжений.

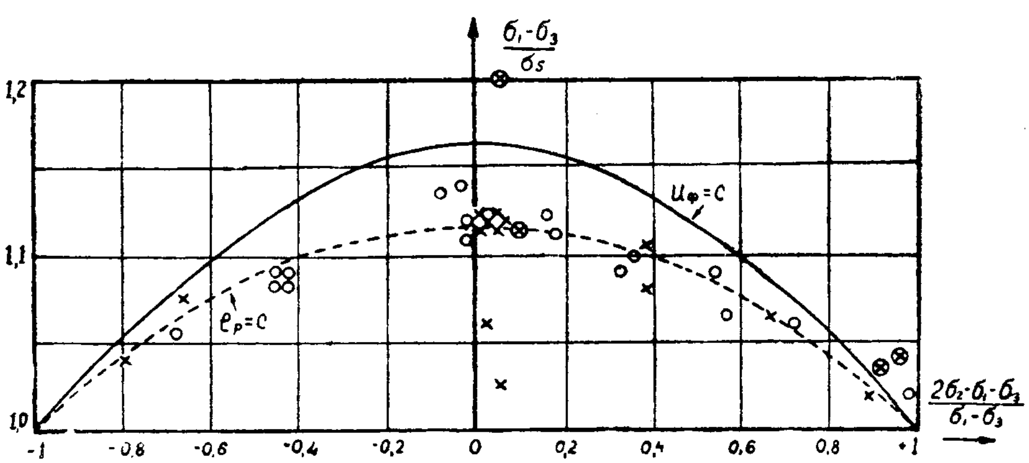
Решающее значение при оценке теорий имеет их соответствие опытным данным в широком диапазоне напряженных состояний. Обратимся к некоторым экспериментам по проверке теорий пластичности, которые могут дать приблизительное представление о соответствии рассмотренной теории предельного упругого состояния с опытом. Воспользуемся, в частности, данными опытов Лоде и Тейлора—Квинея, которые обычно в теории пластичности рассматриваются как фундаментальные.

Основное отличие результатов даваемых условием (9) для металлов с $\mu = 0{,}3 \div 0{,}4$ в сравнении с другими теориями для плоского напряженного состояния сводится к следующему. В области двухсторонних растяжений теория дает значения предельных напряжений, лежащие между результатами условий Сен-Венана и Губера-Мизеса-Генки, ближе к последней и аналогичного с ней характера. Поэтому достоверность рассматриваемого условия могла бы служить некоторым объяснением нередко противоречивых мнений относительно лучшего согласия с опытом той или другой из указанных теорий, так как это наиболее часто реализуемые в опытах состояния. На фиг. 2 показаны данные опытов Лоде при двухсторонних растяжениях. Опытные точки, показывая преимущество условия Губера-Мизеса-Генки в сравнении с условием Сен-Венана имеют все же систематические отклонения от него и близко подходят к предельной кривой гипотезы равнодеформированных состояний (пунктир). (Данные взяты из Надаи А. „Пластичность". ОНТИ. НКТП. 1936.)

В области смешанных состояний (растяжение-сжатие) условие (9) характерно несколько повышенными значениями предельных напряжений.

На фиг. 3, представляющей данные опытов Тейлора-Квинея [3] пунктиром показана кривая соответствующая этому условию. В частности для сдвига при $\mu = 0{,}3$ имеем $\tau_s = 0{,}6\sigma_s$ что весьма часто наблюдается в опытах со сталью [4].

Аналогичные отклонения от условия Губера-Мизеса-Генки отмечаются Жуковым А. М. [5] и другими экспериментаторами.

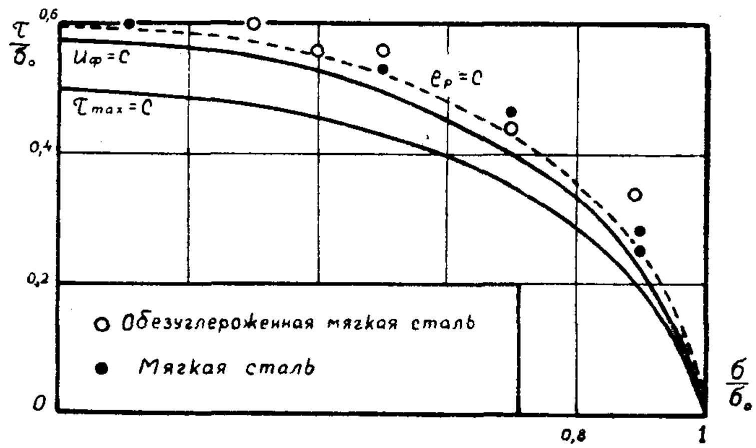


Фиг. 2

Использование результирующей деформации в качестве критерия эквивалентности имеет место в теории Занделя (1919 г.). Однако условие Занделя в форме

$$\sigma_{прив} = E \cdot e_p \leqslant [\sigma] \qquad [7]$$

дает несколько иные результаты. В то же время, построенное на основе результирующей деформации условие (9), как это видно из вышеизложенного, не уступает в целом ряде случаев результатам, даваемым наиболее употребительными теориями. Поэтому условие (9) можно признать условием заслуживающим внимания.



Фиг. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Энциклопедический справочник „Машиностроение". Т. 1 кн. 2. 1948.
2. Пономарев С. Д. и др. „Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении". Т. 1 Машгиз, 1950.
3. Ильюшин А. А. „Пластичность". Гостехиздат, 1948.
4. Сборник „Теория пластичности" под ред. Работнова Ю. Н. ГИИЛ, 1948.
5. Жуков А. М. „Сложное нагружение и теории пластичности изотропных металлов" Известия АН СССР. ОТН. № 8, 1955.
6. Миролюбов И. Н. „К вопросу о коэффициенте поперечной деформации" Труды Ленинградского Технологического института им. Ленсовета. Вып. 25. Госхимиздат, 1953.
7. Ривош О. А. Руководство „Сопротивление материалов" № 9. Издание Центр. Заочн. Мех. Машиностр. института, 1933.