ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖЕДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТПУ)»

На правах рукописи

Лэ Суан Хоанг Кхоа

ТЕРМОГРАВИТАЦИОННАЯ КОНВЕКЦИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТЫХ ОБЛАСТЯХ ПРИ НАЛИЧИИ ТВЕРДЫХ И ПОРИСТЫХ РЕБЕР

1.3.14 Теплофизика и теоретическая теплотехника

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор Шеремет Михаил Александрович

Томск – 2025

Оглавление

Введение.. 5

ГЛАВА 1. СОВРЕМЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ЗАМКНУТЫХ ОБЛАСТЯХ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОПРОВОДНЫХ БЛОКОВ И ПОРИСТЫХ ВСТАВОК 9

Выводы по первой главе... 27

ГЛАВА 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РЕБЕРНОЙ СТРУКТУРЫ НА РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛОПЕРЕНОС В ЗАМКНУТОЙ КВАДРАТНОЙ ПОЛОСТИ... 28

2.1 Постановка задачи термогравитационной конвекции в замкнутой дифференциально-обогреваемой полости при наличии твердых и пористых ребер 28

2.1 Физическая и геометрическая модели 28

2.1.2 Математическая постановка задачи 30

2.2. Методы решения сформулированной краевой задачи 34

2.2.1 Краткое описание метода конечных разностей 34

2.2.2 Аппроксимация транспортных уравнений....................................... 35

2.3 Верификация разработанного численного алгоритма 41

2.3.1 Задача естественной конвекции в замкнутой дифференциально-обогреваемой полости... 41

2.3.2 Задача естественной конвекции в замкнутой пористой дифференциально-обогреваемой полости (модели Дарси, Дарси–Бринкмана и Дарси–Форхгеймера) 45

2.3.3 Задача естественной конвекции в замкнутой частично-пористой дифференциально-обогреваемой полости (модели Дарси, Дарси–Бринкмана и Дарси–Форхгеймера) 49

2.3.4 Задача естественной конвекции в замкнутой чистой полости при наличии теплопроводной стенки 53

2.4 Анализ влияния сеточных параметров и параметра релаксации 59

2.4.1 Анализ влияния размера пространственной сетки 59

2.4.2 Анализ влияния шага по времени 60

2.4.3 Анализ влияния параметра релаксации 61

2.5 Влияние твердых ребер на режимы течения и теплоперенос в замкнутой квадратной полости 62

2.6 Влияние пористых ребер на режимы течения и теплоперенос в замкнутой квадратной полости 75

2.7 Сравнение результатов влияния твердых и пористых ребер на интенсивность теплообмена 87

Выводы по второй главе: 89

ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РЕБЕРНОЙ СТРУКТУРЫ НА РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛОПЕРЕНОС В ЗАМКНУТОЙ КУБИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ 91

3.1 Постановка задачи термогравитационной конвекции в замкнутом дифференциально-обогреваемом кубе при наличии твердых и пористых ребер 91

3.1.1 Физическая и геометрическая модели 91

3.1.2 Математическая постановка задачи 92

3.2 Верификация разработанного численного алгоритма 97

3.2.1. Задача естественной конвекции в замкнутом дифференциально-обогреваемом кубе 97

3.2.2. Задача естественной конвекции в пористом замкнутом дифференциально-обогреваемом кубе 100

3.3 Анализ влияния сеточных параметров и параметра релаксации 103

3.3.1 Анализ влияния размера сетки 103

3.3.2 Анализ влияния шага по времени 105

3.3.3. Анализ влияния параметра релаксации 106

3.4. Исследование влияния твердых ребер на режимы течения и теплоперенос в замкнутом дифференциально-обогреваемом кубе 108

3.5 Исследование влияния пористых ребер на режимы течения и теплоперенос в замкнутом дифференциально-обогреваемом кубе 127

3.6 Сравнение результатов влияния твердых и пористых ребер на интенсивность теплообмена.. 145

Выводы по третьей главе.. 146

ГЛАВА 4. СРАВНЕНИЕ ДВУХ- И ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛЕЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ 148

4.1. Случай отсутствия ребер.. 148

4.2. Случай полостей при наличии одного твердого ребра 154

4.3. Случай полостей при наличии одного пористого ребра...................... 159

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 167

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 169

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования, степень её разработанности

Развитие энергетического приборостроения, электронной отрасли и энергетики в целом неразрывно связано с интенсификацией тепломассообменных процессов, протекающих в базовых узлах и агрегатах энергетических систем. Одним из методов интенсификации теплообмена является создание развитой поверхности теплообмена за счет введения реберной структуры или пористых вставок. Применение на практике отмеченного подхода требует детального изучения всех особенностей тепломассопереноса в замкнутых системах при наличии твердых или пористых ребер. Наиболее эффективным методом изучения транспортных процессов является использование технологии математического моделирования совместно с современными методами вычислительной теплофизики и механики жидкости и газа.

Степень разработанности темы. Работы в области свободноконвективного теплообмена при наличии реберной структуры, такой как твердые и пористые ребра, перегородки и т.д изучаются уже долгое время. Большой вклад в эту область внесли A. Bejan, B. Alshuraiaan, E. Bilgen, R.L. Frederick, K. Khanafer, S.Kiwan и др. В этих работах были представлены численные и экспериментальные результаты естественно-конвективного теплообмена внутри замкнутых областей при наличии твердых и пористых ребер при различных граничных условиях. Большинство этих работ проводилось в двумерной постановке.

Целью диссертационной работы является математическое моделирование двумерных и трехмерных нестационарных режимов сопряженной естественной конвекции вязкой жидкости в замкнутых областях при наличии реберной структуры, включающей в себя твердые или пористые ребра.

Задачи исследования:

1. Разработка и верификация численной модели, описывающей процессы конвективного тепломассопереноса внутри замкнутых областей при наличии реберной структуры.

2. Исследование влияния размеров, материала и структуры отдельных ребер, количества и положения ребер внутри полости, а также интенсивности тепловыделения на сопряженные режимы переноса тепла и массы в замкнутой полости.
3. Проведение сравнительного анализа результатов двумерного и трехмерного приближений, а также оценка рациональности использования двумерной модели для корректного описания процессов теплообмена в исследуемых областях.
4. Определение основных закономерностей сопряженного конвективного теплопереноса в областях с реберной структурой.

Научная новизна результатов решения поставленных задач состоит в следующем:

1. Разработаны новые математические модели нестационарных режимов сопряженной естественной конвекции вязкой жидкости в замкнутых трехмерных областях при наличии твердых или пористых ребер с использованием преобразованных переменных «вектор скорости – вектор завихренности» в трехмерном случае.
2. Проведен детальный многопараметрический анализ режимов сопряженной естественной конвекции в замкнутых областях при наличии реберной структуры различного характера.
3. Определены условия интенсификации теплообмена в замкнутых областях с реберной структурой.

Теоретическая и практическая значимость работы заключается в создании комплекса вычислительных программ на языке программирования C++ для численного моделирования свободноконвективного теплообмена вязкой жидкости в двумерной и трехмерной постановках при наличии твердых или пористых ребер. Результаты численных исследований могут быть использованы для проектирования теплообменников и тепловых систем в энергетическом приборостроении, машиностроении, электронике с целью интенсификации теплосъема с поверхности тепловыделяющих элементов.

Методология и методы исследования. Для решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных использовался метод конечных разностей. Решения полученных систем линейных алгебраических уравнений проведены с использованием прямых и итерационных методов.

Положения, выносимые на защиту:

1. Математические модели, описывающие естественную конвекцию в замкнутых двумерных и трехмерных областях при наличии твердых или пористых ребер.

2. Результаты численного моделирования гидродинамики и теплообмена в замкнутых двумерных и трехмерных областях при наличии твердых или пористых ребер.

3. Результаты сравнения данных двумерного и трехмерного моделирования естественной конвекции при наличии реберной структуры.

Степень достоверности и апробация результатов. Степень достоверности обосновывается применением апробированных численных подходов механики жидкости и газа, выполнением верификации представленных физико-математических постановок, а также тестированием созданных программных кодов и согласованием полученных данных с численными и экспериментальными результатами других исследователей. Основные результаты диссертационной работы представлялись и обсуждались на конференциях: XVII Международная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и современные информационные технологии» (Томск, 2020); I и III Всероссийская молодежная конференция с международным участием «Бутаковские чтения» (Томск, 2021, 2023); XIX и XXI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук» (Томск, 2022, 2024); XXXVIII Сибирский теплофизический семинар (Новосибирск, 2022); Восьмая Российская национальная конференция по теплообмену (РНКТ-8) (Москва, 2022); Международная научная конференция «Теоретические и прикладные задачи конвективного тепломассопереноса» (Томск, 2022).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 работ, в том числе 5 статей в журналах (из них 4 статьи в зарубежных научных журналах, входящих в Web of Science, 4 статьи в зарубежных научных журналах, входящих в Scopus), 8 публикаций в сборниках материалов международных и всероссийских научных конференций.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 109 наименований. Текст диссертации изложен на 181 страницах, содержит 98 иллюстраций и 31 таблицу.

ГЛАВА 1. СОВРЕМЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ЗАМКНУТЫХ ОБЛАСТЯХ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОПРОВОДНЫХ БЛОКОВ И ПОРИСТЫХ ВСТАВОК

Естественная конвекция в замкнутых областях при наличии твердых ребер становится интересом многих ученых благодаря широкому применению в таких важных областях, как энергетика, электроника, энергетическое приборостроение. Большое количество исследований в области естественной конвекции внутри двумерных замкнутых областях при наличии твердых ребер было проведено за прошедшие десятки лет. Так, например, в работе [1] исследовали естественную конвекцию в прямоугольной полости с адиабатическими твердыми ребрами, расположенными на горячей стенке. Было проанализировано влияния различных параметров, включая число Рэлея и количество ребер. Авторы работы обнаружили, что при низких числах Рэлея теплопроводность является основным режимом теплообмена. Аналогичное исследование было проведено в [2]. Установлено, что влияние длины ребра на теплоперенос незначительно при относительно высоких числах Рэлея. При наличии только одного ребра наиболее эффективная скорость теплообмена достигается, если оно прикреплено в средней части полости. Ребро блокирует теплоперенос при относительно небольших числах Рэлея, но при этом такая теплопроводная вставка улучшает теплообмен при относительно больших числах Рэлея.

Режимы естественной конвекции в наклонной полости с теплопроводными твердыми ребрами были исследованы в [3]. Эффективные параметры, такие как длина ребер, количество ребер и соотношение сторон полости были проанализированы, также были представлены различные инженерные корреляции для практического применения. Было обнаружено, что увеличение угла наклона полости приводит к снижению интенсивности теплообмена. В работе [4] изучали естественную конвекцию в прямоугольной полости с твердыми ребрами, расположенными на холодной стенке. Было показано, что при низком числе Рэлея увеличение длины и количества ребер приводит к более высокой скорости теплообмена. Однако, увеличение длины и количества ребер может привести как к росту, так и к снижению значения среднего числа Нуссельта. Поэтому длина и количество ребер могут использоваться в качестве механизма управления теплообменом. В [5] авторы численно проводили исследование ламинарных стационарных режимов естественной конвекции в заполненной воздухом полости с твердым ребром, используя метод конечных объемов в рамках приближения Буссинеска. Они обнаружили, что твердое ребро на горячей стенке приводит к меньшему значению среднего числа Нуссельта, также было установлено оптимальное размещение твердых ребер на горячей стенке – рядом с теплоизолированными стенками полости. Результаты аналогичного исследования представлены в [6], где авторы для более широкого диапазона изменения чисел Рэлея, длины ребер, положения ребер и относительного коэффициента теплопроводности изучили режимы термогравитационной конвекции. В итоге был сделан вывод о том, что среднее число Нуссельта является возрастающей функцией числа Рэлея и убывающей функцией длины ребер и относительного коэффициента теплопроводности. Также было установлено, что ребра, находящиеся в центре или около центра полости, иллюстрируют возможность повышения интенсивности теплообмена на 38% при соответствующих тепловых и геометрических параметрах ребер.

В исследовании [7] авторы численно исследовали полости с двумя адиабатическими перегородками на горизонтальных стенках. Они обнаружили, что перегородки разделяют главный вихрь на два более мелких вихря, а при высоких числах Рэлея основная циркуляция не подвержена разделению. В работе [8] численно проанализированы режимы конвективного теплопереноса внутри полости при наличии наклонного твердого ребра, расположенного на горячей стенке. Было показано, что высокие средние числа Нуссельта достигаются при условии ортогонального расположения ребра по отношению к тепловыделяющей стенке. Ламинарная естественная конвекция в нагреваемой снизу полости при наличии адиабатического наклонного твердого ребра, расположенного на теплоизолированной стенке, была численно и экспериментально исследована в [9]. В результате анализа авторы предложили корреляционное соотношение для оценки интенсивности теплообмена, включающее определяющие конвективный теплообмен параметры. Было отмечено, что наклонное твердое ребро может быть использовано как эффективный инструмент для управления теплообменом. Ламинарная естественная конвекция в квадратной полости с твердым ребром, установленным на горячей стене, была численно изучена в [10]. Было показано, что толщина ребра не оказывает значительного влияния на теплоперенос. Авторы также установили, что интенсивность теплообмена повышается с ростом длины ребер. Также в работе были представлены корреляционные соотношения для среднего числа Нуссельта в зависимости от серии определяющих параметров. В работе [11] численно исследовано влияние ребер на процесс теплообмена внутри сложной радиаторной системы на основе материалов с фазовым переходом при наличии локального нестационарного тепловыделяющего элемента и внешнего конвективного охлаждения. Авторы обнаружили, что при увеличении длины ребер скорость плавления значительно возрастает. В [12] численно проанализированы режимы свободноконвективного плавления в оребренной системе с тепловыделяющим элементом при наличии материалов с фазовым переходом с твердыми наночастицами. Установлено, что объемная концентрация наночастиц оказывает влияние на интенсивность теплообмена внутри полости.

Анализ режимов смешанной конвекции при функционировании солнечной сушилки был экспериментально проведен в работе [13]. Полученные результаты показали, что возможна оптимизация установки за счет введения реберной структуры, которая позволит ее использовать даже в условиях низкорентабельных фермерских хозяйств. Численное моделирование естественно-конвективного теплообмена внутри концентрической кольцевой полости при наличии Y-образных ребер было проведено в работе [14]. Установлено, что при оптимальной конфигурации Y-образных ребер рост среднего числа Нуссельта составляет 358,8% по сравнению с полостями без ребер. Теплообмен при помощи многоразветвленных ребер в условиях ламинарной естественной конвекции был численно исследован в работе [15]. Было показано, что многоразветвленное ребро позволяет рассеивать больше тепла, чем ребро, имеющее только две ветви, в условиях ламинарной естественной конвекции. В исследовании [16] было исследовано влияние конфигурации, размеров и расположения ячеек в виде сот на плавление материалов с фазовым переходом в условиях естественной конвекции. Обнаружено, что интенсивность плавления существенно зависит от формы ячеек, так в случае треугольных, трапециевидных, прямоугольных и ромбовидных ячеек интенсивность плавления выше по сравнению с шестиугольными ячейками и время плавления при использовании, например, треугольных ячеек сокращается на 23.1%.

Смешанная конвекция в сочетании с поверхностным тепловым излучением в вентилируемом горизонтальном канале была численно исследована в работе [17]. Для интенсификации теплоотвода от источника энергии использовались ортогональные и наклонные ребра, установленные на поверхности тепловыделяющего цилиндра. Результаты исследования показали, что при отсутствии излучения ортогональные и наклонные ребра имеют одинаковый эффект отвода теплоты от поверхности тепловыделяющего цилиндра. Однако, при наличии излучения ортогональные ребра являются наиболее предпочтительными. Сопряженная свободно-магнитогидродинамическая конвекция в L-образной камере с толстым ребром, прикрепленным к одной из ее холодных стенок, была изучена в работе [18]. Результаты показали, что интенсивность теплообмена возрастает по мере увеличения числа Гартмана (до 39.59%) при наличии ребра максимальной толщины (до 45.18%) и минимальной длины (до 415.06%). Комбинация двух, трех и четырех прямоугольных ребер, а также прямых, изогнутых и наклонных разветвляющихся ребер для интенсификации плавления материалов с фазовым переходом внутри кожухотрубных теплообменников была предложена в работе [19]. Было выявлено, что два прямоугольных ребра с наклонными разветвлениями являются наиболее эффективными по сравнению с остальными рассмотренными комбинациями: уменьшение времени плавления достигает 84.6%. Худшей комбинацией являются четыре прямоугольных ребра с изогнутыми разветвлениями, что позволяет сэкономить только 40% времени плавления по сравнению со случаем без ребер. Совокупное влияние угла наклона и расположения твердых ребер на естественную конвекцию наноинкапсулированного материала с фазовым переходом в теплообменнике было проанализировано в работе [20]. Результаты анализа показали, что вертикальное расположение ребер лучше интенсифицирует теплообмен, чем горизонтальное. Также выявлено, что при высоких числах Рэлея интенсивность теплообмена значительно ухудшается из-за блокировки течения, вызванной расположенными рядом ребрами. Ламинарная естественная конвекция внутри прямоугольной полости с ребрами, прикрепленными к обеим вертикальным стенкам, была численно изучена в [21]. Авторы обнаружили, что использование длинных ребер приводит к наличию двух вторичных рециркуляций, что может быть причиной роста интенсивности теплообмена.

Исследование естественной конвекции в наклонной квадратной полости с перегородкой на холодной стене было проведено в работе [22]. Установлено, что перегородка на холодной стене приводит к снижению теплопередачи до 47% по сравнению с полостями без ребер. Влияние перегородки, расположенной на горячей стенке квадратной полости, было численно изучено в [23]. Результаты позволили установить, что перегородка на горячей стенке также приводит к снижению скорости теплопередачи по сравнению с прозрачными полостями, особенно для высоких чисел Рэлея. Численный анализ двумерной естественной конвекции от горизонтальных цилиндров с продольными пластинчатыми ребрами был проведен в [24]. Было обнаружено, что среднее число Нуссельта является функцией, зависящей от $Ra^{1/4}$ или $Ra^{1/3}$, а также от безразмерного расстояния между ребрами и высоты ребер. Структура течения и поле температуры внутри квадратной полости, заполненной неньютоновской жидкостью, были исследованы в работе [25] при наличии гибкого ребра, прикрепленного к горячей стенке. Выявлено, что показатель поведения среды и гибкость ребра оказывают существенное влияние на свободноконвективное течение внутри полости. По сравнению с ньютоновской жидкостью, выталкивающая сила оказывает большее влияние на динамику неньютоновской среды. Естественная конвекция и поверхностное излучение в квадратной полости с вертикально ориентированными ребрами были исследованы в [26]. Установлено, что максимальная интенсивность теплообмена достигается при количестве ребер, равном или более 9. В работе [27] представлен активный метод усиления конвективного теплообмена за счет использования специальной реберной структуры, подверженной влиянию электромагнитного поля. Авторы отметили, что при высоких частотах и амплитудах воздействия интенсивность теплообмена может быть увеличена до 100%. Корреляционное соотношение для среднего числа Нуссельта, отражающее зависимость от числа Рейнольдса и частоты воздействия, также было получено.

Исследование естественной конвекции внутри квадратной полости, заполненной наножидкостью и нагреваемой изнутри двумя тепловыделяющими блоками с прикрепленными к ним твердыми ребрами, было выполнено в [28]. Были найдены три способа улучшения теплообмена в полости: увеличение числа Рэлея, добавление гибридных наночастиц в базовую жидкость и установка ребер на поверхности блоков. Влияние низкотеплопроводных твердых ребер на теплообмен вблизи боковой стенки полости с дифференциальным нагревом было проанализировано в [29]. Установлено, что наличие ребер интенсифицирует теплообмен внутри полости при числе Рэлея, равном или превышающем $1.84{\cdot}10^9$, независимо от количества ребер. Однако при более низких числах Рэлея интенсивность теплообмена подавляется наличием ребер. Кроме того, за счет увеличения числа ребер интенсивность циркуляции на переходных и квазистационарных стадиях увеличивается, что приводит к улучшению теплообмена вблизи боковой стенки. В работе [30] предложен новый метод для описания температурного поля ребра с зависящей от температуры теплопроводностью в условиях конвективно-радиационного теплообмена. Результаты показали, что с помощью разложения в ряд Тейлора нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение можно преобразовать в алгебраическое уравнение. На точность аппроксимации влияют параметры излучения, конвекции и теплопроводности.

Трехмерность дает возможность рассматривать ребра различных форм, размеров, положений и количества с целью улучшения теплообмена. Так, в работе [31] численно определили идеальную конфигурацию прямоугольного ребра на горячей стенке кубической полости. Общий объем ребра был фиксированным, а длина ребра и соотношение сторон полости варьировались. Результаты показали, что в случае, когда занимаемый объем ребра в полости достаточно высок, соотношение сторон самого ребра практически не влияет на интенсивность теплообмена. Также было обнаружено, что средний тепловой поток, передаваемый жидкости, монотонно возрастает с увеличением длины ребра. Естественная конвекция внутри кубической полости с дифференциальным нагревом на боковых стенках была численно исследована в [32]. Был изучен широкий диапазон изменения чисел Рэлея, ширины ребер и коэффициента теплопроводности. Благодаря поверхностям ребер с высоким коэффициентом теплопроводности скорость теплопередачи увеличивается более чем на 20% по сравнению с результатами двумерной постановки. Метод решеточных уравнений Больцмана использовался в работе [33] для численного исследования влияния твердых ребер различной формы на интенсивность естественно-конвективного плавления в кубической полости. Было обнаружено, что наличие ребер повышает эффективность теплообмена, а также значительно улучшает скорость аккумулирования тепла.

В исследованиях [34, 35] численно изучили трехмерный радиатор с игольчатыми ребрами, чтобы найти оптимальные высоты, диаметры и углы ориентации ребер для интенсификации теплообмена. Были проведены эксперименты для пяти различных конфигураций, которые позволили установить, что угол ориентации конического ребра в 66 градусов имеет самое низкое тепловое сопротивление среди всех конструкций. Попытку оптимизировать конфигурацию игольчатых ребер представили в [36]. В этой работе плотность ребер менялась вдоль направления потока. Было показано, что за счет изменения плотности ребер оптимизированная реберная структура имеет на 11% меньше тепловое сопротивление и на 30% меньше вес по сравнению с исходной классической системой. Также установлено, что радиатор с углом раствора конуса в 2 градуса имеет наилучшие характеристики по интенсификации теплообмена. Исследование конфигурации волнистых ребер было проведено в [37]. В этом исследовании рассматривались ребра с разным количеством волновых структур на поверхности. Результаты показали, что использование волнистых ребер позволяет усилить теплообмена внутри радиатора и уменьшить массу ребер на 47.83%. По сравнению с прямоугольными ребрами волнистые ребра превосходят прямоугольные по эффективности теплопередачи. Было доказано, что лучшей конфигурацией волнистых ребер является конфигурация с одной волнистостью, поскольку они характеризуют самую высокую интенсивность теплообмена.

Диссипация тепла из изотермического горизонтального цилиндра с волнистыми кольцевыми ребрами была исследована в работе [38]. Результаты показали, что ребра с тремя волнистостями характеризуются наибольшей интенсивностью теплообмена. Также установлено, что волнистые ребра превосходят прямые ребра при высоких числах Рэлея за пределами оптимального значения S/d (отношение расстояния между ребрами к диаметру цилиндра). Трехмерное моделирование сопряженного теплообмена в полости при наличии прямых прямоугольных ребер с проемами в основании радиатора было проведено в работе [39]. Выявлено, что наличие проемов в основании радиатора увеличивает скорость воздуха, а также интенсивность конвективного теплообмена. Профили температуры в центре проема в основании радиатора близки к температуре окружающей среды, что указывает на увеличение скорости вертикального потока воздуха и интенсивности теплообмена. Трехмерное численное моделирование было проведено в [40] для исследования характеристик рабочей жидкости радиатора при наличии наклонных ребер в условиях естественной конвекции. Было обнаружено, что самым эффективным углом наклона ребер является угол в 30 градусов. Тепловая диссипация от поверхности вертикальных оребренных труб в условиях естественной конвекции была численно и экспериментально изучена в работе [41]. Результаты показали, что оребренная труба с высотой ребер 7 мм дает наибольшее среднее число Нуссельта, которое на 207% выше, чем в случае гладких труб. Интенсификация теплообмена при использовании кольцевого радиатора с круглым основанием, концентрическим кольцом и прямоугольными ребрами была исследована в работе [42]. Авторы установили, что горизонтальное расположение радиатора лучше интенсифицирует теплоперенос, чем его вертикальное расположение. Влияние диаметра ребер, расположенных на вертикальных теплообменниках с кольцевыми оребрениями в небольшом дымоходе, на структуру течения и теплообмен было проанализировано в работе [43]. Результаты позволили установить, что коэффициент теплообмена растет при уменьшении диаметра ребра и увеличении расстояния между ребрами. Естественно-конвективный теплообмен внутри полости при наличии трех оребренных теплообменников с массивом квадратных ребер с различными расстояниями между ребрами (5, 9, 14 мм) был экспериментально изучен в работе [44]. Авторы показали, что по мере увеличения расстояния между ребрами коэффициент теплообмена возрастает до определенного значения, после чего он начинает снижаться. Естественная конвекция оребренного радиатора W-типа на вертикальном основании была изучена в работе [45]. Проведенный анализ позволил сделать вывод о том, что скорость воздуха увеличивается в направлении, перпендикулярном основанию, так как при этом термическое сопротивление меньше. Также продемонстрировано, что охлаждающая способность оребренного радиатора W-типа намного лучше, чем в случае оребренного радиатора с параллельными пластинами. Как результат представленных исследований, ребра могут использоваться в качестве контрольного оборудования в системах возобновляемых источников энергии, как указано в [46]. Существует множество вычислительных методов, которые можно применять для решения задач тепломассопереноса в замкнутых и полуоткрытых системах при наличии реберных структур [47–49]. В представленных источниках описаны эффективные численные методы для изучения гидродинамики и теплообмена в различных технических системах.

Можно выделить еще один интересный способ интенсификации теплообмена за счет введения реберной структуры – применение различных форм пористых сред внутри полостей. Пористые ребра за счет своей конечной проницаемости более эффективно интенсифицируют теплообмен, чем твердые структуры. Возможное усиление теплообмена в пористых средах в условиях ламинарной естественной конвекции интересует многих исследователей. Естественная конвекция в квадратной полости с пористым слоем на вертикальных изотермических стенках была численно изучена в [50]. В результате была показана интенсификация теплообмена с ростом чисел Рэлея и Дарси, а также ослабление теплопереноса с ростом толщины пористого слоя. В работе [51] численно исследовали ламинарный естественно-конвективный теплообмен в дифференциально-обогреваемой полости с двумя тонкими пористыми ребрами, прикрепленными к горячей стенке и нижней изолированной поверхности, для различных чисел Дарси, коэффициента теплопроводности и местоположения пористых ребер. Результаты этого исследования показали, что наличие горизонтального пористого ребра увеличивает среднее число Нуссельта по сравнению со случаем дифференциально-обогреваемой полости без ребер для различных значений коэффициента теплопроводности. Однако вертикальное пористое ребро, прикрепленное к нижней теплоизолированной поверхности, приводит к меньшему среднему числу Нуссельта, по сравнению со случаем полости без ребер. В работе [52] авторы численно исследовали ламинарный свободно-конвективный теплообмен в дифференциально-обогреваемой квадратной полости с тонким пористым ребром, прикрепленным к горячей стенке, при различных значениях чисел Рэлея и Дарси, угла наклона ребра, длины ребра и его положения. Авторы установили, что наличие пористого ребра увеличивает среднее число Нуссельта по сравнению с дифференциально-обогреваемой полостью без ребер. С целью достижения оптимального теплообмена пористое ребро должно быть размещено ортогонально близко к нижней поверхности или в середине вертикальной горячей поверхности. Также было получено корреляционное соотношение для среднего числа Нуссельта в зависимости от чисел Рэлея и Дарси, длины и положения ребра.

В работе [53] авторы рассмотрели простой метод энергетического баланса для изучения пористых и твердых ребер в случае развития естественной конвекции. В результате проведен анализ влияния пористости среды на особенности теплообмена в случае пористого ребра с использованием линейной модели Дарси. Показано, что скорость теплообмена при наличии пористого ребра может превышать скорость теплообмена в случае твердого ребра. В исследовании [54] авторы численно проанализировали двумерные режимы естественной конвекции внутри дифференциально-обогреваемой наклонной прямоугольной полости с несколькими пористыми ребрами, прикрепленными к левой нагреваемой стенке. Полученные результаты позволили установить, что с использованием нескольких пористых ребер наблюдается увеличение среднего числа Нуссельта в полости до 41% по сравнению с областью с твердыми ребрами и до 20% по сравнению с областью без ребер. В серии работ [55–57] был проведен численный анализ влияния расположения ребер на нижней стенке треугольной полости, заполненной пористой средой, отношение высоты к основанию которой равно 1. Авторы продемонстрировали возможность управления гидродинамикой и теплообменом за счет правильного использования реберной структуры. В работе [58] численно и экспериментально проанализированы стационарные режимы естественно-конвективного теплообмена в частично заполненной пористой полости. Автор отметили существенное усиление теплообмена и значительное влияние чисел Дарси и Рэлея на проникновение жидкости в пористую среду.

В исследовании [59] численно проанализирована естественная конвекция в квадратной полости, частично заполненной теплогенерирующей пористой средой. Полученные результаты позволили установить особый режим теплопереноса, характеризующийся отсутствием существенной зависимости от проницаемости пористой среды и теплопроводности материала твердого скелета такой среды. При низких числах Рэлея пористая среда ведет себя как твердый тепловыделяющий блок. В работе [60] исследовали термобиологическую конвекцию в квадратной пористой полости, заполненной кислородовосприимчивыми микроорганизмами. Установлено, что добавление таких микроорганизмов в полость может изменить интенсивность теплообмена внутри анализируемого объекта. Естественно-конвективный теплообмен между двумя поверхностями с пористыми ребрами на горячей стенке был исследован в работе [61], где также было проведено сравнение результатов для пористых и твердых ребер. Авторы показали, что пористые ребра при высоких числах Рэлея и Дарси позволяют значительнее интенсифицировать теплообмен по сравнению с твердыми ребрами. Также было обнаружено, что улучшение характеристик пористых ребер ограничивается коэффициентом теплопроводности, за пределами которого улучшение теплообмена больше не наблюдается. В работе [62] было проанализировано влияние вязкости, зависящей от магнитного поля, на свободноконвективный теплообмен с наножидкостью в качестве рабочего тела. Результаты показали, что число Нуссельта является возрастающей функцией числа Рэлея и объемной доли наночастиц, и убывающей функцией параметра вязкости и числа Гартмана. Кроме того, уменьшение числа Нуссельта из-за магнитовосприимчивой вязкости более значительно для высоких чисел Рэлея и низких чисел Гартмана.

В исследовании [63] авторы изучили поведение коэффициента поверхностного трения и числа Нуссельта в случае движения наножидкости над растягивающейся поверхностью под влиянием поперечного магнитного поля, теплового излучения и эффекта плавучести. Результаты показали, что значение коэффициента поверхностного трения наножидкости Cu/H_2O больше, чем в случае наножидкости CuO/H_2O. Более того, снижение числа Нуссельта для наножидкости Cu/H_2O меньше, чем в случае наножидкости CuO/H_2O. Особенности теплообмена и генерации энтропии были изучены в работе [64] в случае пористого вращающегося диска внутри несжимаемой наножидкости при наличии однородного вертикального магнитного поля. Рассматривалось влияние различных параметров, таких как параметр магнитного взаимодействия, параметр всасывания, объемная доля наночастиц и тип наножидкости на поведение всех компонент скорости жидкости, распределение температуры, интенсивность генерации энтропии и число Бежана, а также на коэффициент поверхностного трения и число Нуссельта. В работе [65] численно исследована циркуляция жидкости в наклонной квадратной полости с двумя ребрами на горячей стенке. Были изучено влияние чисел Кнудсена и Рэлея, расположения и длины ребер, относительного коэффициента теплопроводности, пористости ребер и угла наклона полости на динамику течения и особенности теплообмена. Было обнаружено, что увеличение числа Кнудсена приводит к росту скорости скольжения и скачку температуры на границах, а также к снижению среднего числа Нуссельта.

Теплообмен в пористых средах был исследован в серии работ [66–68]. Для получения аналитического решения использовался метод гомотопического анализа [69, 70]. Были представлены поля скорости и температур, а также было исследовано влияние константы связи, проницаемости и параметра излучения на теплообмен микрополярной жидкости. В работе [71] представлен простой метод анализа для исследования характеристик пористых ребер в условиях естественной конвекции. Метод основан на использовании баланса энергии и модели Дарси для описания транспортных процессов внутри пористой среды. Три типа пористых ребер были рассмотрены в этом исследовании: длинное ребро, ребро конечной длины с изолированным концом и ребро конечной длины с концом, подверженным воздействию известного коэффициента теплоотдачи. Полученные результаты показали, что увеличение длины ребер и эффективного коэффициента теплопроводности усиливают теплообмен до предела, где дальнейшее увеличение этих параметров не приводит к усилению теплообмена. Характеристики наклонных сплошных и пористых ребер при естественной конвекции в Н-образной полости с горячей нижней стенкой, холодными вертикальными стенками и теплоизолированными горизонтальными стенками численно исследованы в [72]. Ключевые факторы, такие как число Рэлея, пористость среды, угол наклона ребер и соотношение сторон полости были проанализированы. Численное исследование проводилось с помощью метода контрольного объема. Результаты позволили установить, что среднее число Нуссельта увеличивается на 60% при наличии пористых ребер по сравнению с твердыми ребрами. Максимальное число Нуссельта наблюдается в случае ортогонального расположения ребер на стенке и при соотношении сторон полости, равном 0.2. Пористые ребра с числами Дарси меньше 10^{-6} ведут себя как твердые ребра. Также были представлены две корреляции между ключевыми параметрами и средним числом Нуссельта.

В работе [73] проведено численное исследование с целью анализа влияния гибкого ребра на нестационарное конвективное течение вязкой жидкости внутри квадратной частично пористой полости. Ребро было прикреплено к нагреваемой левой стенке полости. Авторы продемонстрировали, что колебание ребра в большей степени воздействует на область под ним. Общая скорость теплообмена возрастает при увеличении числа Дарси, толщины слоя жидкости и упругости ребра. Установлено также, что интенсивность теплопереноса экспоненциально возрастает с ростом амплитуды колебаний. Изменение амплитуды колебаний на 0.1 может привести к увеличению скорости теплопередачи на 3.4 процента. В работе [74] экспериментально исследовано тепловое воздействие кольцевых пористых ребер, прикрепленных к внешней поверхности обогреваемого вертикального цилиндра с постоянным тепловым потоком, на эффективность теплообмена. Исследование проводилось в условиях стационарной естественной конвекции. Были использованы алюминиевые цилиндры трех диаметров и два типа пористого материала с различными конфигурациями ребер. Полученные результаты показали, что среднее число Нуссельта сильно зависит от проницаемости среды. Минимальное повышение коэффициента теплообмена составило 7.9% при использовании одного ребра толщиной 10 мм, а максимальный рост – 131% при использовании пористого слоя.

В исследовании [75] авторы провели анализ тепловых характеристик пористого ребра в случае естественной конвекции с температурно-зависимой теплопроводностью и внутренним тепловыделением. Установлено, что увеличение параметра пористости, чисел Дарси и Рэлея, а также отношения толщины к длине ребра увеличивает скорость передачи тепла от основания ребра и, следовательно, повышает эффективность ребра. Кроме того, уменьшение коэффициента теплопроводности приводит к увеличению скорости передачи тепла от основания ребра. Однако достигается оптимальное значение, за пределами которого дальнейший рост отмеченных определяющих процесс характеристик не оказывает значительного влияния на интенсивность теплообмена. В работе [76] проведено исследование по оптимизации геометрии ребер с целью интенсификации теплообмена. Были рассмотрены 4 формы ребер: прямоугольная, выпуклая, треугольная и вогнутая. Установлено, что при увеличении соотношения между толщинами ребер максимальная скорость теплообмена снижается, при этом медь является наиболее оптимальным материалом для ребер. В исследовании [77] авторы проанализировали естественно-конвективный теплообмен в кубической полости, заполненной наножидкостью, при наличии пористых ребер. Результаты показали, что наиболее существенное влияние на интенсивность теплообмена оказывает объемная доля наночастиц.

Зная недостатки применения твердых ребер в интенсификации теплообмена, многие исследования были проведены для поиска способов улучшения тепловых характеристик твердых ребер, используя в том числе обработку поверхности, перфорацию, разбиение крупных ребер на множество тонких ребер и т.д. Одним из популярных способов улучшения теплообмена при наличии твердых ребер является использование перфорированных реберных систем [78]. Многие исследования перфорированных ребер были проведены с различными параметрами ребер, такими как форма перфорации, диаметр перфорации и количество перфораций. Так, в работе [79] авторы исследовали тепловые характеристики свободноконвективного теплообмена с вертикальным теплоотводом с помощью отверстий вдоль вертикальной поверхности ребер. Было исследовано влияние количества отверстий и их ширины на коэффициент теплообмена. Было отмечено, что наличие перфораций на поверхности значительно улучшает тепловые характеристики массива вертикальных ребер. В другой работе [80] была проведена оценка коэффициента теплообмена в условиях естественной конвекции при наличии массива перфорированных ребер с различным диаметром перфорации и разными углами наклона. Переменными для моделируемого конвективного охлаждения являлись ориентация и геометрия реберной структуры. В этом исследовании проанализирован стационарный теплообмен с учетом массива твердых и перфорированных ребер. Результаты исследования показали, что использование перфорированных ребер с диаметром перфорации 12 мм под углом 45 градусов приводит к росту коэффициента теплообмена (на 32%) по сравнению с массивом твердых ребер, при этом экономия материала составляет почти 30% по массе.

В работе [81] были определены тепловые характеристики для нового типа дискретных ребер в сравнении с параметрами для твердых ребер и плоской поверхностью без ребер при одинаковых условиях. Для этого анализа были проведены численные исследования трехмерного турбулентного течения жидкости и конвективного теплообмена вокруг массива твердых прямоугольных ребер. В работе [82] проведены эксперименты с перфорированным основанием ребер с целью улучшения вентиляции холодным воздухом. Полученные результаты позволили установить, что перфорации, особенно расположенные во внутренней области, улучшают вентиляцию и теплообмен. Образцы с более короткими перфорациями демонстрируют значительное улучшение теплообмена. Приведенные коэффициенты теплообмена могут быть в два раза больше, чем без перфорации для длинных массивов ребер. В исследовании [83] авторы проанализировали свободноконвективный теплоперенос в полости с перфорированными ребрами с различными интервалами между ребрами, разными углами перфорации, диаметрами перфорации, шагами перфорации и входами нагревателя. В результате было установлено, что скорость теплопереноса для ребер с постоянным шагом перфорации и диаметром 4 мм с наклоном в 45 градусов является оптимальной. Другой способ улучшения теплообмена связан с использованием массива ребер. Так, в работе [84] численно и экспериментально исследован стационарный естественно-конвективный теплообмен от вертикально установленных прямоугольных ребер. Авторы установили, что преобразование твердых ребер в массив одиночных ребер может значительно улучшить тепловые характеристики систем. Результаты этой работы могут быть использованы для улучшения свободноконвективного теплообмена в различных электронных устройствах.

Влияние перфорации в прямоугольном ребре на естественную конвекцию было описано в работе [85]. В результате исследований обнаружено, что снижение температуры между основанием ребра и острием ребра увеличивается при увеличении диаметра перфорации. Также было отмечено, что падение температуры вдоль твердого ребра было меньше, чем у перфорированного ребра. В работе [86] изучено распределение температуры по высоте перфорированного ребра с круглой перфорацией. Авторы наблюдали, что снижение температуры вдоль высоты перфорированных ребер было неизменно выше, чем по сравнению с эквивалентным твердым ребром. В исследовании [87] был рассмотрен алюминиевый цилиндрический радиатор с неперфорированным первым ребром и другими ребрами, перфорированными различной формой, такой как круг, квадрат и шестигранник с постоянным сечением площади перфорации. Результаты показали, что перепад температуры выше для перфорированных ребер, чем для твердых ребер, а ребра с треугольной перфорацией дают более высокую теплопередачу. Влияние конфигурации пластинчатых ребер на их тепловые характеристики в радиаторе в условиях естественной конвекции было исследовано в работе [88]. Полученные результаты позволили установить, что оребренный радиатор быстрее достигает стационарного теплового состояния, чем радиатор без ребер. Также показано, что ребра с круглой перфорацией и прямоугольным краем имеют наибольшую эффективность среди рассмотренных типов ребер. Оптимальная конструкция перфорированного разветвляющегося ребра для охлаждения электронных устройств в условиях ламинарной естественной конвекции была представлена в работе [89]. Авторы установили, что перфорации в вертикальном основании горизонтального ребра приводят к наилучшему теплообмену по сравнению с твердыми ребрами при любом размере и распределении отверстий. В исследовании [90] авторы изучили процесс плавления материалов с фазовым переходом внутри кожухотрубного теплообменника с перфорированными ребрами. Результаты показали, что наличие перфорированных ребер увеличивает скорость плавления за счет уменьшения эффекта блокировки ребер. В работе [91] авторы модифицировали размер и форму ребер вертикального радиатора, прорезав вертикальную поверхность ребер. Проведенный анализ позволил установить, что наличие отверстий на поверхности ребер заметно улучшает теплообмен. Обнаружено, что ребро с 4 прорезями является лучшей конфигурацией для вертикального радиатора, поскольку при этом среднее число Нуссельта достигает максимума.

Производство реберных систем до сих пор заинтересовано в уменьшении размеров и стоимости ребер при условии улучшения теплообмена. Многие исследования были проведены, чтобы найти оптимальную форму ребер. В работе [92] авторы на основе решения вариативной задачи попытались определить оптимальную форму ребер. Также проведена серия исследований по определению оптимальной формы ребра [93–100].

Выводы по первой главе

В первой главе представлены современные исследования естественной конвекции в замкнутых областях при наличии теплопроводных блоков и пористых вставок. Выявлено, что режимы естественной конвекции в замкнутых полостях очень широко исследованы при различных граничных условиях, формах полости, теплоносителях, а также при наличии интенсификаторов теплообмена различной формы. Однако, большое внимание было уделено решению задач в двумерном приближении. При этом небольшое число научных работ посвящено изучению свободно-конвективного теплопереноса в трехмерной постановке.

В данной работе проводится анализ влияния твердых и пористых ребер на режимы течения и теплоперенос в замкнутых квадратной и кубической полостях. Многие параметры, такие как теплопроводность материала, длина, положение, количество и пористость ребер, используются для анализа. Рассматриваются особенности гидродинамики и теплообмена внутри полости при наличии твердых и пористых ребер, а также сравниваются результаты использования двумерной и трехмерной моделей при наличии и отсутствии ребер. Отдельно проанализирована возможность использования двумерной модели для описания интегрального теплообмена внутри кубической полости при наличии реберной структуры.

ГЛАВА 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РЕБЕРНОЙ СТРУКТУРЫ НА РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛОПЕРЕНОС В ЗАМКНУТОЙ КВАДРАТНОЙ ПОЛОСТИ

2.1 Постановка задачи термогравитационной конвекции в замкнутой дифференциально-обогреваемой полости при наличии твердых и пористых ребер

2.1 Физическая и геометрическая модели

Область решения представляет собой квадрат с твердыми непроницаемыми стенками размером L. Область заполнена нютоновской жидкостью ($\mathrm{Pr} = 0.71$). Верхняя и нижняя стенки считаются теплоизолированными. На левой и правой стенках температуры поддерживаются постоянными $\mathrm{T_h}$ и $\mathrm{T_c}$, причем на левой стенке температура выше, чем на правой ($\mathrm{T_h} > \mathrm{T_c}$). Сила тяжести направлена вертикально вниз по оси y. На левой стенке устанавливают одинаковые твердые ребра, имеющие постоянную толщину $\mathrm{H} = 0.1\mathrm{L}$, длину $\mathrm{L'}$ и теплопроводность λ_s и пористые ребра, имеющие толщину $\mathrm{H} = 0.1\mathrm{L}$, длину $\mathrm{L'}$, пористость ε и эффективную теплопроводность λ_{eff}. Ребра находится на расстоянии D от нижнего основания полости и распределяются равномерно по высоте области (рисунки 2.1 и 2.2).

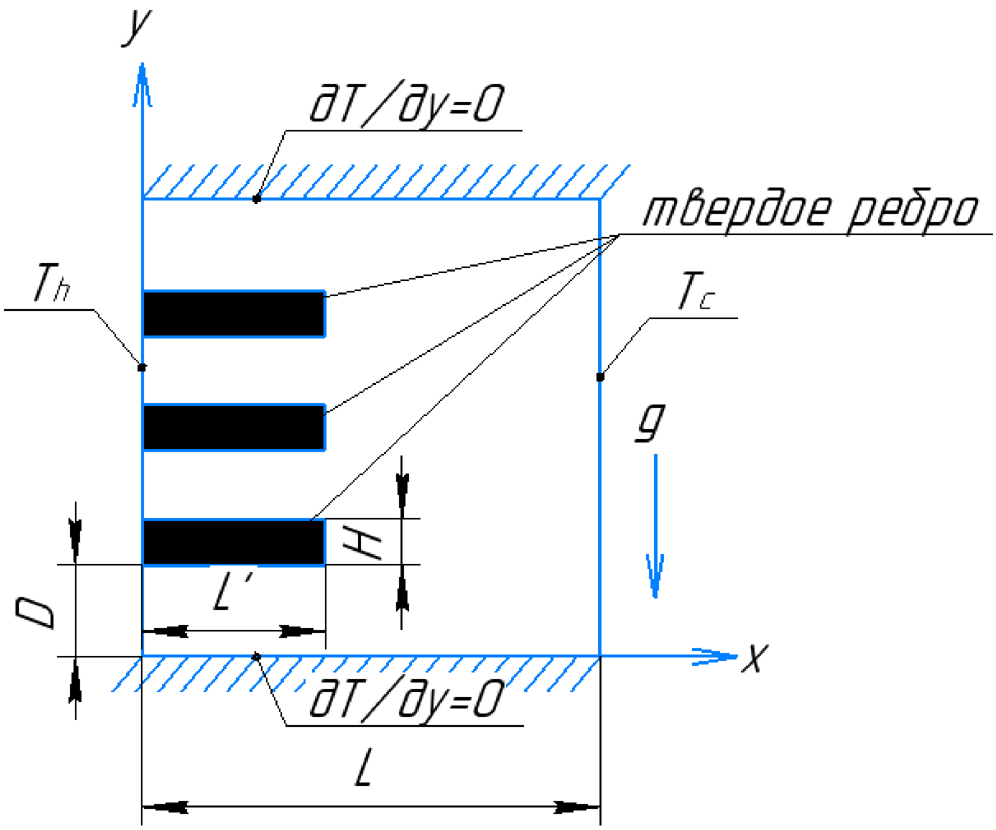


Рисунок 2.1 – Замкнутая квадратная полость с твердыми ребрами

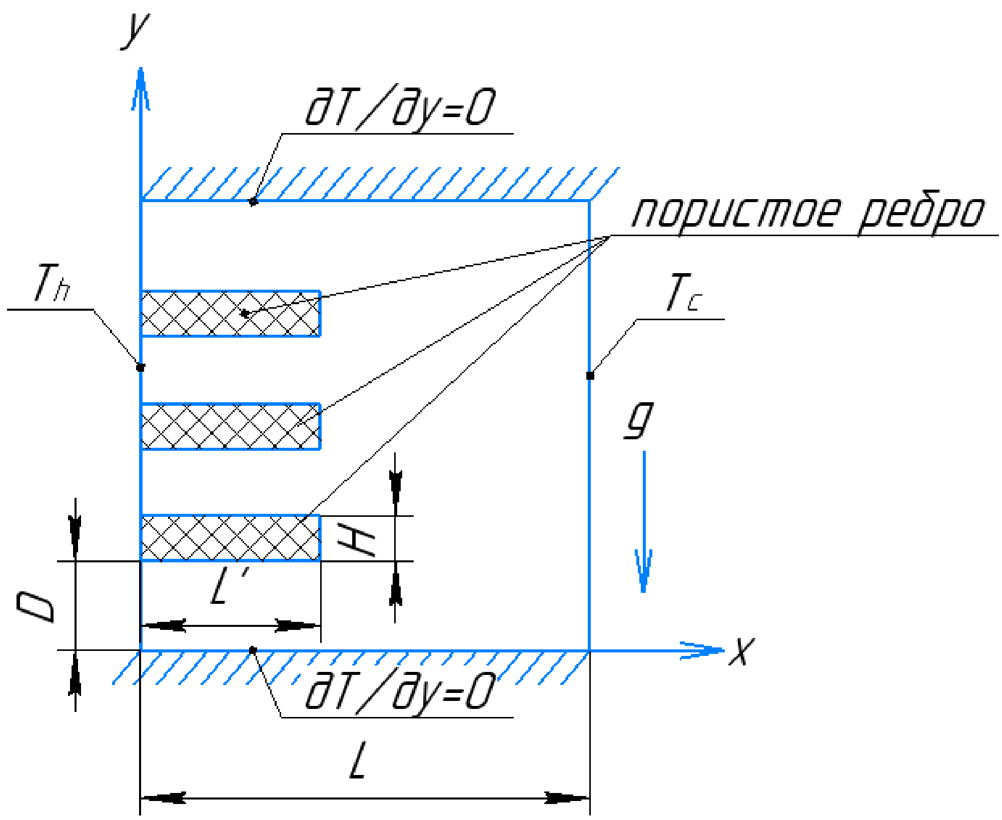


Рисунок 2.2 – Замкнутая квадратная полость с пористыми ребрами

2.1.2 Математическая постановка задачи

Процесс нестационарного переноса тепла в исследуемой области описывается системой уравнений, состоящих из трех уравнений: уравнения неразрывности, движения и энергии. Если пренебречь вязкой диссипацией энергии и считаем, что теплофизические параметры жидкости из-за разности температуры остаются неизменными, кроме плотности в уравнении движения, то эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+g\beta(T-T_0), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=a_f\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right). \tag{2.4}$$

Система уравнений (2.1) – (2.4) может быть записана в другой форме, не содержащей давления путем перекрестного дифференцирования уравнения (2.2) и (2.3) с последующим вычитанием полученных уравнений, а также введения следующих параметров:

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}, v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}, \omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

где ψ, м/с^2 – функция тока,

ω, 1/с – вихрь скорости.

Тогда система уравнений (2.1) – (2.4) примет вид:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\omega, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+u\frac{\partial\omega}{\partial x}+v\frac{\partial\omega}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)+g\beta\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=a_f\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right). \qquad (2.7)$$

Обезразмерим систему уравнений (2.5) – (2.7), используя следующие масштабы:

$$X=\frac{x}{L}, Y=\frac{y}{L}, (U,V)=\frac{(u,v)}{V_0}, \tau=\frac{tV_0}{L}, \Psi=\frac{\psi}{V_0 L}, \Omega=\frac{\omega L}{V_0},$$

$$\theta=\frac{T-T_c}{T_h-T_c}, V_0=\sqrt{g\beta(T-T_0)L}\,.$$

Безразмерные уравнения в системе «функция тока – завихренность – температура», описывающие процесс теплопереноса внутри полости, примут вид:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2}=-\Omega, \qquad (2.8)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}+U\frac{\partial\Omega}{\partial X}+V\frac{\partial\Omega}{\partial Y}=\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial Y^2}\right)+\frac{\partial\theta}{\partial X}, \qquad (2.9)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+U\frac{\partial\theta}{\partial X}+V\frac{\partial\theta}{\partial Y}=\frac{1}{\sqrt{Pr\cdot Ra}}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2}\right). \qquad (2.10)$$

Для описания гидродинамики и теплопереноса внутри пористых ребер используются дифференциальные уравнения, записанные в безразмерных преобразованных переменных «функция тока – завихренность – температура», и три транспортные модели для пористой среды (модель Дарси, модель Дарси–Бринкмана и модель Дарси–Бринкмана–Форхгеймера). Для этих трех моделей уравнение энергии является общим:

$$\eta\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+U\frac{\partial\theta}{\partial X}+V\frac{\partial\theta}{\partial Y}=\frac{k_r}{\sqrt{Pr\cdot Ra}}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2}\right), \qquad (2.11)$$

Уравнение Пуассона для функции тока в случае нелинейных моделей для пористой среды (Дарси–Бринкмана и Дарси–Бринкмана–Форхгеймера) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2}=-\Omega. \qquad (2.12)$$

В случае линейной модели Дарси уравнение Пуассона для функции тока может быть записано в виде:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2}=-\varepsilon \mathrm{Da}\sqrt{\frac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{Pr}}}\frac{\partial\theta}{\partial X}, \tag{2.13}$$

Уравнение дисперсии завихренности имеет следующий вид:

- для модели Дарси–Бринкмана:

$$\varepsilon\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}+U\frac{\partial\Omega}{\partial X}+V\frac{\partial\Omega}{\partial Y}=\varepsilon\sqrt{\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ra}}}\cdot\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial Y^2}-\varepsilon\frac{\Omega}{\mathrm{Da}}\right)+\varepsilon^2\frac{\partial\theta}{\partial X} \tag{2.14}$$

- для модели Дарси–Бринкмана–Форхгеймера:

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}+U\frac{\partial\Omega}{\partial X}+V\frac{\partial\Omega}{\partial Y}=\varepsilon\sqrt{\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ra}}}\cdot\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial Y^2}-\varepsilon\frac{\Omega}{\mathrm{Da}}\right)+\\ -\frac{1.75}{\sqrt{150}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mathrm{Da}}}\sqrt{U^2+V^2}\left(\Omega-V\frac{\partial\sqrt{U^2+V^2}}{\partial X}+U\frac{\partial\sqrt{U^2+V^2}}{\partial Y}\right)+\varepsilon^2\frac{\partial\theta}{\partial X}\end{gathered} \tag{2.15}$$

Для описания теплообмена внутри твердых ребер используется только уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\frac{a_s/a_f}{\sqrt{\mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Ra}}}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2}\right) \tag{2.16}$$

Здесь X, Y – безразмерные декартовые координаты; U, V – безразмерные компоненты вектора скорости; τ – безразмерное время; $\eta=\varepsilon+(1-\varepsilon)\frac{\rho_s c_{p_s}}{\rho_f c_{p_f}}$ – относительный коэффициент объемной теплоемкости; Ψ – безразмерная функция тока; Ω – безразмерная завихренность; θ – безразмерная температура; a_s, a_f – температуропроводность материала ребра и жидкости; λ_s, λ_f – коэффициенты теплопроводности материала ребра и жидкости соответственно; $k_r=\lambda_{eff}/\lambda_f$ – относительный коэффициент теплопроводности; $\lambda_{eff}=\varepsilon\lambda_f+(1-\varepsilon)\lambda_s$ – эффективный коэффициент теплопроводности пористой среды; Ra – число Рэлея; Pr – число Прандтля; Da – число Дарси.

Безразмерные начальные и граничные условия для системы уравнений (2.8) – (2.16) имеют вид:

$$\left|\begin{array}{l} \tau = 0, \quad \Psi = \Omega = 0, \quad \theta = 0.5; \\ \mathrm{Y} = 0, \quad \mathrm{Y} = 1, \quad 0 \le \mathrm{X} \le 1, \quad \dfrac{\partial \Psi}{\partial \mathrm{Y}} = 0, \quad \Psi = 0, \quad \dfrac{\partial \theta}{\partial \mathrm{Y}} = 0; \\ \mathrm{X} = 0, \quad 0 \le \mathrm{Y} \le 1, \quad \dfrac{\partial \Psi}{\partial \mathrm{X}} = 0, \quad \Psi = 0, \quad \theta = 1; \\ \mathrm{X} = 1, \quad 0 \le \mathrm{Y} \le 1, \quad \dfrac{\partial \Psi}{\partial \mathrm{X}} = 0, \quad \Psi = 0, \quad \theta = 0. \end{array}\right. \tag{2.17}$$

На границе «жидкость-пористая среда»:

$$\left|\begin{array}{l} \Psi_{\mathrm{f}} = \Psi_{\mathrm{p}}, \dfrac{\partial \Psi_{\mathrm{f}}}{\partial \bar{\mathrm{n}}} = \dfrac{\partial \Psi_{\mathrm{p}}}{\partial \bar{\mathrm{n}}}, \\ \Omega_{\mathrm{f}} = \Omega_{\mathrm{p}}, \dfrac{\partial \Omega_{\mathrm{f}}}{\partial \bar{\mathrm{n}}} = \dfrac{\partial \Omega_{\mathrm{p}}}{\partial \bar{\mathrm{n}}}, \\ \theta_{\mathrm{f}} = \theta_{\mathrm{p}}, \quad \dfrac{\partial \theta_{\mathrm{f}}}{\partial \bar{\mathrm{n}}} = \mathrm{k_r} \cdot \dfrac{\partial \theta_{\mathrm{p}}}{\partial \bar{\mathrm{n}}}, \end{array}\right. \tag{2.18}$$

где $\bar{\mathrm{n}}$ – вектор нормали к поверхности.

На границе «жидкость-твердое тело»:

$$\left|\begin{array}{l} \Psi_{\mathrm{f}} = 0, \quad \dfrac{\partial \Psi_{\mathrm{f}}}{\partial \bar{\mathrm{n}}} = 0, \\ \Omega_{\mathrm{f}} = -\dfrac{\partial^2 \Psi_{\mathrm{f}}}{\partial \bar{\mathrm{n}}^2}, \\ \theta_{\mathrm{f}} = \theta_{\mathrm{s}}, \quad \dfrac{\partial \theta_{\mathrm{f}}}{\partial \bar{\mathrm{n}}} = \dfrac{\lambda_{\mathrm{s}}}{\lambda_{\mathrm{f}}} \cdot \dfrac{\partial \theta_{\mathrm{s}}}{\partial \bar{\mathrm{n}}}. \end{array}\right. \tag{2.19}$$

2.2. Методы решения сформулированной краевой задачи

2.2.1 Краткое описание метода конечных разностей

Для решения системы уравнений (2.8) – (2.16) вместе с начальными и граничными условиями (2.17) – (2.19) используем метод конечных разностей (МКР). Суть метода в следующем: заменяем производные в дифференциальном уравнении конечноразностными аппроксимациями. При этом нужно добиться двух противоречивых целей: хорошего качества аппроксимации и устойчивого решения алгебраических систем.

Для аппроксимации введем пространственно-временную сетку:

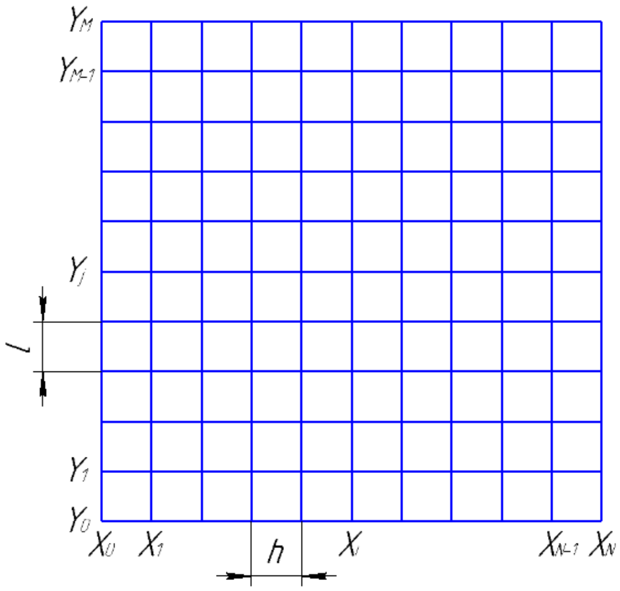


Рисунок 2.3 – Пространственно-временная сетка

Здесь X_0, X_N, Y_0, Y_M – координаты граничных узлов,

i, j – номер узла,

X_i, Y_j – координаты внутренних узлов, $i = 1, \dots, N-1;\ \ j = 1$ $=, \dots, M-1$,

$h = X_{i+1} - X_i = X_i - X_{i-1}$ – шаг сетки по координате X,

$l = Y_{j+1} - Y_j = Y_j - Y_{j-1}$ – шаг сетки по координате Y.

2.2.2 Аппроксимация транспортных уравнений

Для аппроксимации транспортных уравнений будем использовать следующие простые разностные схемы. Например, для аппроксимации первой производной от завихренности по пространственной координате используем следующие формулы:

- с первым порядком точности:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} = \frac{\Omega_{i+1,j} - \Omega_{i,j}}{h} + O(h), \tag{2.20}$$

или

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} = \frac{\Omega_{i,j} - \Omega_{i-1,j}}{h} + O(h). \tag{2.21}$$

- с вторым порядком точности:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} = \frac{\Omega_{i+1,j} - \Omega_{i-1,j}}{2h} + O(h^2). \tag{2.22}$$

Формула аппроксимации второй производной может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} = \frac{\Omega_{i+1,j} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2). \tag{2.23}$$

Чтобы получить хорошее качество аппроксимации, аппроксимируем первые и вторые производные со вторым порядком точности.

При аппроксимации производных также желательно, чтобы решение алгебраических систем было устойчивым. Для аппроксимации конвективных слагаемых уравнений параболического типа используем формулу А. А. Самарского. Применяем также локально-одномерную схему А. А. Самарского, которая позволяет сводить двумерные уравнения к системе одномерных уравнений. Суть этой схемы заключается в том, что шаг по времени реализуется в два этапа – на промежуточном временном слое проводим дискретизацию уравнения завихренности только в направлении X и получаем одномерное уравнение, которое содержит только X-переменные. После чего проводим дискретизацию уравнения завихренности, но уже в направлении Y и получаем одномерное уравнение, которое содержит только Y-переменные и определяем значения завихренности на целом временном слое.

Аппроксимируем уравнение завихренности для жидкости (2.9):

$$\frac{\Omega_{i,j}^{n+1/2}-\Omega_{i,j}^{n}}{\tau}+U_{i,j}^{n}\frac{\Omega_{i+1,j}^{n+1/2}-\Omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{2h}-\left|U_{i,j}^{n}\right|\frac{\Omega_{i+1,j}^{n+1/2}-2\Omega_{i,j}^{n+1/2}+\Omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{2h}=$$
$$=\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\cdot\left[\left(1+\left|U_{i,j}^{n}\right|\frac{h\cdot\sqrt{\frac{Ra}{Pr}}}{2}\right)^{-1}\frac{\Omega_{i+1,j}^{n+1/2}-2\Omega_{i,j}^{n+1/2}+\Omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{h^2}\right]+ \tag{2.24}$$
$$+\frac{\theta_{i+1,j}^{n}-\theta_{i-1,j}^{n}}{2h},$$

$$\frac{\Omega_{i,j}^{n+1}-\Omega_{i,j}^{n+1/2}}{\tau}+V_{i,j}^{n}\frac{\Omega_{i,j+1}^{n+1}-\Omega_{i,j-1}^{n+1}}{2l}-\left|V_{i,j}^{n}\right|\frac{\Omega_{i,j+1}^{n+1}-2\Omega_{i,j}^{n+1}+\Omega_{i,j-1}^{n+1}}{2l}=$$
$$=\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\cdot\left[\left(1+\left|V_{i,j}^{n}\right|\frac{l\cdot\sqrt{\frac{Ra}{Pr}}}{2}\right)^{-1}\frac{\Omega_{i,j+1}^{n+1}-2\Omega_{i,j}^{n+1}+\Omega_{i,j-1}^{n+1}}{l^2}\right]. \tag{2.25}$$

Аппроксимируем уравнение Пуассона для жидкости (2.8):

$$\frac{\Psi_{i+1,j}-2\Psi_{i,j}+\Psi_{i-1,j}}{h^2}+\frac{\Psi_{i,j+1}-2\Psi_{i,j}+\Psi_{i,j-1}}{l^2}=-\Omega_{i,j} \tag{2.26}$$

Аппроксимация уравнения энергии для жидкости имеет вид (2.10):

$$\frac{\theta_{i,j}^{n+1/2}-\theta_{i,j}^{n}}{\tau}+U_{i,j}^{n}\cdot\frac{\theta_{i+1,j}^{n+1/2}-\theta_{i-1,j}^{n+1/2}}{2h}-\left|U_{i,j}^{n}\right|\cdot\frac{\theta_{i+1,j}^{n+1/2}-2\theta_{i,j}^{n+1/2}+\theta_{i-1,j}^{n+1/2}}{2h}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{Ra\cdot Pr}}\left[\left(1+\left|U_{i,j}^{n}\right|\cdot\frac{\sqrt{Ra\cdot Pr}\cdot h}{2}\right)^{-1}\frac{\theta_{i+1,j}^{n+1/2}-2\theta_{i,j}^{n+1/2}+\theta_{i-1,j}^{n+1/2}}{h^2}\right], \tag{2.27}$$

$$\frac{\theta_{i,j}^{n+1}-\theta_{i,j}^{n+1/2}}{\tau}+V_{i,j}^{n}\cdot\frac{\theta_{i,j+1}^{n+1}-\theta_{i,j-1}^{n+1}}{2l}-\left|V_{i,j}^{n}\right|\cdot\frac{\theta_{i,j+1}^{n+1}-2\theta_{i,j}^{n+1}+\theta_{i,j-1}^{n+1}}{2l}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{Ra\cdot Pr}}\left[\left(1+\left|V_{i,j}^{n}\right|\cdot\frac{\sqrt{Ra\cdot Pr}\cdot l}{2}\right)^{-1}\cdot\frac{\theta_{i,j+1}^{n+1}-2\theta_{i,j}^{n+1}+\theta_{i,j-1}^{n+1}}{l^2}\right]. \tag{2.28}$$

Решаем уравнения (2.24), (2.25), (2.27) и (2.28) методом прогонки, а уравнение (2.26) – методом последующей верхней релаксации.

В качестве примера решаем уравнение (2.24) методом прогонки.

Приведем уравнение к виду $A_i\Omega_{i+1,j}^{n+1/2} - B_i\Omega_{i,j}^{n+1/2} + C_i\Omega_{i-1,j}^{n+1/2} = F_i$. Тогда коэффициенты A_i, B_i, C_i и F_i примут вид:

$$A_i = \frac{1}{h^2}\cdot\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\cdot\left(1 + \left|U_{i,j}^n\right|\frac{h\cdot\sqrt{\frac{Ra}{Pr}}}{2}\right)^{-1} - \frac{U_{i,j}^n}{2h} + \frac{\left|U_{i,j}^n\right|}{2h}, \tag{2.29}$$

$$B_i = \frac{2}{h^2}\cdot\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\cdot\left(1 + \left|U_{i,j}^n\right|\frac{h\cdot\sqrt{\frac{Ra}{Pr}}}{2}\right)^{-1} + \frac{\left|U_{i,j}^n\right|}{h} + \frac{1}{\tau}, \tag{2.30}$$

$$C_i = \frac{1}{h^2}\cdot\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\cdot\left(1 + \left|U_{i,j}^n\right|\frac{h\cdot\sqrt{\frac{Ra}{Pr}}}{2}\right)^{-1} + \frac{U_{i,j}^n}{2h} + \frac{\left|U_{i,j}^n\right|}{2h}, \tag{2.31}$$

$$F_i = -\frac{1}{\tau}\cdot\Omega_{i,j}^n - \frac{\theta_{i+1,j}^n - \theta_{i-1,j}^n}{2h}. \tag{2.32}$$

Прогоночая формула представлена в виде:

$$\Omega_{i,j}^{n+1/2} = \alpha_i\Omega_{i+1,j}^{n+1/2} + \beta_i, \qquad i = 1, \dots, N-1. \tag{2.33}$$

Прогоночные коэффициенты имеют вид:

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - \alpha_{i-1}C_i}, \qquad \beta_i = \frac{\beta_{i-1}C_i - F_i}{B_i - \alpha_{i-1}C_i}, \qquad i = 1, \dots, N-1. \tag{2.34}$$

Для определения прогоночных коэффициентов в (2.34) необходимо найти α_0 и β_0 из левого граничного условия.

В качестве граничного условия для вектора вихря используем граничное условие вида:

$$\Omega_{o,j} = -\left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}\right|_{o,j}. \tag{2.35}$$

Аппроксимируем производную (2.35) со вторым порядком точности:

$$\Psi_{1,j} = \Psi_{0,j} + h\left.\frac{\partial\Psi}{\partial X}\right|_{o,j} + \frac{h^2}{2}\cdot\left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}\right|_{o,j} + \frac{h^3}{6}\cdot\left.\frac{\partial^3\Psi}{\partial X^3}\right|_{o,j} + O(h^4), \tag{2.36}$$

$$\Psi_{2,j} = \Psi_{0,j} + 2h\frac{\partial\Psi}{\partial X}\bigg|_{o,j} + 2h^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}\bigg|_{o,j} + \frac{8h^3}{6}\cdot\frac{\partial^3\Psi}{\partial X^3}\bigg|_{o,j} + O(h^4), \tag{2.37}$$

Умножаем первое уравнение на 8 и вычитаем его из второго уравнения, получаем:

$$8\Psi_{1,j} - \Psi_{2,j} = 7\Psi_{0,j} + 6h\frac{\partial\Psi}{\partial X}\bigg|_{o,j} + 2h^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}\bigg|_{o,j} + O(h^4),$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}\bigg|_{o,j} = \frac{8\Psi_{1,j} - \Psi_{2,j} - 7\Psi_{0,j}}{2h^2} + \frac{h}{3}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial X}\bigg|_{o,j} + O(h^2). \tag{2.38}$$

Тогда $\Omega_{0,j}^{n+1/2}$ в (2.35) выражается как:

$$\Omega_{0,j}^{n+1/2} = -\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}\bigg|_{o,j} = \frac{\Psi_{2,j} - 8\Psi_{1,j}}{2h^2}. \tag{2.39}$$

При $i = 0$ прогоночная формула имеет вид:

$$\Omega_{0,j}^{n+1/2} = \alpha_0\Omega_{1,j}^{n+1/2} + \beta_0 \tag{2.40}$$

Из (2.39) и (2.40) следует:

$$\alpha_0 = 0, \beta_0 = \frac{\Psi_{2,j}^{n+1/2} - 8\Psi_{1,j}^{n+1/2}}{2h^2}. \tag{2.41}$$

Таким образом, будут определены все прогоночные коэффциенты α_i и β_i ($i = 1, \dots, N-1$).

Для определения $\Omega_{i,j}^{n+1/2}$ ($i = N-1, \dots, 1$) необходимо найти $\Omega_{N,j}^{n+1/2}$ из правой границы.

Учитываем, что на правой границе стоит граничное условие вида:

$$\Omega_{N,j} = -\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}\bigg|_{N,j}. \tag{2.42}$$

Аппроксимируем производную $\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}\Big|_{N,j}$ со вторым порядком точности:

$$\Psi_{N-1,j} = \Psi_{N,j} - h\frac{\partial\Psi}{\partial X}\bigg|_{N,j} + \frac{h^2}{2}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}\bigg|_{N,j} - \frac{h^3}{6}\cdot\frac{\partial^3\Psi}{\partial X^3}\bigg|_{N,j} + O(h^4), \tag{2.43}$$

$$\Psi_{N-2,j} = \Psi_{N,j} - 2h\frac{\partial\Psi}{\partial X}\bigg|_{N,j} + 2h^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}\bigg|_{N,j} - \frac{8h^3}{6}\cdot\frac{\partial^3\Psi}{\partial X^3}\bigg|_{N,j} + O(h^4), \tag{2.44}$$

Умножаем уравнение (2.43) на 8 и вычитаем его из уравнения (2.44), получаем:

$$8\Psi_{N-1,j} - \Psi_{N-2,j} = 7\Psi_{N,j} - 6h\left.\frac{\partial\Psi}{\partial X}\right|_{N,j} + 2h^2\left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}\right|_{N,j} + O(h^4),$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}\right|_{N,j} = \frac{8\Psi_{N-1,j} - \Psi_{N-2,j} - 7\Psi_{N,j}}{2h^2} + \frac{3}{h}\cdot\left.\frac{\partial\Psi}{\partial X}\right|_{N,j} + O(h^2).$$

$$\Rightarrow \Omega_{N,j} = -\left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}\right|_{N,j} = \frac{\Psi_{N-2,j}^{n+1/2} - 8\Psi_{N-1,j}^{n+1/2}}{2h^2}. \tag{2.45}$$

Зная $\Omega_{N,j}$, проводим обратную прогонку по формуле:

$$\Omega_{i,j}^{n+1/2} = \alpha_i\Omega_{i+1,j}^{n+1/2} + \beta_i, \qquad i = N-1, \dots, 0. \tag{2.46}$$

Таким образом, найдем все значения $\Omega_{i,j}^{n+1/2}$ на промежуточном временном слое.

Уравнение (2.25) решается аналогично. Все значения $\Omega_{i,j}^{n+1}$ на следующем временном слое определены. Уравнение дисперсии завихренности было решено.

Уравнения дисперсии завихренности для пористой среды (2.14) и (2.15), а также уравнения энергии (2.10), (2.11), (2.27) и (2.28) решаются аналогично.

Решение уравнения Пуассона (2.12) проводится следующим образом:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = -\Omega.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \Omega = 0, \tag{2.47}$$

Аппроксимируем это уравнение:

$$\frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{h^2} + \frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{l^2} + \Omega_{i,j} = 0,$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{l^2}\right)\Psi_{i,j} = \frac{\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j}}{h^2} + \frac{\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}}{l^2} + \Omega_{i,j},$$

$$\Rightarrow \widetilde{\Psi}_{i,j} = \frac{\dfrac{\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j}}{h^2} + \dfrac{\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}}{l^2}}{\dfrac{2}{h^2} + \dfrac{2}{l^2}} + \frac{\Omega_{i,j}}{\dfrac{2}{h^2} + \dfrac{2}{l^2}} =$$

$$= \frac{l^2\Psi_{i+1,j} + l^2\Psi_{i-1,j} + h^2\Psi_{i,j+1} + h^2\Psi_{i,j-1} + h^2l^2\Omega_{i,j}}{2\cdot(h^2 + l^2)}. \tag{2.48}$$

Находим $\widetilde{\Psi}_{i,j}$ $(i = 1, \ldots, N-1; j = 1, \ldots, M-1)$ методом Зейделя:

$$\widetilde{\Psi}_{i,j}^{(k+1)} = \frac{l^2\Psi_{i+1,j}^{(k+1)} + l^2\Psi_{i-1,j}^{(k+1)} + h^2\Psi_{i,j+1}^{(k+1)} + h^2\Psi_{i,j-1}^{(k+1)}}{2 \cdot (h^2 + l^2)} + h^2 l^2 \Omega_{i,j}. \tag{2.49}$$

После чего применяем метод последовательной верхней релаксации:

$$\Psi_{i,j}^{(k+1)} = \Psi_{i,j}^{(k)} + \gamma \cdot \left(\widetilde{\Psi}_{i,j}^{(k+1)} - \Psi_{i,j}^{(k)}\right) = (1-\gamma) \cdot \Psi_{i,j}^{k} + \gamma \cdot \widetilde{\Psi}_{i,j}^{(k+1)},$$

$$\Rightarrow \Psi_{i,j}^{(k+1)} = (1-\gamma) \cdot \Psi_{i,j}^{(k)} +$$

$$+\gamma \times \left(\frac{l^2\Psi_{i+1,j}^{(k+1)} + l^2\Psi_{i-1,j}^{(k+1)} + h^2\Psi_{i,j+1}^{(k+1)} + h^2\Psi_{i,j-1}^{(k+1)}}{2 \cdot (h^2 + l^2)} + h^2 l^2 \Omega_{i,j}\right), \tag{2.50}$$

где k – номер итерации,

$\gamma \in (1{,}2)$ – параметр релаксации.

Уравнение (2.13) решается аналогично.

Рассчитываем среднее число Нуссельта на правой стенке:

$$Nu = \int_0^1 Nu_l dY, \tag{2.51}$$

где Nu_l – локальное число Нуссельта, которое рассчитывается по формуле:

$$Nu_l = \left.\frac{\partial\theta}{\partial X}\right|_{N,j}. \tag{2.52}$$

Аппроксимируем (2.52) со вторым порядком точности:

Разлагаем $\theta_{N-1,j}$ и $\theta_{N-2,j}$ по формуле Тейлора:

$$\theta_{N-1,j} = \theta_{N,j} - h \cdot \left.\frac{\partial\theta}{\partial X}\right|_{N,j} + \frac{h^2}{2} \cdot \left.\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2}\right|_{N,j} + O(h^3), \tag{2.53}$$

$$\theta_{N-2,j} = \theta_{N,j} - 2h \cdot \left.\frac{\partial\theta}{\partial X}\right|_{N,j} + 2h^2 \cdot \left.\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2}\right|_{N,j} + O(h^3), \tag{2.54}$$

Умножаем (2.53) на 4 и вычитаем из него (2.54), получаем:

$$4\theta_{N-1,j} - \theta_{N-2,j} = 3\theta_{N,j} - 2h \cdot \left.\frac{\partial\theta}{\partial X}\right|_{N,j} + O(h^3),$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial\theta}{\partial X}\right|_{N,j} = \frac{-4\theta_{N-1,j} + \theta_{N-2,j} + 3\theta_{N,j}}{2h},$$

$$\Rightarrow \ Nu_l = \frac{3\theta_{N,j} + \theta_{N-2,j} - 4\theta_{N-1,j}}{2h}. \qquad (2.55)$$

Следовательно:

$$Nu = \int_0^1 \frac{3\theta_{N,j} + \theta_{N-2,j} - 4\theta_{N-1,j}}{2h} dY. \qquad (2.56)$$

Находим этот интеграл методом трапеции:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right], \qquad (2.57)$$

где $h = x_{i+1} - x_i$ – шаг интегрирования,

$n = \frac{b-a}{h}$ – количество разбиений.

Следовательно:

$$Nu = \frac{h}{3} \cdot \left(\frac{3\theta_{N,0} + \theta_{N-2,0} - 4\theta_{N-1,0}}{2h} + \frac{3\theta_{N,M} + \theta_{N-2,M} - 4\theta_{N-1,M}}{2h} + 2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{3\theta_{N,i} + \theta_{N-2,i} - 4\theta_{N-1,i}}{2h} \right) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(3\theta_{N,0} + \theta_{N-2,0} - 4\theta_{N-1,0} + 3\theta_{N,M} + \theta_{N-2,M} - 4\theta_{N-1,M} + 2\sum_{i=1}^{n-1} 3\theta_{N,i} + \theta_{N-2,i} - 4\theta_{N-1,i} \right). \qquad (2.58)$$

2.3 Верификация разработанного численного алгоритма

2.3.1 Задача естественной конвекции в замкнутой дифференциально-обогреваемой полости

Жидкость ($Pr = 0.71$) находится в замкнутой области с твердыми стенками, имеющими высоту H и длину L (рисунок 2.4). На двух боковых стенках ($x = 0, L$) поддерживаются постоянные по высоте, но различные температуры T_1 и T_2

$(T_1 > T_2)$, а верхняя и нижняя стенки области $(y = 0, H)$ предполагаются теплоизолированными. Сила тяжести направлена вертикально вниз по оси y.

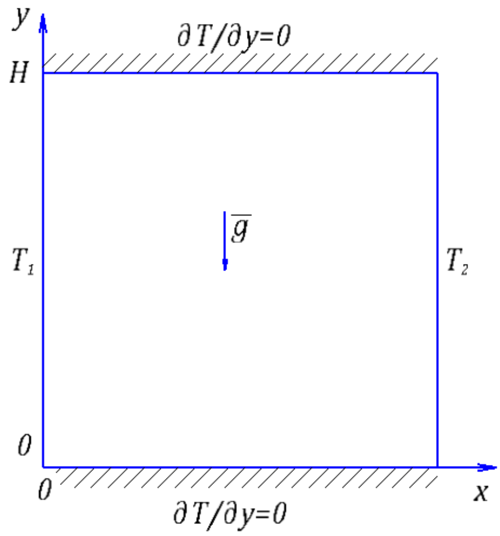


Рисунок 2.4 – Квадратная дифференциально-обогреваемая полость

На рисунках 2.5-2.8 показано сравнение результатов, полученных в этой работе на сетке 100×100 (левые рисунки) с результатами, полученными в работе [103] (правые рисунки) при различных числах Рэлея. Выявлено, что линии тока и поля температуры, полученные в данной работе, хорошо согласуются с теми же, полученными в работе [101].

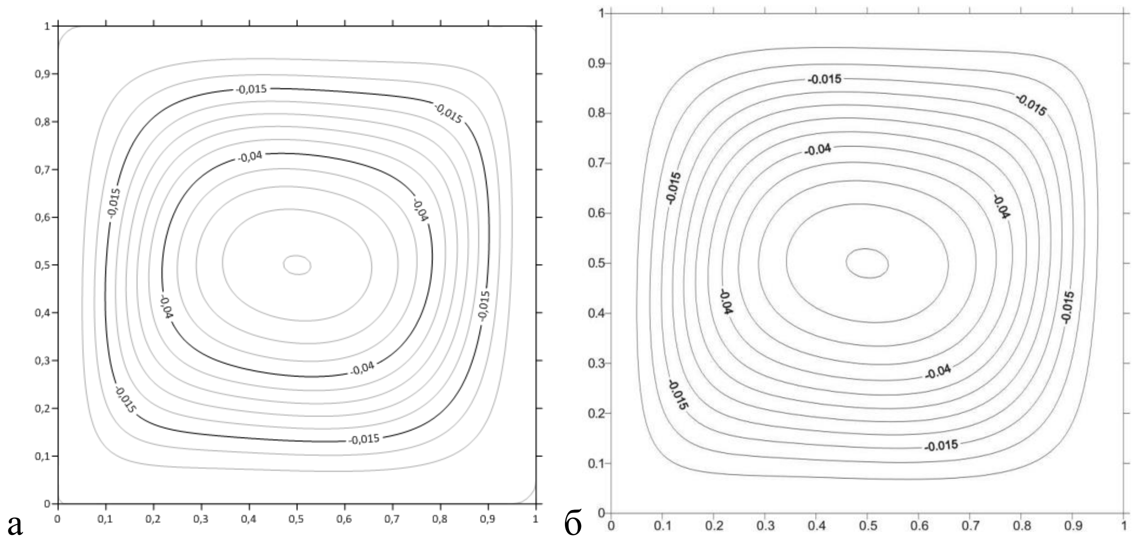


Рисунок 2.5 – Линии тока при $\mathrm{Ra} = 10^4$ (а – в данной работе, б – в работе [101])

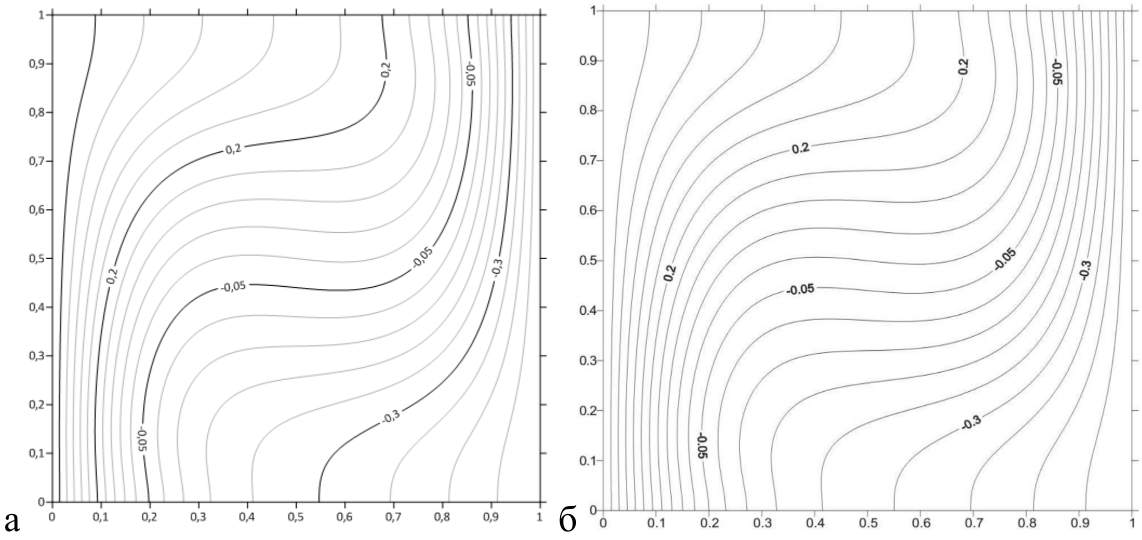


Рисунок 2.6 – Поле температуры при $\mathrm{Ra} = 10^4$ (а – в данной работе, б – в работе [101])

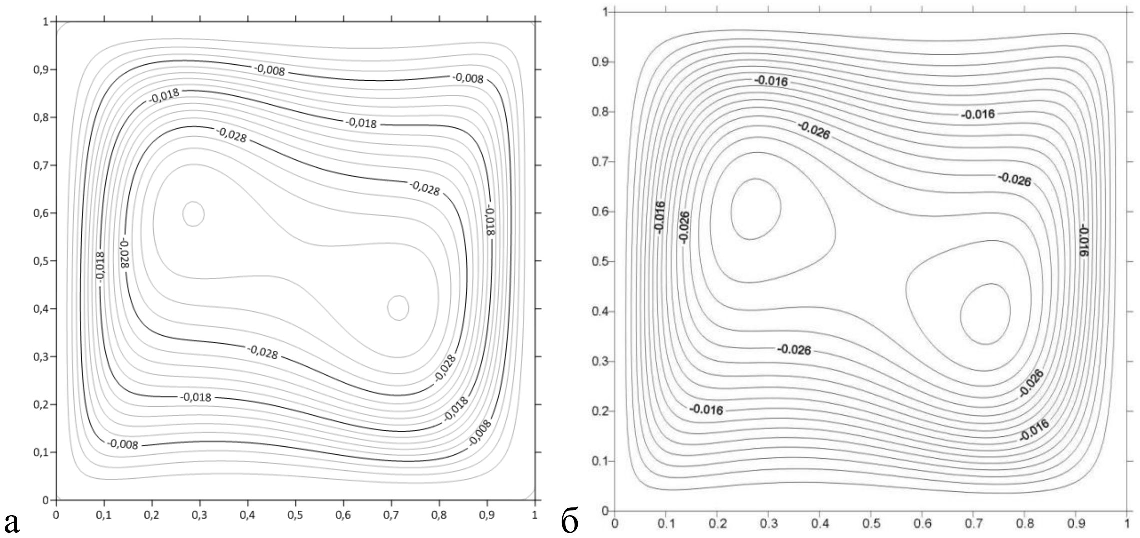


Рисунок 2.7 – Линии тока при $\mathrm{Ra} = 10^5$ (а – в данной работе, б – в работе [101])

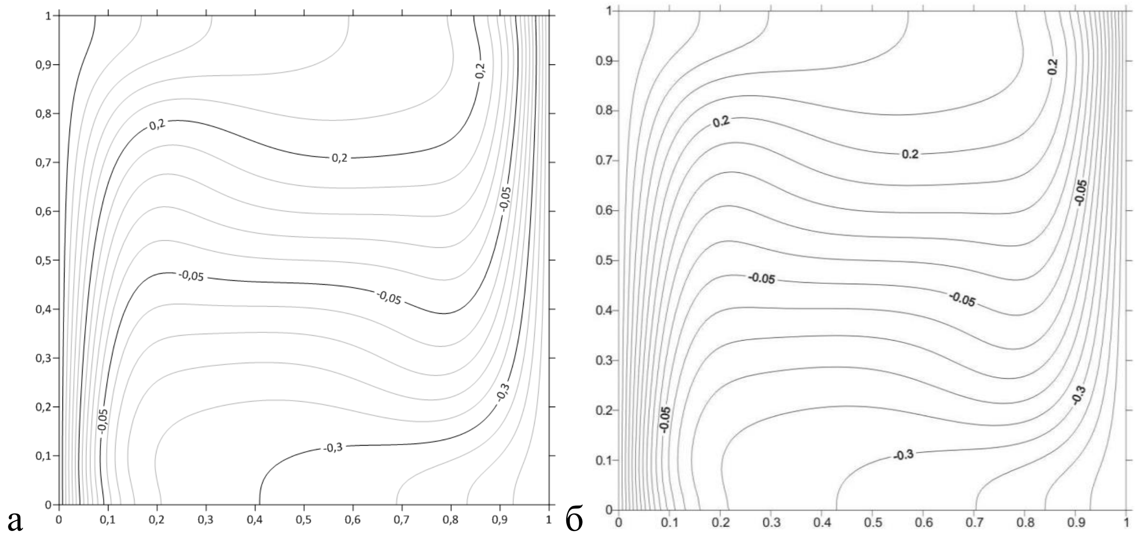


Рисунок 2.8 – Поле температуры при $\mathrm{Ra} = 10^5$ (а – в данной работе, б – в работе [101])

На таблице 2.1 показана зависимость среднего числа Нуссельта от вычислительной сетки в данной работе и в работе [101]. Видно, что чем мельче сетка, тем точнее результаты. В целом, среднее число Нуссельта, полученное в этой работе, различается от того же, полученного в работе [101], несущественно. С увеличением числа Рэлея на одинаковой сетке эти различия несколько возрастают.

Таблица 2.1 – Зависимость среднего числа Нуссельта от вычислительной сетки и сравнение с результатами работы [101]

Ra	Nu					
	12×12		24×24		50×50	
	Данная работа	Работа [101]	Данная работа	Работа [101]	Данная работа	Работа [101]
10^3	1,126	1,108	1,119	1,114	1,118	1,117
10^4	2,410	2,273	2,270	2,231	2,247	2,237
10^5	5,450	4,971	4,886	4,695	4,573	4,510
10^6	7,824	6,837	10,578	10,006	9,417	9,110
10^7	8,536	7,158	15,545	13,972	19,555	18,645

Вывод: разработанный алгоритм дает результаты, хорошо согласующиеся с результатами, полученными в работе [101]. Это доказывается сходством линий тока, полей температуры и чисел Нуссельта.

2.3.2 Задача естественной конвекции в замкнутой пористой дифференциально-обогреваемой полости (модели Дарси, Дарси–Бринкмана и Дарси–Форхгеймера)

Жидкость ($\mathrm{Pr} = 1$) находится в замкнутой квадратной полости размером L, заполненной пористым материалом с пористостью ε (рисунок 2.9). На двух боковых стенках ($\mathrm{x} = 0, \mathrm{L}$) поддерживаются постоянные по высоте, но различные температуры T_1 и T_2 ($\mathrm{T}_1 > \mathrm{T}_2$), а верхняя и нижняя стенки области ($\mathrm{y} = 0, \mathrm{H}$) предполагаются теплоизолированными. Сила тяжести направлена вертикально вниз по оси y.

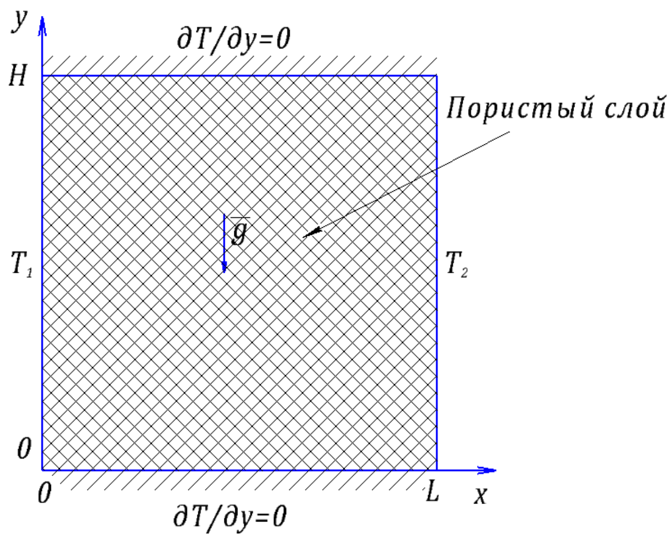


Рисунок 2.9 – Замкнутая пористая дифференциально-обогреваемая полость

В данной тестовой работе модель Бринкмана используется для описания гидродинамики внутри пористой среды. Сравниваем результаты, полученные в этой работе (верхние рисунки 2.10) с результатами, полученными в работе [102] (нижние рисунки 2.10). На этих рисунках видно, что разработанный алгоритм дает результаты, хорошо согласующиеся с результатами в работе [102].

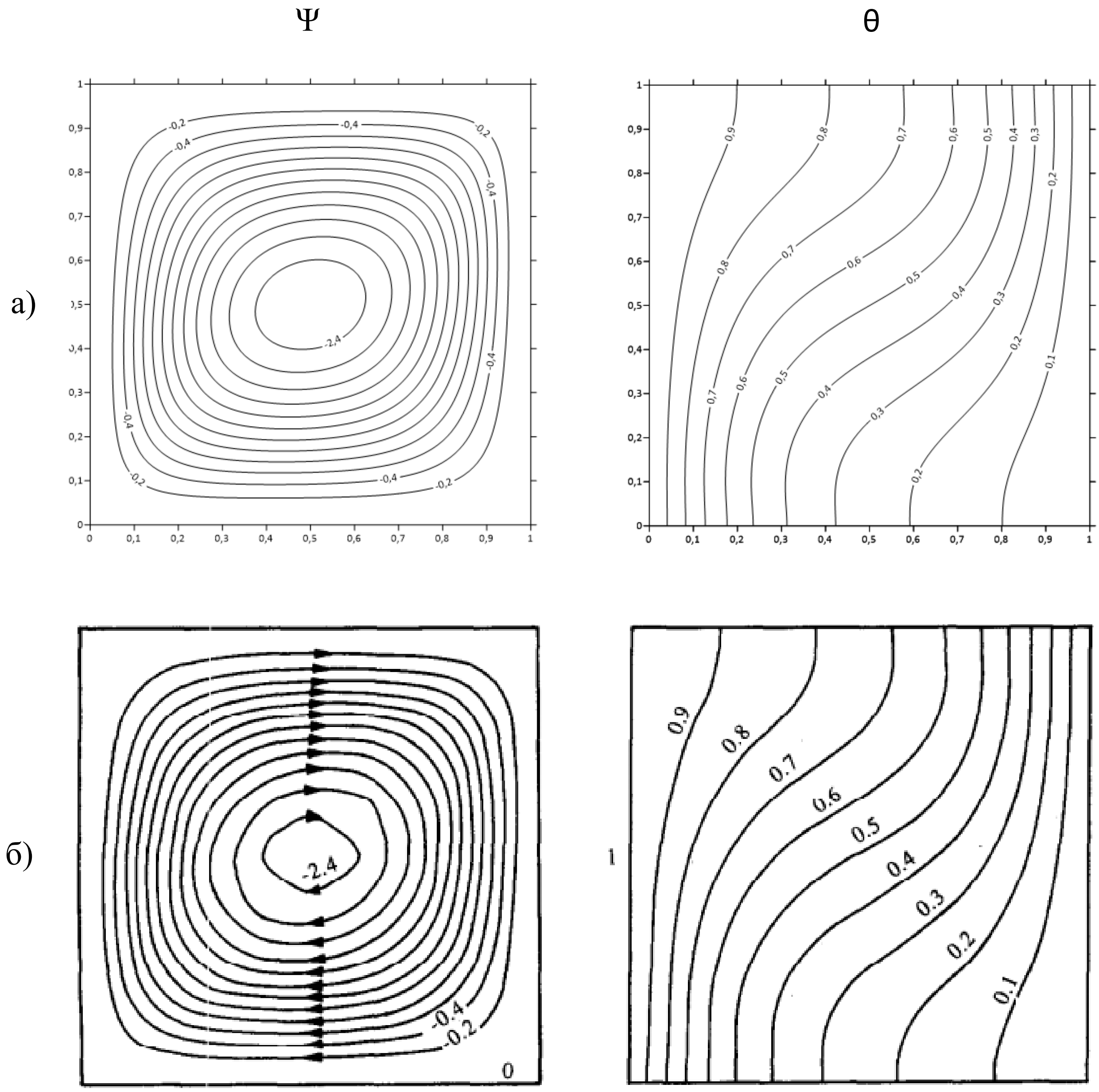


Рисунок 2.10 – Линии тока Ψ и поле температуры θ при $Da = 10^{-2}$, $Ra = 10^4$ и $\varepsilon = 0{,}6$, полученные в а) – данной работе, б) – работе [102]

Таблица 2.2 – Зависимость среднего числа Нуссельта от чисел Дарси и Рэлея при различных значениях пористости

Da	Ra	Nu					
		ε = 0.4		ε = 0.6		ε = 0.9	
		Данная работа	Работа [104]	Данная работа	Работа [104]	Данная работа	Работа [104]
10^{-6}	10^7	1.079	1.079	1.079	1.079	1.079	1.08
	10^8	3.18	2.97	3.186	2.997	3.19	3.00
	10^9	12.03	11.46	12.52	11.79	12.88	12.01

Продолжение таблицы 2.2

	5×10^9	25.11	23.09	25.076	25.367	25.06	26.91
10^{-4}	10^5	1.067	1.067	1.070	1.071	1.072	1.072
	10^6	2.61	2.55	2.715	2.725	2.799	2.740
	10^7	7.88	7.81	8.688	8.183	9.450	9.202
	5×10^7	13.99	13.82	15.855	15.567	17.80	16.77
10^{-2}	10^3	1.01	1.01	1.012	1.015	1.018	1.023
	10^4	1.409	1.408	1.538	1.530	1.68	1.64
	10^5	3.180	2.983	3.612	3.555	4.13	3.91
	5×10^5	5.33	4.99	6.085	5.740	6.91	6.70

Группа рисунков 2.11–2.13 показывает, что разница между моделями Дарси-Бринкмана и Дарси–Форхгеймера практически отсутствует. Результаты по модели Дарси при малых произведениях $\mathrm{Ra}\cdot\mathrm{Da}$ ($\mathrm{Ra}\cdot\mathrm{Da} < 10^3$) тоже сходятся с теми результатами, полученными при вычислении по моделям Дарси-Бринкмана и Дарси–Форхгеймера, а при $\mathrm{Ra}\cdot\mathrm{Da} > 10^3$, модель Дарси дает очень грубые результаты.

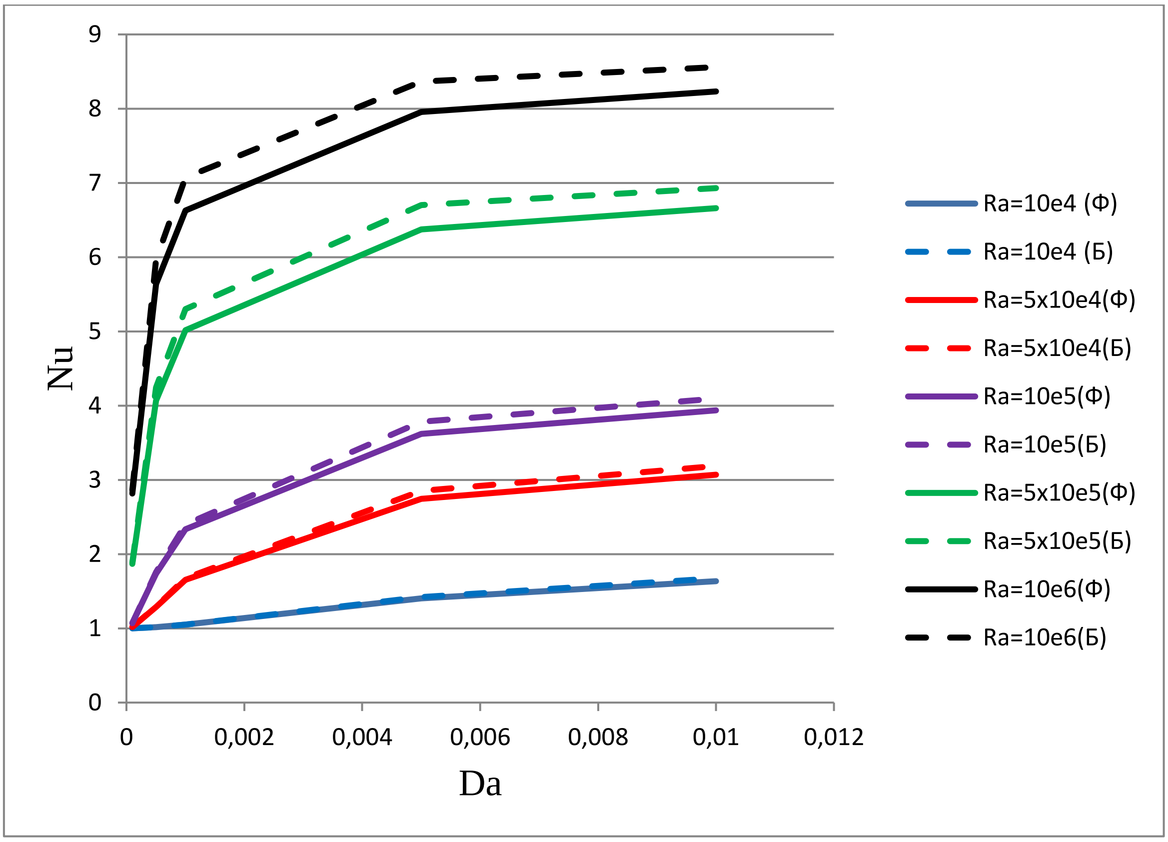


Рисунок 2.11 – График зависимости числа Нуссельта от числа Дарси (модели Дарси-Бринкмана и Дарси-Форхгеймер)

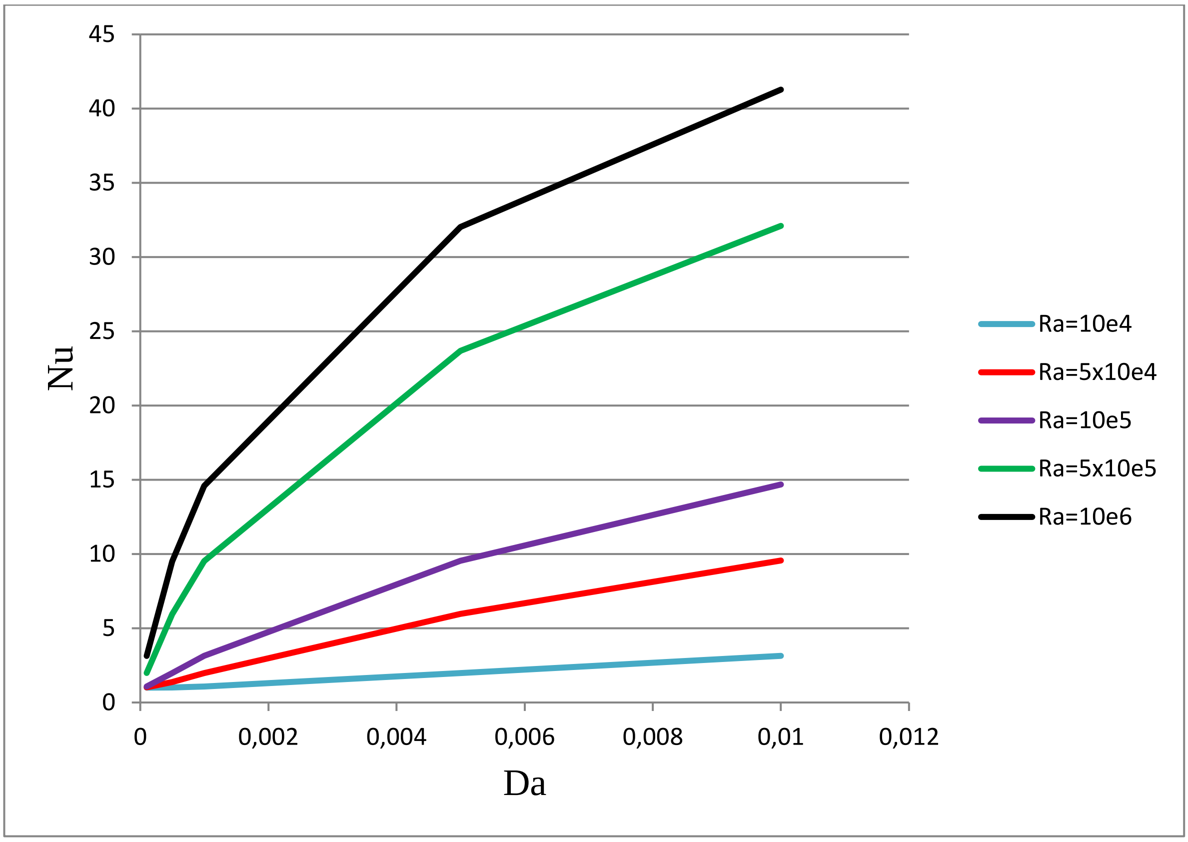


Рисунок 2.12 – График зависимости числа Нуссельта от числа Дарси (модель Дарси)

Вывод:

Полученные результаты хорошо согласуются с результатами, полученным в работе [102]. Это позволяет нам использовать разработанный алгоритм в дальнейшем.

Модель Дарси хорошо работает лишь при $\mathrm{Ra}\cdot\mathrm{Da} < 10^3$. Выше этого порога она начинает давать грубые результаты.

Модель Дарси-Бринкмана и модель Дарси-Форхгеймера в основном дают похожие результаты, поэтому мы можем выбрать любую из этих моделей для дальнейшего вычисления.

2.3.3 Задача естественной конвекции в замкнутой частично-пористой дифференциально-обогреваемой полости (модели Дарси, Дарси–Бринкмана и Дарси–Форхгеймера)

Жидкость ($\mathrm{Pr} = 0.71$) находится в замкнутой полости, заполненной внизу пористым материалом с пористостью ε и толщиной D_f (рисунок 2.13). На двух боковых стенках ($x = 0, L$) поддерживаются постоянные по высоте, но различные температуры T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$), а верхняя и нижняя стенки области ($y = 0, H$) предполагаются теплоизолированными. Сила тяжести направлена вертикально вниз по оси y.

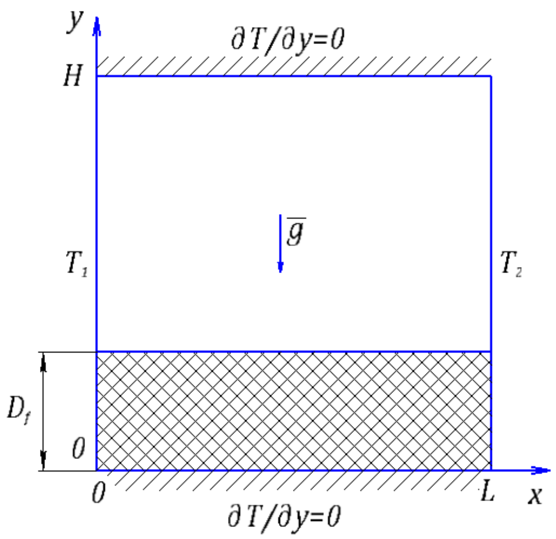


Рисунок 2.13 – Замкнутая частично-пористая дифференциально-обогреваемая полость

Сравниваем результаты, полученные в этой работе (верхние рисунки) с результатами, полученными в работе [103] (нижние рисунки). Сходство верхних и нижних рисунков 2.14 и 2.15 доказывает о том, что алгоритм разработан хорошо.

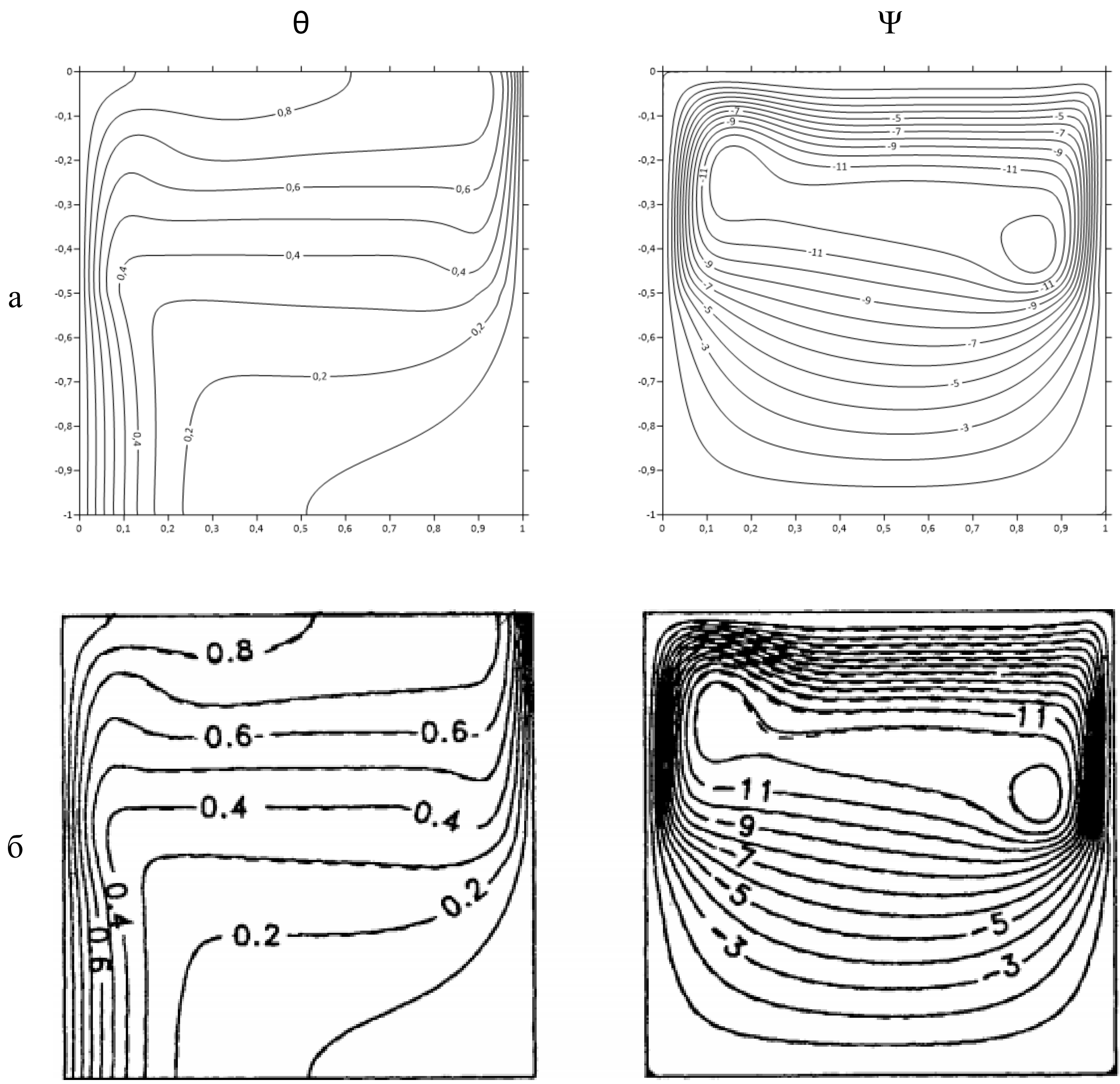


Рисунок 2.14 – Линии тока и поле температуры при $\mathrm{Da} = 10^{-5}$, $\mathrm{Ra} = 10^{6}$ и $\mathrm{D_f} = 0.5$ (а – в данной работе, б – в работе [103])

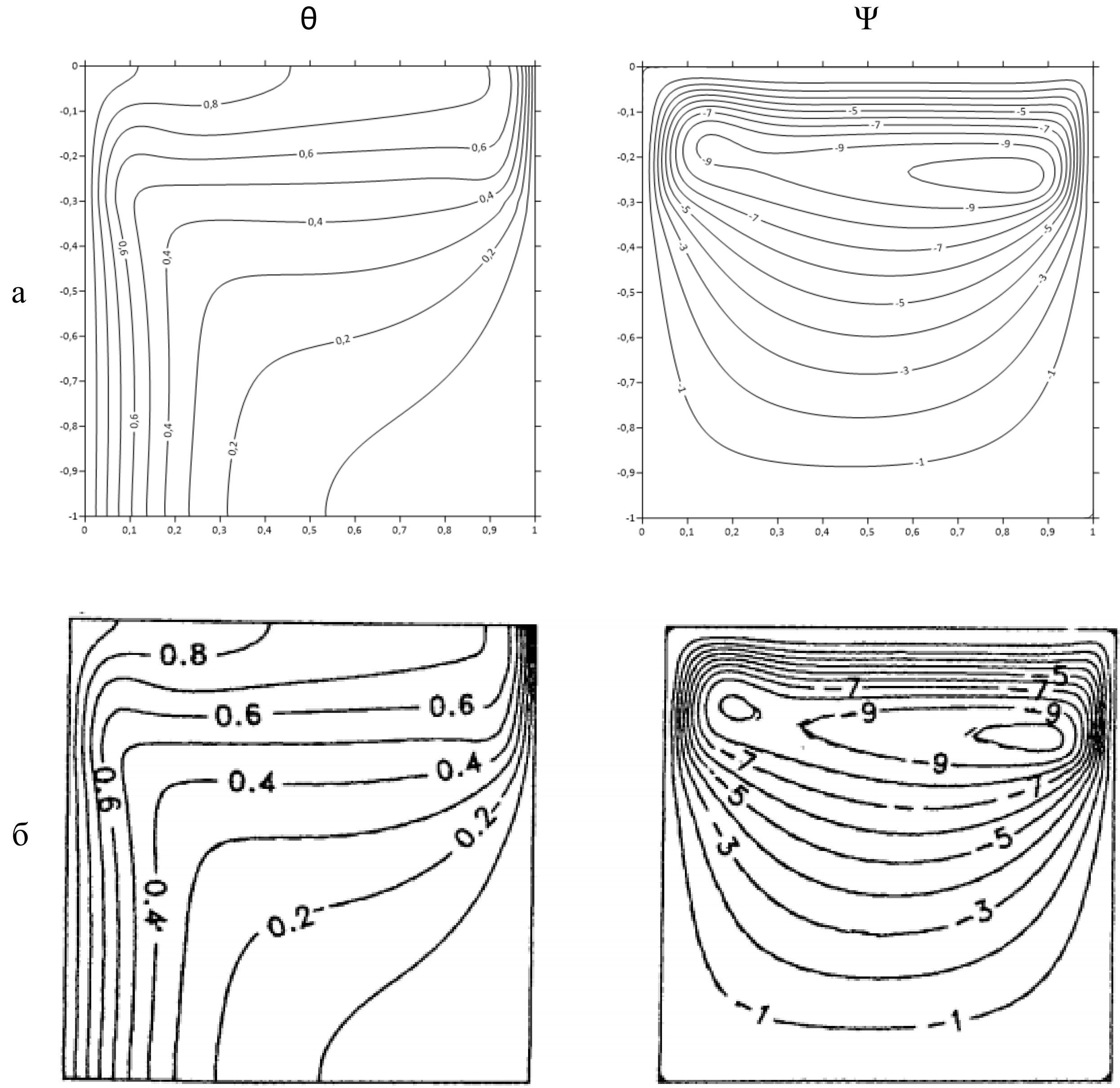


Рисунок 2.15 – Линии тока Ψ и поле температуры θ при $\mathrm{Da} = 10^{-5}$, $\mathrm{Ra} = 10^{6}$ и $\mathrm{D_f} = 0.3$ (а – в данной работе, б – в работе [103])

В таблицах 2.3-2.5 показаны результаты сравнения среднего числа Нуссельта и максимальной функции тока, полученные в данной работе и в работе [103] для модели Дарси, Дарси-Бринкмана, Дарси-Форхгеймера. Видно, что полученные результаты в данной работе хорошо согласуются с результатами, которые получены в работе [103] при рассматриваемых числах Рэлея и Дарси. Также заметим, что модель Дарси-Бринмана и модель Дарси-Форхгеймера дают схожие результаты. В то же время модель Дарси дает результаты, существенно отличные от тех же результатов, полученных моделями Дарси-Бринмана и Дарси-Форхгеймера при высоких числах Рэлея и Дарси. Исходя из того, можно использовать модель Дарси-Бринмана или Дарси-Форхгеймера для дальнейшего анализа.

Таблица 2.3 – Сравнение среднего числа Нуссельта и максимальной функции тока, полученные в данной работе и в работе [103] для модели Дарси

Ra	Da	Данная работа	[103]	Данная работа	[103]
		Nu_{avr}	Nu_{avr}	$\lvert\Psi_{max}\rvert$	$\lvert\Psi_{max}\rvert$
10^4	10^{-3}	1.6328	1.6253	2.9638	2.9499
10^4	10^{-4}	1.5310	1.5483	2.7697	2.8375
10^4	10^{-5}	1.5245	1.5423	2.7638	2.8315
10^4	10^{-6}	1.5219	1.5423	2.7531	2.8333
10^5	10^{-3}	4.0983	4.1072	8.2317	8.2363
10^5	10^{-4}	3.3412	3.3761	7.2339	7.3074
10^5	10^{-5}	3.2648	3.3073	7.1702	7.2403
10^5	10^{-6}	3.2686	3.3004	7.1434	7.2389
10^6	10^{-3}	11.493	10.734	19.697	19.095
10^6	10^{-4}	6.8632	6.9501	14.251	14.603
10^6	10^{-5}	6.2510	6.3806	13.228	13.589
10^6	10^{-6}	6.1907	6.3320	13.163	13.485

Таблица 2.4 – Сравнение среднего числа Нуссельта и максимальной функции тока, полученные в данной работе и в работе [105] для модели Дарси-Бринкмана

Ra	Da	Данная работа	[103]	Данная работа	[103]
		Nu_{avr}	Nu_{avr}	$\lvert\Psi_{max}\rvert$	$\lvert\Psi_{max}\rvert$
10^4	10^{-3}	1.6406	1.6461	3.0674	3.0749
10^4	10^{-4}	1.5386	1.5447	2.8083	2.8259
10^4	10^{-5}	1.5238	1.5296	2.7674	2.7858
10^4	10^{-6}	1.5223	1.5279	2.7630	2.7814
10^5	10^{-3}	3.7315	3.7768	7.8343	7.8421
10^5	10^{-4}	3.3154	3.3524	7.2638	7.2863
10^5	10^{-5}	3.2558	3.2913	7.1735	7.1929
10^5	10^{-6}	3.2511	3.2851	7.1643	7.1826
10^6	10^{-3}	8.0668	8.4540	15.829	16.009

Продолжение таблицы 2.4

10^6	10^{-4}	6.5757	6.8653	14.128	14.341
10^6	10^{-5}	6.1015	6.4014	13.385	13.548
10^6	10^{-6}	6.0535	6.3554	13.296	13.457

Таблица 2.5 – Сравнение среднего числа Нуссельта и максимальной функции тока, полученные в данной работе и в работе [105] для модели Дарси-Форхгеймера

Ra	Da	Данная работа	[105]	Данная работа	[105]
		Nu_{avr}	Nu_{avr}	$\lvert\Psi_{max}\rvert$	$\lvert\Psi_{max}\rvert$
10^4	10^{-3}	1.6561	1.6405	3.1618	3.0536
10^4	10^{-4}	1.5431	1.5418	2.8264	2.8321
10^4	10^{-5}	1.5171	1.5310	2.7431	2.7888
10^4	10^{-6}	1.5130	1.5238	2.7293	2.7823
10^5	10^{-3}	3.6304	3.6620	7.7897	7.6881
10^5	10^{-4}	3.3114	3.3611	7.2482	7.2860
10^5	10^{-5}	3.2476	3.2979	7.1281	7.1972
10^5	10^{-6}	3.2411	3.2874	7.1099	7.1842
10^6	10^{-3}	7.4033	7.7252	14.225	15.532
10^6	10^{-4}	6.5454	6.7818	13.665	14.190
10^6	10^{-5}	6.1324	6.4179	13.196	13.539
10^6	10^{-6}	6.0066	6.3627	13.129	13.455

Вывод:

Полученные результаты в данной работе хорошо согласуются с результатами, которые получены в работе [103] при рассматриваемых числах Рэлея и Дарси.

Модель Дарси-Бринмана и модель Дарси-Форхгеймера дают схожие результаты. Это позволяет нам использовать одну их них для дальнейшего анализа.

2.3.4 Задача естественной конвекции в замкнутой чистой полости при наличии теплопроводной стенки

Жидкость ($\mathrm{Pr} = 0.71$) находится в замкнутой наклонной полости, имеющей правую теплопроводную стенку толщины w (рисунок 2.16). Постоянный тепловой поток q подводится к левой стенке. На правой границе $(x = L)$ поддерживается постоянная температура по высоте T. Верхняя и нижняя стенки $(y = 0, H)$ предполагаются теплоизолированными. Сила тяжести направлена вертикально вниз. Полость находится под углом $(90 - \varphi)$ от оси y.

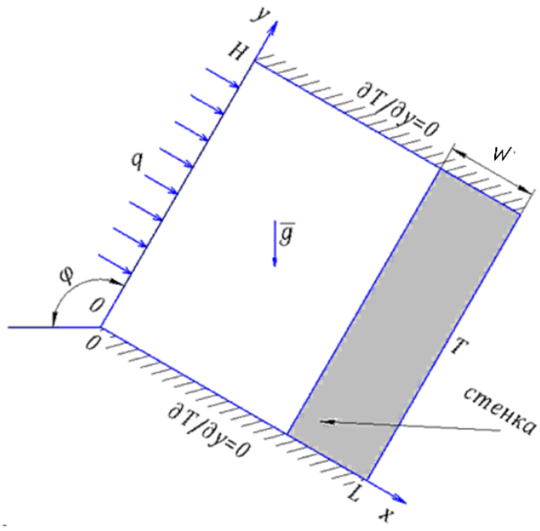


Рисунок 2.16 – Замкнутая дифференциально-обогреваемая полость с теплопроводной стенкой

На рисунках 2.17-2.19 показаны сравнение результатов, полученных в этой работе (верхние рисунки) с результатами, полученными в работе [104] (нижние рисунки) при различных толщинах стенки W и относительных теплопроводностях стенки k_r (здесь $k_r = \lambda_c/\lambda_ж, \lambda_c, \lambda_ж$ – коэффициенты теплопроводности стенки и жидкости соответственно). Видно, что результаты, полученные в данной работе, хорошо согласуются с результатами работы [104].

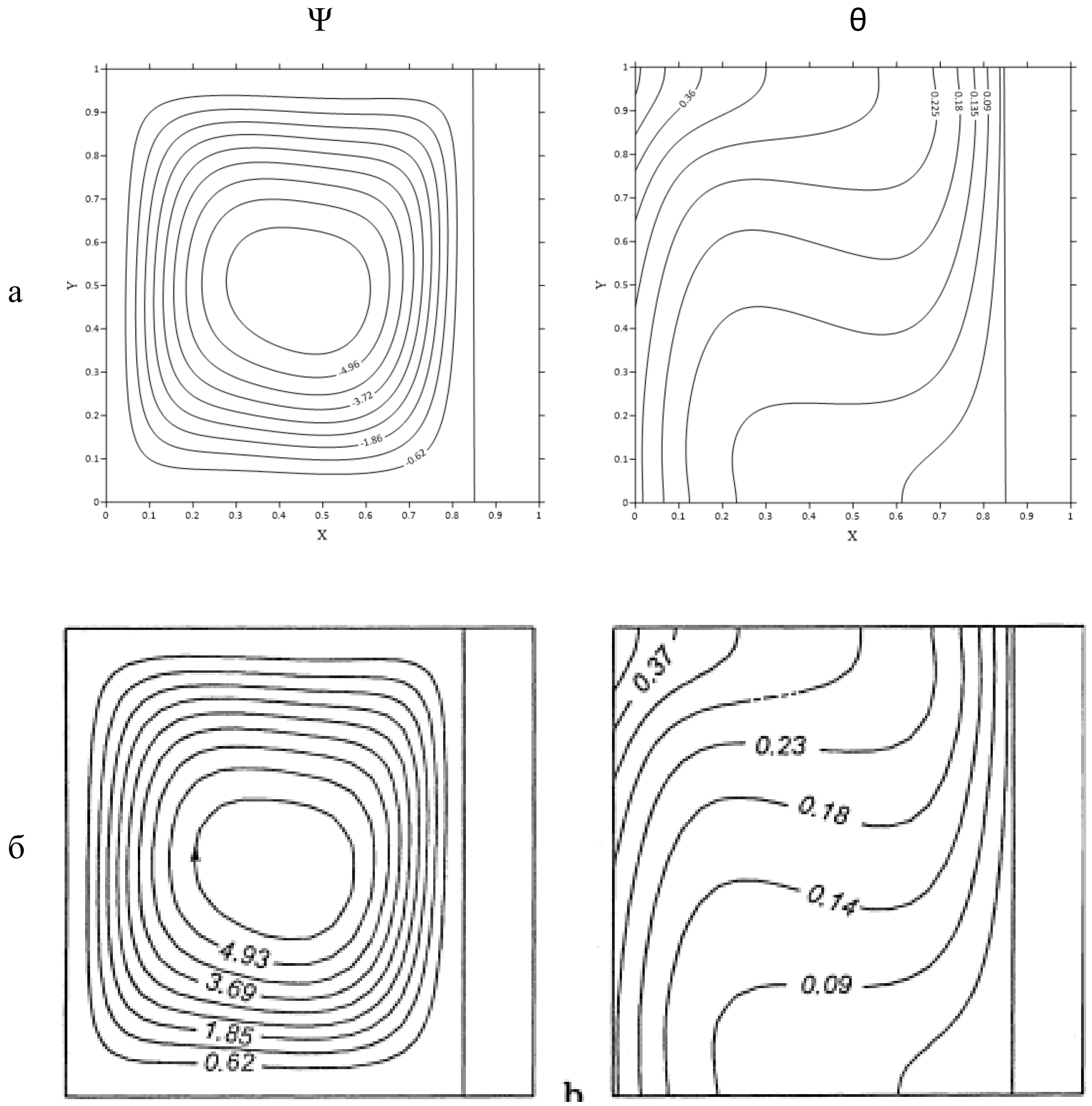


Рисунок 2.17 – Линии тока и поле температуры при $Ra = 10^5, \varphi = 90°, k_r = 10, W = 0.15$ (а – в данной работе, б – в работе [104])

а

б

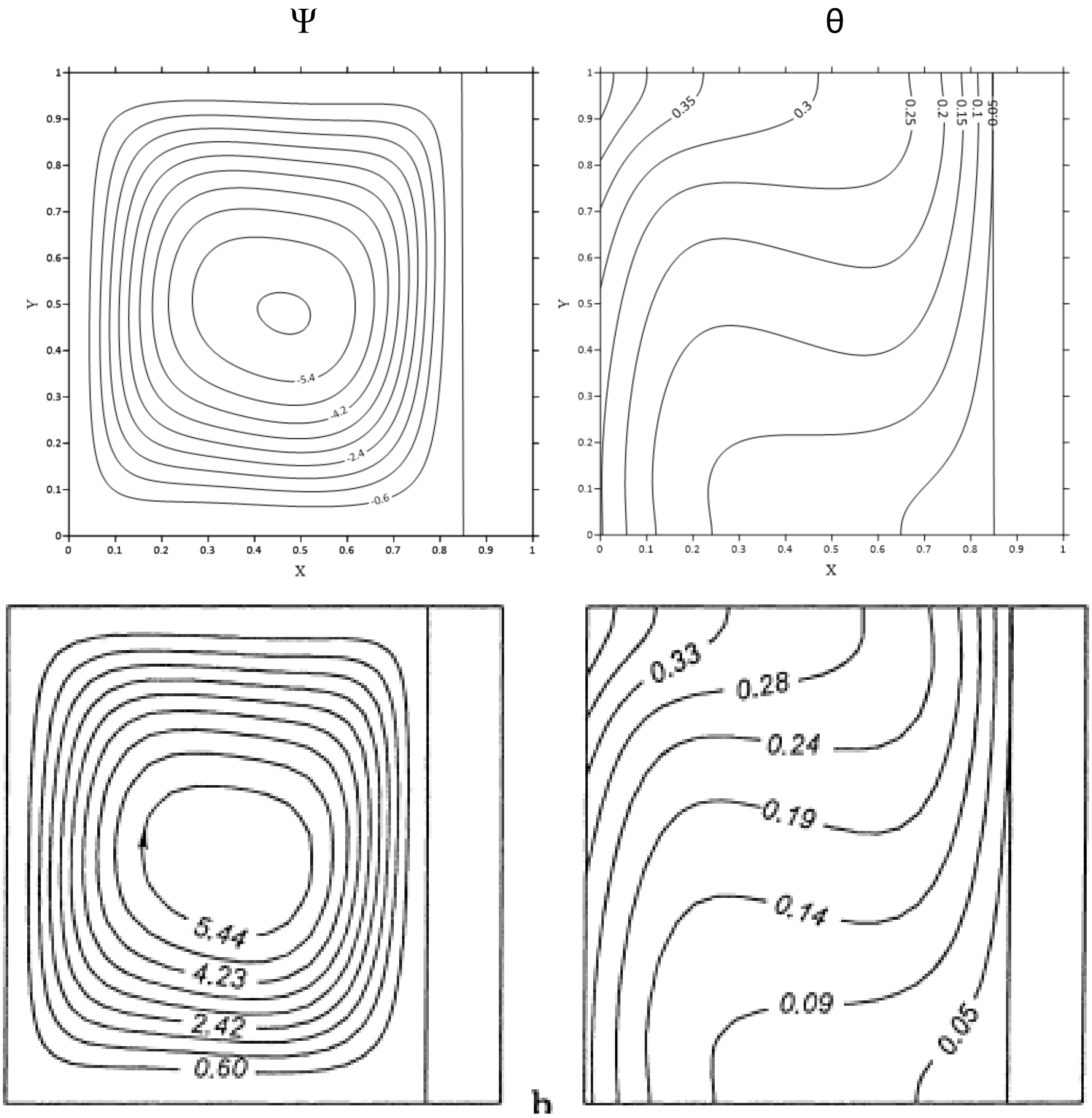


Рисунок 2.18 – Линии тока и поле температуры при $Ra = 10^5, \varphi = = 90°, k_r = 5, W = 0.15$ (а – в данной работе, б – в работе [104])

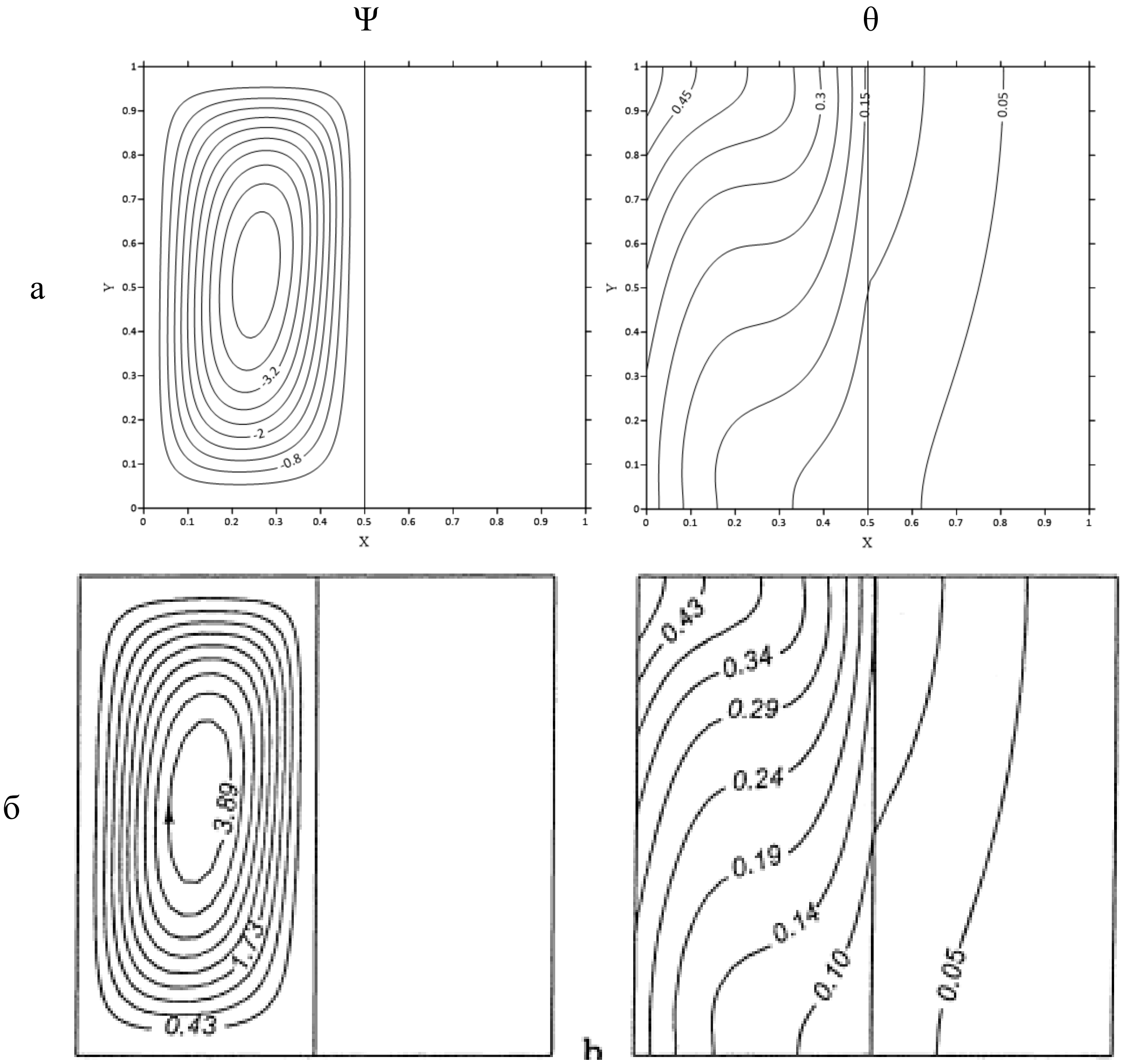
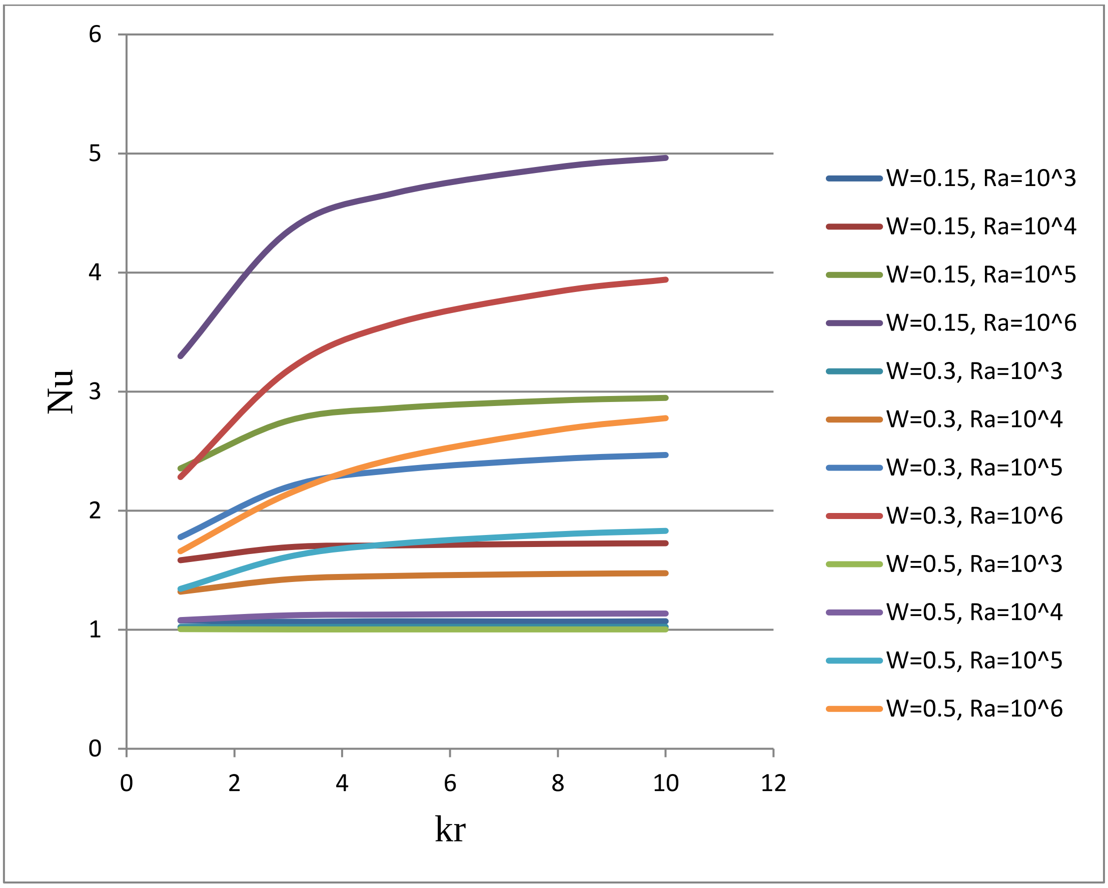


Рисунок 2.19 – Линии тока и поле температуры при $Ra = 10^5, \varphi =$
$= 90°, k_r = 5, W = 0.5$ (а – в данной работе, б – в работе [104])

На рисунке 2.20 показана зависимость среднего числа Нуссельта от числа Рэлея и толщины стенки при разных относительных коэффициентах теплопроводности стенки при $\varphi = 90°$ в данной работе и в работе [104]. Видно, что результаты, полученные в этой работе, различается от тех же, полученных в работе [104], незначительно.

а



б

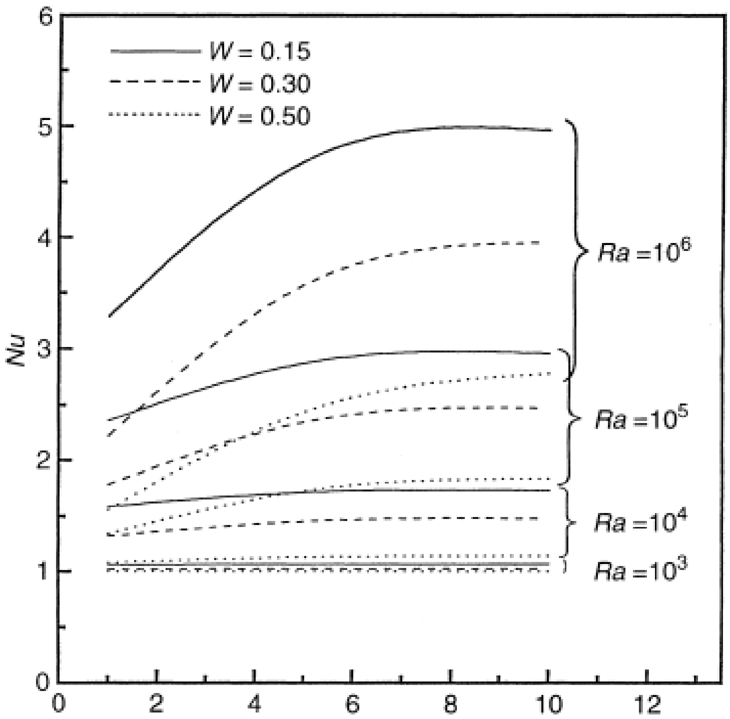


Рисунок 2.20 – График зависимости среднего числа Нуссельта от числа Рэлея и толщины стенки при разных относительных коэффициентах теплопроводности стенки при $\varphi = 90°$ (а – в данной работе, б – в работе [106])

Вывод:

По полученным результатам можем сделать вывод о том, что разработанный алгоритм дает результаты, похожие на результаты, полученные в работе [104]. Это позволяет нам использовать данный алгоритм в дальнейшем.

2.4 Анализ влияния сеточных параметров и параметра релаксации

2.4.1 Анализ влияния размера пространственной сетки

Анализ проводится при $\mathrm{Pr} = 0.71$ и $\mathrm{Ra} = 10^5$ для квадратной полости (рисунок 2.4).

На рисунке 2.21 представлена зависимость среднего числа Нуссельта от времени на сетках 50×50, 100×100, 200×200 и 400×400. Видно, что зависимость среднего числа Нуссельта от времени на сетках 100×100, 200×200 и 400×400 почти совпадают. Это значит, что сетка 100×100 является оптимальной и дальнейшее уменьшение шага сетки не приводит к более точному результату, а приводит лишь к увеличению числа операций и времени вычисления.

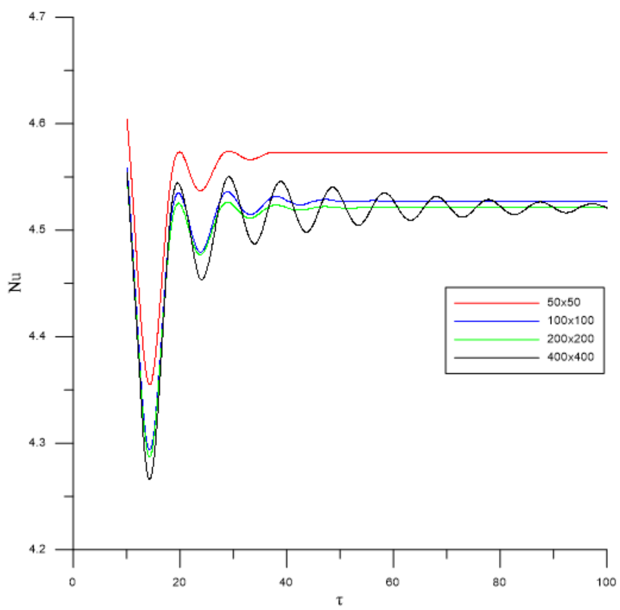


Рисунок 2.21 – График зависимости среднего числа Нуссельта от времени при различных размерах сетки

2.4.2 Анализ влияния шага по времени

Анализ проводится при $\Pr = 0.71$ и $\mathrm{Ra} = 10^5$ для различных шагов по времени в случае квадратной полости без ребер (рисунок 2.4).

Из рисунка 2.22 видно, что шаг по времени практически не влияет на результаты. Выберем шаг по времени $\tau = 0.01$ для дальнейших расчетов, так как при этом количество операций, необходимых для получения результатов, будет минимальным.

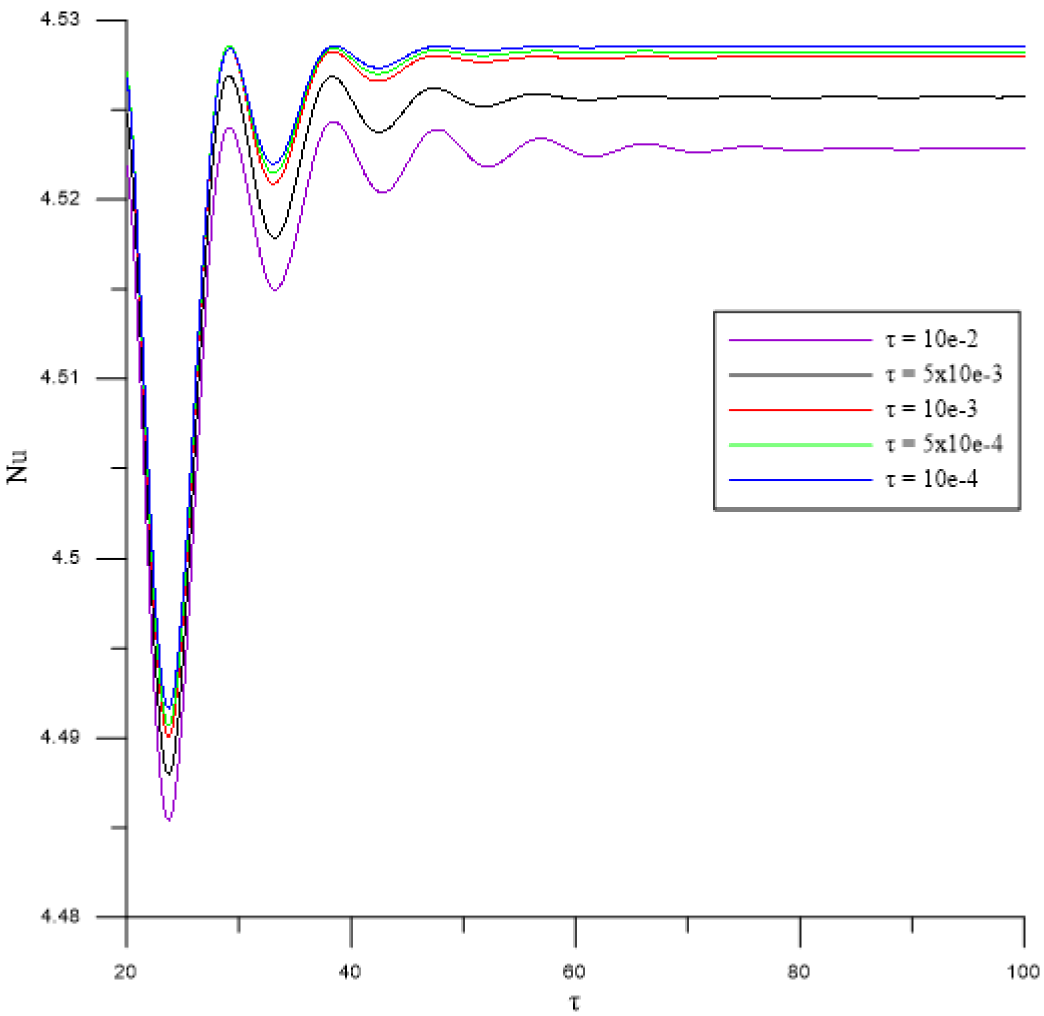


Рисунок 2.22 – Зависимость среднего числа Нуссельта от времени при различных шагах по времени τ на сетке 100×100

2.4.3 Анализ влияния параметра релаксации

Анализ проводится при $\mathrm{Pr} = 0.71$ и $\mathrm{Ra} = 10^5$ для различных параметров релаксации в случае квадратной полости без ребер (рисунок 2.4).

На рисунке 2.23 представлено влияние параметра релаксации на среднее число Нуссельта. Видно, чем больше параметр релаксации (ближе к 2), тем точнее результат, поскольку амплитуда колебаний незначительна или может отсутствовать. Таким образом, выберем параметр релаксации $\gamma = 1.9$ для дальнейших расчетов.

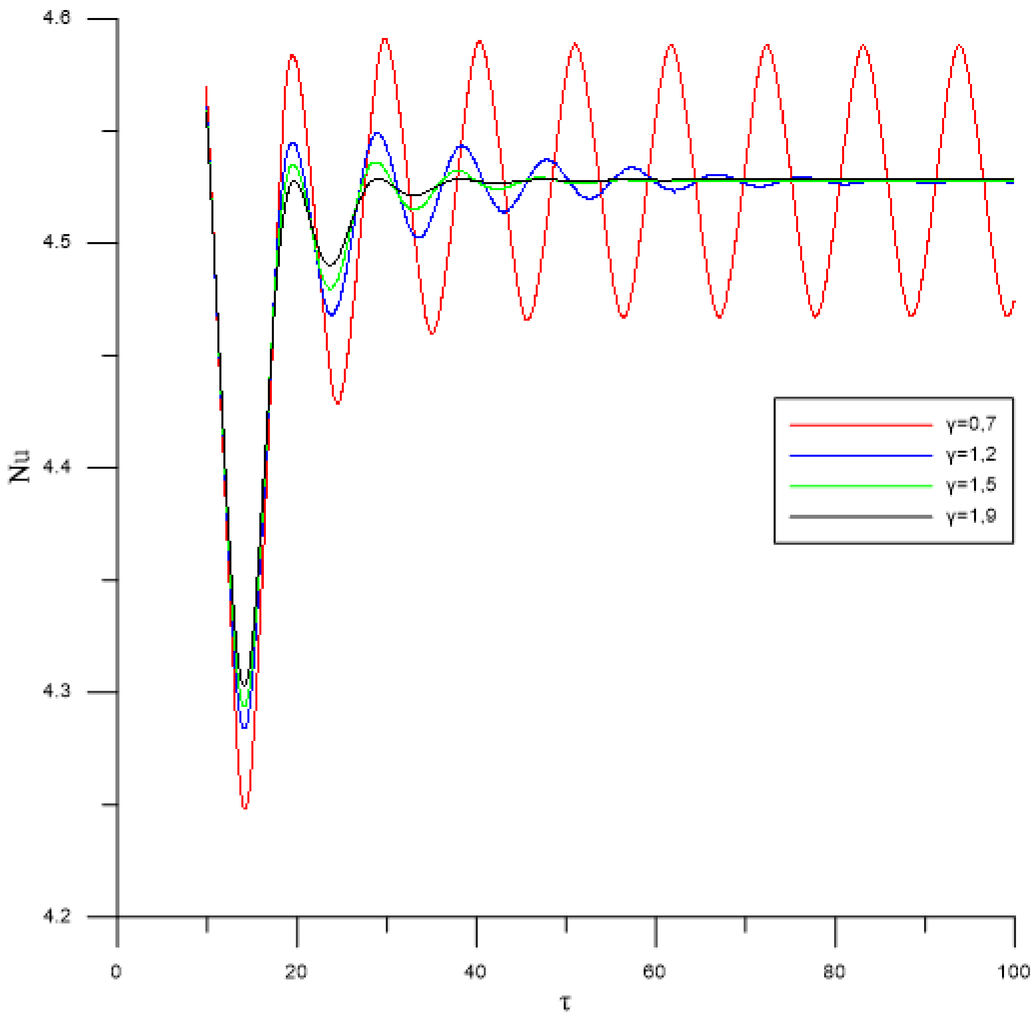


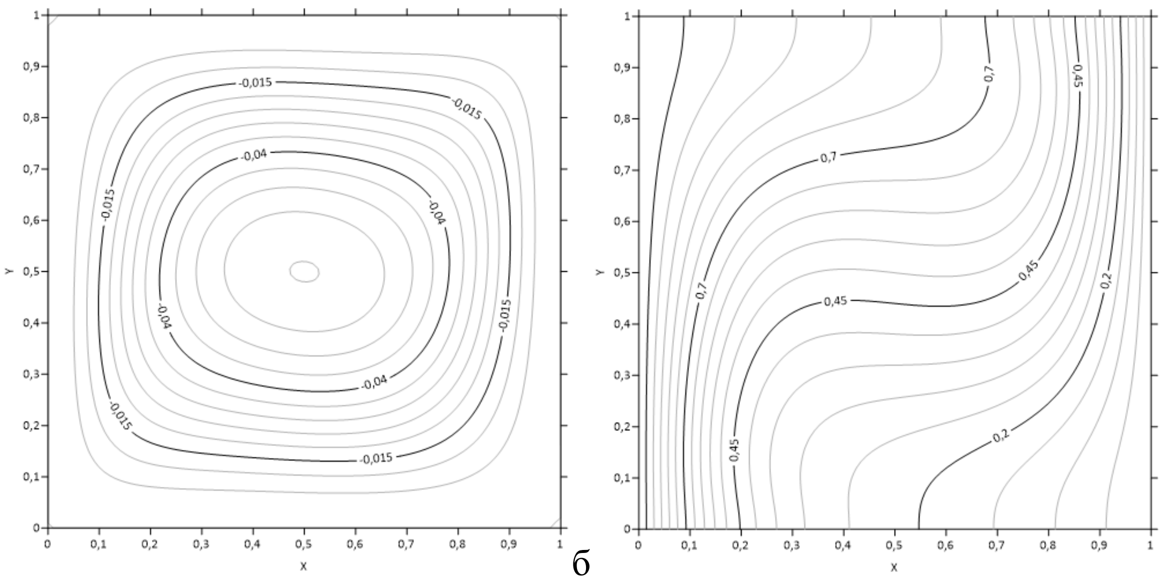
Рисунок 2.23 – Зависимость среднего числа Нуссельта от времени при различных значениях γ на сетке 100×100

2.5 Влияние твердых ребер на режимы течения и теплоперенос в замкнутой квадратной полости

Группа рисунков 2.24–2.31 показывает движение и распределение температуры внутри полости при наличии одного твердого ребра ($\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4$) для различных чисел Рэлея и относительных коэффициентов теплопроводности материала ребер и жидкости (рисунки 2.25, 2.26, 2.27, 2.29, 2.30, 2.31), а также при отсутствии ребер (рисунки 2.24 и 2.28). Восходящие потоки жидкости за счет силы инерции вследствие нагрева со стороны левой стенки и последующее формирование нисходящих потоков вблизи правой стенки иллюстрирует появление вихря, характеризующего циркуляцию жидкости по часовой стрелке. На линиях тока (рисунки 2.25а, 2.26а, 2.27а, 2.29а, 2.30а, 2.31а) видно, что наличие твердого ребра деформирует линии циркуляции жидкости внутри полости: жидкость изменяет свое направление движения вблизи твердого ребра. При $\mathrm{Ra} = 10^4$ центральные вихри, которые наблюдаются при отсутствии ребер (рисунок 2.24а), смещаются вправо к холодной стенке (рисунки 2.25а, 2.26а и 2.27а). При таком низком числе Рэлея, эффект блокировки твердого ребра оказывает значительное влияние на структуру течения: линии тока сгущаются около реберного конца, а не в пространстве над и под ребром.

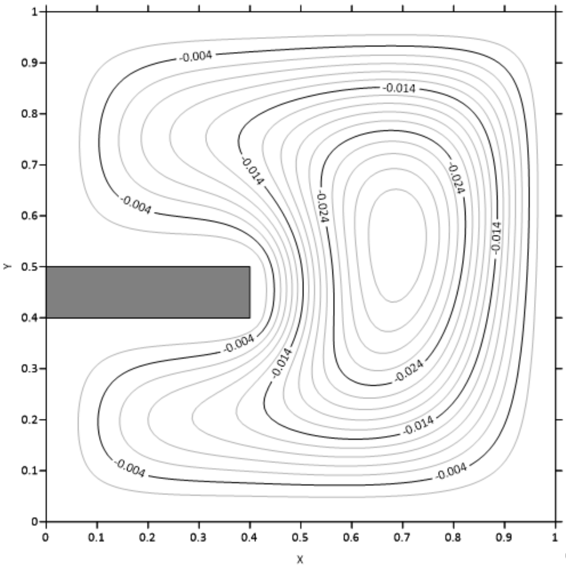
При низкой теплопроводности ребра в начальный момент времени ($\tau = 100$) теплообмен происходит внутри твердого ребра. Вертикальные изотермы внутри твердого ребра означает, что тепло передается ребру от левой стенки за счет теплопроводности. Изотермы становятся более вертикальными по сравнению с теми же при отсутствии ребер (рисунок 2.24б), что характеризует ослабление конвекции (рисунок 2.25б). С увеличением безразмерного времени до $\tau = 1000$ достигло стационарное состояние теплопереноса. При этом линии циркуляции сохраняют свою конфигурацию, а меняются только их значения (увеличиваются со временем, пока не достигнет стационара – рисунок 2.26а). Процесс теплообмена за счет теплопроводности при стационаре завершен: тепло от горячей стенки полностью переведено твердому ребру (отсутствие изотерм внутри твердого ребра - рисунок 2.26б).

По мере увеличения теплопроводности твердого ребра изотермы смещаются вправо. Твердое ребро имеет такую же температуру, какую имеет левая стенка (рисунок 2.27б). Конфигурация течения жидкости внутри полости сохраняется в целом (рисунки 2.26а и 2.27а). Также заметим, что при достижении стационара линии тока и изотермы при низкой и высокой теплопроводностях ребра получаются идентичными (рисунки 2.26 и 2.27). Таким образом, теплопроводность твердого ребра мало влияет на структуру течения и распределение температуры внутри полости при $\mathrm{Ra} = 10^4$.

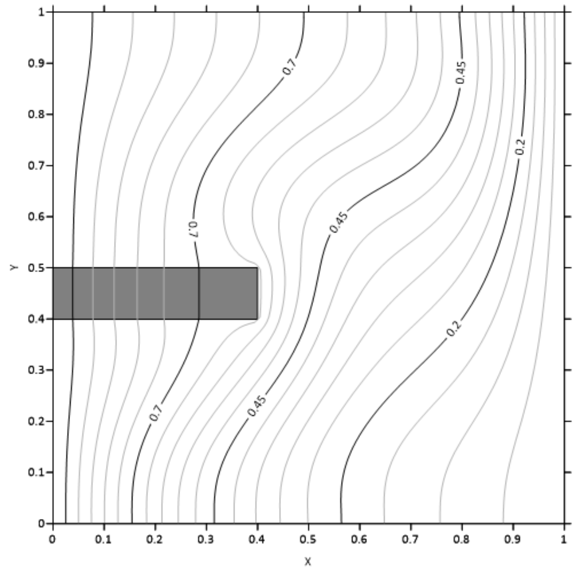


а б

Рисунок 2.24 – Линии тока (а) и изотермы (б) для $\mathrm{Ra} = 10^4$ при отсутствии ребер

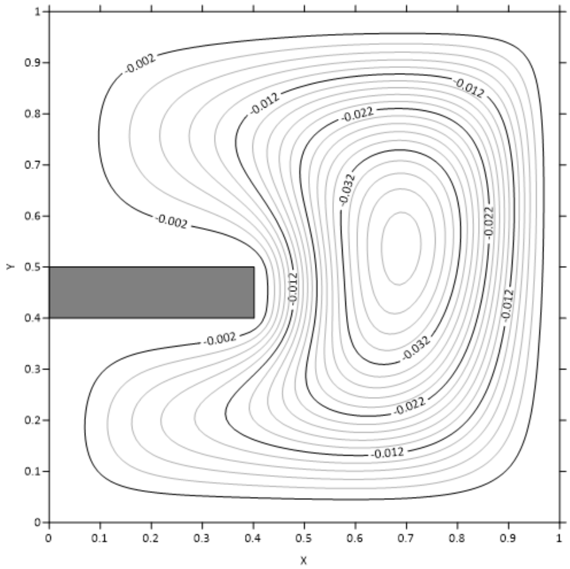


а



б

Рисунок 2.25 – Линии тока (а) и изотермы (б) при $\mathrm{Ra} = 10^4, \lambda_s/\lambda_f = 100$ и $\tau = 100$ (нестационар)



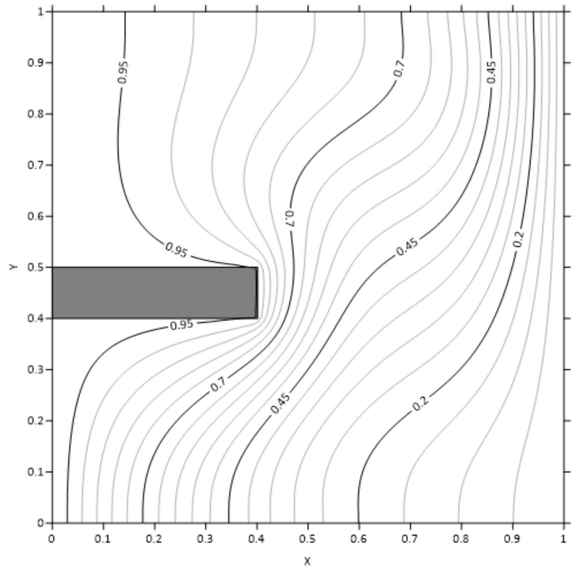
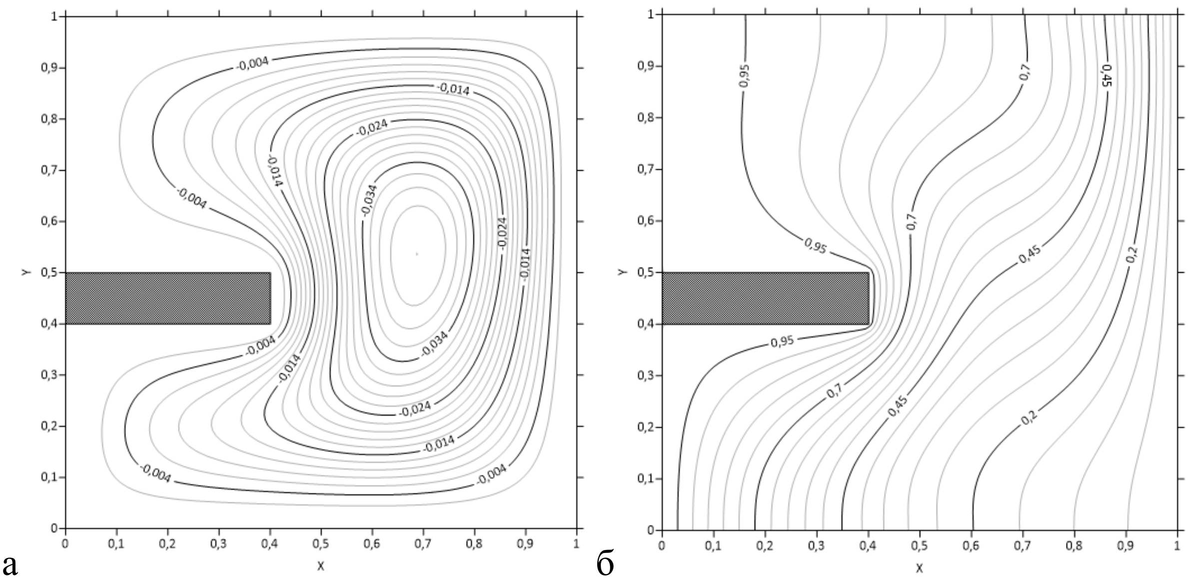


Рисунок 2.26 – Линии тока (а) и изотермы (б) при $\mathrm{Ra} = 10^4, \lambda_s/\lambda_f = 100$ и $\tau = 1000$ (стационар)



а б

Рисунок 2.27 – Линии тока (а) и изотермы (б) при $\mathrm{Ra} = 10^4, \lambda_s/\lambda_f = 15251$ и $\tau = 100$ (стационар)

В таблице 2.6 представлено сравнение максимальных значений функции тока и скорости в двух направлениях для $\mathrm{Ra} = 10^4$ при отсутствии ребер и одном твердом ребре. Максимальная скорость циркуляции жидкости по направлению *X* и максимальное значение функции тока при наличии твердого ребра снижаются по сравнению с теми же в полости без ребер, в то же время максимальная скорость циркуляции жидкости по направлению *Y* несколько растет (таблица 2.6). Это объясняется тем, что при низких числах Рэлея отрицательный эффект блокировки от твердого ребра является более значительным, чем положительный эффект прогрева жидкости для усиления активных вихрей.

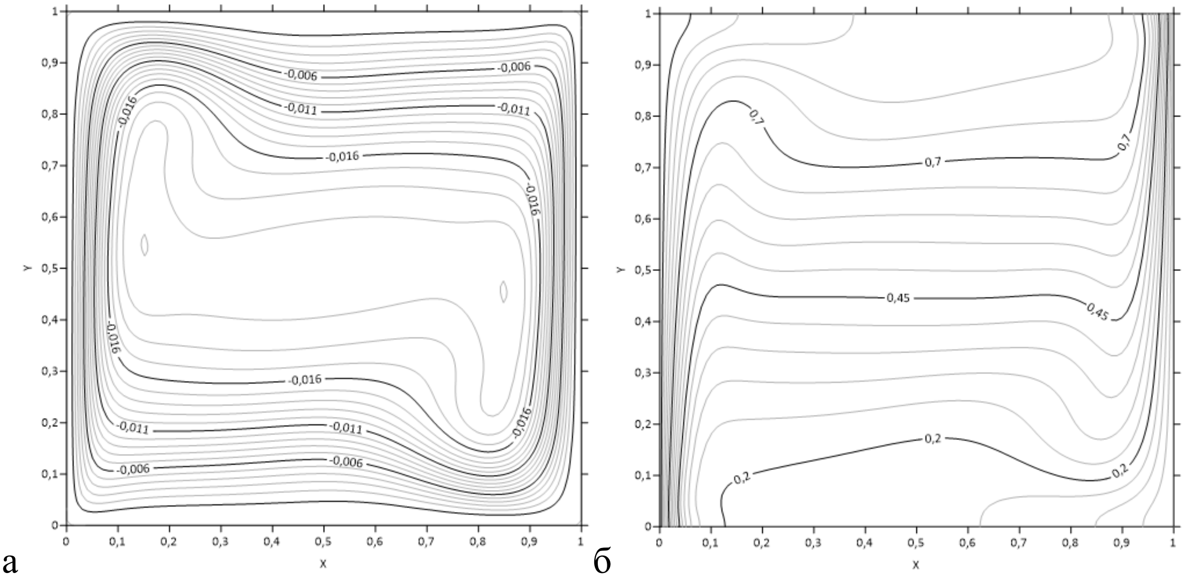
Таблица 2.6 – Сравнение максимальных значений функции тока и скорости в двух направлениях для $\mathrm{Ra} = 10^4$ при отсутствии ребер и одном твердом ребре ($\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4$ и $\lambda_s/\lambda_f = 15251$)

Ra	Ψ_{max}		U_{max}		V_{max}	
	Нет ребер	1 ребро	Нет ребер	1 ребро	Нет ребер	1 ребро
10^4	0.060	0.042	0.192	0.153	0.233	0.235

При более высоких числах Рэлея ($\mathrm{Ra} = 10^6$) движение жидкости также становится более хаотичным и плотным по сравнению с движением при малых числах Рэлея. Вихревые ядра, которые наблюдаются в центре полости при $\mathrm{Ra} = 10^4$, развиваются по размеру существено (рисунки 2.24а и 2.28а). При таком высоком числе Рэлея вихри становятся интенсивнее, чтобы преодолеть эффект блокировки ребра, и вследствие этого жидкость начинает занимать пространство под и над ребром. Изотермы сильнее искривляются и сгущаются около изотермических стенок, что иллюстрирует развитие конвекции. Температурная стратификация также появляется при этом числе Рэлея (за исключением изотерм внутри твердого ребра).

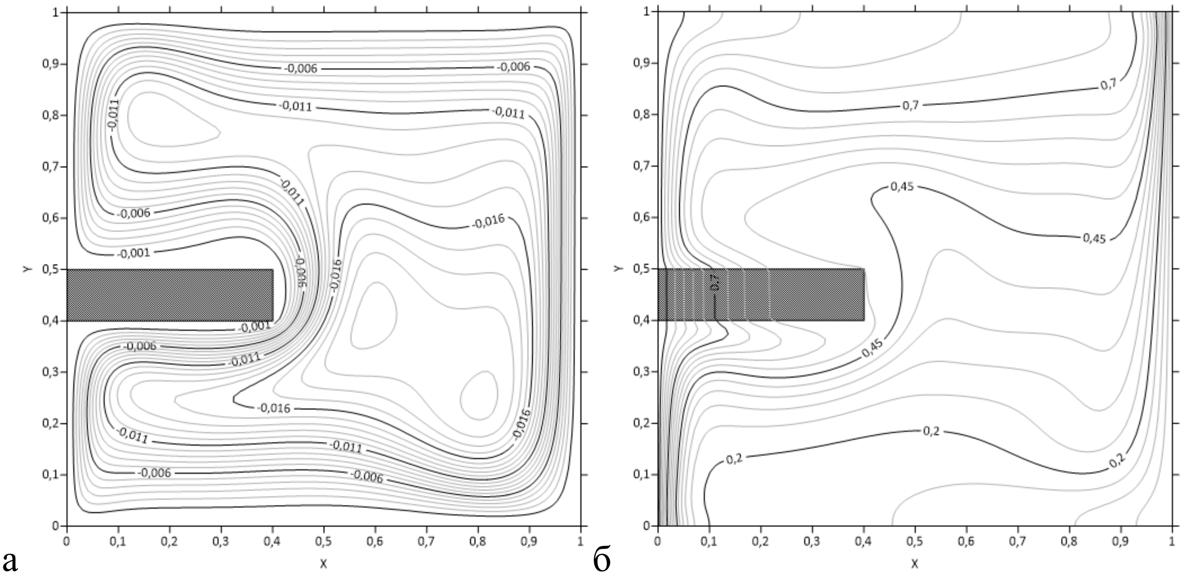
При низкой теплопроводности ребра в начальный момент времени $\tau = 200$ (рисунок 2.29б), вертикальные изотермы имеются внутри твердого ребра. Более того, температурный градиент внутри твердого ребра оказывается меньше, чем около нагретой стенки над и под ребром. Это означает, что жидкость снизу и сверху передает тепло твердому ребру. Вторичный вихрь также образуется над ребром (рисунок 2.29а). По мере увеличения безразмерного времени рост температуры твердого ребра наблюдается, обусловленный постепенным смещением изотерм внутри ребра вправо. Твердое ребро ведет себя как интенсификатор теплообмена, который передает тепло окружающей жидкости, так как температурные градиенты формируются около нижнего и верхнего оснований ребра, а также около его торца (рисунок 2.30б). Вторичный вихрь, который наблюдается в начальный момент времени, объединяется с вихрем в центре полости. Значения линии тока в целом остаются неизменными (рисунок 2.30а).

При больших отношениях коэффициентов теплопроводности ребро ведет себя как расширение горячей стенки, которое сдвигает изотермы вправо (рисунок 2.31б) и улучшает эффект прогрева жидкости, тем самым увеличивает скорость циркуляции жидкости внутри полости. (рисунок 2.31а). Также следует отметить, что большие температурные градиенты наблюдаются около нижнего основания ребра и около торца, а не около верхнего основания (рисунок 2.31б). Это иллюстрирует ухудшение теплоотвода с верхней поверхности ребра.



а б

Рисунок 2.28 – Линии тока (а) и изотермы (б) для $\mathrm{Ra} = 10^6$ при отсутствии ребер



а б

Рисунок 2.29 – Линии тока (а) и изотермы (б) при $\mathrm{Ra} = 10^6, \lambda_s/\lambda_f = 100$ через $\tau = 200$ (нестационар)

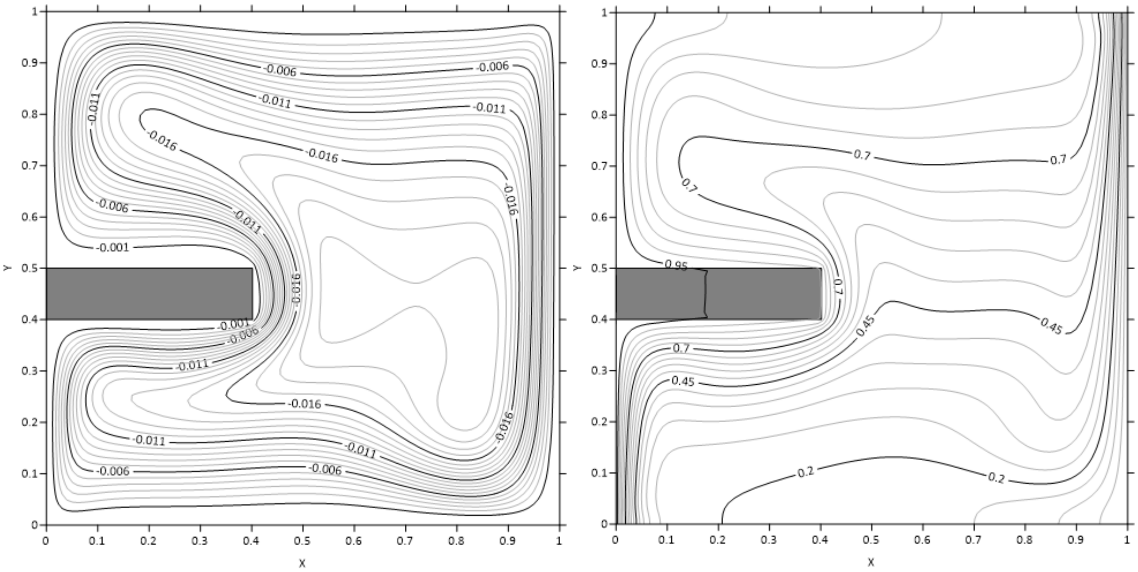
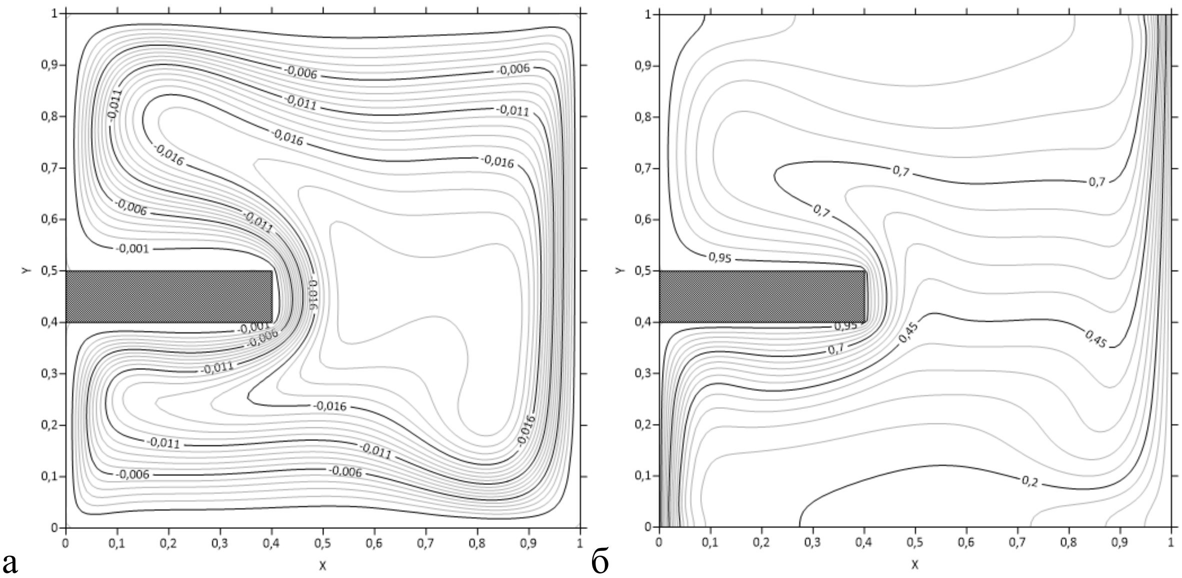


Рисунок 2.30 – Линии тока (а) и изотермы (б) при $\mathrm{Ra} = 10^6, \lambda_s/\lambda_f = 100$ через $\tau = 6000$ (стационар)



а б

Рисунок 2.31 – Линии тока (а) и изотермы (б) при $\mathrm{Ra} = 10^6, \lambda_s/\lambda_f = 15251$ через $\tau = 200$ (стационар)

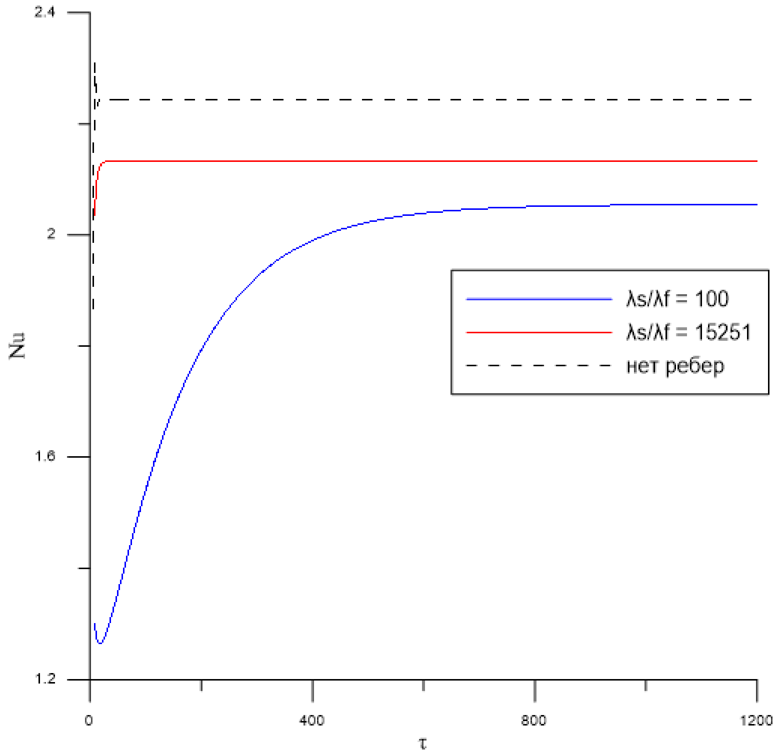
При $\mathrm{Ra} = 10^6$, развитие конвекции подавляет отрицательный эффект блокировки от твердого ребра. Вследствие этого, максимальные скорости в двух направлениях, а также максимальное значение функция тока оказываются больше, чем те же при отсутствии ребер (таблица 2.7).

Таблица 2.7 – Сравнение максимальных значений функции тока и скорости в двух направлениях для $\mathrm{Ra} = 10^6$ при отсутствии ребер и одном твердом ребре ($\mathrm{d} = 0.4; \mathrm{l} = 0.4$ и $\lambda_s/\lambda_f = 15251$)

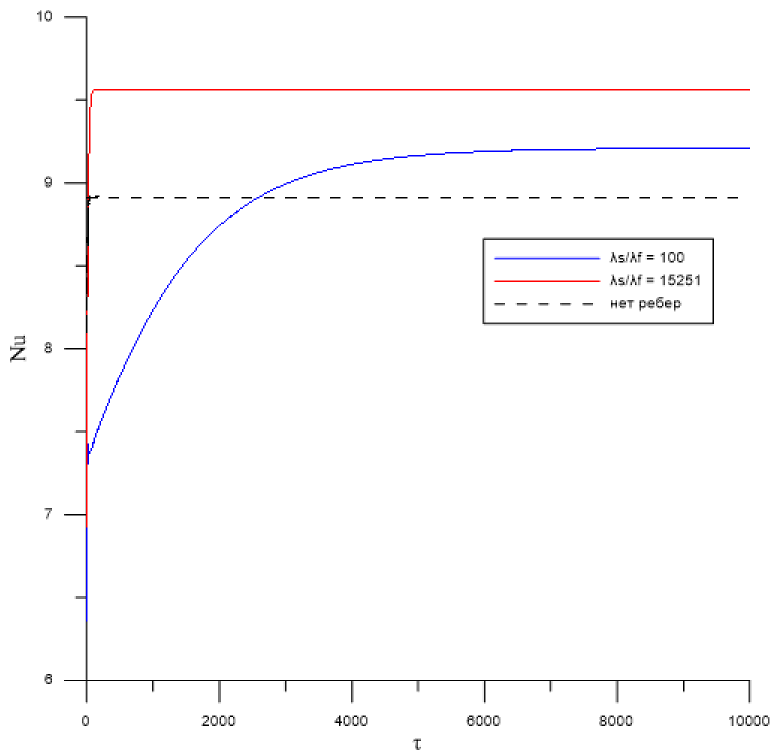
Ra	Ψ_{max}		U_{max}		V_{max}	
	Нет ребер	1 ребро	Нет ребер	1 ребро	Нет ребер	1 ребро
10^6	0.020	0.021	0.144	0.228	0.259	0.268

На рисунке 2.32 представлена зависимость среднего числа Нуссельта от времени для различных относительных коэффициентов теплопроводности и чисел Рэлея при $\mathrm{d} = 0.4$ и $\mathrm{l} = 0.4$. Видно, что при увеличении теплопроводности твердого ребра приводит к росту среднего числа Нуссельта, а также к существенному уменьшению времени выхода на стационар.

Также заметим, что при низких числах Рэлея ($\mathrm{Ra} = 10^4$) наличие твердого ребра уменьшает интенсивность теплообмена (рисунок 2.32а) в связи с тем, что эффект блокировки от твердого ребра является более значительным, чем положительный эффект прогрева жидкости для усиления активных вихрей. При высоких числах Рэлея ($\mathrm{Ra} = 10^6$), эффект блокировки от твердого ребра подавляется развитием интенсивности конвективного течения. Таким образом, наличие твердого ребро приводит к увеличению среднего числа Нуссельта (рисунок 2.32б).



а)



б)

Рисунок 2.32 – Зависимость среднего числа Нуссельта от времени при различных относительных коэффициентах теплопроводности и числах Рэлея ($d = 0.4, l = 0.4$): а – $Ra = 10^4$; б – $Ra = 10^6$

В таблице 2.8 показана зависимость среднего числа Нуссельта от длины при фиксированном положении ребра на левой стенке и варьируемых числах Рэлея. При увеличении длины твердого ребра наблюдаются два противоположные эффекты: расширение поверхности теплообмена и ухудшение конвекции из-за наличия препятствия в полости. Увеличение длины ребра всегда улучшает интенсивность теплообмена благодаря высокой теплопроводности ребра, за исключением случая, когда $\mathrm{l} = 0.4$ и $\mathrm{Ra} = 10^4$. Таким образом, максимальное число Нуссельта наблюдается при $\mathrm{l} = 0.8$.

Таблица 2.8 – Среднее число Нуссельта для различных чисел Рэлея и длине при фиксируемом положении ребра на левой стенке ($\mathrm{d} = 0.4; \lambda_s/\lambda_f = 15251$)

Ra	Длина ребра, l				Без ребер
	0.2	0.4	0.6	0.8	
10^4	2.136	2.132	2.209	3.095	2.245
10^5	4.483	4.654	4.877	5.248	4.528
10^6	9.105	9.564	9.958	10.156	8.917

Рисунок 2.33 показывает циркуляцию жидкости и распределение температур внутри полости при $\mathrm{Ra} = 10^5, \mathrm{l} = 0.4$ для различных положений твердого ребра на левой стенке. Высокий градиент температуры около торца ребра наблюдается только при низком расположении ребра ($\mathrm{d} = 0.2$) (рисунок 2.33а). Это означает, что низкорасположенное ребро лучше интенсифицирует теплообмен, чем средне- и высокорасположенные ребра.

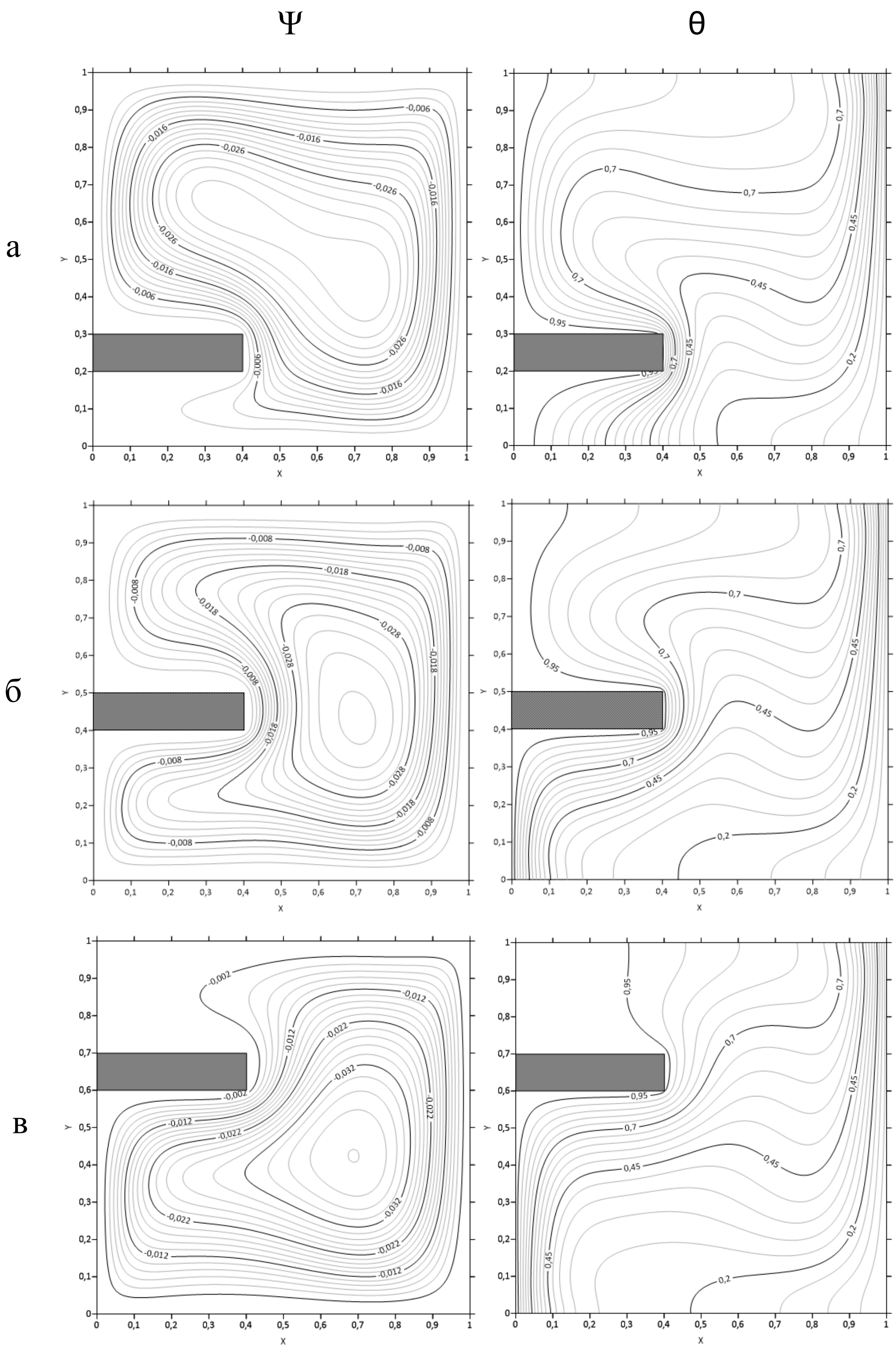


Рисунок 2.33 – Линии тока и изотермы для различных чисел Рэлея и положений ребра на левой стенке ($l = 0.4; \lambda_s/\lambda_f = 15251$): (а) $d = 0.2$, (б) $d = 0.4$, (в) $d = 0.6$

В таблице 2.9 снова подтверждается, что ребро, находящееся в нижней части полости, приводит к увеличению среднего числа Нуссельта, чем ребро, находящееся в средней или в верхней частях полости. Однако, это справедливо только при $\mathrm{Ra} = 10^4$ и $\mathrm{Ra} = 10^5$. При $\mathrm{Ra} = 10^6$, наоборот, ребро, находящееся в средней части стенки превосходит те, которые лежат в нижней и верхней частях левой стенки. В целом, положение твердого ребра на левой стенке влияет на среднее число Нуссельта незначительно.

Таблица 2.9 – Среднее число Нуссельта при различных положениях и числах Рэлея ($\mathrm{l} = 0.4; \lambda_s/\lambda_f = 15251$)

Положение ребра	$\mathrm{Ra} = 10^4$	$\mathrm{Ra} = 10^5$	$\mathrm{Ra} = 10^6$
$\mathrm{d} = 0.2$	2.368	4.728	9.385
$\mathrm{d} = 0.4$	2.132	4.654	9.563
$\mathrm{d} = 0.6$	2.239	4.719	9.441
Без ребер	2.245	4.528	8.917

Влияние количества ребер на режим теплопереноса внутри полости при $\mathrm{Ra} = 10^5, \mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \lambda_s/\lambda_f = 15251$ демонстрируется на рисунках 2.34. При увеличении количества ребер доступ жидкости в межреберную зону постепенно ограничивается. При $\mathrm{n} = 2$ циркуляция происходит в области свободной от ребер, а также в области свободной между ребрами (рисунок 2.34б), а при $\mathrm{n} = 3$ циркуляция жидкости ограничивается в правой половине полости (рисунок 2.34в). Высокий температурный градиент наблюдается у правой границы нижнего ребра, что характеризует интенсивный теплоотвод в этом месте.

Увеличение количества ребер в полости создает дополнительные поверхности теплообмена, что улучшает теплопроводные характеристики. Однако эти дополнительные поверхности теплообмена также ведут себя как препятствия, что ухудшают конвекцию.

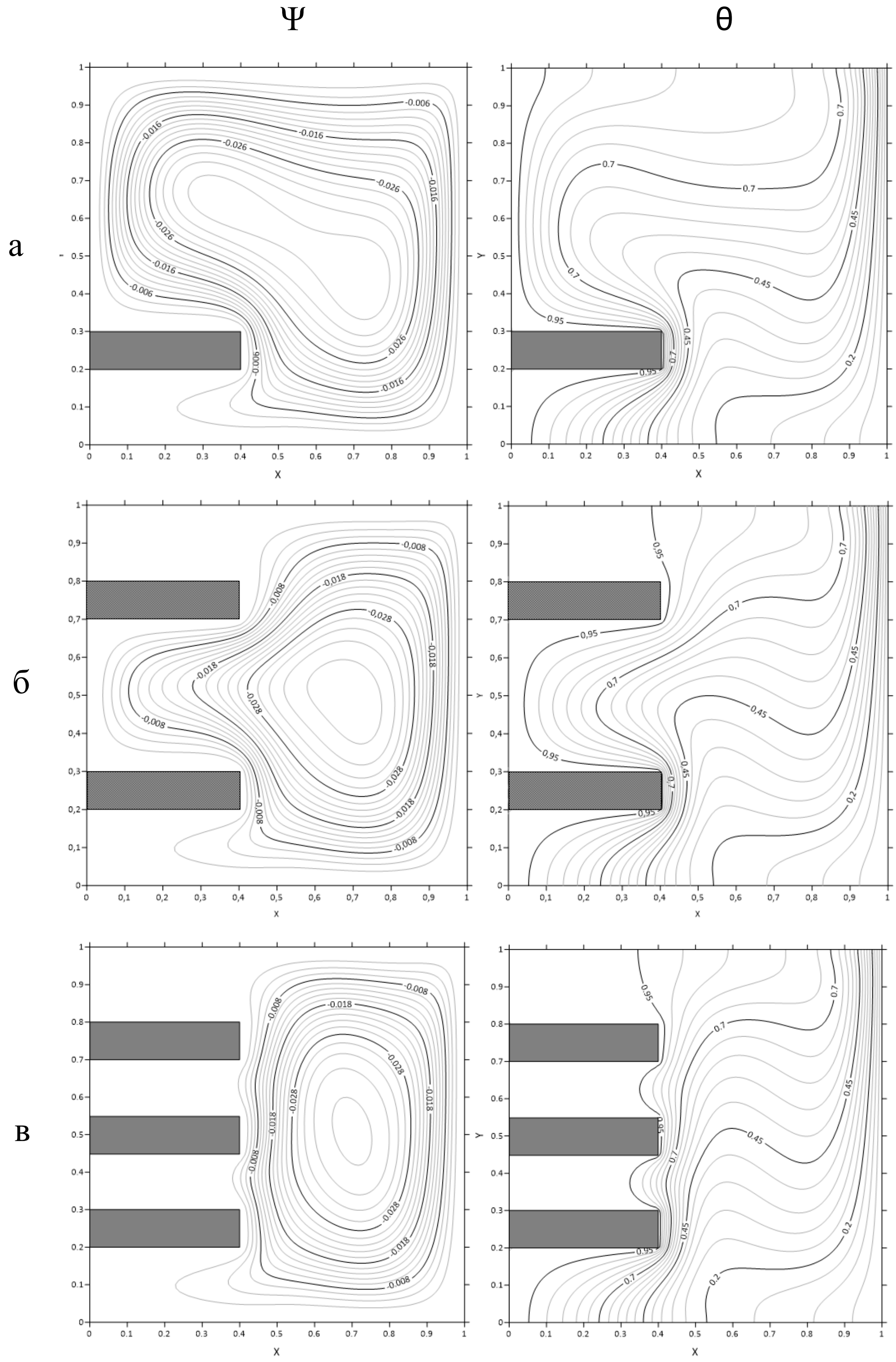


Рисунок 2.34 – Скоростные и температурные поля для различных чисел Рэлея и положений ребра на левой стенке ($\mathrm{d} = 0{,}2; \mathrm{l} = 0{,}4; \lambda_s/\lambda_f = 15251$): (а) 1 ребро, (б) 2 ребра, (в) 3 ребра

В таблице 2.10 показана зависимость среднего числа Нуссельта для различных чисел Рэлея от количества ребер n при постоянных теплопроводности и длине ребер ($\lambda_s/\lambda_f = 15251$ и $l = 0.4$). Введение дополнительных ребер имеет положительный эффект только при переходе от $n = 1$ на $n = 2$ при $Ra = 10^6$. При малых числах Рэлея $Ra = 10^4$ количество твердых ребер практически не влияет на среднее число Нуссельта. При высоких числах Рэлея ($Ra \geq 10^5$), наличие третьего ребра уменьшает интенсивность теплообмена (до 11% при $Ra = 10^6$).

Положительный эффект от введения дополнительных ребер считается с точки зрения экономики незначительным, так как максимальный рост среднего числа Нуссельта составляет 7% в случае двух твердых ребер при $Ra = 10^6$, а расход материала ребер в два раза больше. Исходя из этого, оптимальным количеством твердых ребер в рамках рассмотренных параметров является одно.

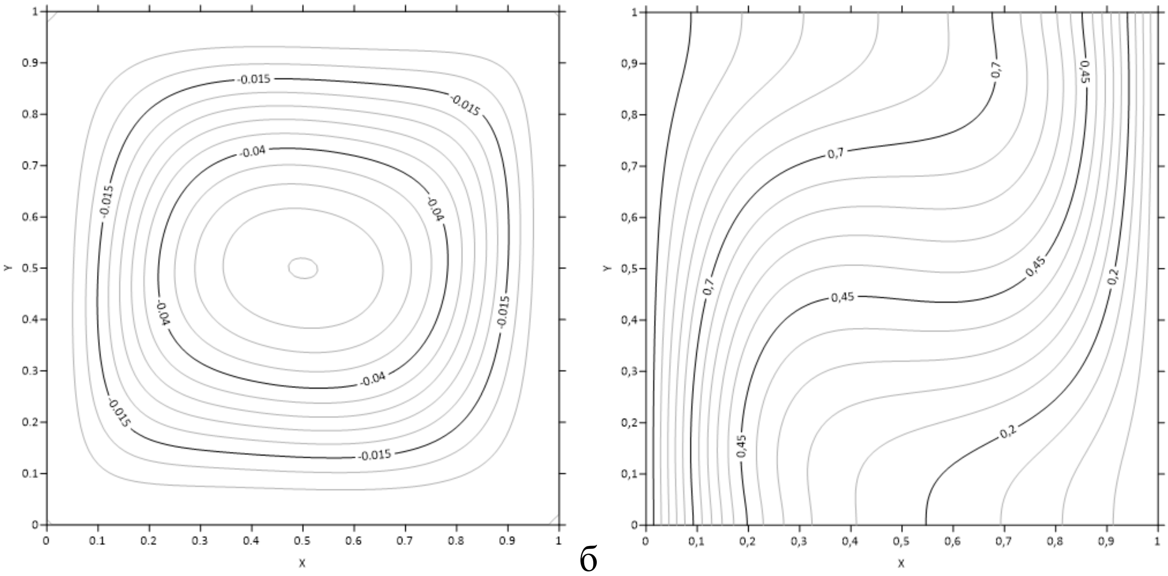
Таблица 2.10 – Среднее число Нуссельта для различных значений числа Ra и количества ребер n ($d = 0.2, l = 0.4, \lambda_s/\lambda_f = 15251$)

Кол.во ребра, n	$Ra = 10^4$	$Ra = 10^5$	$Ra = 10^6$
$n = 1$	2.368	4.728	9.385
$n = 2$	2.366	4.722	9.669
$n = 3$	2.370	4.552	8.737

Также следует отметить, что при правильном расположении одного твердого ребра на горячей стенке среднее число Нуссельта получается почти такое же, как и при двух ребрах (см. таблицу 2.9).

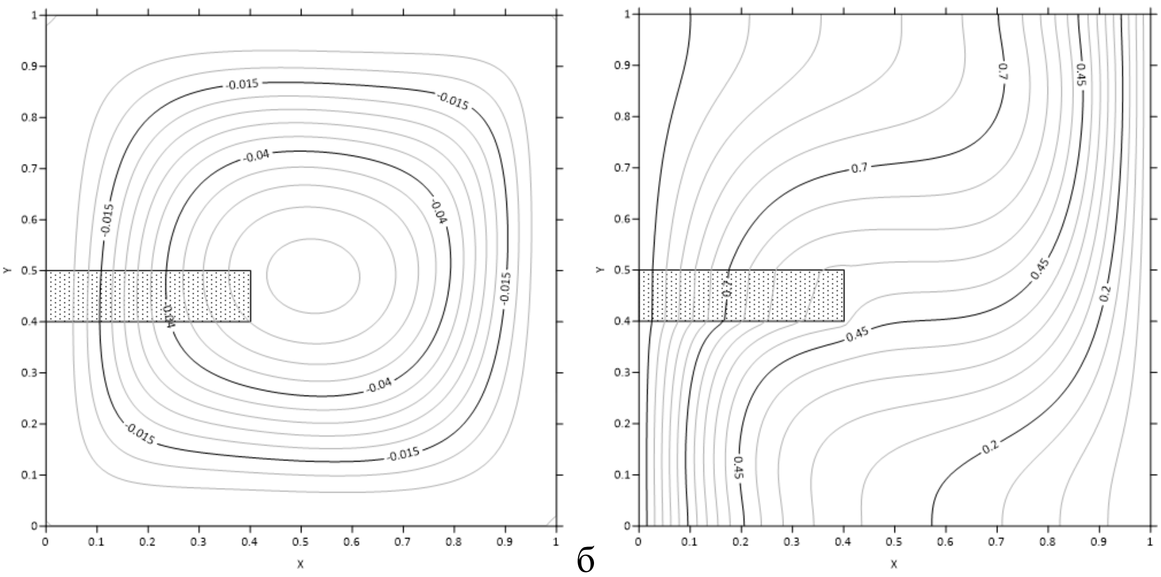
2.6 Влияние пористых ребер на режимы течения и теплоперенос в замкнутой квадратной полости

На рисунках 2.35-2.42 показано движение жидкости и распределение температуры внутри полости для различных чисел Рэлея и относительных коэффициентах теплопроводности при одном пористом ребре ($d = 0.4, l = 0.4, \varepsilon = 0.9, Da = 10^{-2}$), а также при его отсутствии. При малых числах Рэлея ($Ra = 10^4$) наличие пористого ребра не деформирует структуру циркуляции жидкости (рисунки 2.35а, 2.36а, 2.37а и 2.38а) благодаря пропускной способности структуры пористых ребер. На полях температуры также не наблюдаются существенные различия по сравнению с полостью без ребер, кроме зоны пористого ребра при низкой теплопроводности ребра ($k_r = 11$) (рисунки 2.35б, 2.36б и 2.37б). При такой низкой теплопроводности ребра в промежуточный момент времени $\tau = 50$ в нем происходит теплообмен. Изотермы в этом месте почти вертикальные, что означает, что режим переноса тепла внутри пористого ребра является теплопроводностью. С увеличением безразмерного времени до $\tau = 600$ происходит процесс прогрева пористого ребра, обусловленный смещением изотерм вправо (рисунок 2.37б). Однако, в отличие от твердых ребер, пористое ребро прогревается не до температуры левой стенки, так как температурный градиент виден внутри него. Изотермы внутри пористого ребра становятся более наклонными, что характеризует режим переноса тепла конвекцией. Линии тока не подвергаются значительным изменениям в конфигурации циркуляции и в их значениях (рисунок 2.37а). Значительные различия в распределении температуры наблюдаются на поле температуры при высокой теплопроводности ребра ($k_r = 1526$): наличие пористого ребра помогает быстро прогреть жидкость над ребром, тем самым образуется толстый пограничный слой в пространстве над ним (рисунок 2.38б). Высокий температурный градиент наблюдается в области под ребром около его торца, что характеризует интенсивный теплоотвод в этом месте (рисунок 2.38а).



а б

Рисунок 2.35 – Линии тока (а) и изотермы (б) для $\mathrm{Ra} = 10^4$ при отсутствии ребер



а б

Рисунок 2.36 – Линии тока (а) и изотермы (б) для $\mathrm{Ra} = 10^4$ при одном пористом ребре, $\mathrm{k_r} = 11$ и $\tau = 50$ (нестационар)

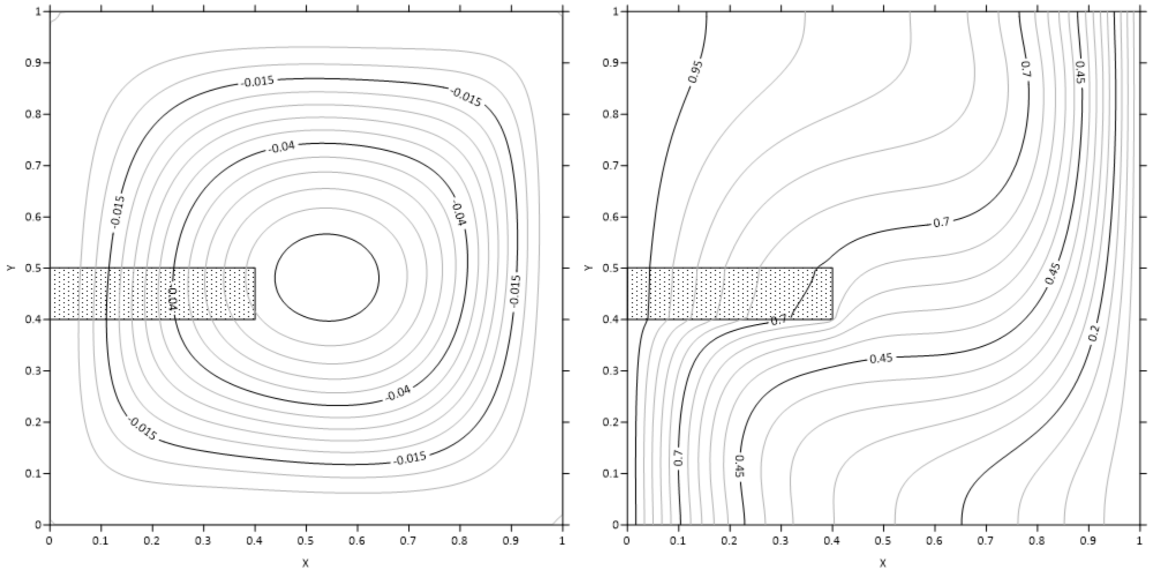
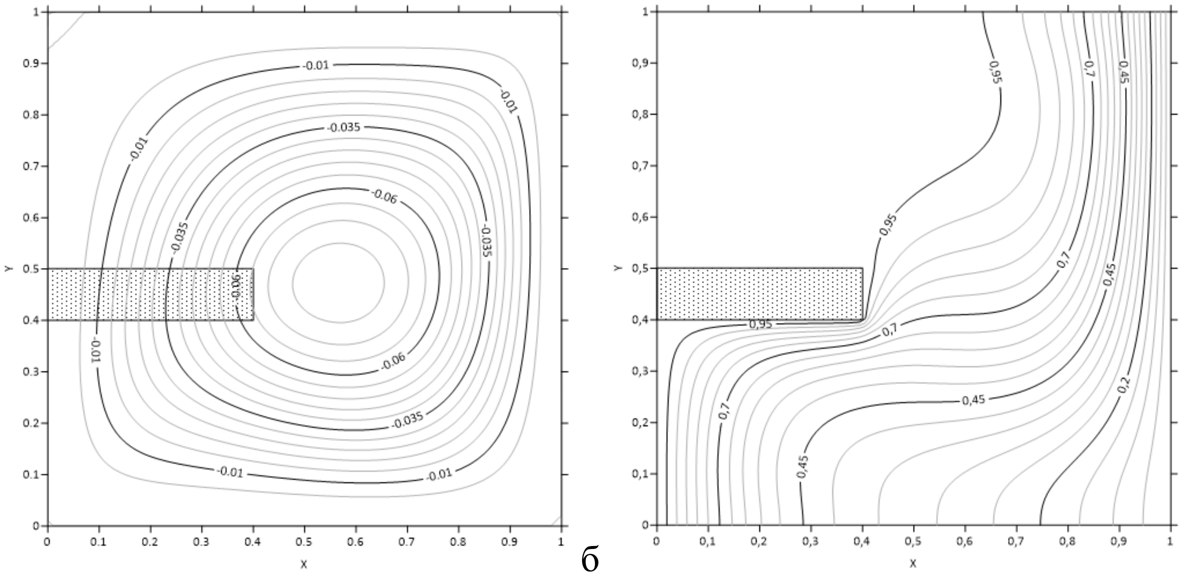


Рисунок 2.37 – Линии тока (а) и изотермы (б) для $\mathrm{Ra} = 10^4$ при одном пористом ребре, $\mathrm{k_r} = 11$ и $\tau = 600$ (стационар)

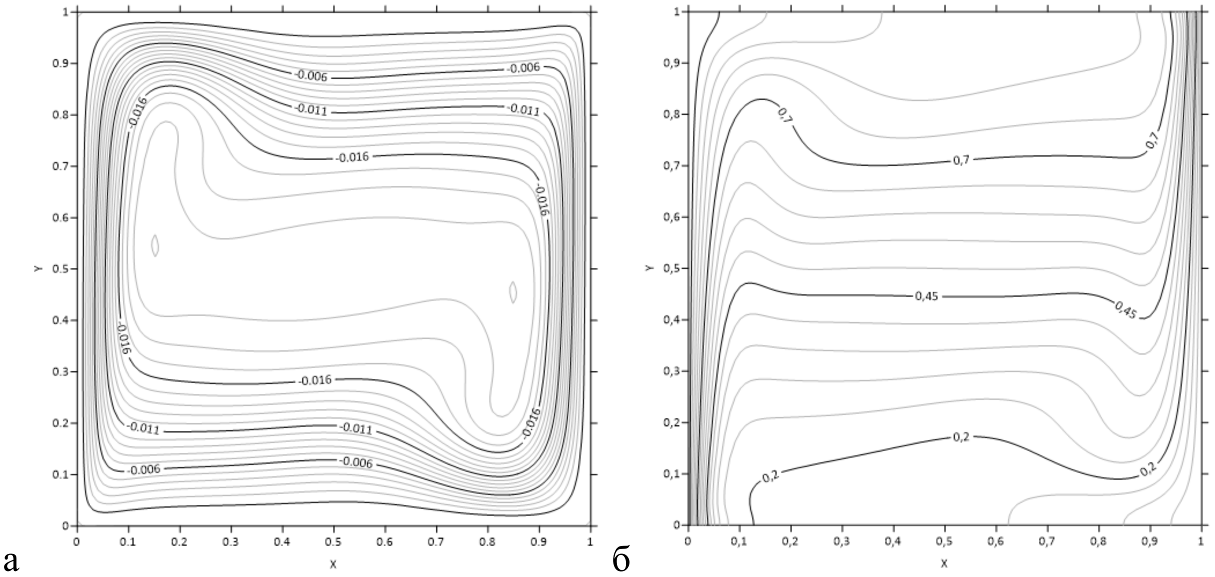


а б

Рисунок 2.38 – Линии тока (а) и изотермы (б) для $\mathrm{Ra} = 10^4$ при одном пористом ребре, $\mathrm{k_r} = 1526$ и $\tau = 50$ (стационар)

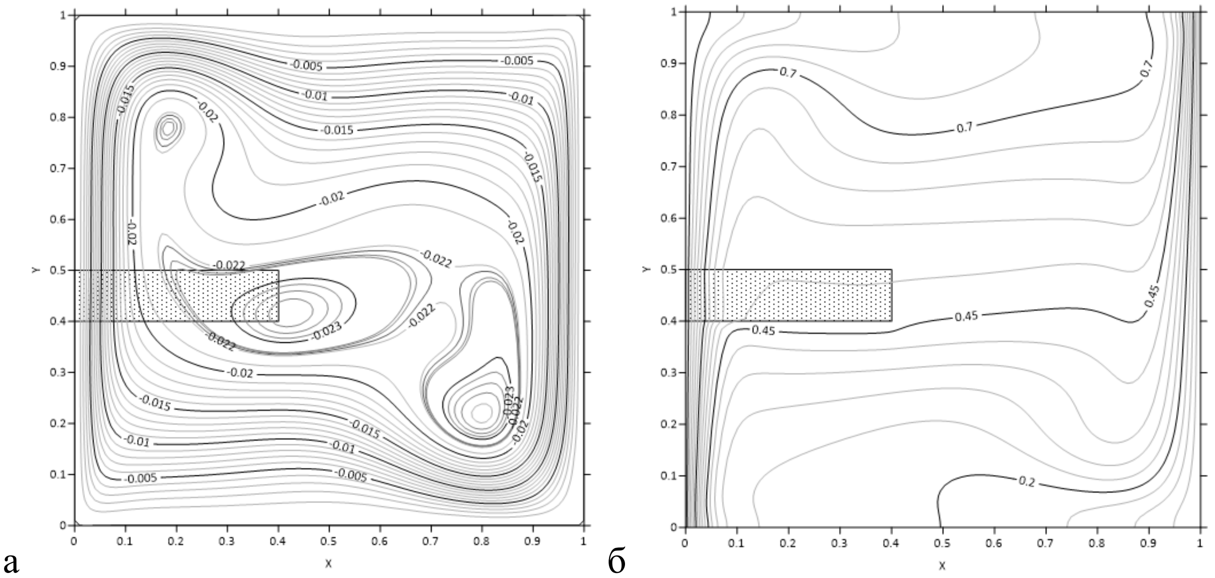
При больших числах Рэлея ($\mathrm{Ra} = 10^6$) наличие пористого ребра приводит к изменению формы циркуляции жидкости (см. рисунки 2.39а, 2.40а, 2.41а и 2.42а). Конфигурация циркуляции жидкости при данном числе Рэлея более хаотична и плотна, чем при $\mathrm{Ra} = 10^4$, что характеризует развитие конвекции. Кривые изотермы имеют место внутри пористого ребра, что означает режим конвективного теплообмена внутри его. В начальный момент времени $\tau = 20$ в центре полости образуется вихрь. Два вторичных вихря, обусловленного воздействием изотермических стенок полости на теплую жидкость, формируются в левом верхнем и правом нижнем углах полости, (рисунок 2.40а). В данный момент времени эффект прогревания от пористого ребра не наблюдается: горизонтальный градиент температуры находится внутри него, причем изотермы почти вертикальные, что характеризует процесс передачи тепла ребру теплопроводностью за счет тепла от левой стенки (рисунок 2.40б). Со временем происходит прогрев жидкой полости, что сказывается на смещении изотермы вправо (рисунок 2.41б). Вихревое течение в центре полости исчезает, а вихрь, образующийся над ребром, увеличивается по размеру (рисунок 2.41а). При этом числе Рэлея начинает появляться эффект от пористого ребра: температурный градиент около нижнего основания ребра умеренно высокий, а скорость циркуляции жидкости возрастает.

По мере увеличения относительной теплопроводности ребра интенсивность теплообмена возрастает. Жидкость над ребром быстро прогревается и под действием силы инерции переносится вправо к правой стенке, тем самым образуется чрезмерно высокий температурный градиент на холодной стенке. В результате этого верхняя половина полости прогревается (рисунок 2.42б). Большие градиенты температур наблюдаются около нижнего основания ребра и левой стенки под ребром, что означает, что при высоких числах Рэлея и теплопроводности пористого ребра интенсивный теплоотвод находится в пространстве над ребром. На линиях тока формируется вихревое ядро около центра полости (рисунок 2.42а). Скорость циркуляции жидкости внутри полости существенно растет. Таким образом, пористое ребро с высокой теплопроводностью улучшает теплоотвод путем держания жидкости от левой стенки и интенсификации ее скорости движения.



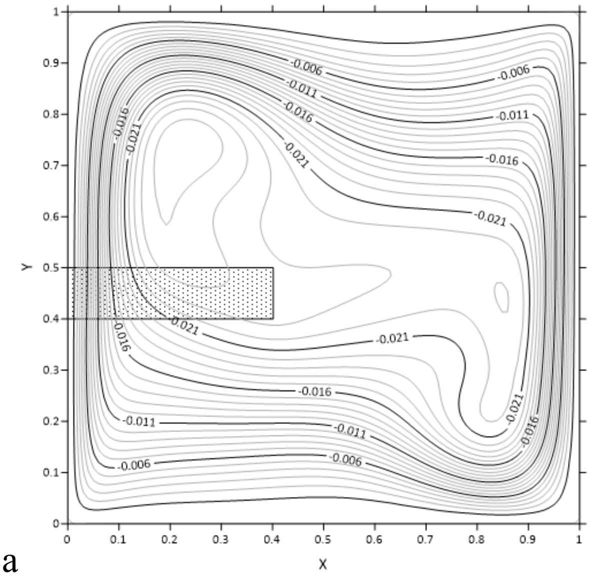
а б

Рисунок 2.39 – Линии тока (а) и изотермы (б) для $\mathrm{Ra} = 10^6$ при отсутствии ребер

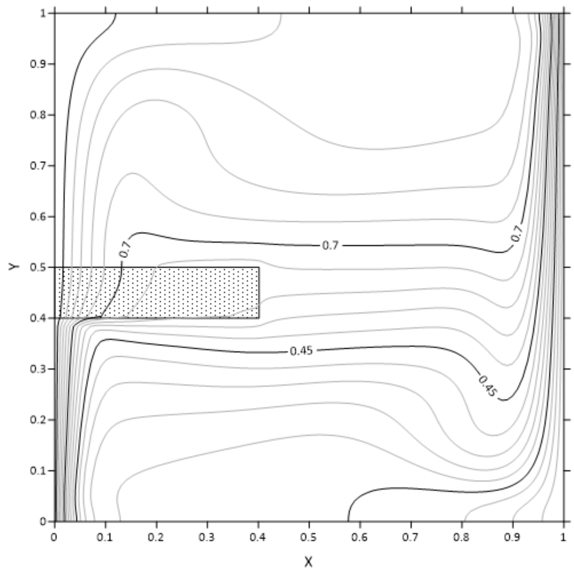


а б

Рисунок 2.40 – Линии тока (а) и изотермы (б) для $\mathrm{Ra} = 10^6$ при одном пористом ребре, $\mathrm{k_r} = 11$ и $\tau = 20$ (нестационар)

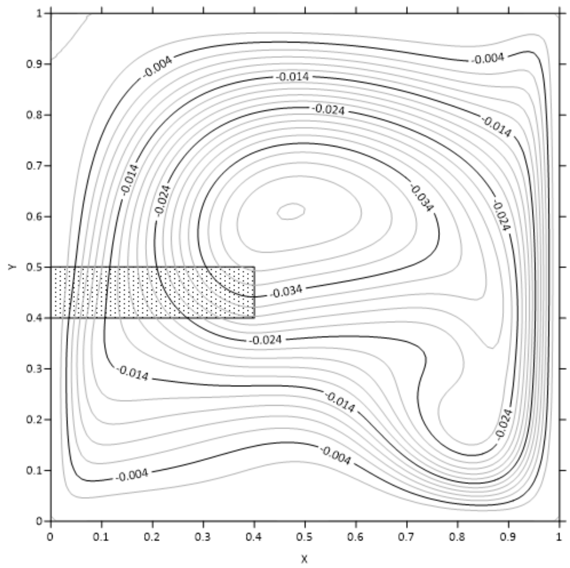


а

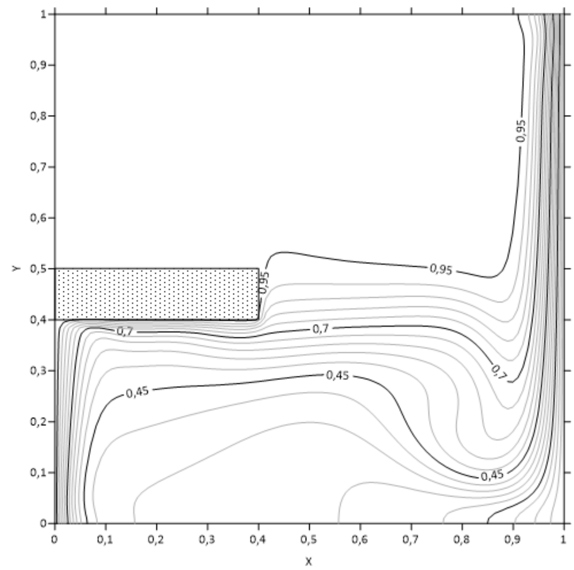


б

Рисунок 2.41 – Линии тока (а) и изотермы (б) для $\mathrm{Ra} = 10^6$ при одном пористом ребре, $\mathrm{k_r} = 11$ и $\tau = 2000$ (стационар)



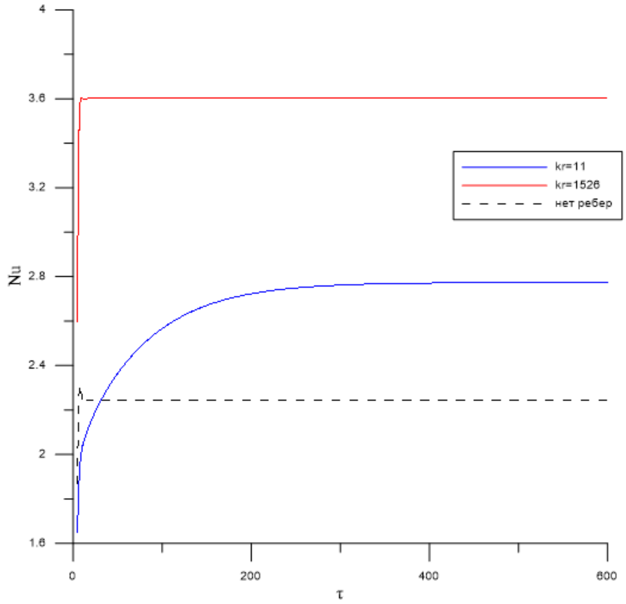
а



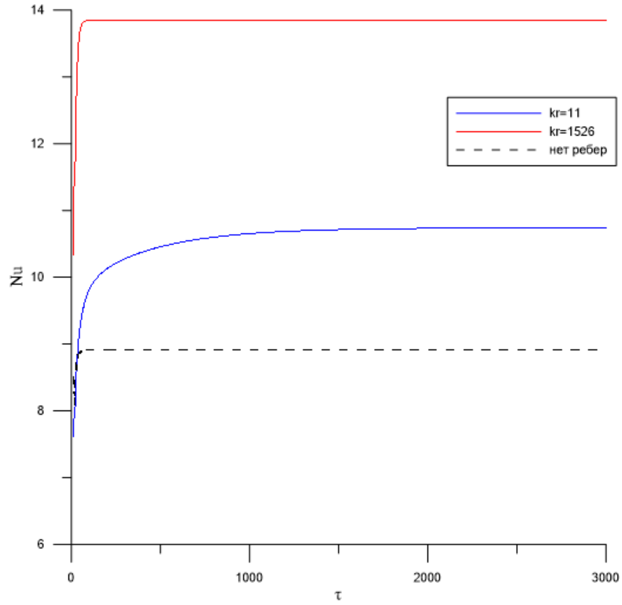
б

Рисунок 2.42 – Линии тока (а) и изотермы (б) для $\mathrm{Ra} = 10^6$ при одном пористом ребре, $\mathrm{k_r} = 1526$ и $\tau = 200$ (стационар)

Влияние теплопроводности пористого ребра при $\mathrm{Ra} = 10^4$ и $\mathrm{Ra} = 10^6$ показано на рисунке 2.43. Видно, что ребро с высшей теплопроводностью существенно сокращает время, необходимое для достижения стационарного состояния, а также значительно интенсифицирует теплообмен (примерно на 29% для $\mathrm{Ra} = 10^4$ и $\mathrm{Ra} = 10^6$). Также отметим, что наличие пористого ребра при рассматриваемых параметрах всегда приводит к улучшению теплообмена, независимо от его теплопроводности.



а)



б)

Рисунок 2.43 – Зависимость среднего числа Нуссельта от времени при различных относительных коэффициентах теплопроводности ($\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$): а) $\mathrm{Ra} = 10^4$, б) $\mathrm{Ra} = 10^6$

В таблице 2.11 показаны максимальные значения скорости в направлениях X и Y и функции тока в случае с одним пористым ребром, а также при отсутствии ребер. Благодаря высокой проницаемости пористого ребра, жидкость может беспрепятственно проникнуть его, тем самым значительно уменьшает эффект блокировки от ребра по сравнению с твердым ребром (см. раздел 2.5). При этом положительный эффект от прогревания пористым ребром сохраняется. Вследствие этого, максимальные значения функции тока и скорости в двух направлениях возрастают при всех рассматриваемых числах Рэлея по сравнению со случаем полости без ребер. Также следует отметить, что максимальная функция тока может возрастать до 110% в случае $\mathrm{Ra} = 10^6$.

Таблица 2.11 – Сравнение максимальных значений функции тока и скорости в двух направлениях для $\mathrm{Ra} = 10^4$ при отсутствии ребер и одном пористом ребре ($\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и $\mathrm{k_r} = 1526$)

Ra	Нет ребер	1 ребро	Нет ребер	1 ребро	Нет ребер	1 ребро
	Ψ_{max}	Ψ_{max}	U_{max}	U_{max}	V_{max}	V_{max}
10^4	0.060	0.079	0.192	0.259	0.233	0.324
10^5	0.036	0.058	0.163	0.269	0.256	0.373
10^6	0.020	0.042	0.144	0.225	0.259	0.381

В таблице 2.12 показана зависимость среднего числа Нуссельта от длины пористого ребра при различных числах Рэлея. Также как твердые ребра, введение пористых ребер приводит к росту поверхности теплообмена и сопротивлений. Однако, благодаря своей проницаемой структуре сопротивления, вызванные самими ребрами, малы. Соответственно, по мере увеличения длины пористого ребра наблюдается рост среднего числа Нуссельта. Однако, при переходе от $\mathrm{l} = 0.6$ до $\mathrm{l} = 0.8$ этот рост практически прекращается при высоких Рэлея (при $\mathrm{Ra} \geq 10^5$). Поэтому, длина ребра $\mathrm{l} = 0.6$ считается оптимальной для высоких чисел Рэлея.

Также следует отметить, что наличие пористых ребер всегда улучшает теплообмен, вне зависимости от их длины.

Таблица 2.12 – Среднее число Нуссельта при фиксируемом положении пористого ребра на левой стенке для различных чисел Рэлея и длины ребра ($\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{k_r} = 1526, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$)

Ra	Длина ребра, l				Без ребер
	0.2	0.4	0.6	0.8	
10^4	3.066	3.604	3.708	3.896	2.245
10^5	6.724	7.387	7.495	7.461	4.528
10^6	13.321	13.869	13.965	13.956	8.917

Таблица 2.13 иллюстрирует влияние положения пористого ребра на горячей стенке полости при различных числах Рэлея. Видно, что ребро, находящееся ближе ко дну, лучше интенсифицирует теплообмен. Это связано с тем, что при низком расположении ребра максимальная функция тока Ψ_{max} возрастает, что интенсифицирует скорость конвективного течения (рисунок 2.44а). Также на температурных полях заметим, что интенсивный теплообмен во всех случаях происходит в области около нижнего основания ребра, что характеризуется большим температурным градиентом в этом месте. Однако, при низком расположении ребра (рисунок 2.44а), высокий температурный градиент также имеет место в области около торца ребра (отсутствует для ребер, находящихся в центральной и в верхней части горячей стенки – рисунки 2.44б и 2.44в), что улучшает интенсивность теплоотвода пористым ребром.

В таблице 2.13 также заметим, что наличие пористого ребра приводит к улучшению теплообмена, вне зависимости от его положения на левой стенке.

Ψ θ

а

б

в

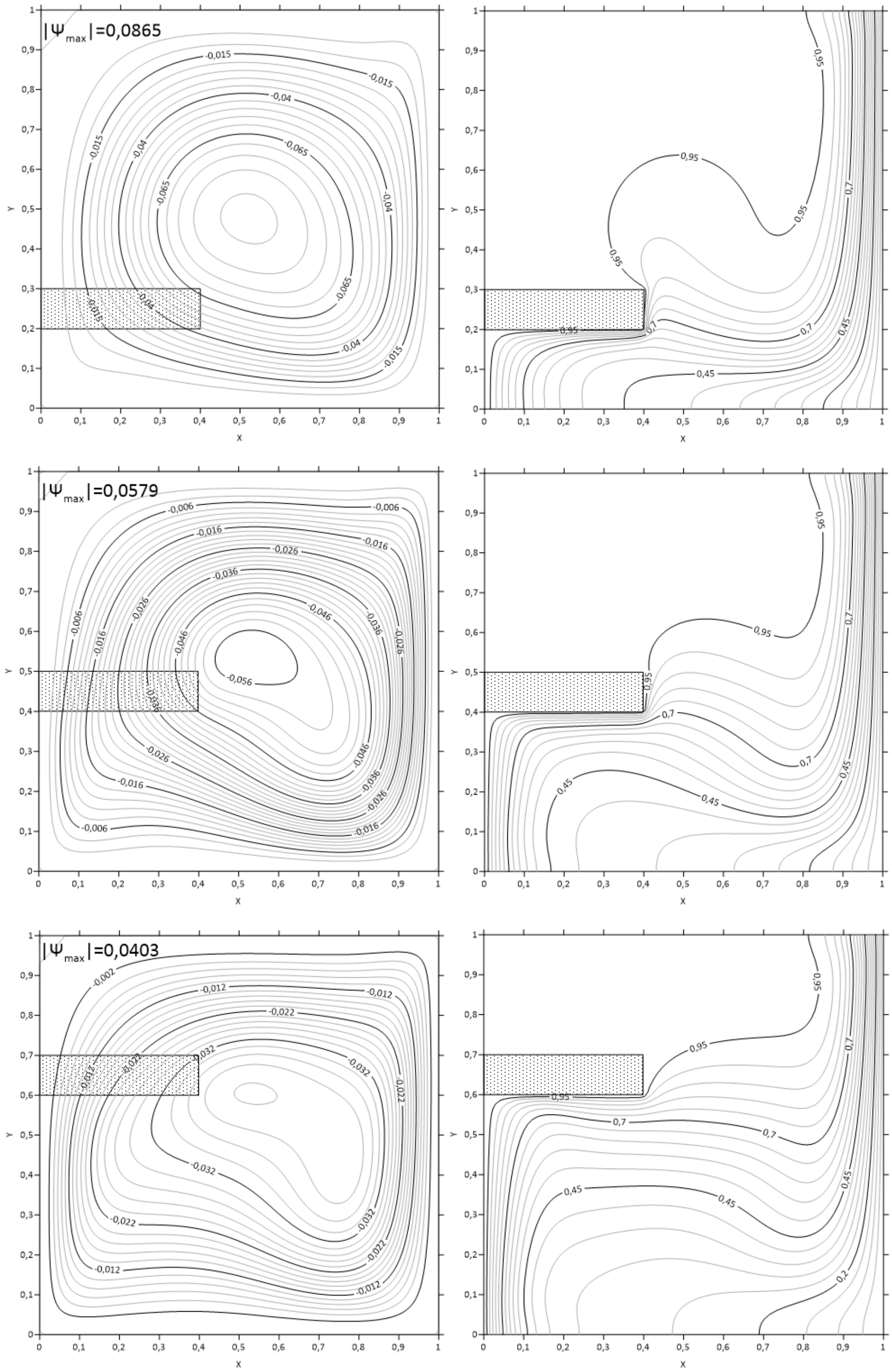


Рисунок 2.44 – Скоростные и температурные поля для различных положений пористого ребра на левой стенке ($\mathrm{Ra} = 10^5, \mathrm{k_r} = 1526, \mathrm{l} = 0.4, \varepsilon = 0.9; \mathrm{Da} = 10^{-2}$): (а) $\mathrm{d} = 0.2$, (б) $\mathrm{d} = 0.4$, (в) $\mathrm{d} = 0.6$

Таблица 2.13 – Среднее число Нуссельта при фиксируемом положении пористого ребра на левой стенке для различных чисел Рэлея и длины ребра ($\mathrm{k_r} = 1526, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$)

Ra	Положение ребра, d			Без ребер
	0,2	0,4	0,6	
10^4	3.691	3.604	3.202	2.245
10^5	7.755	7.387	6.539	4.528
10^6	14.576	13.869	12.481	8.917

Таблица 2.14 демонстрирует влияние количества ребер на интенсивность теплообмена внутри полости. Аналогично твердым ребрам, введение дополнительных пористых ребер увеличивает поверхности теплообмена, а также дополнительные сопротивления, которые могут повлиять на движение жидкости. Вопреки твердым ребрам, увеличение количества пористых ребер всегда улучшает интенсивность теплообмена. Однако, положительный эффект от введения дополнительных пористых ребер уменьшается по мере увеличения их количества, как показано на таблице 2.15. Наличие дополнительных ребер считается не эффективным с точки зрения экономики, так как рост среднего числа Нуссельта слишком мал по сравнению с ростом капитальных затрат на изготовление дополнительных пористых ребер. Таким образом, наиболее эффективно иметь одно пористое ребро. Одно пористое ребро может повысить среднее число Нуссельта на 60.5% по сравнению с полостью без ребер. Также найдено, что наличие пористых ребер всегда улучшает теплообмен, независимо от их количества.

Таблица 2.14 – Среднее число Нуссельта при фиксируемых длине и положении пористого ребра на левой стенке для различных чисел Рэлея и количества ребер ($\mathrm{k_r} = 1526, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$)

Ra	Количество ребер, n			Без ребер
	1 ребро	2 ребра	3 ребра	
10^4	3.604	3.746	3.804	2.245

Продолжение таблицы 2.14

10^5	7.387	7.778	7.852	4.528
10^6	13.869	14.646	14.803	8.917

Таблица 2.15 – Выгод от введения дополнительных ребер

Ra	Выгод, %		
	$0 \to 1$	$1 \to 2$	$2 \to 3$
10^4	60.5	3.9	1.8
10^5	63.1	5.3	1.0
10^6	55.2	5.6	2.1

В таблице 2.16 видно, что зависимости среднего числа Нуссельта является убывающей функцией от пористости. Однако, эта зависимость несущественна для всех Рэлея. Это связано с тем, что высокая пористость приводит к ухудшению эффективной теплопроводности пористых ребер по формуле $\lambda_{\mathrm{eff}} = \varepsilon\lambda_{\mathrm{f}} + (1 - \varepsilon)\lambda_{\mathrm{s}}$.

Таблица 2.16 – Среднее число Нуссельта при фиксируемом положении и длине пористого ребра на левой стенке для различных чисел Рэлея и пористости ребра ($k_r = 1526, \mathrm{Da} = 10^{-2}$).

Ra	ε			
	0.8	0.9	0.95	0.98
10^4	3.619	3.604	3.586	3.545
10^5	7.416	7.387	7.339	7.213
10^6	13.928	13.869	13.763	13.486

2.7 Сравнение результатов влияния твердых и пористых ребер на интенсивность теплообмена

Сравнение проводится при $\mathrm{Ra} = 10^4 \div 10^6, \mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \mathrm{k_r} = 1526, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и одном ребре.

В таблице 2.17 видно, что пористые ребра более эффективны для отвода тепла по сравнению с твердыми ребрами для всех чисел Рэлея. Введение твердых ребер может повысить среднее число Нуссельта примерно на 7%, тогда как соответствующее увеличение для пористых ребер составляет около 58%. В частном случае, при $\mathrm{Ra} = 10^4$ наличие твердого ребра ухудшает интенсивность теплообмена.

Таблица 2.17 – Среднее число Нуссельта при различных числах Рэлея и отсутствии/ присутствии одного твердого или пористого ребра

Ra	Без ребер	Твердое ребро	Пористое ребро
10^4	2.245	2.132	3.604
10^5	4.528	4.654	7.387
10^6	8.917	9.564	13.869

Выводы по второй главе

- Общие:

Интенсификация теплообмена путем введения твердых ребер в квадратных полостях считается не эффективной, так как повышение среднего числа Нуссельта составляет 7%. В частных случаях их наличие ухудшает интенсивность теплообмена. В то же время интенсификация теплообмена с помощью пористых ребер является эффективным методом, так как их наличие может повысить среднее число Нуссельта примерно на 58%.

- Для твердых ребер:

1. Среднее число Нуссельта является возрастающей функцией от длины твердого ребра для всех чисел Рэлея в диапазоне $\mathrm{Ra} = 10^4 \div 10^6$.

2. Твердые ребра, расположенные в нижней части полости, лучше интенсифицируют теплообмен при $\mathrm{Ra} = 10^4$ и 10^5. При более высоких числах Рэлея улучшение теплообмена наблюдается при расположении твердых ребер в средней части полости. В целом, положение твердого ребра незначительно влияет на интенсивность теплообмена.

3. Введение дополнительных твердых ребер с целью интенсификации теплообмена имеет положительный эффект при низких числах Рэлея $\mathrm{Ra} = 10^4$. При более высоких числах Рэлея этот положительный эффект имеет место только при количестве ребер равном или меньшем двух. Дальнейшее добавление дополнительных твердых ребер приводит к ухудшению теплообмена. В целом, положительный эффект от введения твердых ребер больше одного считается незначительным.

4. При правильном расположении твердого ребра на левой стенке наличие одного ребра имеет такой же эффект, как при наличии двух ребер.

- Для пористых ребер:

1. По мере увеличения длины пористого ребра среднее число Нуссельта растет. Однако при $\mathrm{Ra} = 10^5$ и 10^6 экстремумы среднего числа Нуссельта имеют место при $\mathrm{l} = 0.6$, а при $\mathrm{Ra} = 10^4$ эти экстремумы отсутствуют.

2. Пористые ребра, расположенные в нижней части полости, лучше интенсифицируют теплообмен, чем те, которые расположены в средней или в верхней частях. Это относится ко всем рассматриваемым числам Рэлея (в отличие от твердых ребер). Положение пористого ребра существенно влияет на интенсивность теплообмена.

3. Наличие двух и более пористых ребер всегда улучшает интенсивность теплообмена при всех рассмотренных числах Рэлея. Однако при переходе от одного к двум пористым ребрам положительный эффект от введения дополнительных пористых ребер существенно падает и практически остается неизменным при дальнейшем увеличении количества пористых ребер до трех.

4. Среднее число Нуссельта является убывающей функцией от пористости. Однако эта зависимость несущественна.

ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РЕБЕРНОЙ СТРУКТУРЫ НА РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛОПЕРЕНОС В ЗАМКНУТОЙ КУБИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

3.1 Постановка задачи термогравитационной конвекции в замкнутом дифференциально-обогреваемом кубе при наличии твердых и пористых ребер

3.1.1 Физическая и геометрическая модели

Область решения представляет собой куб с непроницаемыми гранями размером L. Верхняя и нижняя грани считаются теплоизолированными (рисунок 3.1). На левой и правой гранях температуры поддерживаются постоянными T_h и T_c, причем на левой грани температура выше, чем на правой ($T_h > T_c$). Сила тяжести направлена вертикально вниз по оси z. На левой грани устанавливают одинаковые твердые ребра, имеющие постоянную толщину 0,1L длину L′ и теплопроводность λ_s и пористые ребра, имеющие толщину 0,1L, длину L′, пористость ε и теплопроводность λ_{eff}. Ребра находится на расстоянии D от нижнего основания полости и распределяются равномерно по высоте области.

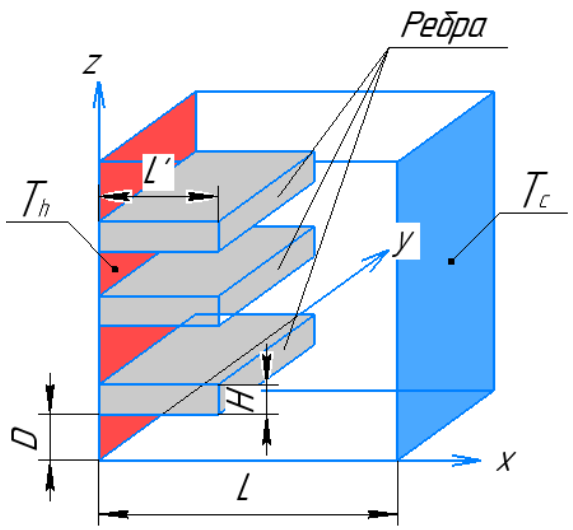


Рисунок 3.1 – Замкнутая квадратная полость с ребрами

3.1.2 Математическая постановка задачи

Процесс нестационарного переноса тепла в исследуемой области описывается системой уравнений, состоящих из трех уравнений: уравнения неразрывности, движения и энергии. Если пренебречь вязкой диссипацией энергии и считаем, что теплофизические параметры жидкости из-за разности температуры остаются неизменными, кроме плотности в уравнении движения, то система уравнений в естественных переменных имеет вид:

- для жидкости:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+g\beta(T-T_0), \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}=a_f\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right). \tag{3.5}$$

- внутри твердых ребер:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a_s\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right). \tag{3.6}$$

- внутри пористых ребер для модели Бринкмана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{3.7}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\varepsilon^2}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\nu}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-\frac{\nu}{\kappa}u, \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{\varepsilon^2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\nu}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)-\frac{\nu}{\kappa}v, \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{\varepsilon^2}\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\nu}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)-$$
$$-\frac{\nu}{\kappa}w+g\beta(T-T_0), \tag{3.10}$$

$$\eta\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}=a_{eff}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right). \tag{3.11}$$

где u, v, w – компоненты скорости по направлению x, y, z соответственно.

Система уравнений (3.1) – (3.11) может быть записана в другой форме, не содержащей давления путем перекрестного дифференцирования уравнения (3.2) - (3.4), и (3.8) - (3.10) с последующим вычитанием полученных уравнений. В системе «скорость-завихренность» определяющие уравнения конвективного теплопереноса в преобразованных переменных имеют вид:

- для жидкости:

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t}+u\frac{\partial \omega_x}{\partial x}+v\frac{\partial \omega_x}{\partial y}+w\frac{\partial \omega_x}{\partial z}-\omega_x\frac{\partial u}{\partial x}-\omega_y\frac{\partial u}{\partial y}-\omega_z\frac{\partial u}{\partial z}=$$
$$=\nu\left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial T}{\partial y}, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial t}+u\frac{\partial \omega_y}{\partial x}+v\frac{\partial \omega_y}{\partial y}+w\frac{\partial \omega_y}{\partial z}-\omega_x\frac{\partial v}{\partial x}-\omega_y\frac{\partial v}{\partial y}-\omega_z\frac{\partial v}{\partial z}=$$
$$=\nu\left(\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t}+u\frac{\partial \omega_z}{\partial x}+v\frac{\partial \omega_z}{\partial y}+w\frac{\partial \omega_z}{\partial z}-\omega_x\frac{\partial w}{\partial x}-\omega_y\frac{\partial w}{\partial y}-\omega_z\frac{\partial w}{\partial z}=$$
$$=\nu\left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2}\right), \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial \omega_y}{\partial z}-\frac{\partial \omega_z}{\partial y}, \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{\partial \omega_z}{\partial x}-\frac{\partial \omega_x}{\partial z}, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\frac{\partial \omega_x}{\partial y}-\frac{\partial \omega_y}{\partial x}, \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}=a_f\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right). \tag{3.18}$$

- внутри твердых ребер:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a_s\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right). \tag{3.19}$$

- внутри пористых ребер для модели Бринкмана:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\omega_x}{\partial t}+\frac{1}{\varepsilon^2}\left(u\frac{\partial\omega_x}{\partial x}+v\frac{\partial\omega_x}{\partial y}+w\frac{\partial\omega_x}{\partial z}-\omega_x\frac{\partial u}{\partial x}-\omega_y\frac{\partial u}{\partial y}-\omega_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\\=\frac{\nu}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2\omega_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega_x}{\partial z^2}\right)-\frac{\nu}{\kappa}\omega_x+\frac{\partial T}{\partial y},\end{gathered} \tag{3.20}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\omega_y}{\partial t}+\frac{1}{\varepsilon^2}\left(u\frac{\partial\omega_y}{\partial x}+v\frac{\partial\omega_y}{\partial y}+w\frac{\partial\omega_y}{\partial z}-\omega_x\frac{\partial v}{\partial x}-\omega_y\frac{\partial v}{\partial y}-\omega_z\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\\=\frac{\nu}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2\omega_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega_y}{\partial z^2}\right)-\frac{\nu}{\kappa}\omega_y-\frac{\partial T}{\partial x},\end{gathered} \tag{3.21}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\omega_z}{\partial t}+\frac{1}{\varepsilon^2}\left(u\frac{\partial\omega_z}{\partial x}+v\frac{\partial\omega_z}{\partial y}+w\frac{\partial\omega_z}{\partial z}-\omega_x\frac{\partial w}{\partial x}-\omega_y\frac{\partial w}{\partial y}-\omega_z\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\\=\frac{\nu}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2\omega_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega_z}{\partial z^2}\right)-\frac{\nu}{\kappa}\omega_z,\end{gathered} \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial\omega_y}{\partial z}-\frac{\partial\omega_z}{\partial y}, \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{\partial\omega_z}{\partial x}-\frac{\partial\omega_x}{\partial z}, \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\frac{\partial\omega_x}{\partial y}-\frac{\partial\omega_y}{\partial x}, \tag{3.25}$$

$$\eta\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}=a_{eff}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right). \tag{3.26}$$

где $\omega_x=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}, \omega_y=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}, \omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$ – компоненты вектора завихренности по направлениям x, y, z соответственно.

Обезразмерим систему уравнений (3.12) – (3.26), используя следующие соотношения:

$$(X, Y, Z) = \frac{(x, y, z)}{L}, \tau = \frac{tV_0}{L}, (U, V, W) = \frac{(u, v, w)}{V_0},$$

$$\left(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\right) = \left(\omega_x, \omega_y, \omega_z\right)\frac{L}{V_0} \ , \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, V_0 = \sqrt{g\beta(T - T_0)L}.$$

Безразмерные уравнения в системе «скорость – завихренность», описывающие процесс теплопереноса внутри замкнутого куба примут вид:

- для жидкости:

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial \tau} + U\frac{\partial \Omega_x}{\partial X} + V\frac{\partial \Omega_x}{\partial Y} + W\frac{\partial \Omega_x}{\partial Z} - \Omega_x\frac{\partial U}{\partial X} - \Omega_y\frac{\partial U}{\partial Y} - \Omega_z\frac{\partial U}{\partial Z} = \\ = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\left(\frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial Z^2}\right) + \frac{\partial \theta}{\partial Y}, \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial \tau} + U\frac{\partial \Omega_y}{\partial X} + V\frac{\partial \Omega_y}{\partial Y} + W\frac{\partial \Omega_y}{\partial Z} - \Omega_x\frac{\partial V}{\partial X} - \Omega_y\frac{\partial V}{\partial Y} - \Omega_z\frac{\partial V}{\partial Z} = \\ = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\left(\frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial Z^2}\right) - \frac{\partial \theta}{\partial X}, \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial \tau} + U\frac{\partial \Omega_z}{\partial X} + V\frac{\partial \Omega_z}{\partial Y} + W\frac{\partial \Omega_z}{\partial Z} - \Omega_x\frac{\partial W}{\partial X} - \Omega_y\frac{\partial W}{\partial Y} - \Omega_z\frac{\partial W}{\partial Z} = \\ = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\left(\frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial Z^2}\right), \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} = \frac{\partial \Omega_y}{\partial Z} - \frac{\partial \Omega_z}{\partial Y}, \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = \frac{\partial \Omega_z}{\partial X} - \frac{\partial \Omega_x}{\partial Z}, \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} = \frac{\partial \Omega_x}{\partial Y} - \frac{\partial \Omega_y}{\partial X}, \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U\frac{\partial \theta}{\partial X} + V\frac{\partial \theta}{\partial Y} + W\frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{1}{\sqrt{Pr \cdot Ra}}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2}\right). \tag{3.33}$$

- внутри твердых ребер:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{a_s/a_f}{\sqrt{Pr \cdot Ra}}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2}\right). \tag{3.34}$$

- внутри пористых ребер:

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Omega_x}{\partial\tau}+\frac{1}{\varepsilon^2}\left(U\frac{\partial\Omega_x}{\partial X}+V\frac{\partial\Omega_x}{\partial Y}+W\frac{\partial\Omega_x}{\partial Z}-\Omega_x\frac{\partial U}{\partial X}-\Omega_y\frac{\partial U}{\partial Y}-\Omega_z\frac{\partial U}{\partial Z}\right)=$$
$$=\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\left(\frac{\partial^2\Omega_x}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Omega_x}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2\Omega_x}{\partial Z^2}\right)-\frac{1}{Da}\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\Omega_x+\frac{\partial\theta}{\partial Y}, \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Omega_y}{\partial\tau}+\frac{1}{\varepsilon^2}\left(U\frac{\partial\Omega_y}{\partial X}+V\frac{\partial\Omega_y}{\partial Y}+W\frac{\partial\Omega_y}{\partial Z}-\Omega_x\frac{\partial V}{\partial X}-\Omega_y\frac{\partial V}{\partial Y}-\Omega_z\frac{\partial V}{\partial Z}\right)=$$
$$=\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\left(\frac{\partial^2\Omega_y}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Omega_y}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2\Omega_y}{\partial Z^2}\right)-\frac{1}{Da}\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\Omega_y-\frac{\partial\theta}{\partial X}, \quad (3.36)$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Omega_z}{\partial\tau}+\frac{1}{\varepsilon^2}\left(U\frac{\partial\Omega_z}{\partial X}+V\frac{\partial\Omega_z}{\partial Y}+W\frac{\partial\Omega_z}{\partial Z}-\Omega_x\frac{\partial W}{\partial X}-\Omega_y\frac{\partial W}{\partial Y}-\Omega_z\frac{\partial W}{\partial Z}\right)=$$
$$=\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\left(\frac{\partial^2\Omega_z}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Omega_z}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2\Omega_z}{\partial Z^2}\right)-\frac{1}{Da}\sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\Omega_z, \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}=\frac{\partial\Omega_y}{\partial Z}-\frac{\partial\Omega_z}{\partial Y}, \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}=\frac{\partial\Omega_z}{\partial X}-\frac{\partial\Omega_x}{\partial Z}, \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial Z^2}=\frac{\partial\Omega_x}{\partial Y}-\frac{\partial\Omega_y}{\partial X}, \quad (3.40)$$

$$\eta\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+U\frac{\partial\theta}{\partial X}+V\frac{\partial\theta}{\partial Y}+W\frac{\partial\theta}{\partial Z}=\frac{k_r}{\sqrt{Pr\cdot Ra}}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2}\right). \quad (3.41)$$

Безразмерные начальные и граничные условия для системы уравнений (3.38) – (3.41) имеют вид:

$$\left|\begin{array}{l}
\tau=0\rightarrow U=V=W=\Omega_x=\Omega_y=\Omega_z=0,\ \theta=0.5,\\
\tau>0\rightarrow Y=\text{const},\ U=V=W=0,\Omega_x=\dfrac{\partial W}{\partial Y},\Omega_y=0,\Omega_z=-\dfrac{\partial U}{\partial Y},\dfrac{\partial\theta}{\partial Y}\\
\qquad\qquad=0\\
X=0,\ U=V=W=0,\Omega_x=0,\Omega_y=-\dfrac{\partial W}{\partial X},\Omega_z=\dfrac{\partial V}{\partial X},\theta=1\\
X=1,\ U=V=W=0,\Omega_x=0,\Omega_y=-\dfrac{\partial W}{\partial X},\Omega_z=\dfrac{\partial V}{\partial X},\theta=0\\
Z=\text{const},\ U=V=W=0,\Omega_x=-\dfrac{\partial V}{\partial Z},\Omega_y=\dfrac{\partial U}{\partial Z},\Omega_z=0,\dfrac{\partial\theta}{\partial Z}=0
\end{array}\right. \quad (3.42)$$

на поверхности твердых ребер:

$$U = V = W = 0, \theta_s = \theta_f, \frac{\partial \theta_f}{\partial n} = \frac{\lambda_s}{\lambda_f}\frac{\partial \theta_s}{\partial n} \tag{3.43}$$

на поверхности пористых ребер:

$$\left|\begin{array}{l} \Omega_{x_p} = \Omega_{x_f}, \dfrac{\partial \Omega_{x_p}}{\partial n} = \dfrac{\partial \Omega_{x_f}}{\partial n}, \Omega_{y_p} = \Omega_{y_f}, \dfrac{\partial \Omega_{y_p}}{\partial n} = \dfrac{\partial \Omega_{y_f}}{\partial n}, \\ \Omega_{z_p} = \Omega_{z_f}, \dfrac{\partial \Omega_{z_p}}{\partial n} = \dfrac{\partial \Omega_{z_f}}{\partial n}, \theta_p = \theta_f, \dfrac{\partial \theta_f}{\partial n} = k_r \dfrac{\partial \theta_p}{\partial n}. \end{array}\right. \tag{3.44}$$

Среднее число Нуссельта на правой грани рассчитывается по формуле:

$$\mathrm{Nu} = \iint_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial X} dY dZ. \tag{3.45}$$

3.2 Верификация разработанного численного алгоритма

3.2.1. Задача естественной конвекции в замкнутом дифференциально-обогреваемом кубе

Жидкость ($\mathrm{Pr} = 0.71$) находится в замкнутом кубе размером L (рисунок 3.2). На левой и правой гранях поддерживаются постоянные по всей поверхности, но различные температуры ($T_h > T_c$). Остальные грани считаются теплоизолированными. Сила тяжести направляется вертикально вниз по оси z.

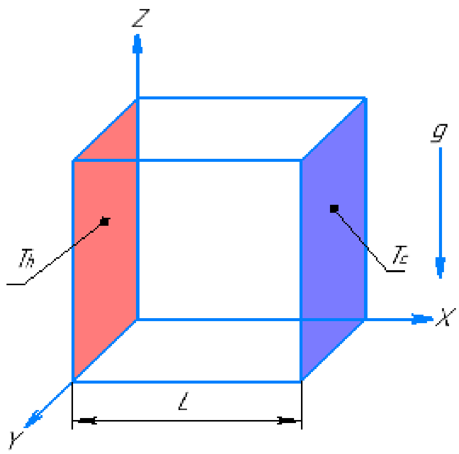


Рисунок 3.2 – Замкнутый дифференциально-обогреваемый куб

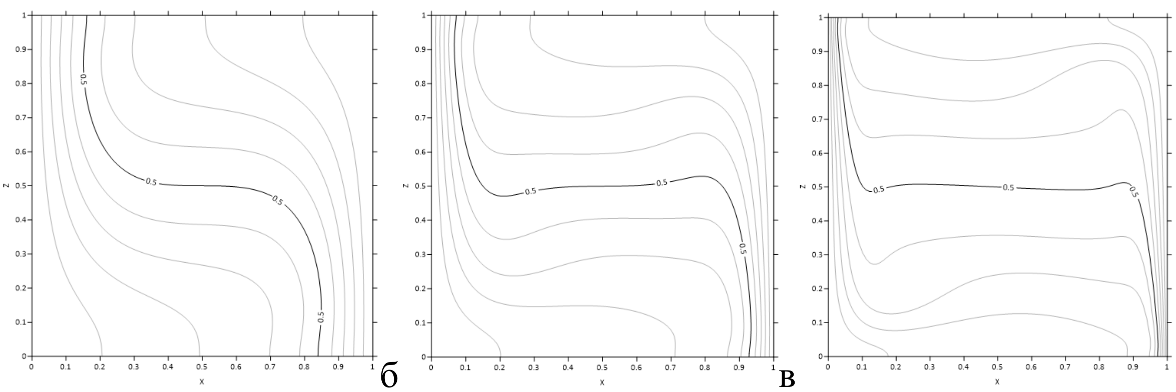
Верификация проводится путем сравнения результатов, полученных в данной работе, с результатами, полученными в работах [101], [105] – [108].

В таблице 3.1 представлена зависимость среднего числа Нуссельта от числа Рэлея в данной работе и в работах [101], [105] – [108]. Видно, что результаты в данной работе хорошо согласуются с результатами, полученными другими авторами.

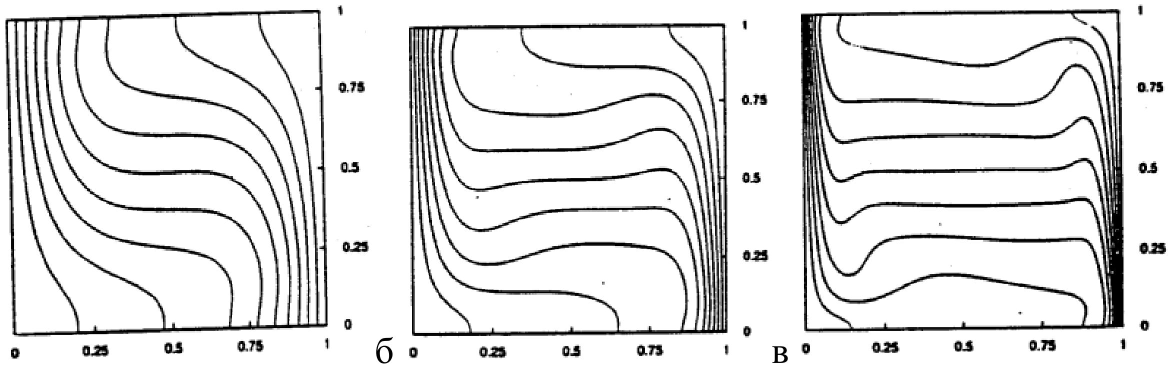
Таблица 3.1 – Зависимость среднего числа Нуссельта от числа Рэлея в данной работе и в других работах

Ra	$Ra = 10^4$	$Ra = 10^5$	$Ra = 10^6$
Данная работа	2.059	4.412	8.896
[101]	2.071	4.446	9.432
[105]	2.061	4.372	-
[106]	2.055	4.339	8.656
[107]	2.100	4.361	8.770
[108]	2.062	4.382	-

На рисунках 3.3 и 3.4 представлены поля скорости и температуры в среднем сечении $Y = 0.5$ при различных числах Рэлея в данной работе и в работе [106]. Сходство этих рисунков иллюстрирует, что численный метод решения правильно разработан.



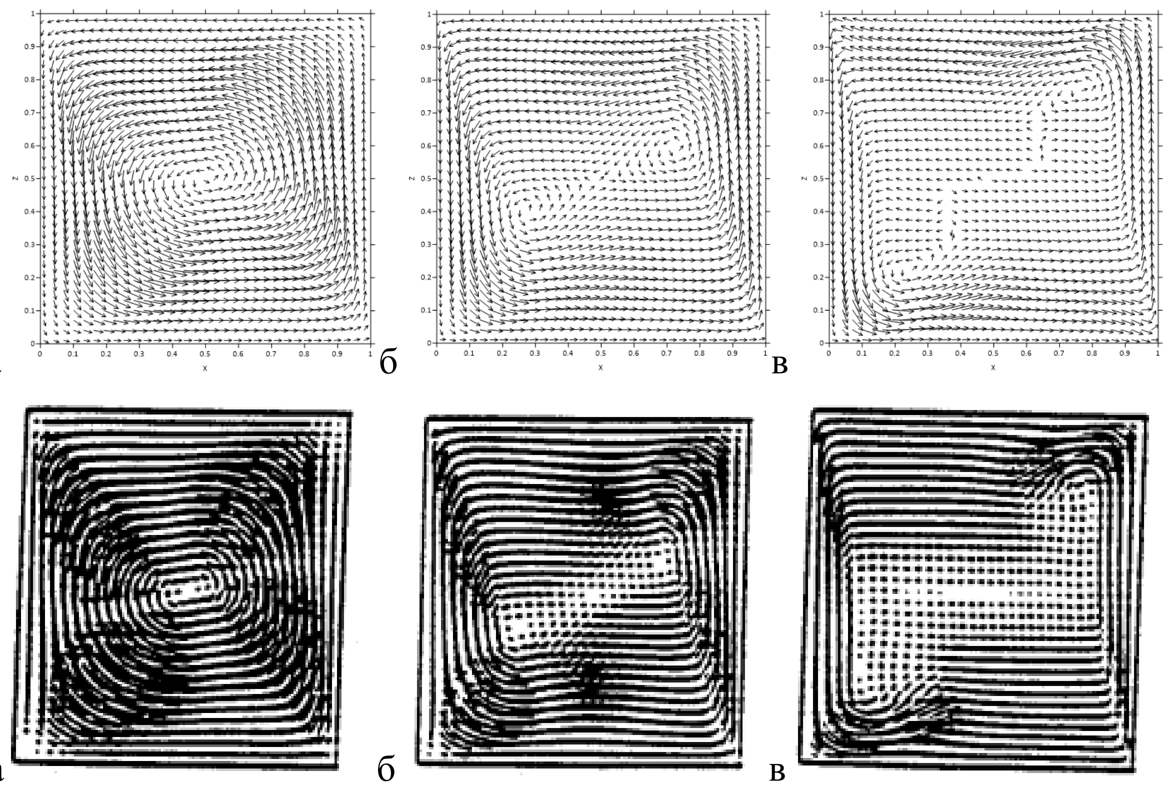
а б в



а б в

Рисунок 3.3 – Поля температуры в сечении $Y = 0.5$ при различных числах Рэлея в данной работе (верхние) и в работе [106] (нижние)

а – $\mathrm{Ra} = 10^4$, б – $\mathrm{Ra} = 10^5$, в – $\mathrm{Ra} = 10^6$



а б в

а б в

Рисунок 3.4 – Поля скоростей в сечении $Y = 0.5$ при различных числах Рэлея в данной работе (верхние) и в работе [106] (нижние)

а – $\mathrm{Ra} = 10^4$, б – $\mathrm{Ra} = 10^5$, в – $\mathrm{Ra} = 10^6$

3.2.2. Задача естественной конвекции в пористом замкнутом дифференциально-обогреваемом кубе

Жидкость ($\mathrm{Pr} = 0.71$) находится в замкнутом пористом кубе, имеющем размеры L, пористость $\varepsilon = 0.8$ и число Дарси $\mathrm{Da} = 10^{-2}$ (рисунок 3.5). На левой и правой гранях поддерживаются постоянные по всей поверхности, но различные температуры ($T_h > T_c$). Остальные грани считаются теплоизолированными. Сила тяжести направляется вертикально вниз по оси z.

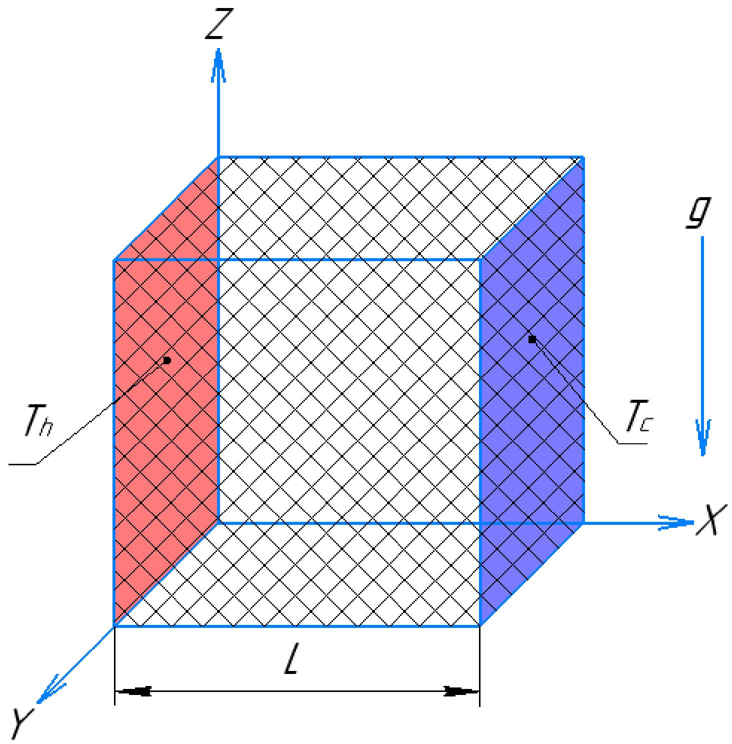


Рисунок 3.5 – Пористо-обогреваемый куб

Результаты сравниваются с результатами, полученными Kramer и др. [109]

На рисунках 3.6 и 3.7 представлены поля температуры и скорости в среднем сечении $Y = 0.5$ при различных числах Рэлея в данной работе и в работе [109]. Видно, что на этих рисунках наблюдается хорошее соответствие между результатами, полученными в этой работе, и результатами, полученными в работе [109].

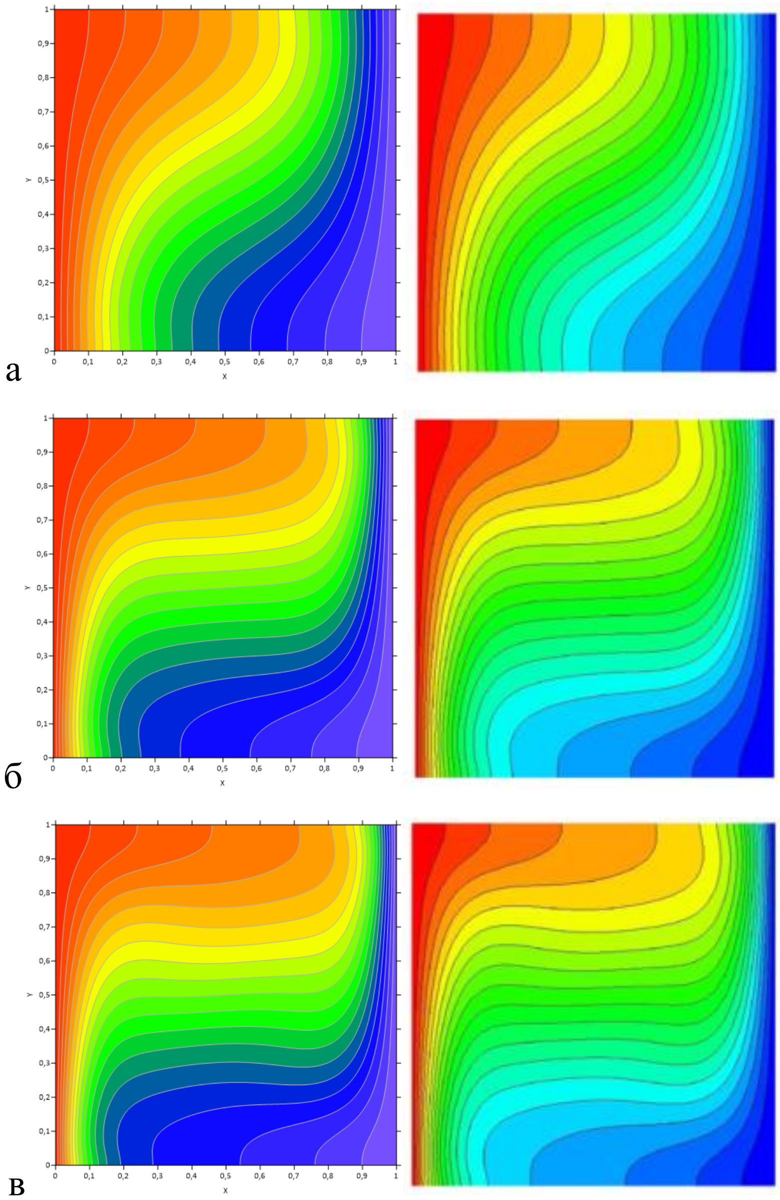


Рисунок 3.6 – Поля температуры в сечении $\mathrm{Y} = 0.5$ при различных числах Рэлея в данной работе (левые) и в работе [109] (правые): а – $\mathrm{Ra} = 10^4$, б – $\mathrm{Ra} = 5 \cdot 10^4$, в – $\mathrm{Ra} = 10^5$

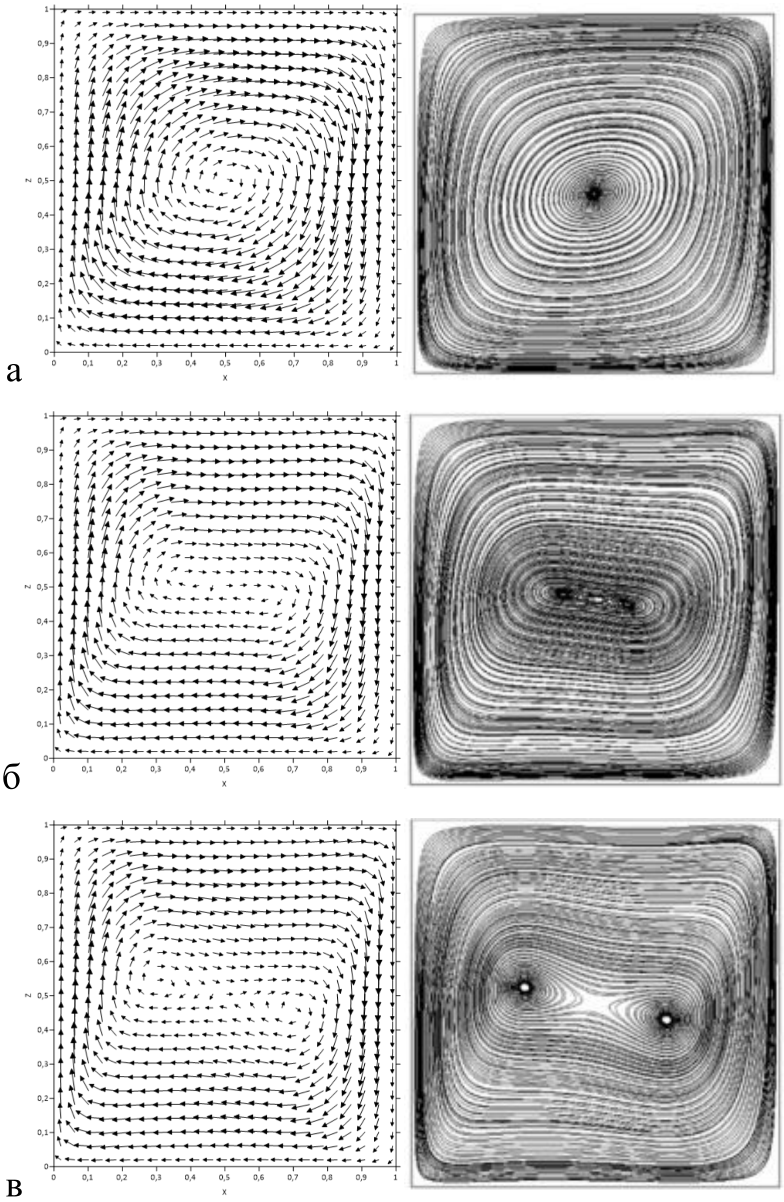


Рисунок 3.7 – Поля скоростей в сечении $\mathrm{Y} = 0.5$ при различных числах Рэлея в данной работе (левые) и в работе [111] (правые): а – $\mathrm{Ra} = 10^4$, б – $\mathrm{Ra} = 5 \cdot 10^4$, в – $\mathrm{Ra} = 10^5$

В таблице 3.2 изображена зависимость среднего числа Нуссельта от модифицированных чисел Рэлея и чисел Дарси. Видно, что результаты в данной работе хорошо согласуются с результатами в работе [109].

Таблица 3.2 – Зависимость среднего числа Нуссельта от модифицированных чисел Рэлея и чисел Дарси в данной работе и в работе [109] (здесь $Ra_p = Ra \cdot Da$)

Ra_p	Da			
	10^{-1}		10^{-2}	
	Данная работа	Работа [109]	Данная работа	Работа [109]
50	1.010	1.010	1.209	1.216
100	1.039	1.039	1.519	1.533
200	1.131	1.132	2.009	2.029
500	1.448	1.453	2.902	2.920
1000	1.848	1.855	3.766	3.770

3.3 Анализ влияния сеточных параметров и параметра релаксации

3.3.1 Анализ влияния размера сетки

Расчеты проводятся при одном твердом ребре при $Ra = 10^5, d = 0.2, l = 0.4, \lambda_s/\lambda_f = 15251$.

На рисунке 3.8 видно, что среднее число Нуссельта на сетке 100×100×100 много не различается от того же на сетках 150×150×150 и 200×200×200, а времени, необходимое для проведения этих расчетов, существенно различны (примерно 48 часов для сетки 100×100×100; 2 недели для сетки 150×150×150 и 5 недель для сетки 200×200×200). Соответственно, сетка 100×100×100 является оптимальной и дальнейшие расчеты для твердых ребер будут проводиться именно на этой сетке.

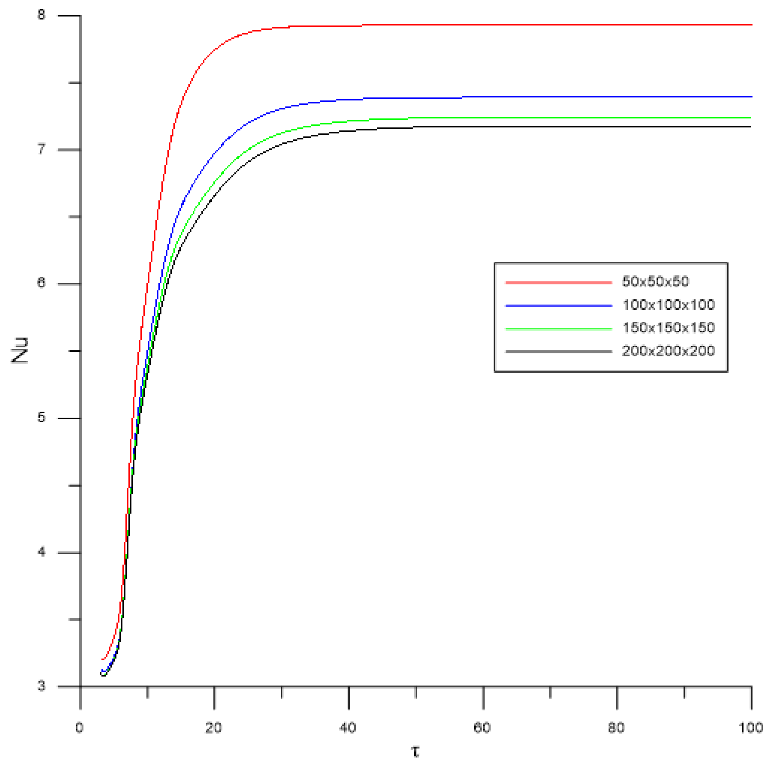


Рисунок 3.8 – Среднее число Нуссельта при различных размерах сетки в случае одного твердого ребра ($\mathrm{Ra} = 10^5, \mathrm{d} = 0.2, \mathrm{l} = 0.4, \lambda_s/\lambda_f = 15251$)

Для пористых ребер также проводится анализ влияния размера сетки при $\mathrm{Ra} = 10^5, \mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \mathrm{k_r} = 1526, \varepsilon = 0.9$ и $\mathrm{Da} = 10^{-2}$.

Рисунок 3.9 показывает влияние размера сетки на результаты расчета в случае кубической полости с одним пористым ребром ($\mathrm{Ra} = 10^5, \mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \mathrm{k_r} = 1526, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$). Из рисунка 3.9 видно, что сетка 100×100×100 является оптимальной, так как существенные различия в средних числах Нуссельта для сеток 100×100×100, 150×150×150 и 200×200×200 не наблюдаются. Соответственно, дальнейшие расчеты для пористых ребер будут проводиться на сетке 100×100×100.

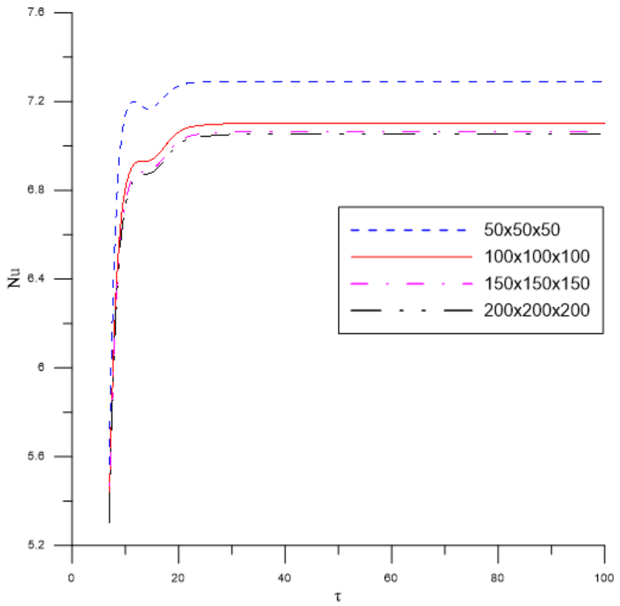


Рисунок 3.9 – Среднее число Нуссельта при различных размерах сетки в случае одного пористого ребра ($\mathrm{Ra} = 10^5, \mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \mathrm{k_r} = 1526,$ $\varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$)

3.3.2 Анализ влияния шага по времени

Расчеты проводятся при отсутствии ребер и $\mathrm{Ra} = 10^5$.

Влияние шага времени на среднее число Нуссельта при отсутствии ребер и $\mathrm{Ra} = 10^5$ показано на рисунке 3.10. Видно, что при снижении шага времени ниже $\tau = 10^{-2}$ результаты практически остаются неизменными, а количество операций существенно растет. Исходя из этого, шаг времени $\tau = 10^{-2}$ является оптимальным.

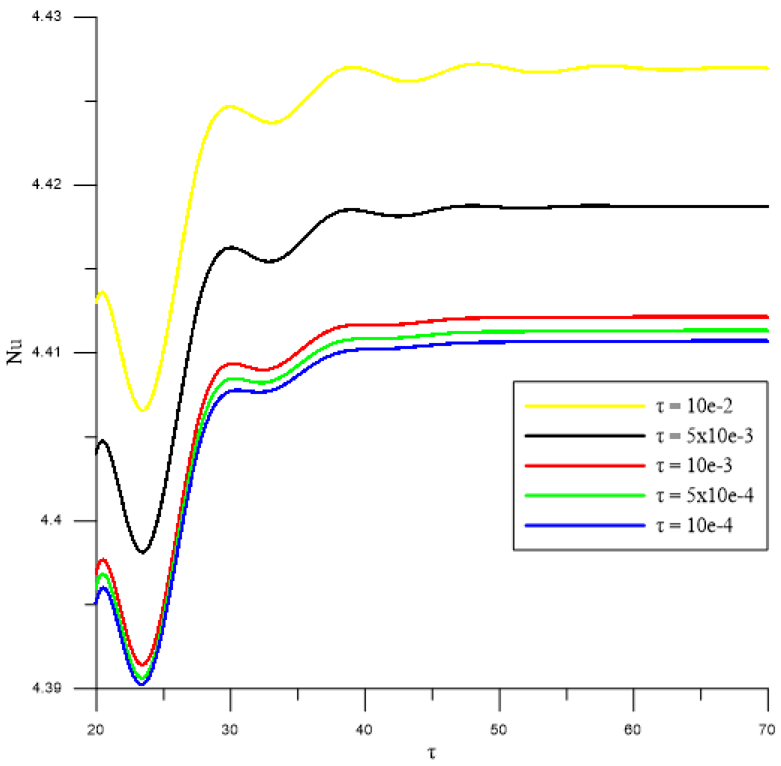
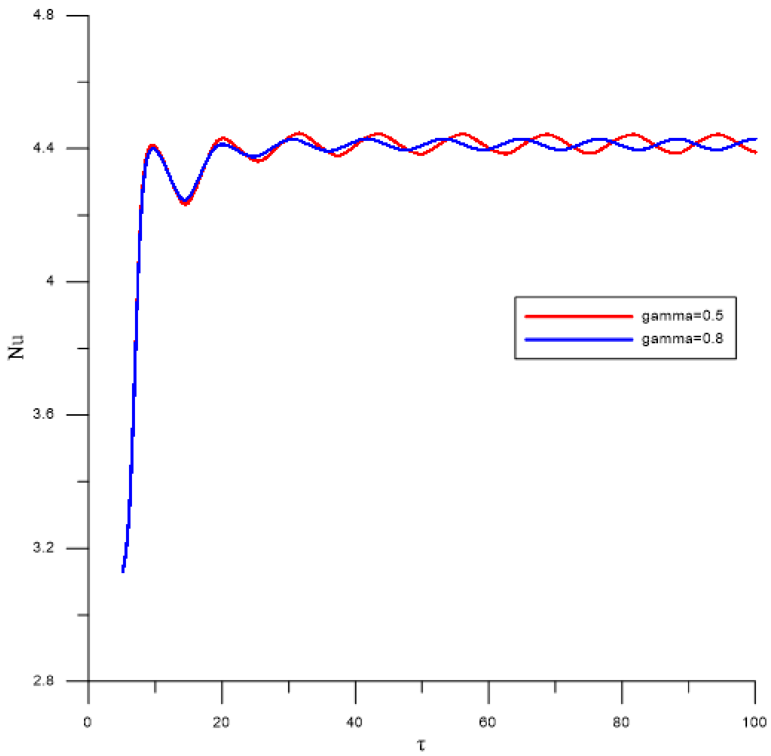


Рисунок 3.10 – Среднее число Нуссельта при отсутствии ребер и $\mathrm{Ra} = 10^5$ для различных шагов времени

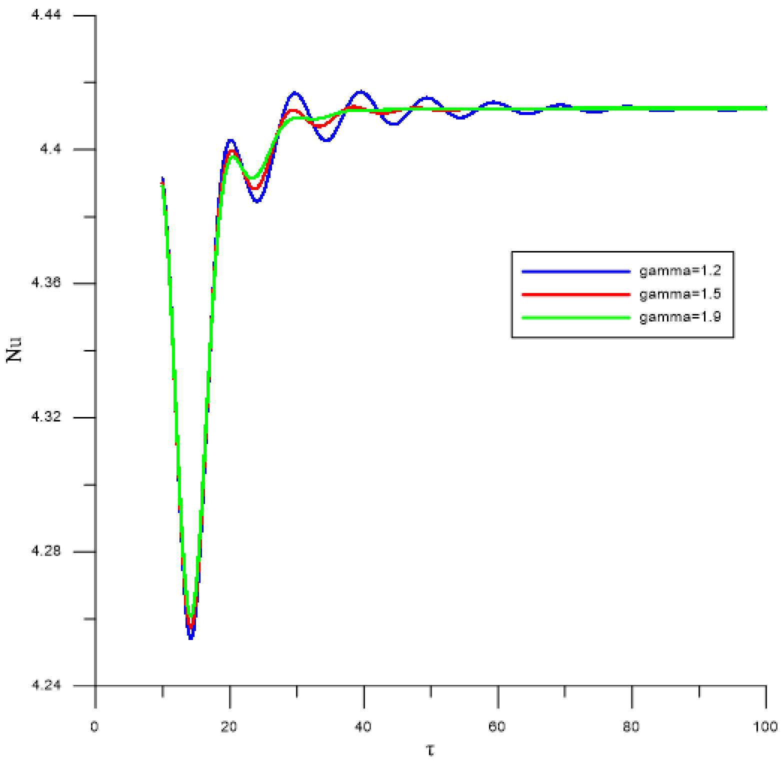
3.3.3. Анализ влияния параметра релаксации

Расчеты проводятся при отсутствии ребер и $\mathrm{Ra} = 10^5$.

На рисунке 3.11 представлено влияние параметра релаксации на среднее число Нуссельта. Видно, что хорошие результаты получаются только при параметре больше единицы (рисунок 3.11б). При этом, поскольку изменение параметра релаксации не влияет на время, необходимое для получения расчета, можно выбрать любой параметр релаксации больше единицы. Однако, при параметре, равном 1.9 ($\gamma = 1.9$), среднее число Нуссельта быстрее выходит на стационар, чем остальные два случая ($\gamma = 1.2$ и $\gamma = 1.5$). Следовательно, будем выбирать параметр релаксации $\gamma = 1.9$ для решения уравнений Пуассона для компонент скорости.



(а)

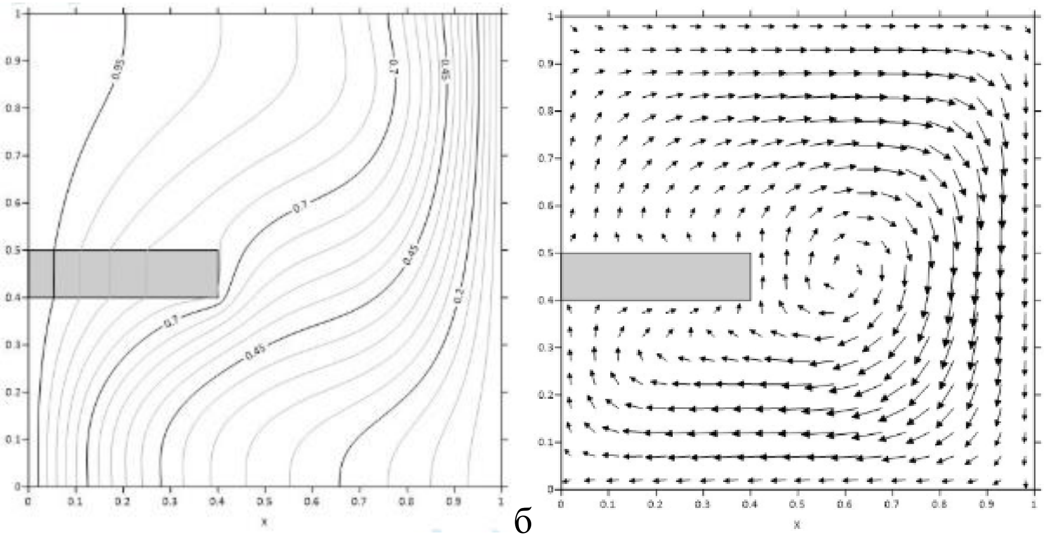


(б)

Рисунок 3.11 – Среднее число Нуссельта при отсутствии ребер и $Ra = 10^5$ для различных параметров релаксации: (а) – ниже единицы, (б) – выше единицы

3.4. Исследование влияния твердых ребер на режимы течения и теплоперенос в замкнутом дифференциально-обогреваемом кубе

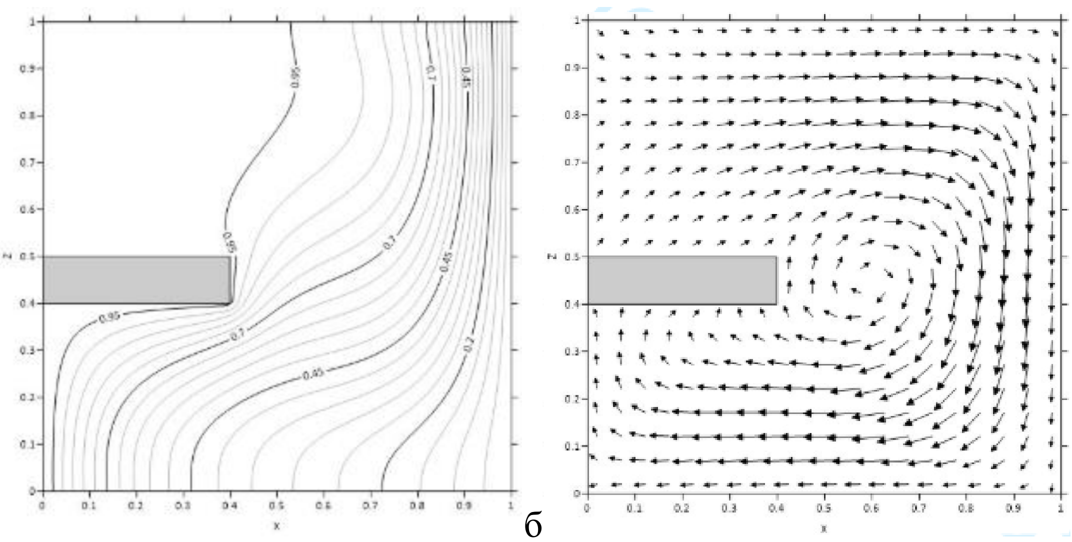
На рисунках 3.12-3.14 показано движение жидкости и распределение температуры в среднем сечении $Y = 0.5$ внутри кубической полости при наличии одного твердого ребра ($d = 0.4, l = 0.4$) при различных числах Рэлея и относительных коэффициентах теплопроводности. Видно, что наличие твердого ребра меняет траекторию течения жидкости внутри куба, в отличие от кубической полости без ребер (см. рисунки 3.4а и 3.4в). При малой теплопроводности ($\lambda_s/\lambda_f = 100$) и низких числах Рэлея ($Ra = 10^4$) в промежуточный момент времени $\tau = 150$ жидкость приближается к нижнему основанию ребра снизу, обходит его, возвращается к горячей грани над ребром,и направляется к холодной грани (рисунок 3.12б). Более горячая жидкость, приближаясь к холодной грани, обменивается теплом с более холодной жидкостью и опускается. Дальше жидкость направляется к горячей грани и циркуляция повторяется. В области около центра образуется вихревое ядро. Внутри твердого ребра наблюдаются вертикальные изотермы, что характеризует процесс нагрева твердого ребра теплопроводностью за счет тепла от левой стенки (рисунок 3.12а). Изотермы при таком числе Рэлея относительно вертикальны, что характеризует слабую конвекцию. При выходе на стационар ($\tau = 800$) (рисунок 3.13б), а также в случае с высокотеплопроводным ребром ($\lambda_s/\lambda_f = 15251$) (рисунок 3.14б) приближающаяся к нижнему основанию ребра жидкость, обойдя ребро, больше не возвращается к левой грани над ребром. Вместо этого она перемешивается с прогретой жидкостью над ребром и направляется к правой грани. Причина этого явления может объясняться следующим образом: ребро ведет себя как развитая горячая грань, и жидкость, находящаяся над ним, быстро прогревается, что сказывается на смещении изотерм вправо, что приводит к образованию толстых тепловых пограничных слоев над ребром (рисунки 3.14а).



а б

Рисунок 3.12 – Температурные и скоростые поля для $\mathrm{Ra} = 10^4$ и $\lambda_s/\lambda_f = 100$ в сечении $\mathrm{Y} = 0.5$ через $\tau = 150$ (нестационар)

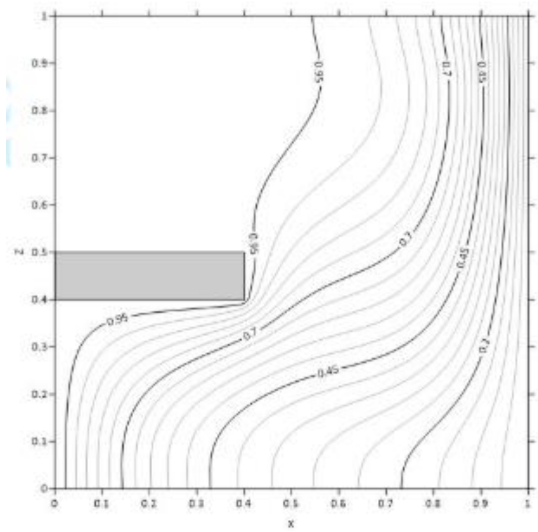
а – температурное поле, б – скоростное поле



а б

Рисунок 3.13 – Температурные и скоростые поля для $\mathrm{Ra} = 10^4$ и $\lambda_s/\lambda_f = 100$ в сечении $\mathrm{Y} = 0.5$ через $\tau = 800$ (стационар)

а – температурное поле, б – скоростное поле


а

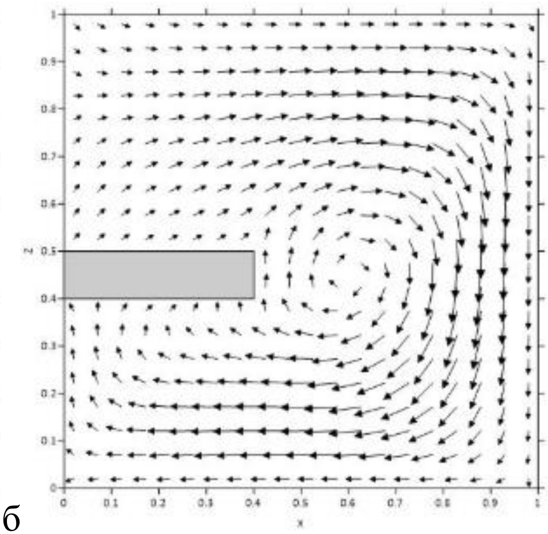

б

Рисунок 3.14 – Температурные и скоростые поля для $\mathrm{Ra} = 10^4$ и $\lambda_s/\lambda_f = 15251$ в сечении $\mathrm{Y} = 0.5$ через $\tau = 150$ (стационар)

а – температурное поле, б – скоростное поле

Влияние теплопроводности твердого ребра также отражено на рисунке 3.15. Видно, что процесс теплообмена внутри полости с низкотеплопроводным ребром требует гораздо больше времени для достижения стационарного состояния (по крайней мере, 600 безразмерных моментов времени по сравнению с 30 в случае с высокотеплопроводным ребром). Спустя долгое время ($\tau \geq 800$) процесс теплообмена выходит на стационарное состояние и поля скоростей и температуры, полученные для низко- и высокотеплопроводных ребер, практически идентичны (см. рисунки 3.13 и 3.14). Таким образом, при низких числах Рэлея, увеличение теплопроводности твердого ребра не приводит к росту среднего числа Нуссельта (рисунок 3.15).

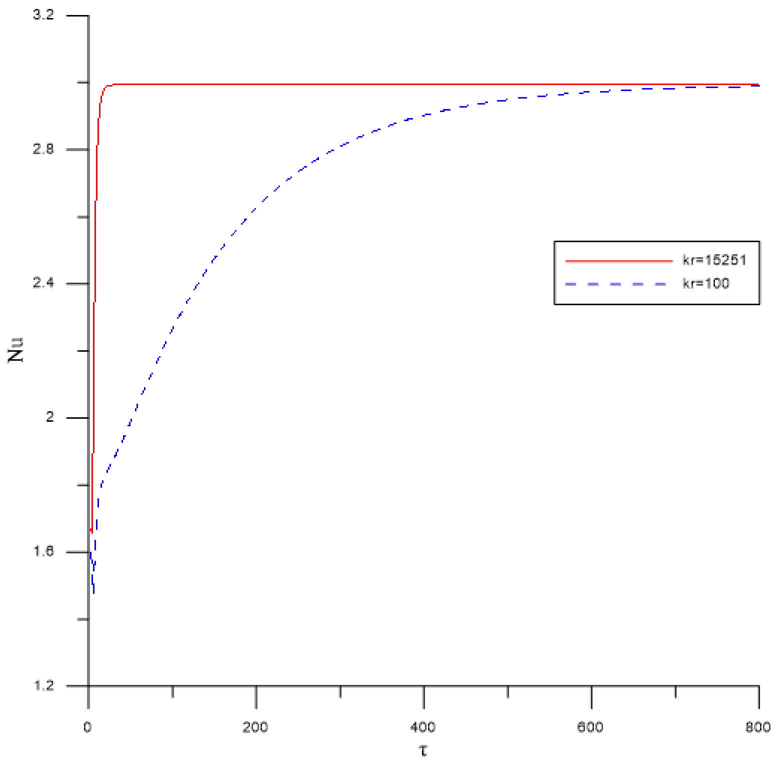
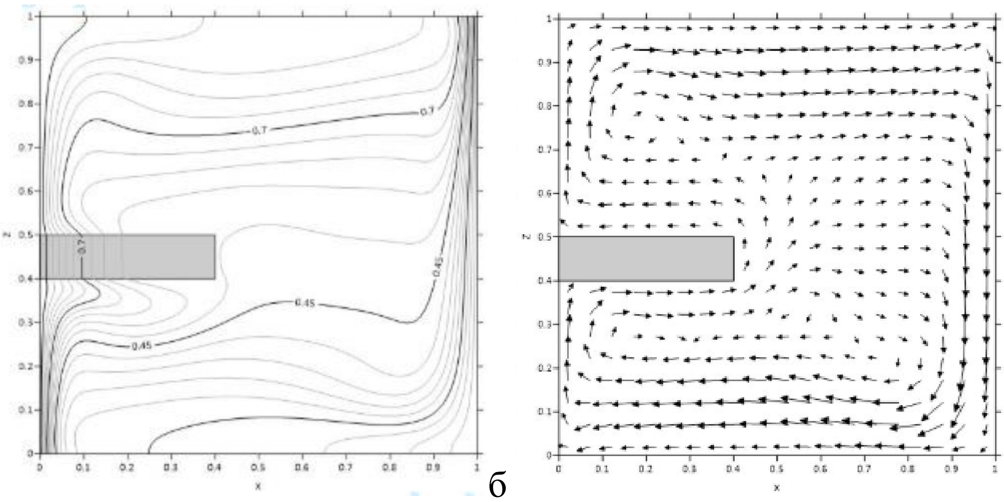


Рисунок 3.15 – Зависимость среднего числа Нуссельта от времени при различных относительных коэффициентах теплопроводности ($\mathrm{Ra} = 10^4, \mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4$)

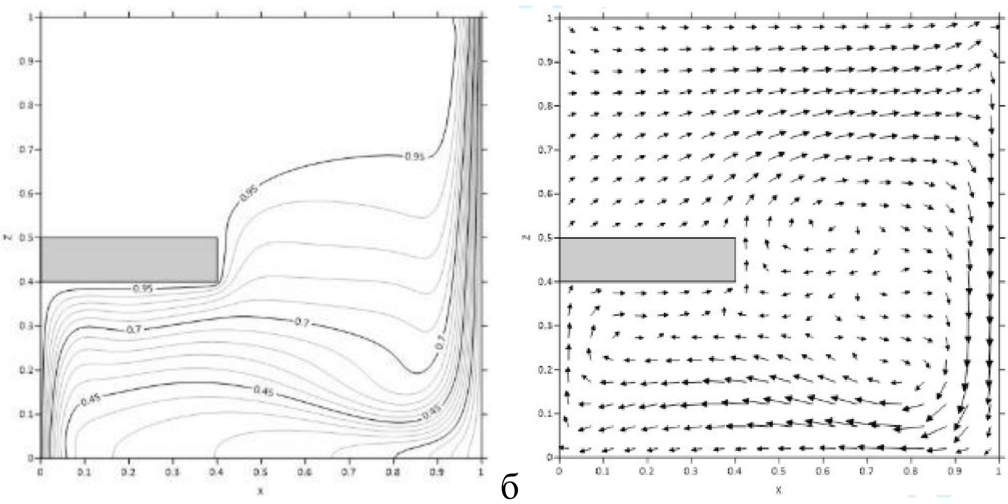
При $\mathrm{Ra} = 10^6$ имеют место большие температурные градиенты около левой грани, что характеризует интенсивный теплосъем с ней (рисунки 3.16а и 3.17а) (отсутствуют при малых Рэлея). Изотермы искривляются, а также наблюдается их слоистость (за исключением изотермы внутри твердого ребра), что характеризует развитие конвекции. Вихревое ядро, образующееся около центра при $\mathrm{Ra} = 10^4$ (рискнки 3.12б, 3.13б и 3.14б), существенно развивается по размеру. При таких высоких числах Рэлея влияние теплопроводности твердых ребер становится более значительным: не только область над ребром прогревается за счет высокой теплопроводности ребер, но и большая часть вправо от нее благодаря сильным конвективным силам (рисунок 3.17а). Аналогично случаю $\mathrm{Ra} = 10^4$ и $\lambda_s/\lambda_f = 15251$ (рисунок 3.14), после обхода твердого ребра жидкость также не возвращается к левой грани, вместо этого она перемешивается с прогретой жидкостью над ребром и направляется к правой грани (рисунок 3.17б). При низкой теплопроводности ребра ($\lambda_s/\lambda_f = 100$) жидкость, обходя твердое ребро, начинает омывать пространство над ребром около левой стенки и направляется к правой грани (рисунок 3.16б). В результате этого на поле скоростей наблюдаются три вихревых ядра: в левом верхнем углу, в левой нижнем углу и в правом нижнем углу. На поле температуры температурный градиент виден внутри твердого ребра (рисунок 3.16а).



а б

Рисунок 3.16 – Температурные и скоростые поля для $\mathrm{Ra} = 10^6$ и $\lambda_s/\lambda_f = 100$ в сечении $\mathrm{Y} = 0.5$ через $\tau = 150$ (стационар)

а – температурное поле, б – скоростное поле



а б

Рисунок 3.17 – Температурные и скоростые поля для $\mathrm{Ra} = 10^6$ и $\lambda_s/\lambda_f = 15251$ в сечении $\mathrm{Y} = 0.5$ через $\tau = 150$ (стационар)

а – температурное поле, б – скоростное поле

Влияние теплопроводности твердого ребра при $Ra = 10^6$ показано на рисунке 3.18. Аналогично случаю с $Ra = 10^4$, ребро с высшей теплопроводностью также несколько сокращает время, необходимое для достижения стационарного состояния. Однако при таком высоком числе Рэлея процесс теплообмена внутри полости с низкотеплопроводным ребром не требует много времени для достижения стационара (безразмерные моменты времени составляют только 120 по сравнению с 600 в случае с $Ra = 10^4$ – см. рисунок 3.15), так как при высоких числах Рэлея конвекция доминирует над теплопроводностью, что несколько пренебрегает низкой теплопроводностью ребра). Также отметим, что увеличение теплопроводности твердого ребра существенно улучшает интенсивность теплообмена примерно на 60% (рисунок 3.18).

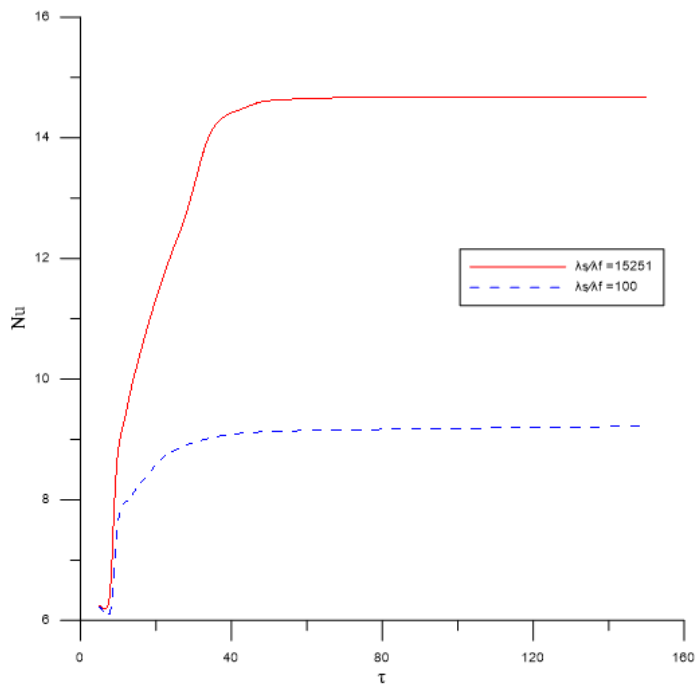
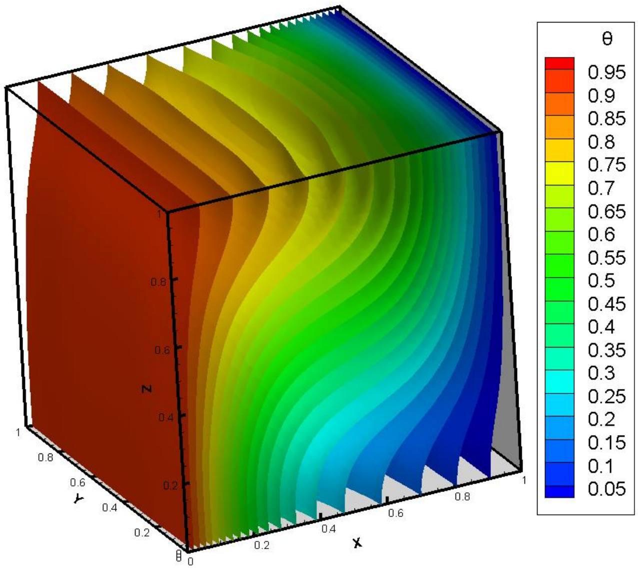


Рисунок 3.18 – Зависимость среднего числа Нуссельта от времени при различных относительных коэффициентах теплопроводности ($Ra = 10^6, d = 0.4, l = 0.4$)

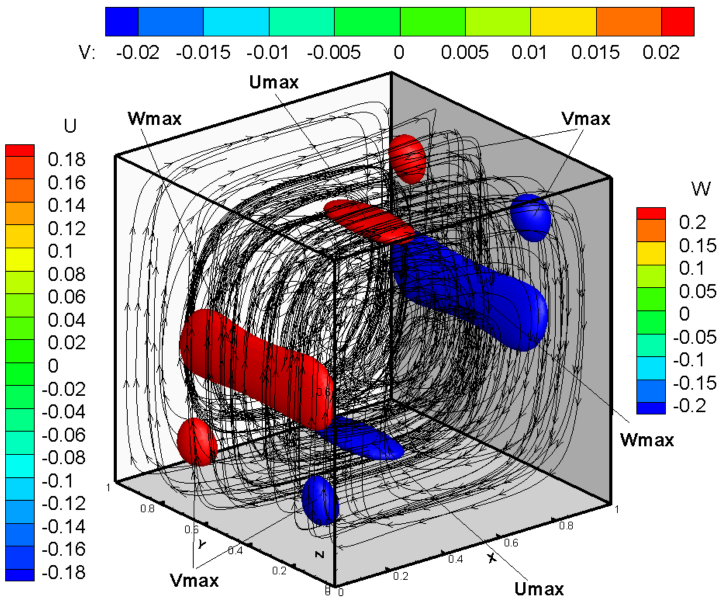
Движение жидкости и распределение температуры внутри куба также изображены в трехмерном пространстве на рисунках 3.19-3.24 для различных чисел Рэлея и теплопроводностей ребра. Из этих рисунок видно, что движение и распределение температуры внутри полости соответствуют их описанию выше в среднем сечении $Y = 0.5$ (рисунки 3.12-3.17). Несмотря на то, что компонента скорости V на порядок ниже двух остальных компонент U и W, эффект трехмерности все же наблюдается: изотермические поверхности симметричны относительно центрального сечения $Y = 0.5$ (рисунки 3.19а-3.24а). Кроме того, высокая степень немонотонности распределения температуры по оси Y наблюдается по мере увеличения числа Рэлея. При отсутствии ребра равенство по абсолютной величине максимальных значений для каждой компоненты вектора скорости присутствует (рисунки 3.19б и 3.21б).

При малых числах Рэлея $\mathrm{Ra} = 10^4$ наличие твердого ребра препятствует движению жидкости: разрыв траектории жидкости наблюдается в зоне около правой границы твердого ребра. Равенство по абсолютной величине минимальных и максимальных значений трех компонент скорости сохраняется только для компоненты скорости V, а для остальных двух компонент скорости теряются. Отсутствие экстремумов скоростей около горячей изотермической грани (видны при отсутствии ребер – рисунок 3.19б) показывает, что наличие твердого ребра уменьшает скорости жидкости, проходящей в область твердого ребра. Также отметим, что места экстремумов около правой изотермической грани и дна полости остаются неизменными по сравнению с полостью без ребер (см. рисунок 3.19б) вне зависимости от теплопроводности твердого ребра (см. рисунки 3.20б и 3.21б).

В целом, конфигурация циркуляции жидкости внутри полости не меняется при увеличении теплопроводности ребра. Однако максимальные значения компонент скорости при этом растут (см. рисунки 3.20б и 3.21б). При низкой теплопроводности ребра, внутри твердого ребра происходит процесс теплообмена (изотермические поверхности пересекают ребро, температурные градиенты также наблюдаются внутри него – см. рисунок 3.20а). При высокой теплопроводности твердое ребро ведет себя как расширенная горячая грань, которая сдвигает изотермические поверхности вправо к холодной грани (рисунок 3.21а).

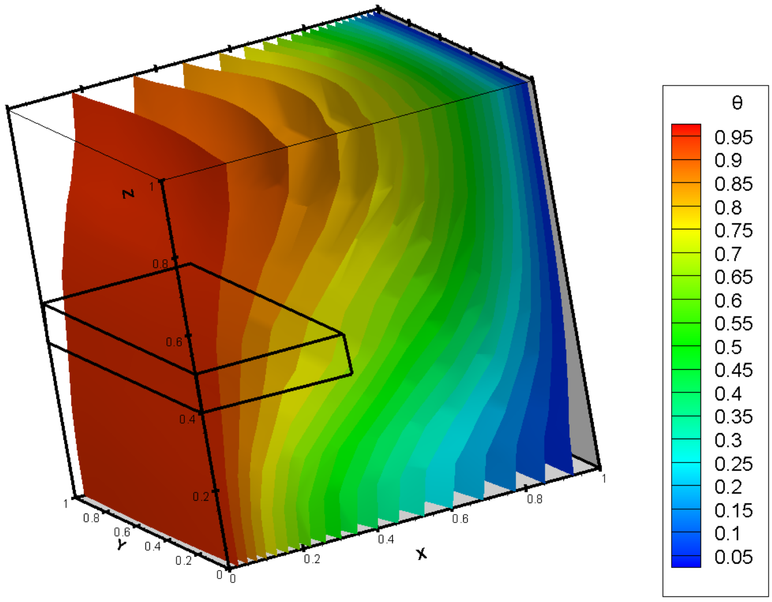


а)

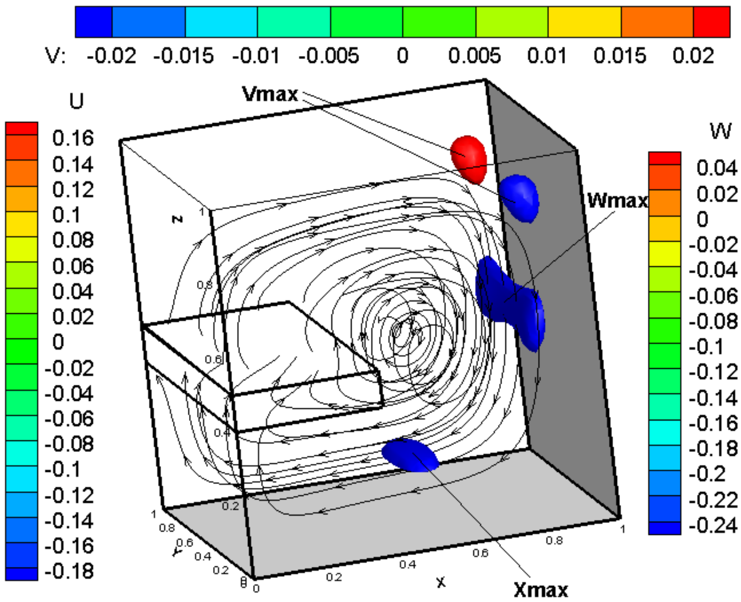


б)

Рисунок 3.19 – Изотермические поверхности и траектории движения жидкости для кубической полости без ребер при $\mathrm{Ra} = 10^4$ (а – изотермические поверхности, б – траектории движения)



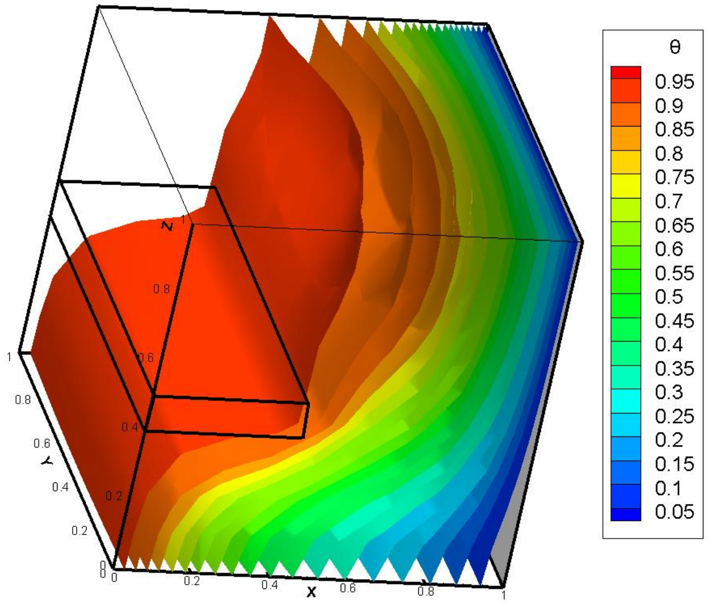
а)



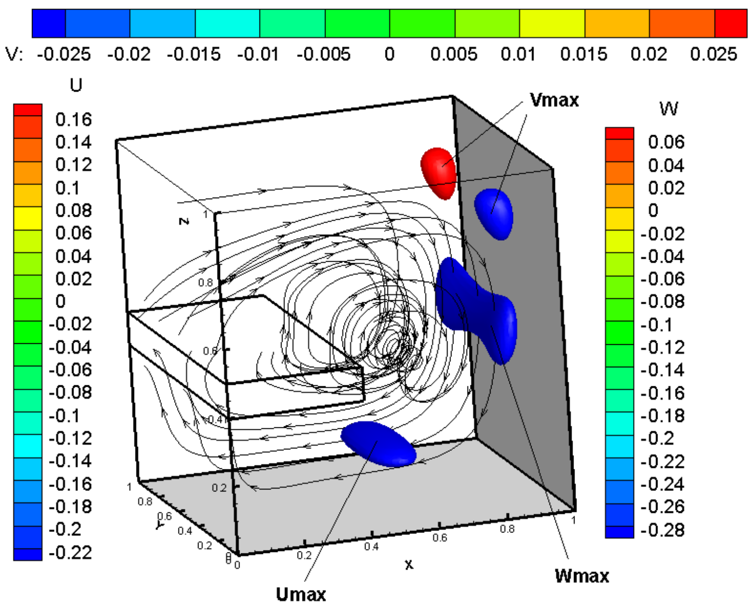
б)

Рисунок 3.20 – Изотермические поверхности и траектории движения жидкости для кубической полости с одним твердым ребром ($d = 0.4, l = 0.4$ и $\lambda_s/\lambda_f = 100$) при $Ra = 10^4$ через $\tau = 150$ (нестационар)

(а – изотермические поверхности, б – траектории движения)



а)

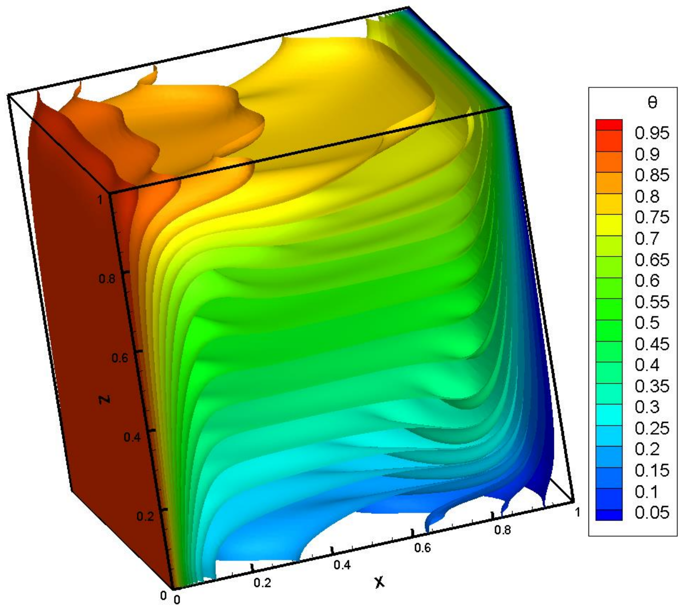


б)

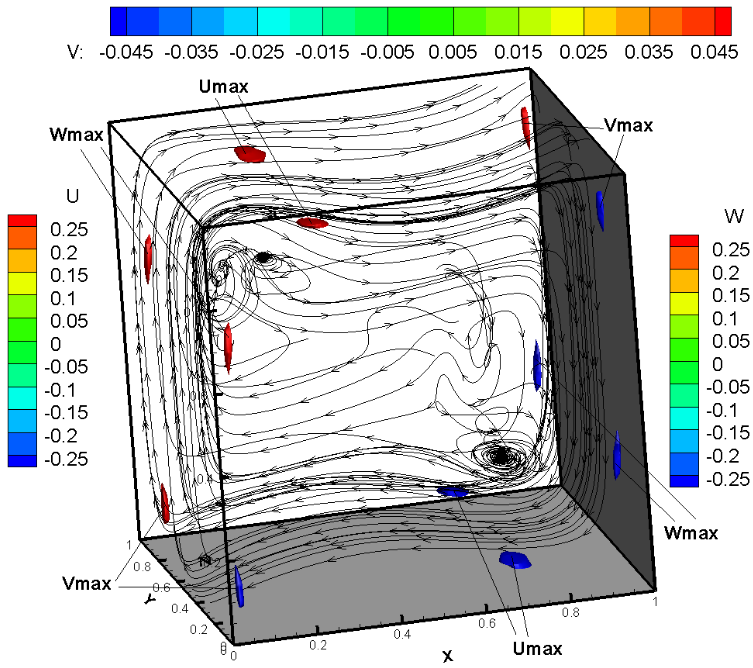
Рисунок 3.21 – Изотермические поверхности и траектории движения жидкости для кубической полости с одним твердым ребром ($d = 0.4, l = 0.4$ и $\lambda_s/\lambda_f = 15251$) при $Ra = 10^4$ через $\tau = 150$ (стационар) (а – изотермические поверхности, б – траектории движения)

При высоких числах Рэлея $Ra = 10^6$ наличие твердого ребра усиливает скорости в трех направлениях, как показано на рисунках 3.22б, 3.23б и 3.24б. Сохранение равенства по абсолютной величине компоненты скорости V также наблюдается при этом числе Рэлея. Отсутствие экстремумов в верхней половине полости показывает, что жидкость движется быстрее в нижней части полости.

В отличие от случая $\mathrm{Ra} = 10^4$, теплопроводность твердого ребра оказывает существенное влияние на конфигурацию циркуляции жидкости. При низкой теплопроводности ребра жидкость после обхода твердого ребра возвращается к левой стенке над ребром в связи с развитием конвекции (см. рисунок 3.23б). При увеличении теплопроводности ребра места экстремумов для скоростей U и W остаются неизменными, а для скорости V – меняются (см. рисунок 3.24б). Высокая теплопроводность в сочетании с сильными силами инерции сдвигает изотермы до правой грани, образуя при этом чрезмерно высокий градиент температуры на холодной грани полости (см. рисунок 3.24а). Также отметим, что при увеличении теплопроводности ребра максимальные значения трех компонент скоростей растут (рисунки 3.23б и 3.24б).

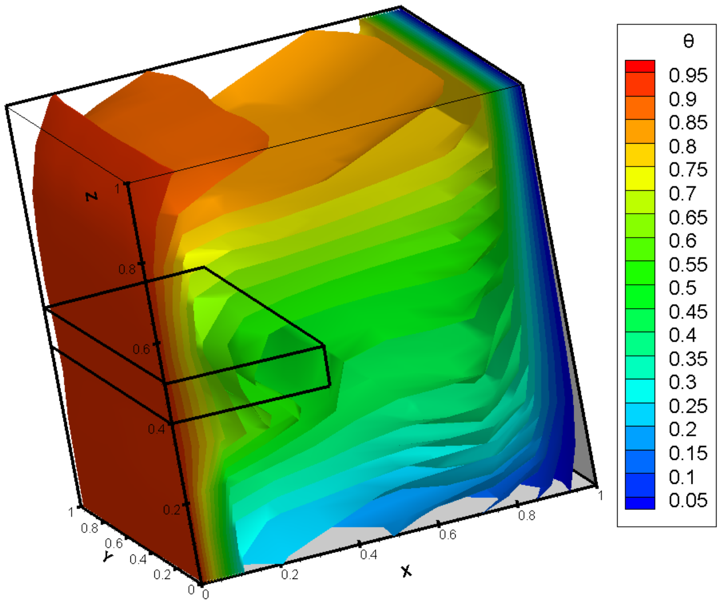


а)

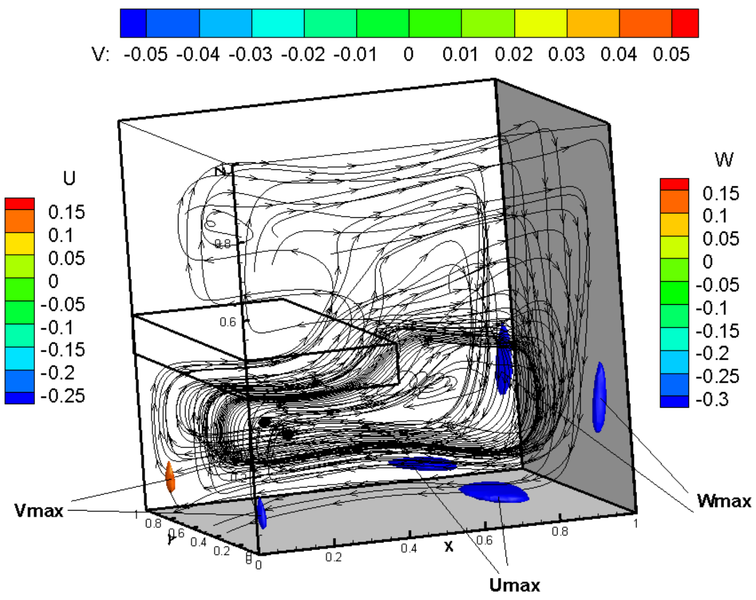


б)

Рисунок 3.22 – Изотермические поверхности и траектории движения жидкости для кубической полости без ребер при $\mathrm{Ra} = 10^4$ (а – изотермические поверхности, б – траектории движения)

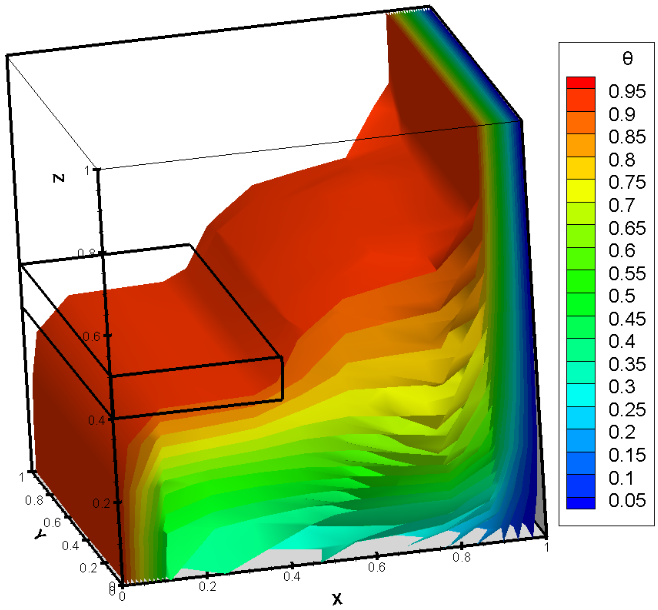


а)

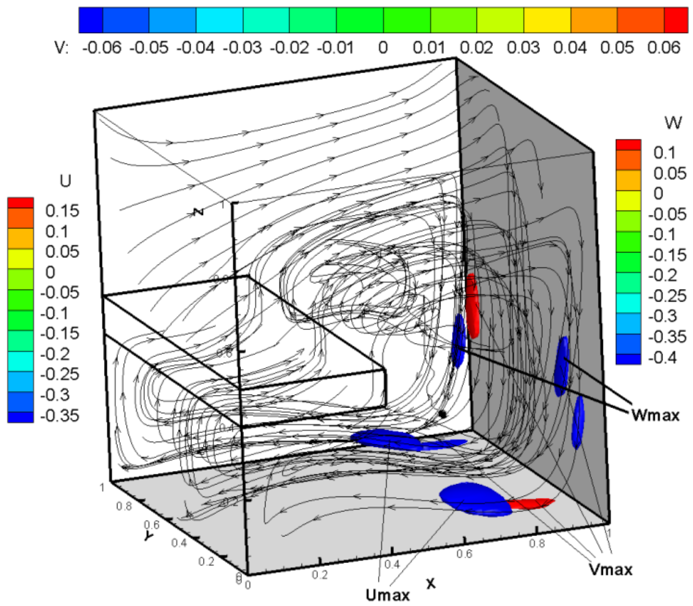


б)

Рисунок 3.23 – Изотермические поверхности и траектории движения жидкости для кубической полости с одним твердым ребром ($\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4$ и $\lambda_s/\lambda_f = 100$) при $\mathrm{Ra} = 10^6$ (а – изотермические поверхности, б – траектории движения)



а)



б)

Рисунок 3.24 – Изотермические поверхности и траектории движения жидкости для кубической полости с одним твердым ребром ($\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4$ и $\lambda_s/\lambda_f = 15251$) при $\mathrm{Ra} = 10^6$ (а – изотермические поверхности, б – траектории движения)

Распределение температуры в среднем сечении при $\mathrm{Ra} = 10^5, \mathrm{d} = 0.2, \mathrm{l} = 0.4, \lambda_s/\lambda_f = 15251$ и различном количестве твердых ребер на левой грани демонстрируется на рисунке 3.25. Сходство формы распределения изотерм показывает, что нижнее ребро больше влияет на гидродинамику, а остальные ребра имеют незначительный эффект и их наличие на левой грани может отрицательно повлиять на скорость течения жидкости из-за своей непроницаемой структуры, что приводит к лишним сопротивлениям внутри полости.

Наличие дополнительных ребер также приводит к уменьшению времери выхода на стационар (рисунок 3.26), так как наличие нескольких высокотеплопроводных ребер быстрее передает тепло жидкости.

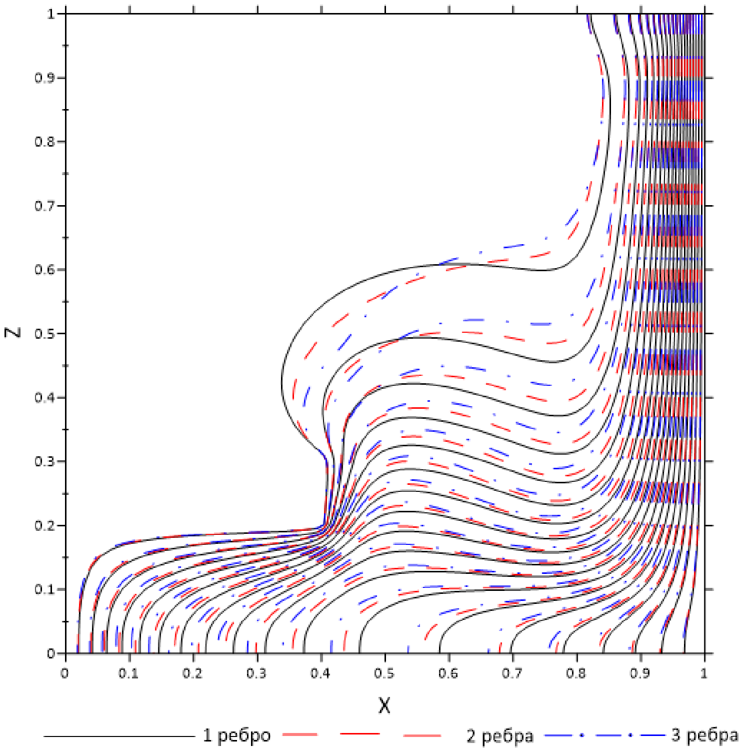


Рисунок 3.25 – Изотермы в сечении $Y = 0.5$ при $Ra = 10^5, d = 0.2, l = 0.4, \lambda_s/\lambda_f = 15251$

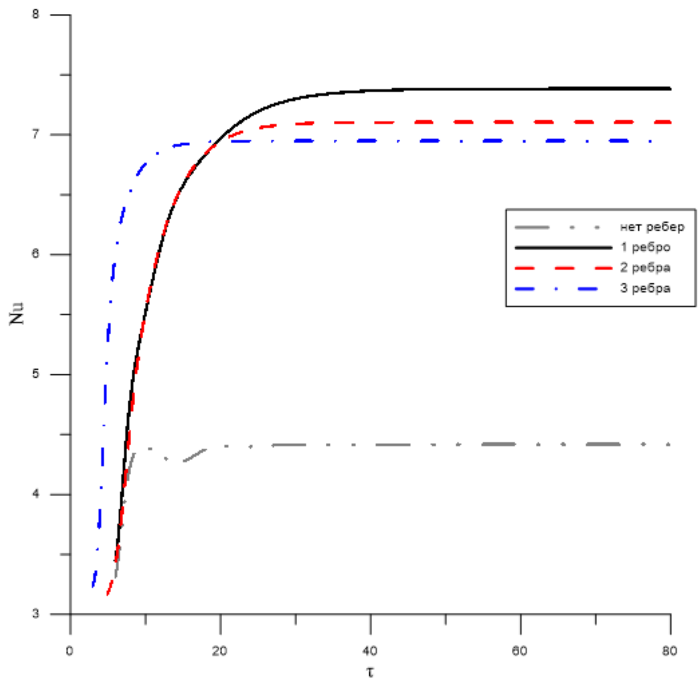


Рисунок 3.26 – Среднее число Нуссельта в зависимости от времени при различном количестве твердых ребер для $Ra = 10^5, d = 0.2, l = 0.4, \lambda_s/\lambda_f = 15251$

Зависимость среднего числа Нуссельта от количества ребер при различных числах Рэлея показана в таблице 3.3. Видно, что увеличение количества ребер является неэффективным методом интенсификации теплообмена, так как при этом среднее число Нуссельта падает, в то же время капитальные расходы на изготовление ребер становятся в 2-3 раза больше. Таким образом, оптимальное количество твердых ребер при всех числах Рэлея является одним.

Также отметим, что наличии твердых ребер, независимо от их количества, всегда приводит к улучшению теплообмена (по сравнению с полостью без ребер – до 68.6% при одном твердом ребре при $\mathrm{Ra} = 10^6$).

Таблица 3.3 – Среднее число Нуссельта для различных Ra и количества ребер n ($d = 0.2, l = 0.4, \lambda_s/\lambda_f = 15251$), а также при отсутствии ребер

Кол.во ребра, n	$Ra = 10^4$	$Ra = 10^5$	$Ra = 10^6$
$n = 1$	3,198	7,388	15,001
$n = 2$	2,994	7,101	14,660
$n = 3$	2,920	6,950	14,561
Без ребер	2,059	4,412	8,896

На рисунке 3.27 показана зависимость среднего числа Нуссельта от положения твердого ребра на левой грани при $\mathrm{l} = 0.6, \lambda_\mathrm{s}/\lambda_\mathrm{f} = 15251$ и различных числах Рэлея $\mathrm{Ra} = 10^4 \div 10^6$. Видно, что положения ребра существенно влияет на интенсивность теплообмена, и ребро, находящееся внизу, наибольше интенсифицирует теплообмен при рассматриваемых числах Рэлея. При малых числах Рэлея это влияние оказывается незначительным. Однако при увеличении числа Рэлея ($\mathrm{Ra} \geq 10^5$), эффект от положения ребер становится существенным. Также отметим, что наличие твердого ребра на любой высоте на левой грани полости всегда интенсифицируют теплообмен по сравнению с полостью без ребер (см. рисунок 3.27).

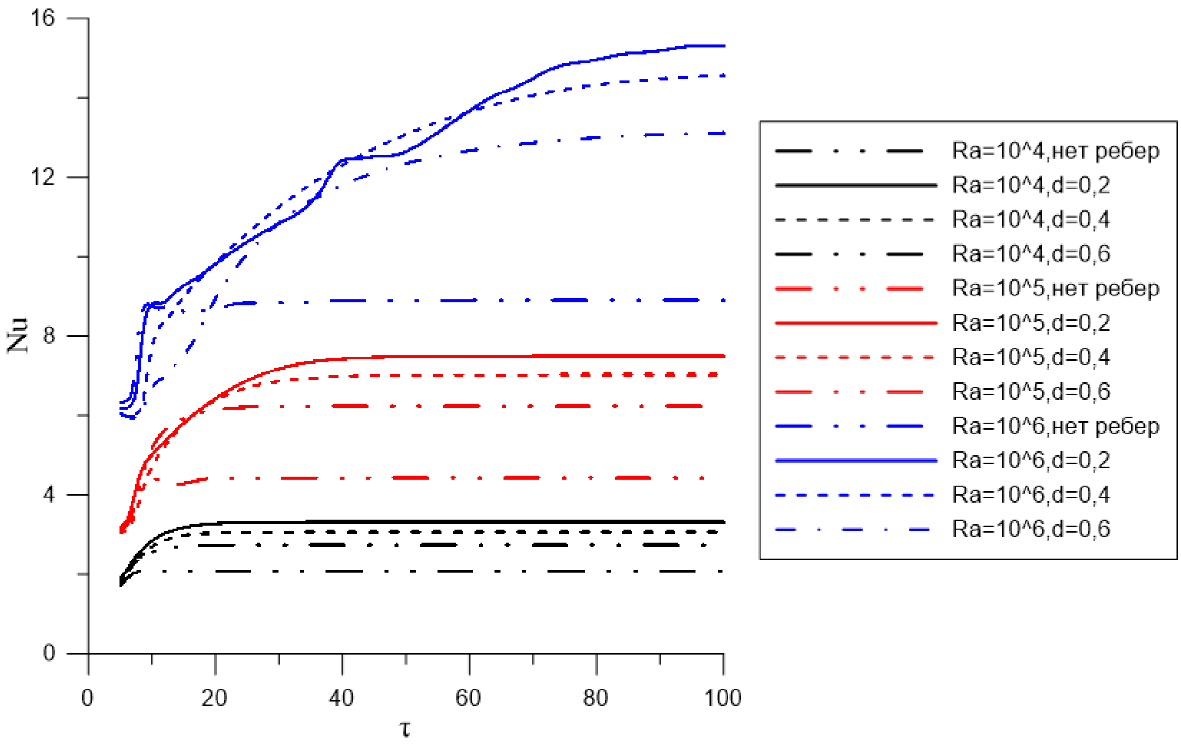
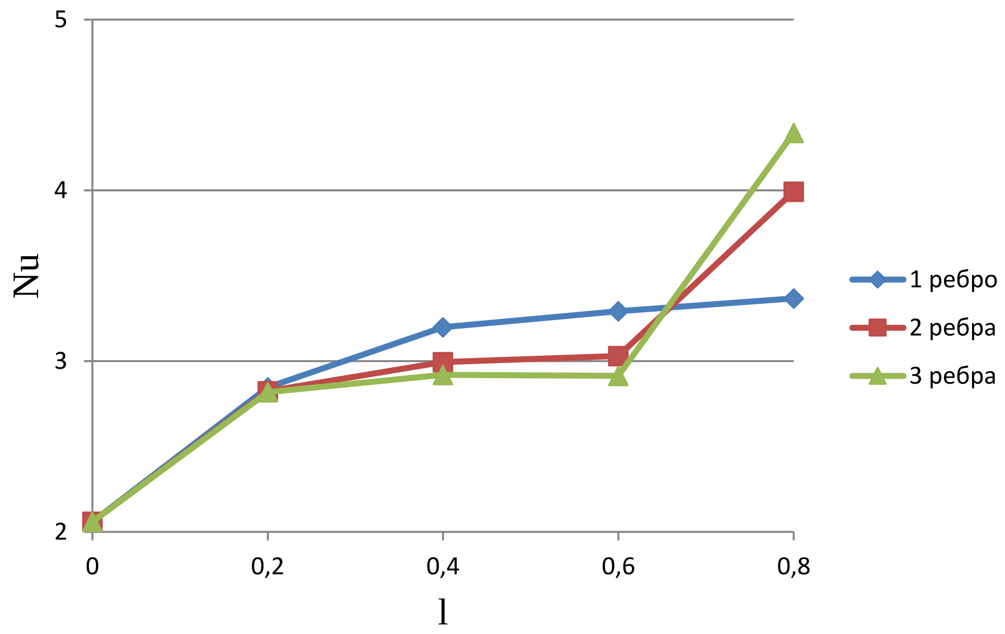


Рисунок 3.27 – Среднее число Нуссельта при различных положениях твердого ребра на левой грани для различных чисел Рэлея ($l = 0.6, \lambda_s/\lambda_f = 15251$)

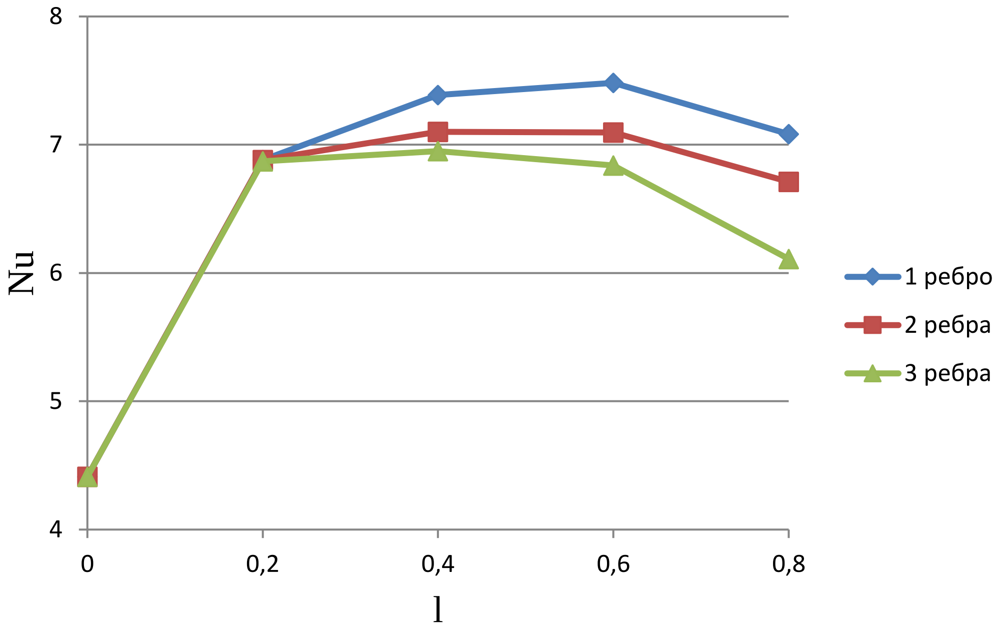
Влияние длины твердых ребер на среднее число Нуссельта для $d = 0.2$ при различных числах Рэлея и количестве ребер показано на рисунке 3.28. Очевидно, что длина ребер оказывает существенное влияние на интенсивность теплообмена. При фиксированном положении ребра на горячей грани рост длины ребра приводит к монотонному улучшению теплопереноса только при $Ra = 10^4$, когда теплопроводность доминирует над конвекцией (рисунок 3.28а). По мере увеличения длины ребра площадь поверхности теплообмена увеличивается, что приводит к улучшению теплообмена. Однако при более высоких числах Рэлея ($Ra = 10^5$ и выше), когда конвекция начинает преобладать над теплопроводностью, блокировка течения жидкости со стороны ребер становится основным фактором подавления теплопередачи и при этом среднее число Нуссельта возрастает до определенного значения, после чего снижается (см. рисунки 3.28б и 3.28в).

Количество ребер также играет важную роль в интенсификации теплообмена по мере увеличения их длины. При низких числах Рэлея, когда более длинные ребра приводят к росту числа Нуссельта, увеличение количества ребер еще больше усиливает теплопередачу (см. рисунок 3.28а). При высоком числе Рэлея увеличение количества ребер вместе с их длиной резко снижает теплопередачу вплоть до того, что при $l = 0.8$ числа Нуссельта оказываются даже ниже, чем в случае $l = 0.2$ (см. рисунки 3.28б и 3.28в).

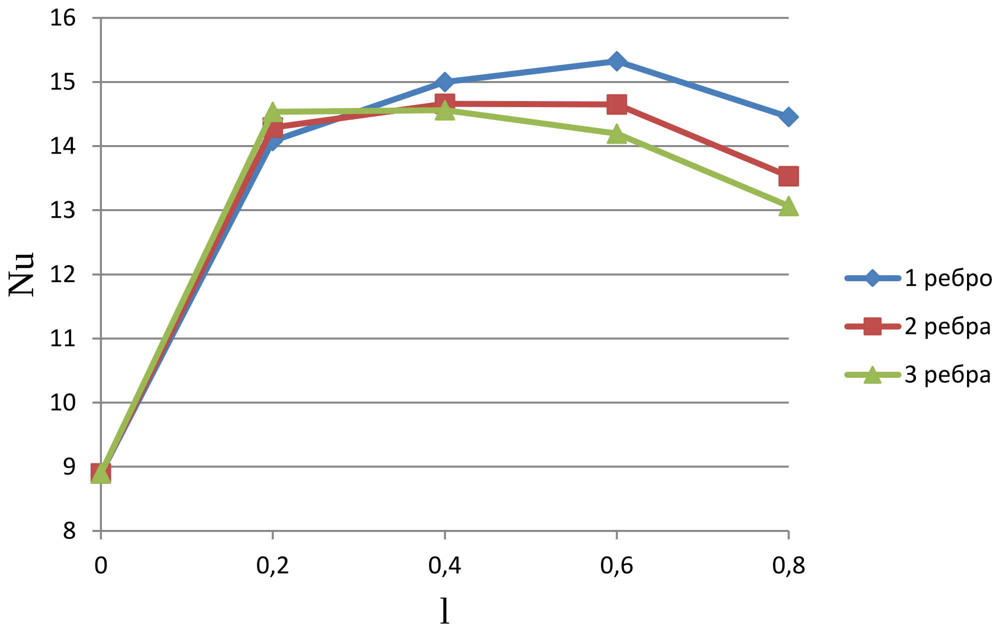
На рисунке 3.28 видно, что твердые ребра с любой длиной всегда интенсифицируют теплообмен по сравнению с полостью без ребер ($l = 0.0$ означает отсутствие ребер). Даже одно короткое ребро $l = 0.2$ может привести к возрастанию среднего числа Нуссельта до 58.6% (в случае $Ra = 10^6$). Максимальный рост среднего числа Нуссельта составляет 72.3% при одном ребра, $Ra = 10^6$ и $l = 0.6$.



(a)



(б)

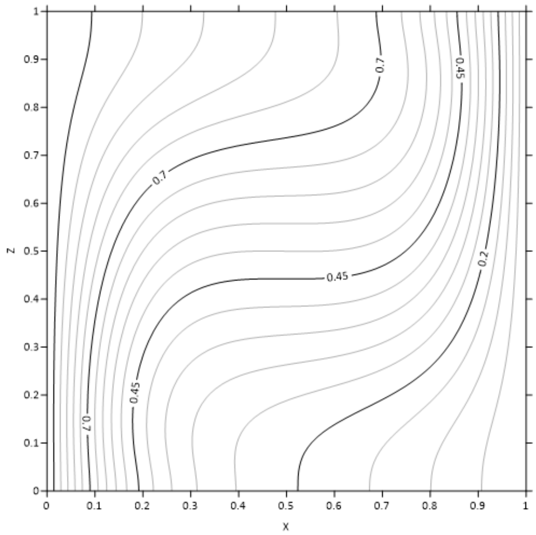


(в)

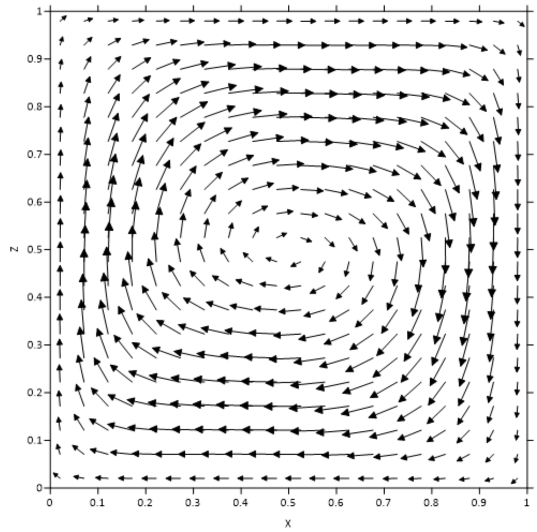
Рисунок 3.28 – Среднее число Нуссельта при различных длине и количества твердых ребер для $\mathrm{Ra} = 10^4 \div 10^6, \mathrm{d} = 0.2, \lambda_s/\lambda_f = 15251$: (а) – $\mathrm{Ra} = 10^4$, (б) – $\mathrm{Ra} = 10^5$, (в) – $\mathrm{Ra} = 10^6$

3.5 Исследование влияния пористых ребер на режимы течения и теплоперенос в замкнутом дифференциально-обогреваемом кубе

Течение жидкости и распределение температуры в плоскости $\mathrm{Y} = 0.5$ для $\mathrm{Ra} = 10^4$ представлены на рисунках 3.29-3.32. Благодаря высокой проницаемости ребра и высокой пористости жидкость не меняет своего направления при прохождении пористого ребра, в отличие от твердых ребер. Главный центральный вихрь наблюдается как при наличии пористого ребра, так и при его отсутствии (рисунки 3.29б-3.31б). Следовательно, при низких числах Рэлея не найдены существенные изменения в движении жидкости, независимо от теплопроводности ребер, как показано на полях скорости (рисунки 3.29б-3.31б). Однако на температурных полях наблюдаются значительные изменения: с помощью теплопроводного ребра горячие изотермы смещаются вправо (рисунок 3.31а). У ребра с низкой теплопроводностью $(\mathrm{k_r} = 11)$ в момент времени $\tau = 50$ теплообмен происходит внутри него, как показано на температурном поле рисунка 3.30а. Изотермы внутри ребра почти вертикальны, что иллюстрирует теплопроводный режим теплопереноса. С увеличением безразмерного времени до $\tau = 600$ пористое ребро нагревается, так как изотермы смещаются в правую сторону (рисунок 3.31а). Однако оно не нагревается до температуры левой стенки, так как внутри нее виден перепад температуры. Изотермы внутри пористого ребра становятся более искривленными, что характеризует конвективный режим теплопереноса. Конфигурация течения не претерпевает существенных изменений по сравнению с той же конфигурацией при моменте времени $\tau = 50$ (рисунки 3.30б и 3.31б). При присутствии ребра с высокой теплопроводностью $(\mathrm{k_r} = 1526)$ горячие изотермы смещаются вправо, создавая толстый тепловой пограничный слой над ребром (рисунок 3.32а). Интенсивный теплообмен происходит под ребром около его торца, где градиенты температуры относительно высоки. Этого явления не происходит при наличии ребра с низкой теплопроводностью (рисунок 3.31а).

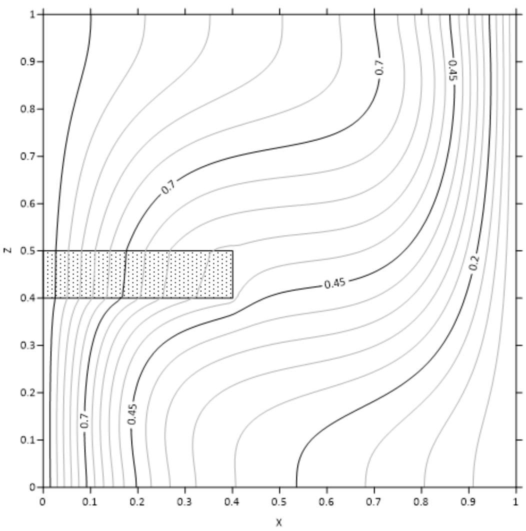


а

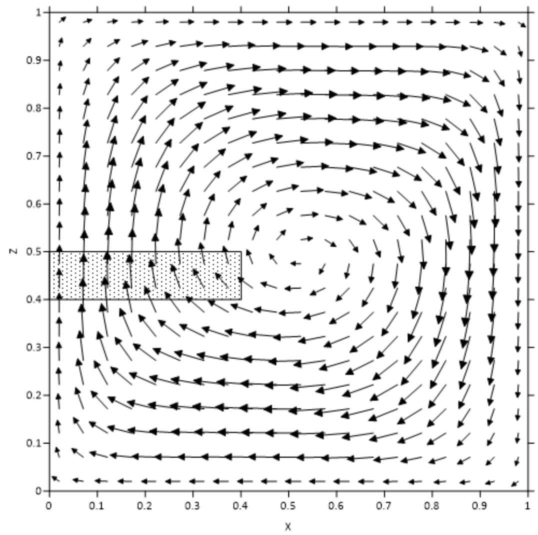


б

Рисунок 3.29 – Температурное и скоростное поля для $\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и $\mathrm{Ra} = 10^4$ в сечении $\mathrm{Y} = 0.5$ при отсутствии ребер (а – температурное поле, б – скоростное поле)

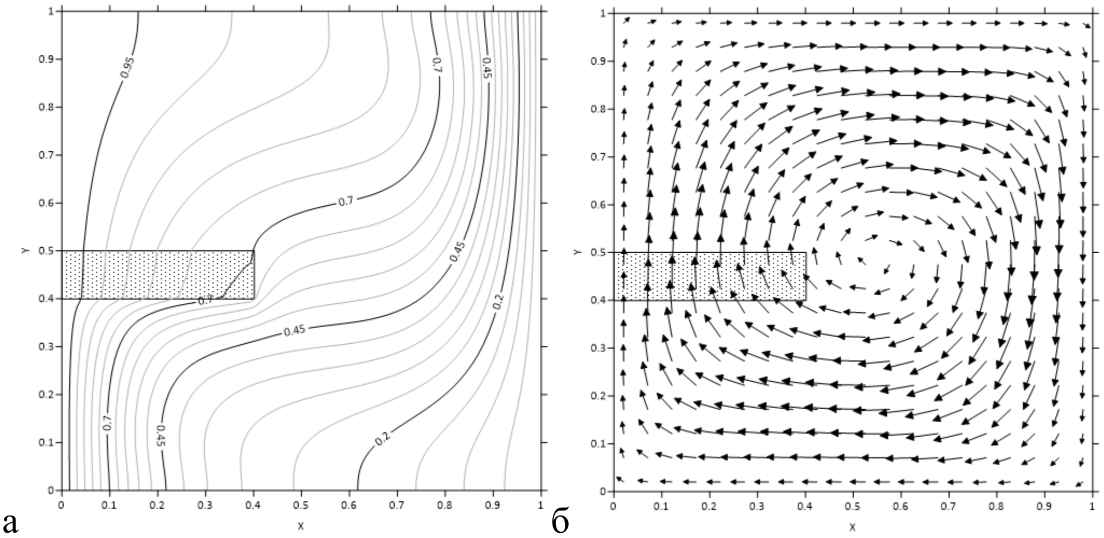


а



б

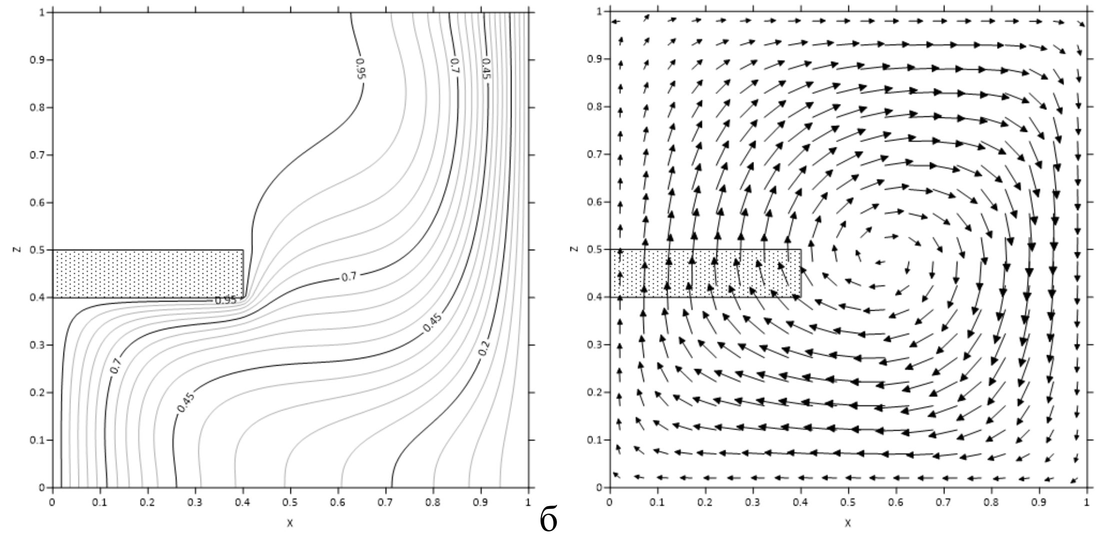
Рисунок 3.30 – Температурное и скоростное поля для $\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и $\mathrm{Ra} = 10^4$ в сечении $\mathrm{Y} = 0.5$ при одном пористом ребер с $\mathrm{k_r} = 11$ через $\tau = 50$ (нестационар) (а – температурное поле, б – скоростное поле)



а б

Рисунок 3.31 – Температурное и скоростное поля для $\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и $\mathrm{Ra} = 10^{4}$ в сечении $\mathrm{Y} = 0.5$ при одном пористом ребер с $k_r = 11$ через $\tau = 600$ (стационар)

(а – температурное поле, б – скоростное поле)

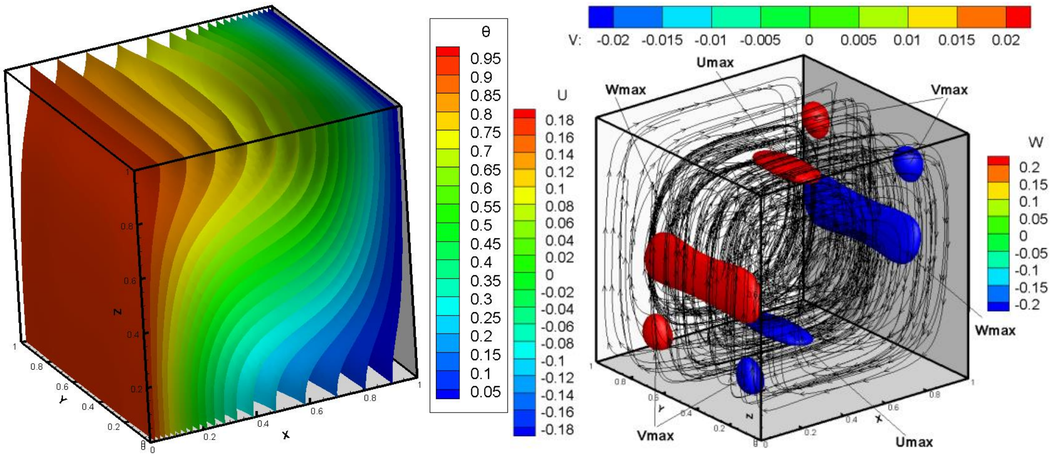


а б

Рисунок 3.32 – Температурное и скоростное поля для $\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и $\mathrm{Ra} = 10^{4}$ в сечении $\mathrm{Y} = 0.5$ при одном пористом ребер с $k_r = 1526$ через $\tau = 200$ (стационар) (а – температурное поле, б – скоростное поле)

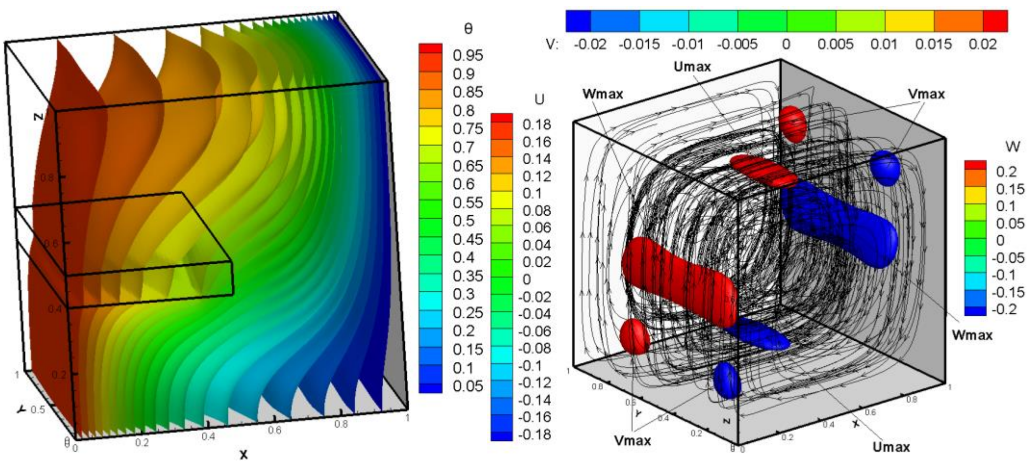
Рисунки 3.33-3.35 иллюстрируют изотермические поверхности и траектории движения жидкости для $\mathrm{Ra} = 10^{4}$ и различных относительных теплопроводностей ребра, а также при его отсутствии. Видно, что движение и распределение температуры внутри полости соответствуют их описанию выше в среднем сечении $Y = 0.5$ (рисунки 3.29-3.32). Несмотря на то, что компонента скорости V по координате Y на порядок ниже остальных двух компонент скорости U и W, эффект от трехмерности присутствует, а именно распределение температуры по координате Y симметрично относительно среднего сечения $Y = 0.5$ (рисунки 3.33а-3.35а). Экстремумы компонент скорости при отсутствии ребер равны по абсолютной величине (рисунок 3.33б). Положения этих экстремумов скорости симметричны относительно центра полости.

При $\mathrm{Ra} = 10^4$ и одном пористом ребре образуется глобальный вихрь, циркулирующийся по часовой стрелке и обусловленный восходящим потоком вблизи горячей грани и нисходящим потоком около холодной грани. В целом структура течения жидкости при наличии пористого ребра с любой теплопроводностью не различается с той же структурой течения при отсутствии ребер (рисунок 3.33б). Следовательно, наличие пористого ребра не изменяет движение жидкости при низких числах Рэлея. Однако с помощью пористого ребра скорость движения жидкости в трех направлениях усиливается (рисунки 3.33б, 3.34б и 3.35б). Также отметим, что только компонента скорости V сохраняет равенство экстремума по абсолютной величине. Отсутствие экстремумов в левом нижнем углу полости около горячей грани показывает, что скорость жидкости выше при приближении к правой грани. С ростом относительной теплопроводности ребра от $\mathrm{k_r} = 11$ до $\mathrm{k_r} = 1526$ наблюдается дополнительная интенсификация скорости жидкости в трех направлениях: максимальные значения трех компонент скорости по абсолютному значению возрастает, особенно скорость V по направлению оси Y (максимальное значение скорости V растет на примерно 60%). При этом изменяются и положения экстремумов скорости V (для остальных двух компонент места экстремумов практически не меняются), а именно их положения переносятся из углов в область центральных вихрей (рисунок 3.35б). Таким образом, пористое ребро усиливает центральные вихри внутри полости.



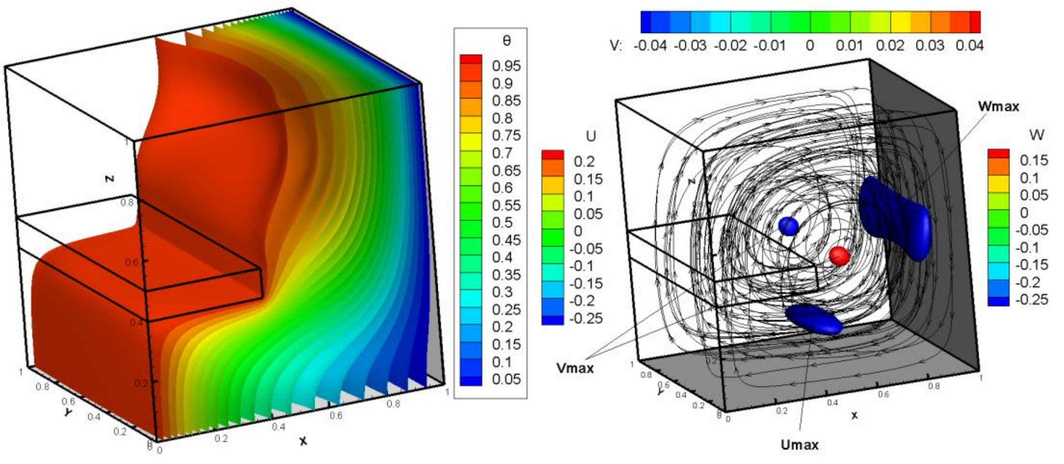
а б

Рисунок 3.33 – Изотермические поверхности и траектории движения жидкости для пустой кубической полости при $Ra = 10^4$ (а – изотермические поверхности, б – траектории движения)



а б

Рисунок 3.34 – Изотермические поверхности и траектории движения для кубической полости с одним пористым ребром ($\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и $\mathrm{k_r} = 11$) при $\mathrm{Ra} = 10^4$ и $\tau = 600$ (стационар) (а – изотермические поверхности, б – траектории движения)

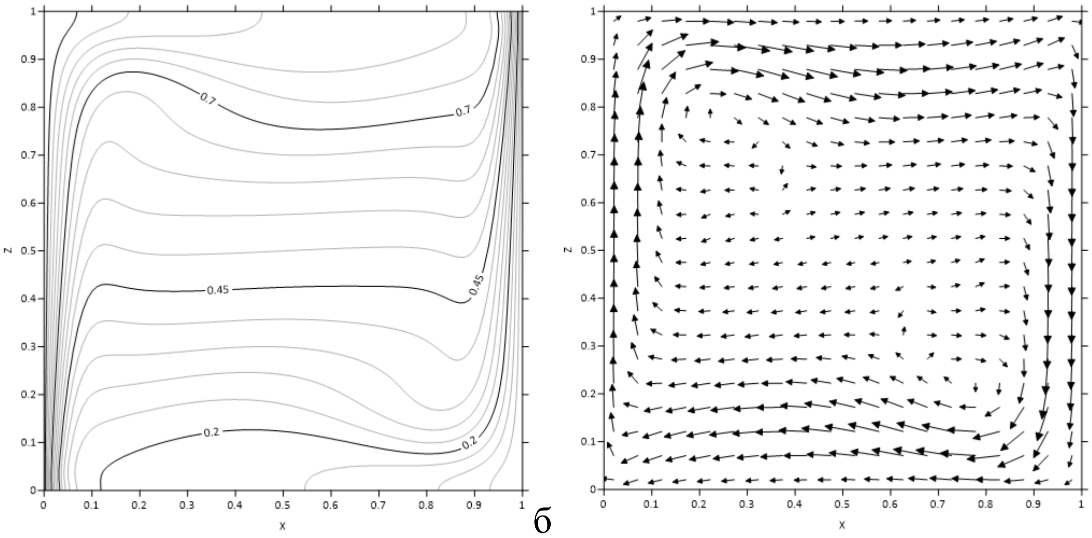


а б

Рисунок 3.35 – Изотермические поверхности и траектории движения для кубической полости с одним пористым ребром ($\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и $\mathrm{k_r} = 1526$) при $\mathrm{Ra} = 10^4$ через $\tau = 200$ (стационар) (а – изотермические поверхности, б – траектории движения)

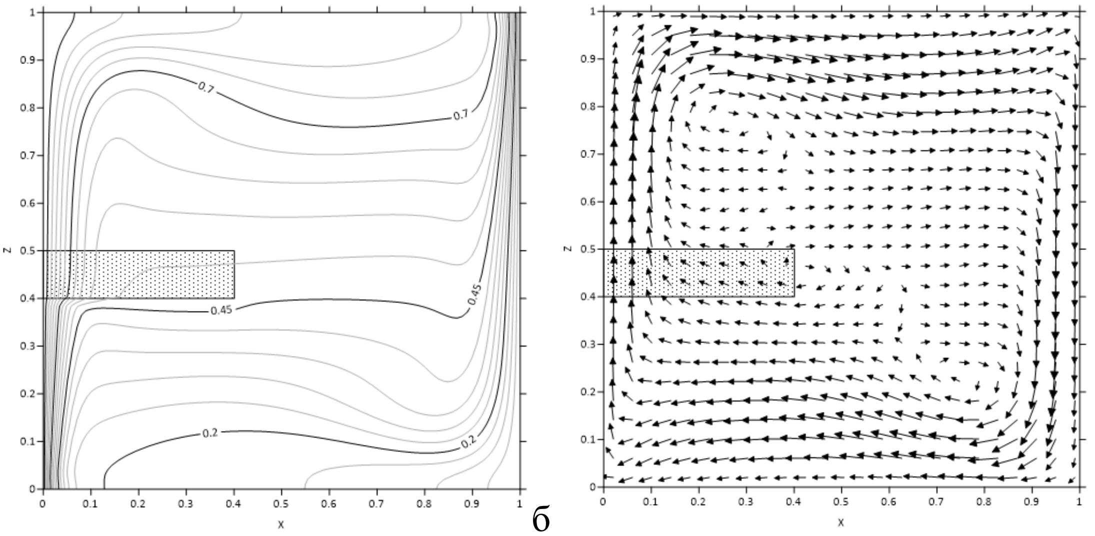
При $\mathrm{Ra} = 10^6$ конвекция становится значительно сильнее и начинает проявляться температурная стратификация (рисунок 3.36а). Центральные вихри, которые хорошо заметны на рисунке 3.29б при малых числах Рэлея, растут в размерах, делятся пополам и смещаются к углу полости (рисунок 3.36б). При $k_r = 11$ в начальный момент времени $\tau = 50$ в центре полости видно небольшое вихревое ядро (рисунок 3.37б). В левом верхнем и правом нижнем углах куба также образуются два вторичных вихря (аналогично случаю с полостью без ребер – рисунок 3.36б), что указывает на интенсивный отвод тепла от вертикальных стенок при данном числе Рэлея в данный момент времени. В температурном поле внутри ребра имеет место горизонтальный градиент температуры. Более того, изотермы в этом месте практически вертикальны, что демонстрирует теплопроводный режим переноса тепловой энергии от левой стенки (рисунок 3.37а). Градиенты температуры не наблюдаются в области пористого ребра, что означает отсутствие эффекта интенсификации теплообмена ребром (оно ведет себя как препятствие). С увеличением безразмерного времени до стационарного состояния полость прогревается, что объясняется смещением изотерм вправо (рисунок 3.38а). Вихревое течение в центре полости исчезает, а вихрь, образовавшийся над ребром вблизи горячей стенки, несколько увеличивается в размерах (рисунок 3.38б).

По мере увеличения относительной теплопроводности ребра интенсивность переноса тепловой энергии возрастает. Значительные изменения в движении жидкости теперь четко представлены в поле скоростей. Проходя холодную грань, жидкость разделяется пополам, а именно: одна часть направляется к горячей стенке под ребром, а другая движется к его нижнему основанию вблизи торца, и две части жидкости смешиваются по мере достижения горячей стенки над ребром (рисунок 3.39б). Верхний левый вихрь возле горячей грани, проиллюстрированный на рисунке 3.38б, теперь расположен в области около центра полости над ребром. Это явление можно объяснить следующим образом: из-за высокой теплопроводности ребро ведет себя как расширение горячей стенки, и поэтому интенсивный отвод тепла происходит возле торца ребра, а не около горячей стенки, как в случае ребра с низкой теплопроводностью (рисунок 3.38а). Также отметим, что из-за высокой теплопроводности ребра жидкость над ребром быстро нагревается и под действием силы инерции переносится к правой стенке, образуя при этом высокий градиент температуры вблизи холодной стенки. В результате верхняя половина полости нагрета до температуры горячей стенки (рисунок 3.39а). При этом числе Рэлея и высокой теплопроводности ребра очевиден эффект ребра: высокие градиенты температуры наблюдаются вблизи нижней границы ребра и около его торца (чего не происходит с ребрами с низкой теплопроводностью – рисунки 3.38а), и означает, что ребро теперь ведет себя как интенсификатор теплопереноса, который создает плавучесть и удерживает жидкость от нагретой стенки.



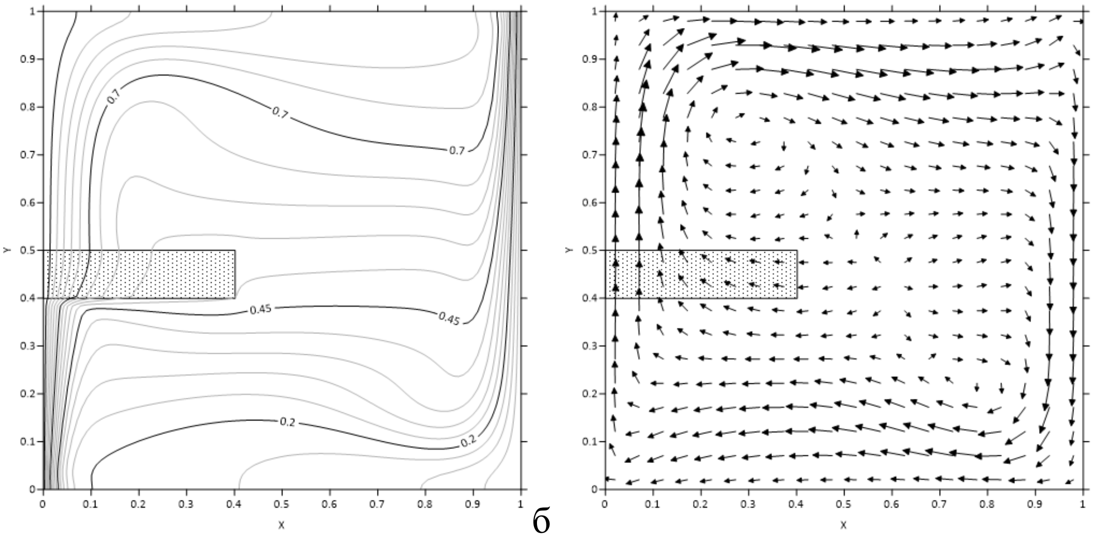
а б

Рисунок 3.36 – Температурное и скоростное поля для $\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и $\mathrm{Ra} = 10^{6}$ в сечении $\mathrm{Y} = 0.5$ при отсутствии ребер (а – температурное поле, б – скоростное поле)



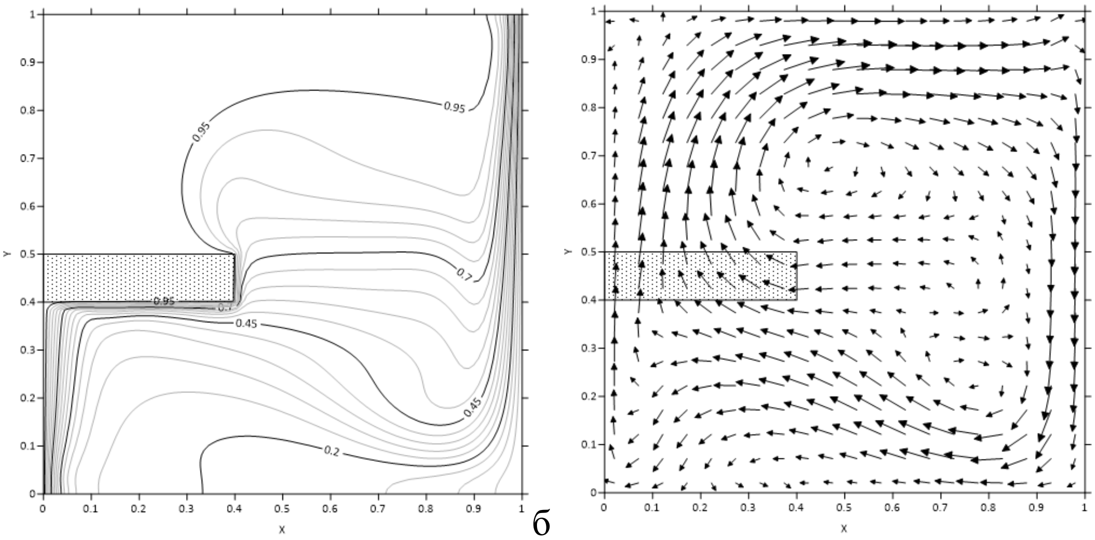
а б

Рисунок 3.37 – Температурное и скоростное поля для $\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и $\mathrm{Ra} = 10^{6}$ в сечении $\mathrm{Y} = 0.5$ при одном пористом ребер с $\mathrm{k_r} = 11$ через $\tau = 50$ (нестационар) (а – температурное поле, б – скоростное поле)



а б

Рисунок 3.38 – Температурное и скоростное поля для $\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и $\mathrm{Ra} = 10^{6}$ в сечении $\mathrm{Y} = 0.5$ при одном пористом ребер с $k_r = 11$ через $\tau = 2000$ (стационар) (а – температурное поле, б – скоростное поле)

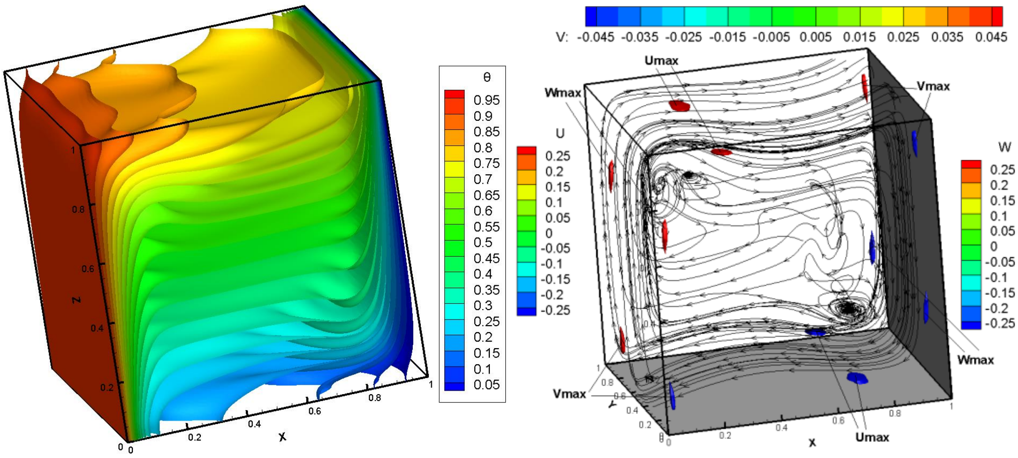


а б

Рисунок 3.39 – Температурное и скоростное поля для $\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и $\mathrm{Ra} = 10^{6}$ в сечении $\mathrm{Y} = 0.5$ при одном пористом ребер с $k_r = 1526$ через $\tau = 200$ (стационар) (а – температурное поле, б – скоростное поле)

На рисунках 3.40–3.42 показаны изотермические поверхности и траектории движения жидкости при $\mathrm{Ra} = 10^{6}$ и различных относительных теплопроводностях ребер. С увеличением числа Рэлея значительно улучшаются теплообмен и все компоненты скорости в трех направлениях. Из-за усиления компоненты скорости V, характеризующей поперечное течение, распределение температуры вдоль направления Y усложняется (см. рисунки 3.40а и 3.41а для $\theta = 0.9$ и 0.85). Как и в случае с $\mathrm{Ra} = 10^4$, наличие пористого ребра усиливает компоненты скорости во всех трех направлениях по сравнению с таковыми в полости без ребер (см. 3.40б, 3.41б и 3.42б).

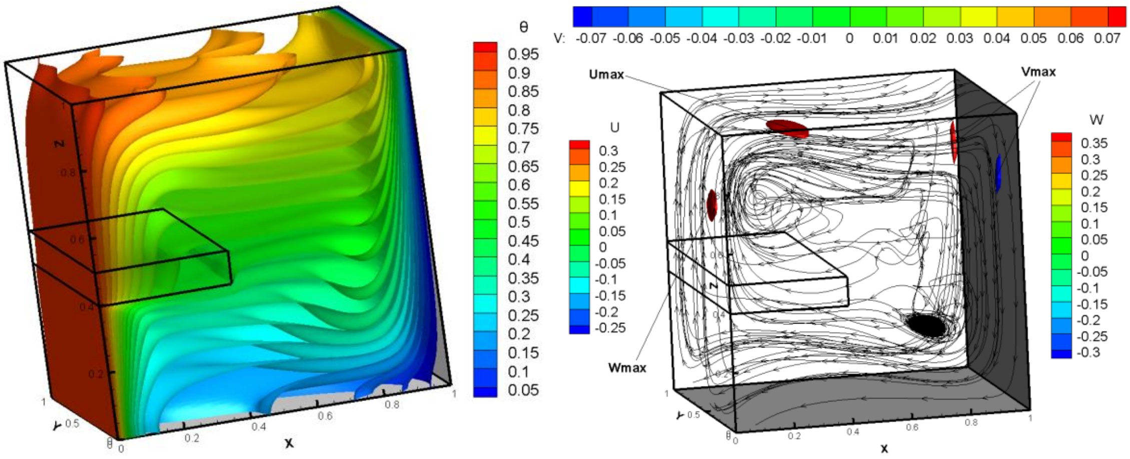
Пористое ребро влияет на компоненту скорости V больше всего, поскольку ее максимальные значения увеличиваются больше, чем остальные две компоненты. Однако, в отличие от случая с $\mathrm{Ra} = 10^4$, ребро усиливает восходящие потоки, а не нисходящие по сравнению с $\mathrm{Ra} = 10^4$ (рисунки 3.34б и 3.35б). С ростом теплопроводности ребра составляющие скорости продолжает увеличиваться, особенно составляющую скорости V (до 43% по сравнению с ребром с низкой теплопроводностью – рисунки 3.41б и 3.42б).



а б

Рисунок 3.40 – Изотермические поверхности и траектории движения для пустой кубической полости при $\mathrm{Ra} = 10^6$

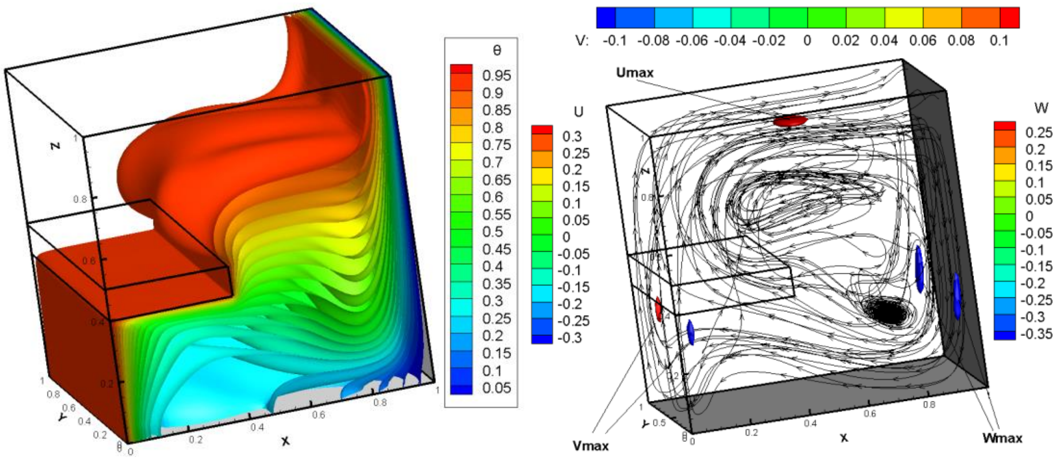
(а – изотермические поверхности, б – траектории движения)



а б

Рисунок 3.41 – Изотермические поверхности и траектории движения для кубической полости с одним пористым ребром ($\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и $\mathrm{k_r} = 11$) при $\mathrm{Ra} = 10^6$ и $\tau = 2000$ (стационар)

(а – изотермические поверхности, б – траектории движения)

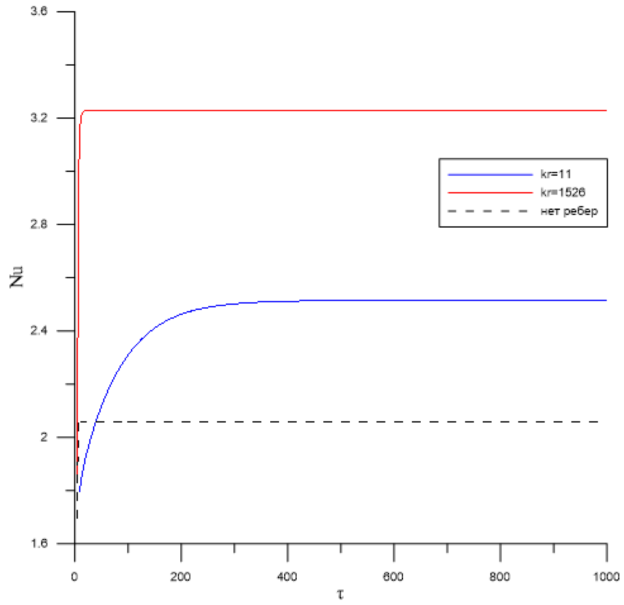


а б

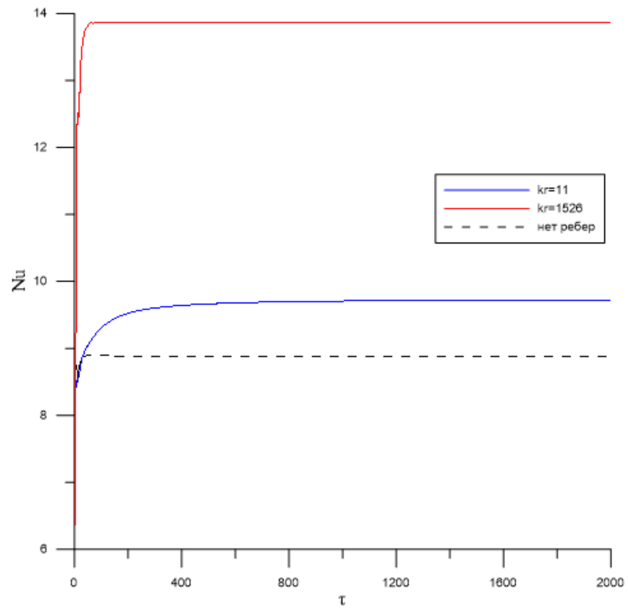
Рисунок 3.42 – Изотермические поверхности и траектории движения для кубической полости с одним пористым ребром ($\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и $k_r = 1526$) при $\mathrm{Ra} = 10^6$ и $\tau = 200$ (стационар)

(а – изотермические поверхности, б – траектории движения)

Влияние теплопроводности пористого ребра на интенсивность теплопереноса при $\mathrm{Ra} = 10^4$ и $\mathrm{Ra} = 10^6$ показано на рисунке 3.43. Видно, что наличие ребра с высшей теплопроводностью существенно сокращает время, необходимое для достижения стационарного состояния, а также существенно интенсифицирует теплообмен (на 28.4% для $\mathrm{Ra} = 10^4$ и 42.5% для $\mathrm{Ra} = 10^6$). Также отметим, что наличие пористого ребра при рассматриваемых параметрах всегда приводит к улучшению теплообмена, независимо от его теплопроводности.



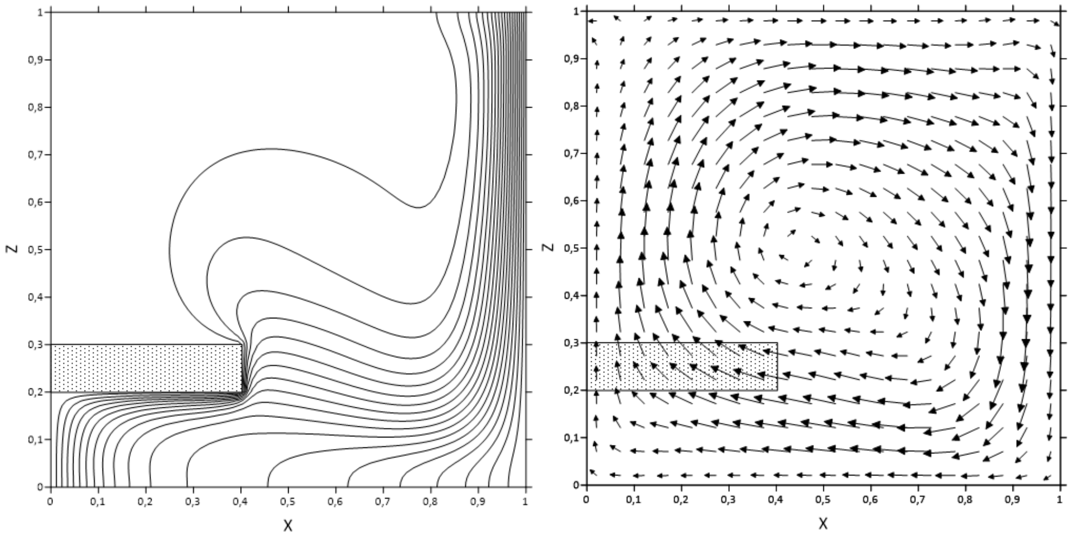
а



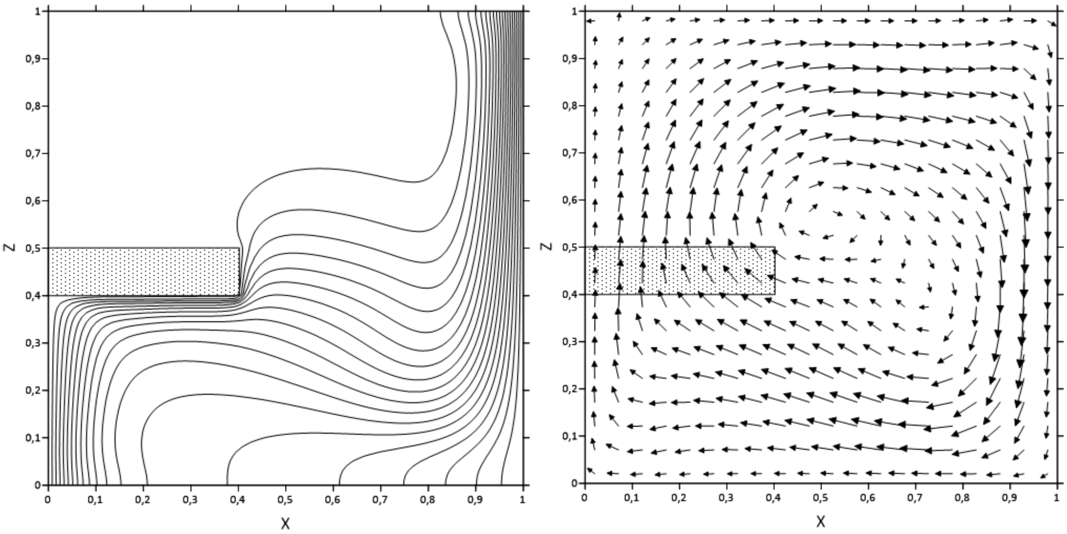
б

Рисунок 3.43 – Зависимость среднего числа Нуссельта от времени при различных относительных коэффициентах теплопроводности ($d = 0.4, l = 0.4, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$): а) $\mathrm{Ra} = 10^4$, б) $\mathrm{Ra} = 10^6$

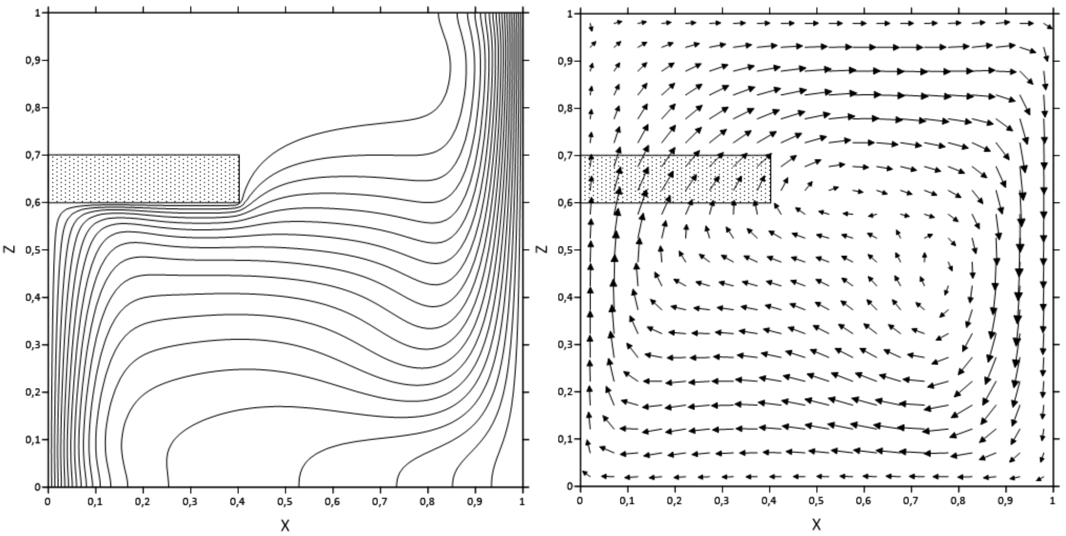
Влияние положения ребра на горячей стенке кубической полости при $\mathrm{Ra} = 10^5, \mathrm{l} = 0.4, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и $\mathrm{k_r} = 1526$ в среднем сечении $\mathrm{Y} = 0.5$ показано на рисунке 3.44. Как видно из полей скоростей, общая конфигурация движения жидкости остается практически одинаковой для всех трех положений ребер. Это означает, что положение ребра на горячей стенке влияет на движение жидкости незначительно. Однако существенные различия в изотермических линиях наблюдаются для различных положений ребер, особенно вблизи реберного торца и его нижней границы: высокие градиенты температуры имеют место только в том случае, когда ребро расположено вблизи дна полости ($\mathrm{d} = 0.2$) (рисунок 3.44а).



а)



б)



в)

Рисунок 3.44 – Температурные и скоростные поля для $\mathrm{Ra} = 10^5$ при $\mathrm{l} = 0.4, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и $\mathrm{k_r} = 1526$ в сечении $\mathrm{Y} = 0.5$ для различных положений ребра: (а) $\mathrm{d} = 0.2$, (б) $\mathrm{d} = 0.4$, (в) $\mathrm{d} = 0.6$

Как ожидалось, согласно таблице 3.4, ребра, расположенные ближе ко дну полости, лучше интенсифицируют теплообмен, чем те, которые расположены посередине или ближе к верхнему основанию куба. Это относится ко всем рассматриваемым числам Рэлея.

Таблица 3.4 – Среднее число Нуссельта для различных положений ребра и чисел Рэлея ($\mathrm{l} = 0.4, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и $\mathrm{k_r} = 1526$)

Ra	d			Без ребер
	0.2	0.4	0.6	
10^4	3.296	3.230	2.883	2.059
10^5	7.492	7.101	6.197	4.412
10^6	14.769	13.860	12.203	8.896

Для того чтобы провести анализ влияния количества пористых ребер на интенсивность теплообмена, намеренно располагаем ребро на высоте $\mathrm{d} = 0.2$ в случае одного пористого ребра, поскольку ребро в этом положении больше всего увеличивает теплообмен по сравнению с другими положениями, упомянутыми выше в предыдущем параграфе.

В таблице 3.5 видно, что введение пористых ребер всегда улучшает интенсивность теплопереноса, независимо от их количества. Кроме того, большее количество ребер приводит к дополнительному улучшению теплопереноса. Однако по мере увеличения количества ребер положительный эффект от введения дополнительных ребер резко снижается: примерно с 60-70% до всего лишь 1-3%, когда количество ребер достигает двух (см. таблицу 3.6). Поэтому введение двух и более пористых ребер к горячей стенке кубической полости считается экономически неэффективным.

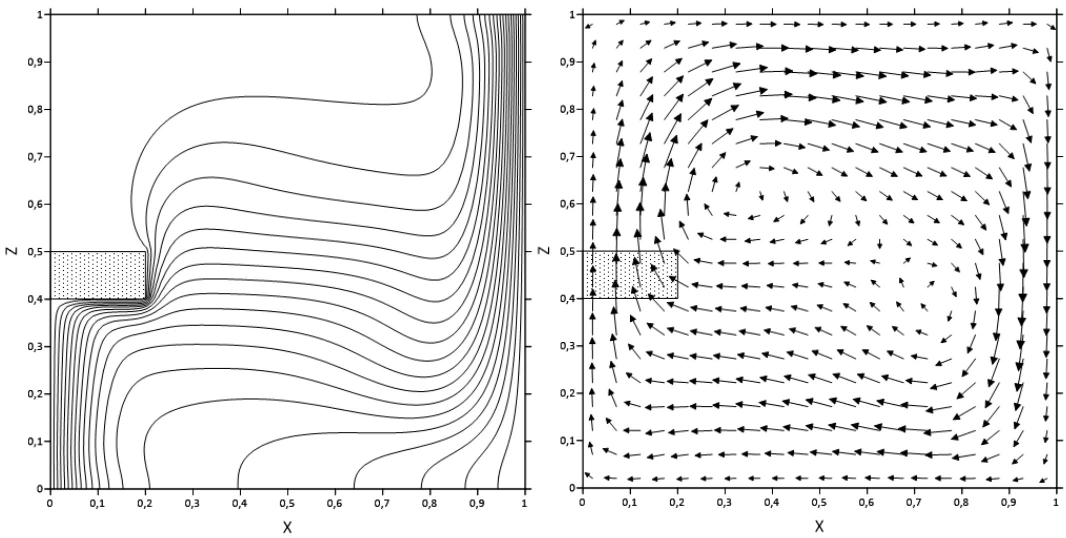
Таблица 3.5 – Среднее число Нуссельта при различном количестве ребер ($\mathrm{d} = 0.2, \mathrm{l} = 0.4, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и $\mathrm{k_r} = 1526$)

Ra	Nu			
	нет ребер	1 ребро	2 ребра	3 ребра
10^4	2.059	3.296	3.389	3.450
10^5	4.412	7.492	7.598	7.673
10^6	8.896	14.769	15.232	15.552

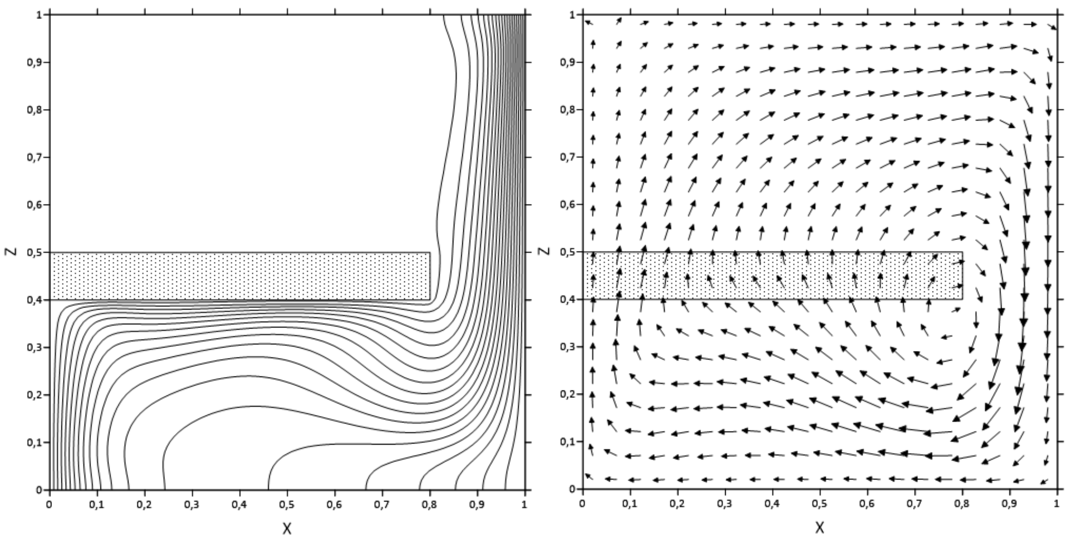
Таблица 3.6 – Положительный эффект от введения дополнительных ребер

Ra	Положительный эффект, %		
	$0 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 2$	$2 \rightarrow 3$
10^4	60.1	3.1	1.8
10^5	69.8	1.4	1.0
10^6	66.0	3.1	2.1

Циркуляция жидкости и изотермы в среднем сечении при $\mathrm{Ra} = 10^5, \mathrm{d} = 0.4$, $\varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и $\mathrm{k_r} = 1526$ и различных длинах ребра представлены на рисунке 3.45. Благодаря высокой теплопроводности поверхность ребра остается более горячей, чем жидкость. Таким образом, ребро действует как продолжение горячей стенки, передавая тепло непосредственно к холодной стенке (в случае очень длинного ребра – рисунок 3.45б). Также отметим, что центральные вихри, расположенные в центральной области для коротких ребер $\mathrm{l} = 0.2$ (рисунок 3.42а), сместились вправо, ближе к холодной стенке, по мере увеличения ребра до $\mathrm{l} = 0.8$, как показано на рисунке 3.45б, так как интенсивный теплосъем происходит в области около правой стенки.



а)



б)

Рисунок 3.45 – Температурные и скоростные поля для $\mathrm{Ra} = 10^5, \mathrm{d} = 0.4$, $\varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и $\mathrm{k_r} = 1526$ в сечении Y = 0.5: (а) $\mathrm{l} = 0.2$, (б) $\mathrm{l} = 0.8$

Рисунок 3.46 показывает влияние длины ребра на интенсивность теплообмена. При $\mathrm{Ra} = 10^4$ среднее число Нуссельта монотонно возрастает с увеличением длины ребра от 0.2 до 0.8, так как при малых числах Рэлея теплопроводность имеет тенденцию преобладать над конвекцией. Более длинные ребра приводят к увеличению площади поверхности теплопередачи и, следовательно, к высшему числу Нуссельта. При высоких числах Рэлея ($\mathrm{Ra} = 10^5$ и более) конвекция начинает преобладать над теплопроводностью. Увеличение длины ребра также приводит к увеличению сопротивления (трения) при движении жидкости, что затрудняет конвекцию. Таким образом, монотонность числа Нуссельта больше не наблюдается в случае $\mathrm{Ra} = 10^5$ и $\mathrm{Ra} = 10^6$. При данных числах Рэлея существует предел длины ребра, за которым число Нуссельта начинает падать. Причиной этого является расширение поверхности теплопередачи не компенсирует подавление конвекции, вызванное пористой средой внутри ребра при переходе длины ребра от $\mathrm{l} = 0.6$ к $\mathrm{l} = 0.8$,. Следовательно, $\mathrm{l} = 0.6$ является критическим значением длины пористого ребра для высоких чисел Рэлея.

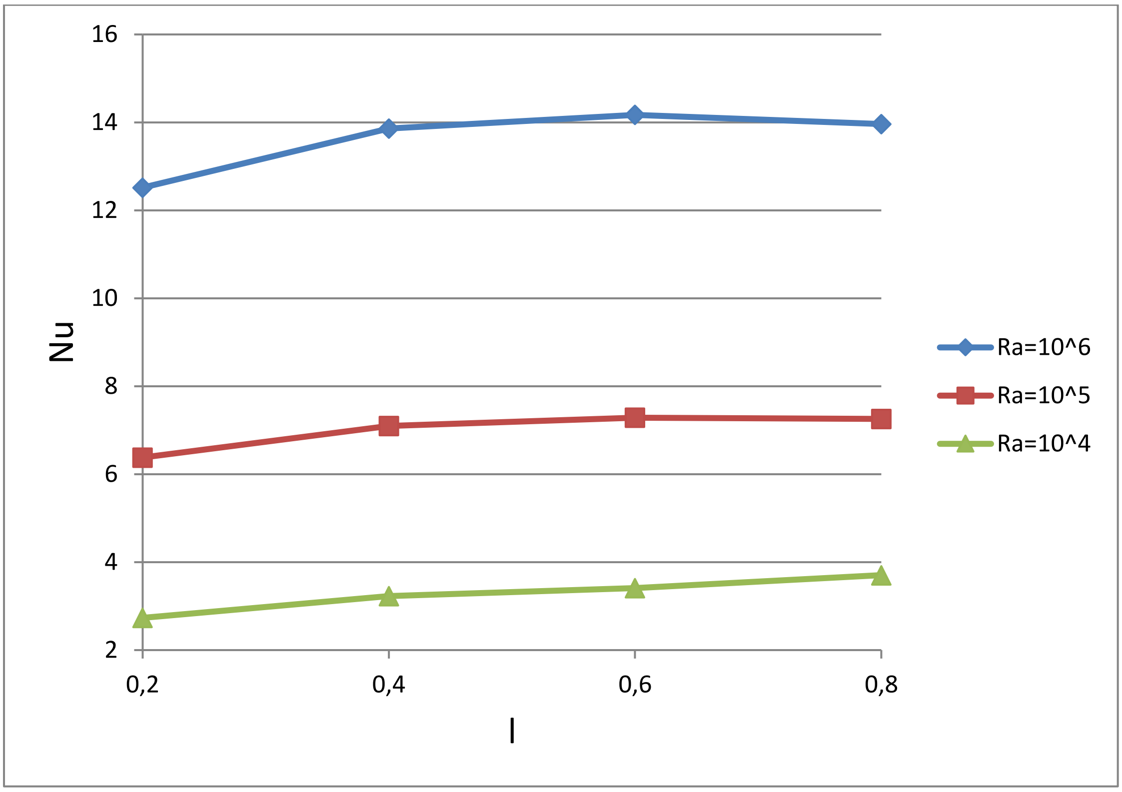


Рисунок 3.46 – Среднее число Нуссельта для различных Рэлея в зависимости от длины ребра ($d = 0.4, \varepsilon = 0.9, Da = 10^{-2}$ и $k_r = 1526$)

На таблице 3.7 показано влияние пористости ребра на среднее число Нуссельта при $d = 0.4, l = 0.4, Da = 10^{-2}, k_r = 1526$ и различных числах Рэлея. Также как в случае с двумерной моделью пористых ребер, среднее число Нуссельта является убывающей функцией от пористости, так как по мере увеличения пористости эффективная теплопроводность пористого ребра падает. Однако изменение среднего числа Нуссельта при различной пористости оказывается несущественным (в диапазоне $1\% \div 4\%$). Наиболее существенный спад среднего числа Нуссельта наблюдается при переходе пористости от 0.95 до 0.98 при $Ra = 10^6$ (около 4%).

Таблица 3.7 – Среднее число Нуссельта для различных чисел Рэлея в зависимости от пористости ребра ($\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \mathrm{Da} = 10^{-2}, \mathrm{k_r} = 1526$)

Ra	ε			
	0.8	0.9	0.95	0.98
10^4	3.242	3.230	3.216	3.181
10^5	7.132	7.101	7.049	6.915
10^6	13.989	13.862	13.638	13.094

3.6 Сравнение результатов влияния твердых и пористых ребер на интенсивность теплообмена

Сравнение проводится при $\mathrm{Ra} = 10^4 \div 10^6, \mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \lambda_s/\lambda_f = 15251, \mathrm{k_r} = 1526, \varepsilon = 0.9, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и одном ребре.

В таблице 3.8 видно, что пористые ребра лучше интенсифицируют теплообмен при низких и средних Рэлея ($\mathrm{Ra} = 10^5$ и меньше). При $\mathrm{Ra} = 10^6$ и выше твердые ребра превосходят пористые в интенсификации теплообмена. Также следует отметить, что при введении любого ребра интенсивность теплопереноса всегда улучшается при рассматриваемых параметрах.

Таблица 3.8 – Среднее число Нуссельта при различных Рэлея и отсутствии/присутствии одного твердого или пористого ребра

Ra	Без ребер	Твердое ребро	Пористое ребро
10^4	2.245	2.994	3.230
10^5	4.528	6.964	7.101
10^6	8.932	14.682	13.860

Выводы по третьей главе

- Общие:

1. Использование ребер является эффективным методом интенсификации теплообмена в кубических полостях, несмотря на их типы. При этом среднее число Нуссельта может повыситься до 64%.

2. Пористые ребра превосходят твердые при низких и средних числах Рэлея ($\mathrm{Ra} = 10^4$ и 10^5).

3. Ребра, расположенные в нижней части полости, лучше интенсифицируют теплообмен, чем те, которые расположены в средней или в верхней частях. Это относится к всем рассматриваемым числам Рэлея.

- Для твердых ребер

1. По мере увеличения длины твердого ребра при $\mathrm{Ra} = 10^4$ среднее число Нуссельта растет монотонно, а при более высоких числах Рэлея оно возрастает до определенного значения, после чего падает. Наибольшие значения среднего числа Нуссельта наблюдаются при $\mathrm{l} = 0.6$ в случае одного ребра при высоких числах Рэлея. Оптимальная длина твердого ребра падает с увеличением количества ребер.

2. Введение дополнительных твердых ребер с целью интенсификации теплообмена имеет положительный эффект при низких и средних числах Рэлея $\mathrm{Ra} = 10^4$ и 10^5. Однако интенсивность теплообмена при этом повышается незначительно (примерно на 2% при $\mathrm{Ra} = 10^5$). При более высоких числах Рэлея этот положительный эффект теряется. Таким образом, оптимальное количество твердых ребер – одно.

- Для пористых ребер

1. $\mathrm{l} = 0.6$ является критической длиной пористого ребра при средних и высоких числах Рэлея. При увеличении длины пористого ребра выше этого порога рост среднего числа Нуссельта прекращается.

2. Наличие двух и более пористых ребер всегда улучшает интенсивность теплообмена при всех рассматриваемых числах Рэлея. Однако, при количестве пористых ребер больше двух положительный эффект от введения дополнительных пористых ребер составляет всего 1-3%. Соответственно, рекомендуется использование только одного пористого ребра с целью интенсификации теплообмена.

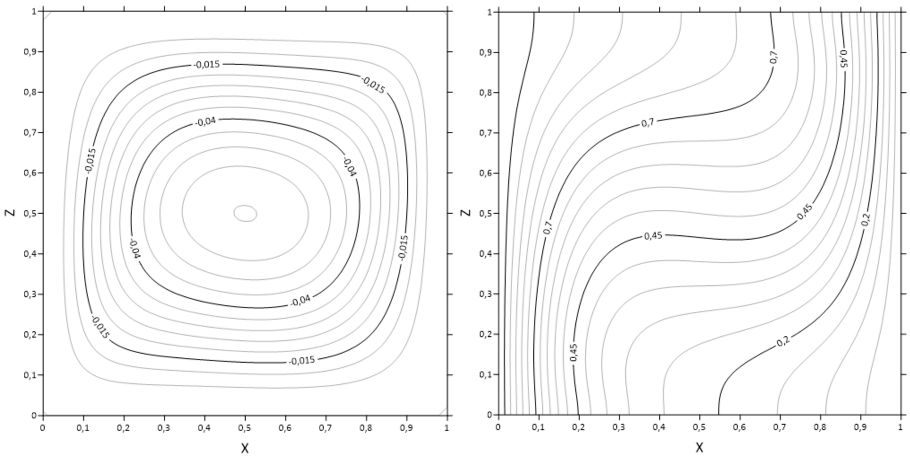
3. Зависимость среднего числа Нуссельта является убывающей функцией от пористости. Однако эта зависимость несущественна.

ГЛАВА 4. СРАВНЕНИЕ ДВУХ- И ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛЕЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

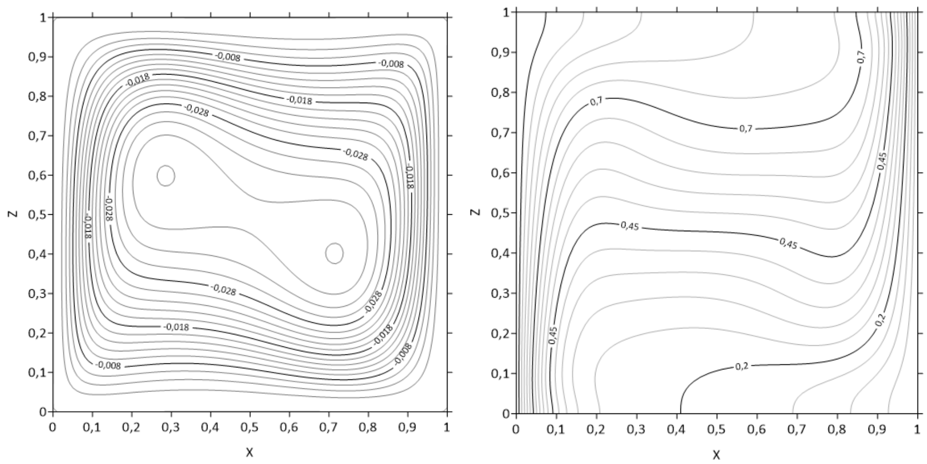
Для простоты сравнения меняем обозначение вертикальной оси в квадратных полостях на Z (ранее было Y).

4.1. Случай отсутствия ребер

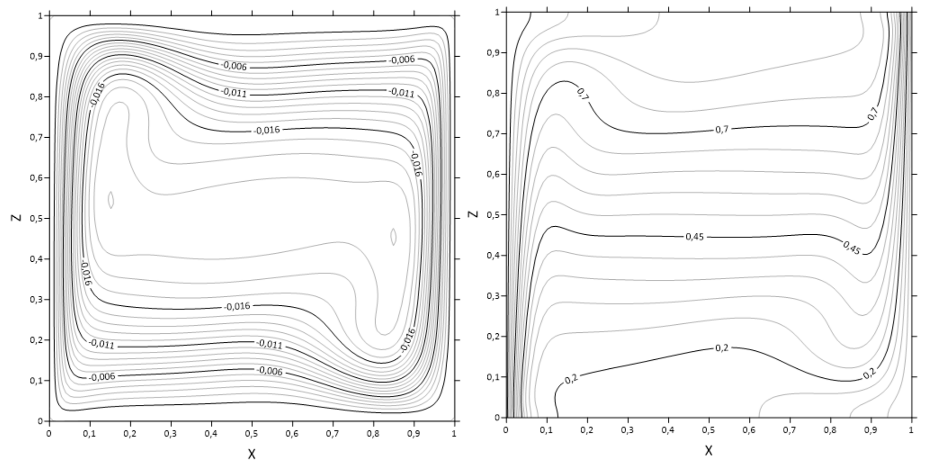
Течение и распределение температуры в квадратных и кубических полостях при отсутствии ребер демонстрируются на рисунках 4.1 и 4.2. Видно, что течение жидкости и распределение температуры внутри двух полостей практически идентичны. Однако их различия заметны, особенно вблизи вертикальных торцевых стенок $Y = 0$ и $Y = 1$ (более наглядно для θ = 0.9, 0.85, 0.8) и симметричны относительно центральной плоскости Y = 0.5 (правые рисунки 4.2а-в).



а)



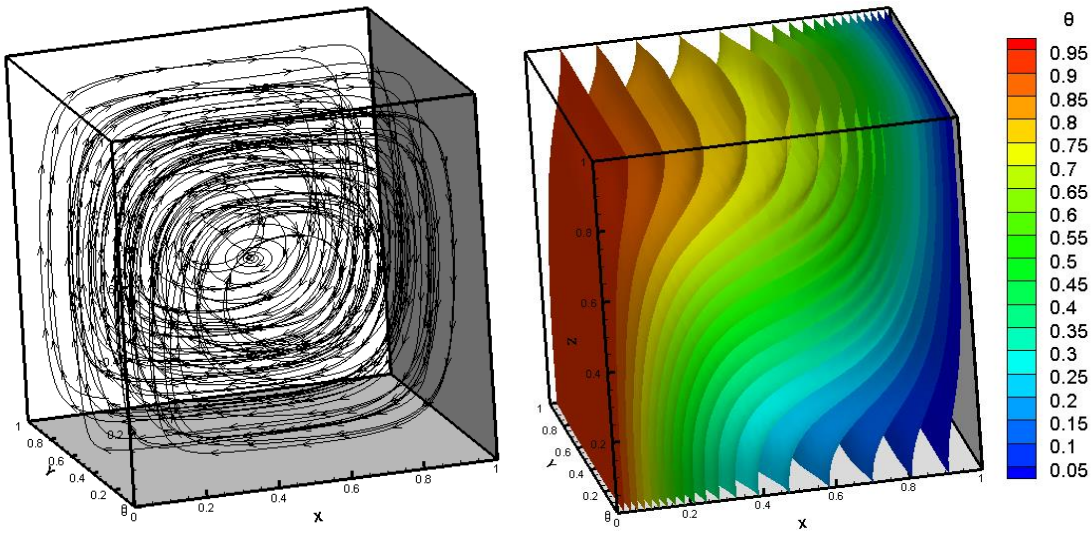
б)



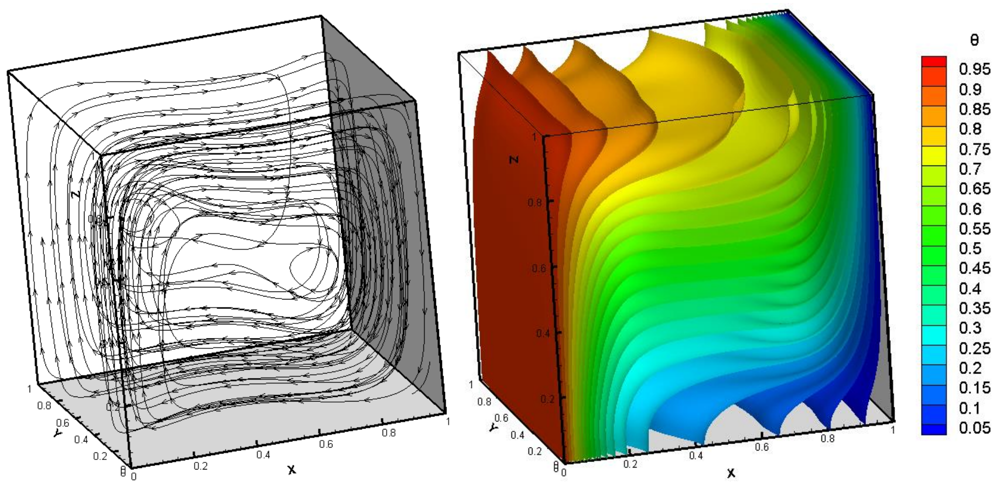
в)

Рисунок 4.1 – Линии тока (левые) и изотермы (правые) для квадратных полостей при

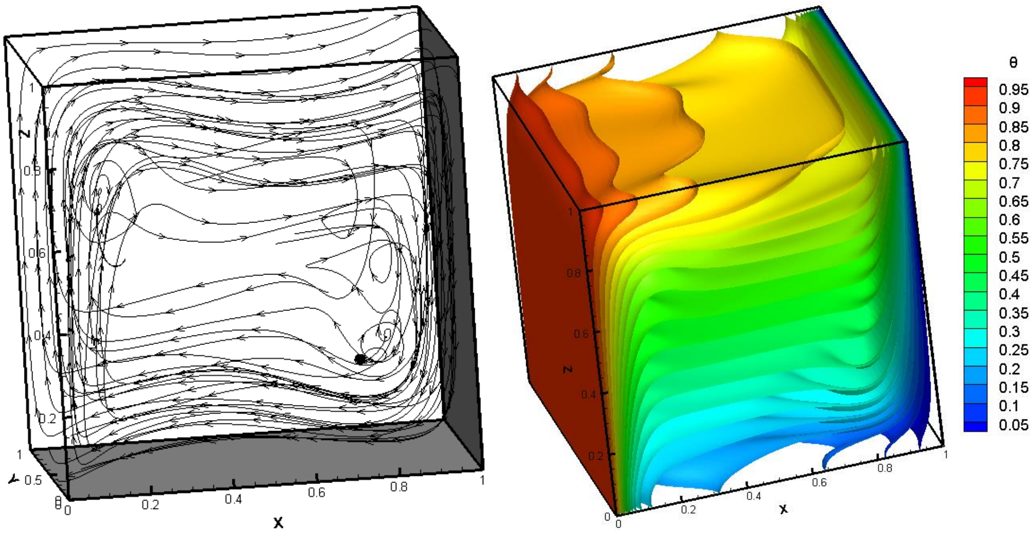
а – $\mathrm{Ra} = 10^4$, б – $\mathrm{Ra} = 10^5$, в – $\mathrm{Ra} = 10^6$


θ
0.95
0.9
0.85
0.8
0.75
0.7
0.65
0.6
0.55
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
X
Y
Z

а)


θ
0.95
0.9
0.85
0.8
0.75
0.7
0.65
0.6
0.55
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
X
Y
Z

б)



в)

Рисунок 4.2 – Траектории движения (левые) и изотермические поверхности (правые) для кубических полостей при а – $Ra = 10^4$, б – $Ra = 10^5$, в – $Ra = 10^6$

Сравнение максимальных значений компонент скорости по всем направлениям отражено в таблице 4.1. Видно, что U_{max} для кубических полостей выше, чем для квадратных, а W_{max} – только для $Ra \geq 5 \cdot 10^4$. Несмотря на то, что поперечная компонента скорости V для трехмерных полостей значительно ниже двух других компонент (таблица 4.1), демонстрируется эффект трехмерности, который был описан выше на рисунках 4.1 и 4.2а-в. При этом чем выше V_{max}, тем хаотичнее распределение температуры вдоль оси Y: V_{max} мала при $Ra = 10^4$ и при этом изотермические поверхности относительно гладки вдоль оси Y (рисунок 4.2а правый), а при больших числах Рэлея ($Ra = 10^5$ и 10^6) температура распределяется более сложным образом по оси Y (рисунки 4.2б и 4.2в правые). Также обнаружено, что разницы в максимальных значениях компонент скорости для двух- и трехмерных полостей становятся более существенными с увеличением числа Рэлея.

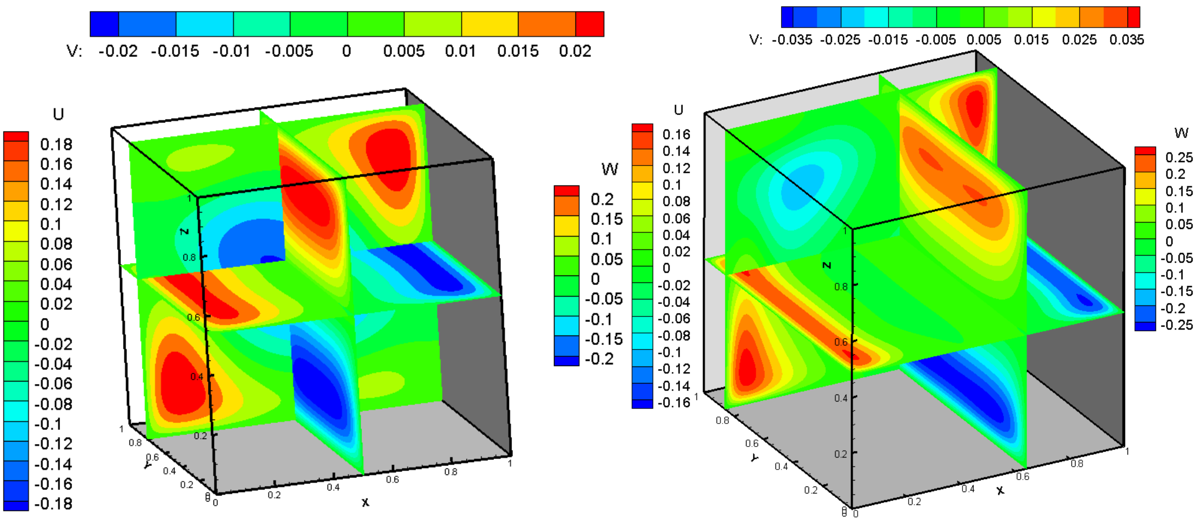
Таблица 4.1. Максимальные значения компонент скорости для квадратных и кубических полостей при различных числах Рэлея

Ra	U_{max}		W_{max}		V_{max}	
	2D	3D	2D	3D	2D	3D
10^4	0.192	0.199	0.233	0.223	–	0.0258
5×10^4	0.171	0.178	0.252	0.252	–	0.0369
10^5	0.163	0.173	0.256	0.259	–	0.0390
5×10^5	0.150	0.204	0.258	0.271	–	0.0437
10^6	0.144	0.258	0.259	0.296	–	0.0511

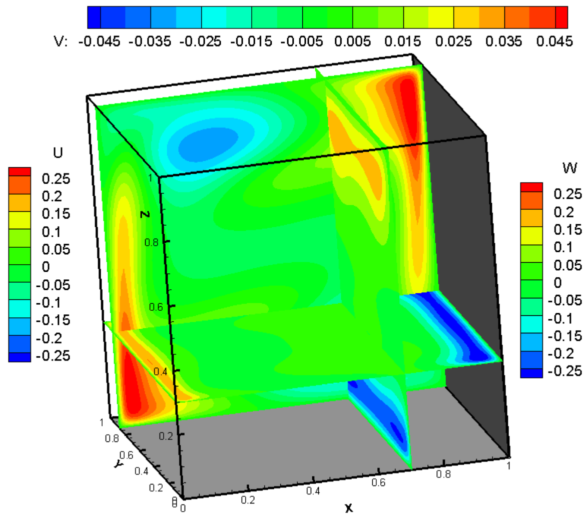
Сравнение среднего числа Нуссельта для двух- и трехмерных полостей при отсутствии ребер для различных чисел Рэлея показано в таблице 4.2. Видно, что среднее число Нуссельта для трехмерных полостей в большинстве случаев ниже несмотря на то, что максимумы компонент скорости для трехмерных полостей выше при больших числах Рэлея. Причина этого в том, что при больших числах Рэлея интенсивные потоки жидкости ограничиваются в углах полостей (рисунки 4.3б и 4.3в). Большая часть полостей заполнена компонентами нулевой скорости. Таким образом, более высокие максимальные значения компонент скорости для трехмерных полостей оказывают незначительное влияние на среднее число Нуссельта при $\mathrm{Ra} > 10^5$. При малых числах Рэлея интенсивные течения распространяются на большую площадь (рисунок 4.3а), что приводит к меньшему объему нулевых компонент скорости, чем при высоких числах Рэлея. Соответственно, влияние трехмерности более значительно при $\mathrm{Ra} < 10^5$. Максимальная разница между средними числами Нуссельта для двух- и трехмерных полостей наблюдается при $\mathrm{Ra} = 10^4$, когда начинает проявляться конвекция. При $\mathrm{Ra} > 10^5$ практически не наблюдаются разницы между средними числами Нуссельта для квадратных и кубических полостей.

Таблица 4.2. Среднее число Нуссельта для квадратных и кубических полостей и их разницы в процентах (значения в скобках) при различных числах Рэлея

Ra	Nu	
	2D	3D
10^4	2.245	2.059(-8.3%)
5×10^4	3.669	3.522(-4.0%)
10^5	4.528	4.412(-2.6%)
3×10^5	6.286	6.258(-0.4%)
5×10^5	7.298	7.315(+0.2%)
8×10^5	8.361	8.375(+0.2%)
10^6	8.917	8.896(-0.2%)



а) б)



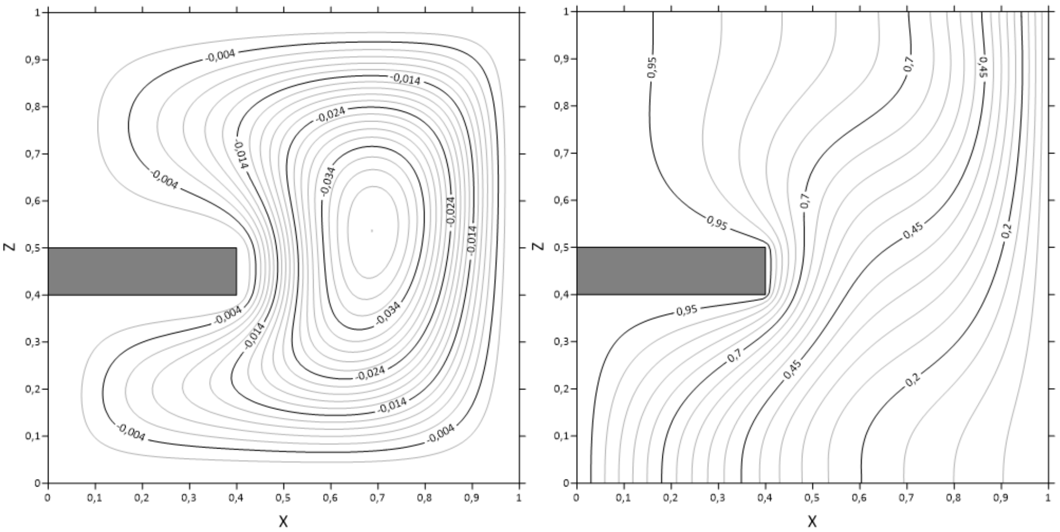
в)

Рисунок 4.3. Распределение скоростей в кубических полостях в различных сечениях при:

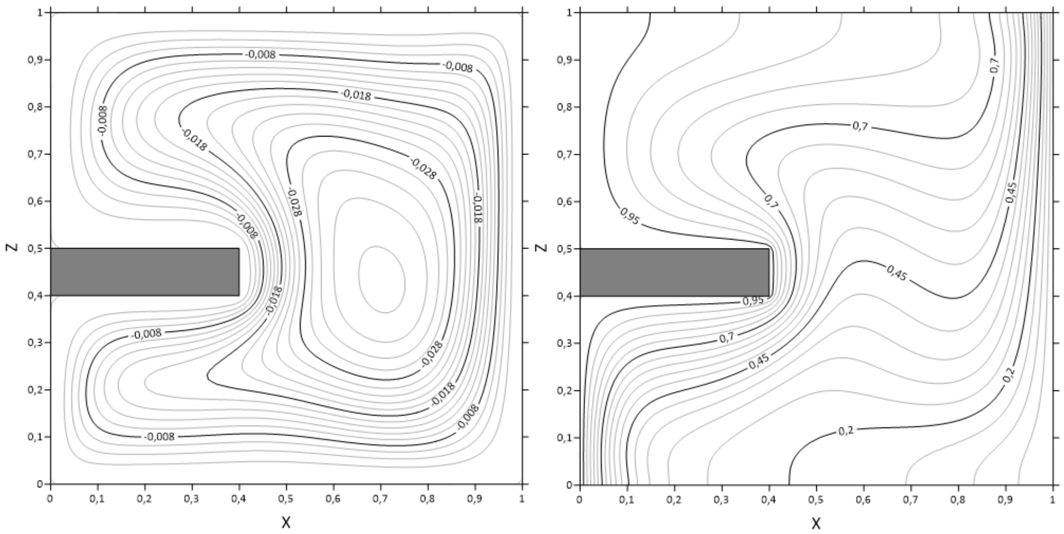
а – $\mathrm{Ra} = 10^4$, б – $\mathrm{Ra} = 10^5$, в – $\mathrm{Ra} = 10^6$

4.2. Случай полостей при наличии одного твердого ребра

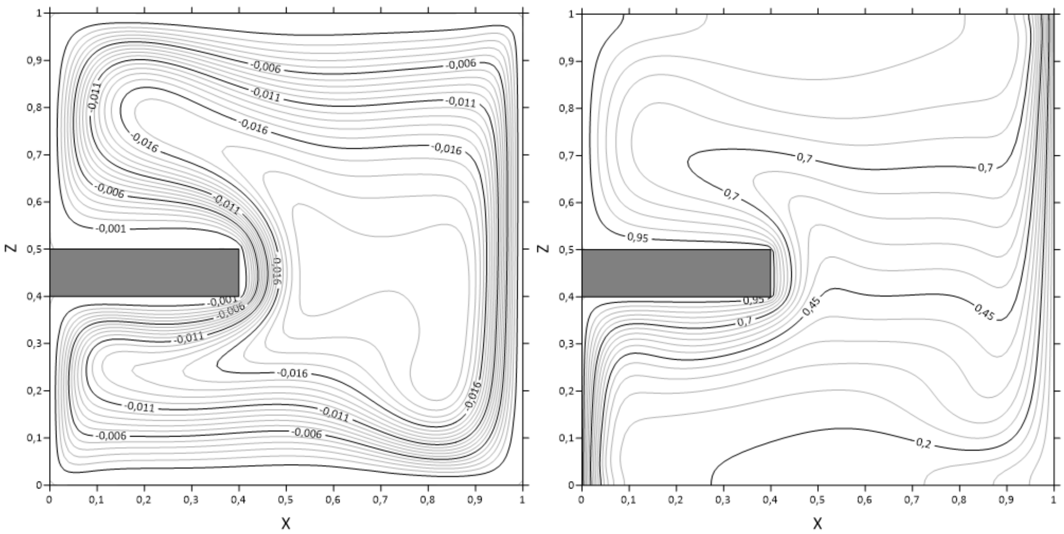
Конфигурация течения жидкости и распределение температуры внутри квадратных и кубических полостей с твердым ребром на горячей стенке показаны на рисунках 4.4 и 4.5. Видно, что движение жидкости и распределение температуры внутри этих полостей существенно различаются. В квадратной полости жидкость, подойдя к горячей стенке под ребром и омыв нижнюю границу ребра, продолжает свое движение к верхней части горячей стенки над ребром, затем поступает к холодной стенке, как показано на линиях тока на левых рисунках 4.4а-в. Поскольку жидкость проходит в область около горячей стенки над ребром, в этом месте наблюдается температурный градиент (рисунки 4.4а-в правые). В то же время эффект нагрева от твердого ребра гораздо более значителен для трехмерных полостей благодаря большему объему поверхностей теплопередачи и высокой теплопроводности ребра. В связи с этим жидкость внутри кубической полости не возвращается к горячей стенке над ребром, омыв нижнее основание ребра, а смешивается с предварительно нагретой жидкостью над ребром, и эти два потока затем движется к холодной стенке (рисунки 4.5а-в левые). Особенность течения жидкости в кубической полости при наличии твердого ребра также четко отражается на температурных полях. Поскольку в области над ребром изотермические поверхности отсутствуют, в этой области имеет место большая зона нагрева (рисунки 4.5а-в правые). Также отметим, что объем зоны нагрева над ребром растет по мере увеличения числа Рэлея. На температурных полях фиксируются значительные различия в распределении температуры в двух полостях: в квадратных полостях изотермы распространяются по всему объему, а в кубических полостях изотермические поверхности смещены вправо в сторону охлаждаемой стенки, что приводит к более высокому температурному градиенту вблизи холодной стенки куба. Таким образом, интенсивность теплообмена для трехмерных полостей с твердым ребром выше, чем у двумерных полостей для всех рассматриваемых чисел Рэлея.



а)

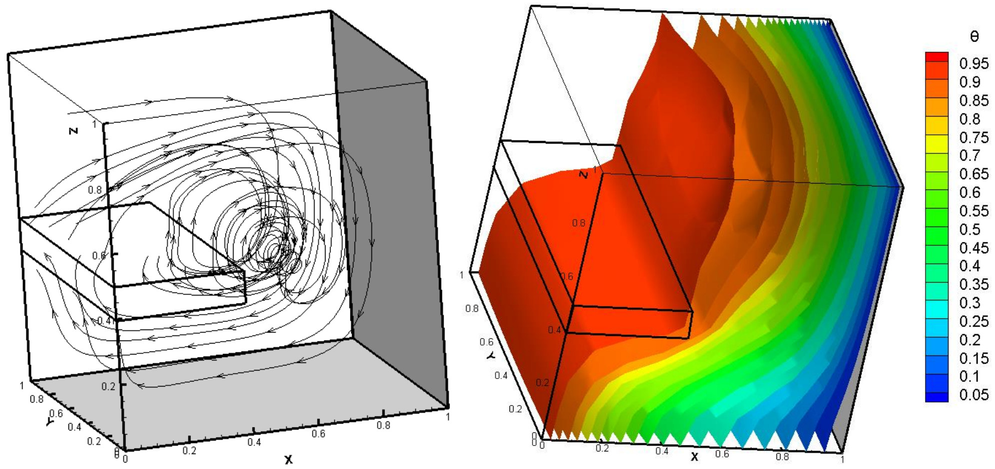


б)

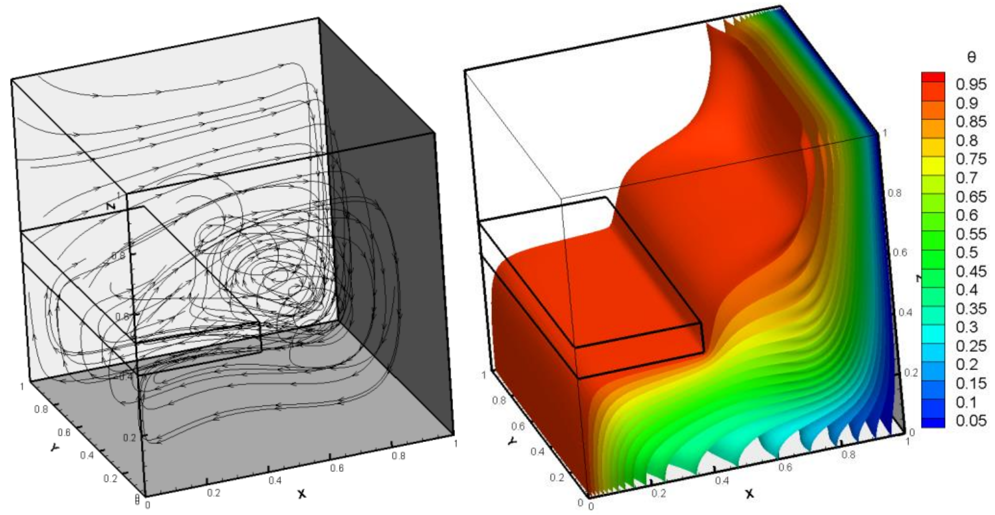


в)

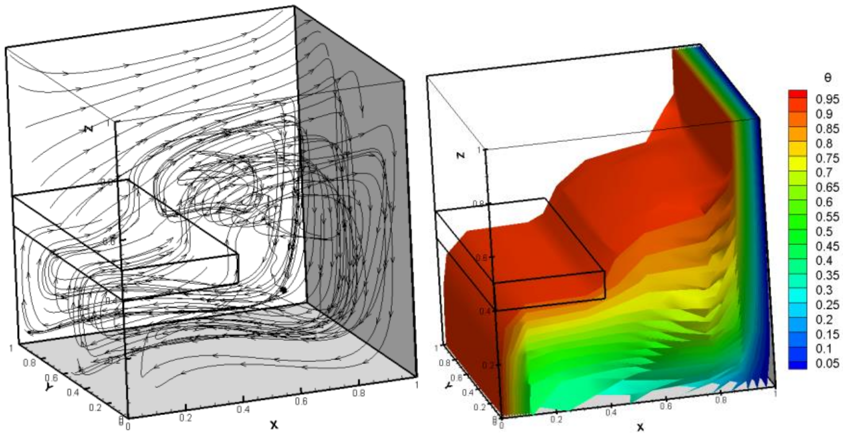
Рисунок 4.4 – Линии тока (левые) и изотермы (правые) для квадратных полостей при наличии твердого ребра ($\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \lambda_s/\lambda_f = 15251$) и а – $\mathrm{Ra} = 10^4$, б – $\mathrm{Ra} = 10^5$, в – $\mathrm{Ra} = 10^6$


θ
0.95
0.9
0.85
0.8
0.75
0.7
0.65
0.6
0.55
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
X
Y
Z

а)


θ
0.95
0.9
0.85
0.8
0.75
0.7
0.65
0.6
0.55
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
X
Y
Z

б)



в)

Рисунок 4.5 – Траектории движения (левые) и изотермические поверхности (правые) для кубических полостей при наличии твердого ребра ($d = 0.4, l = 0.4, \lambda_s/\lambda_f = 15251$) и
а – $Ra = 10^4$, б – $Ra = 10^5$, в – $Ra = 10^6$

Максимальные значения компонент скорости для двух- и трехмерных полостей с твердым ребром при различных числах Рэлея показаны в таблице 4. Видно, максимальные скорости U_{max} и V_{max} в кубических полостях всегда выше, чем в квадратных полостях во всем диапазоне исследуемых чисел Рэлея. Исходя из этого, интенсивность теплопереноса при наличии твердого ребра в трехмерных полостях выше, чем в двумерных, что будем обсуждать в следующем параграфе.

Таблица 4.3. Максимальные значения компонент скорости для квадратных и кубических полостей при наличии твердого ребра и различных числах Рэлея ($d = 0.4, l = 0.4$ и $\lambda_s/\lambda_f = 15251$)

Ra	U_{max}		W_{max}		V_{max}	
	2D	3D	2D	3D	2D	3D
10^4	0.153	0.229	0.235	0.296	–	0.0291
5×10^4	0.197	0.262	0.271	0.355	–	0.0419
10^5	0.212	0.276	0.268	0.374	–	0.0427
5×10^5	0.227	0.337	0.264	0.403	–	0.0484
10^6	0.228	0.406	0.268	0.439	–	0.0710

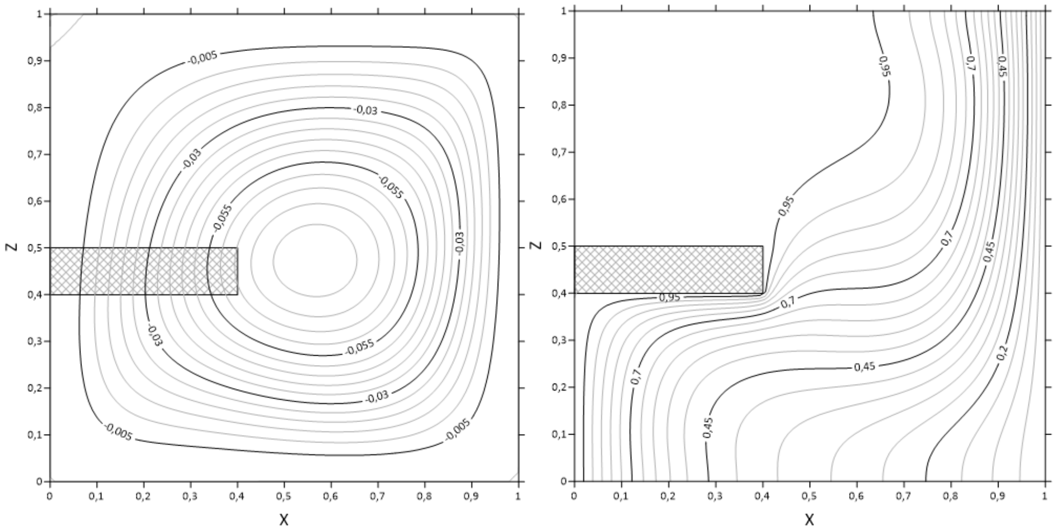
В таблице 4.4 показаны разницы в средних числах Нуссельта между двумерной и трехмерной моделями при наличии твердого ребра, расположенного на высоте $\mathrm{d} = 0.4$ и имеющего длину $\mathrm{l} = 0.4$ и теплопроводность $\lambda_s/\lambda_f = 15251$. Очевидно, что твердые ребра в кубических полостях значительно превосходят таковые в квадратных. Это можно объяснить тем, что площадь поверхности теплообмена выше для трехмерных твердых ребер, что играет важную роль в улучшении теплопереноса. Это явление справедливо для всех чисел Рэлея в диапазоне $\mathrm{Ra} = 10^4 \div 10^6$. Также отметим, что разницы в числах Нуссельта между двумя моделями возрастают по мере увеличения числа Рэлея. Максимальное различие в средних числах Нуссельта наблюдается при $\mathrm{Ra} = 10^6$ и составляет 53.5%.

Таблица 4.4. Среднее число Нуссельта для квадратных и кубических полостей при наличии твердого ребра и их разницы в процентах (значения в скобках) при различных числах Рэлея ($\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4$ и $\lambda_s/\lambda_f = 15251$)

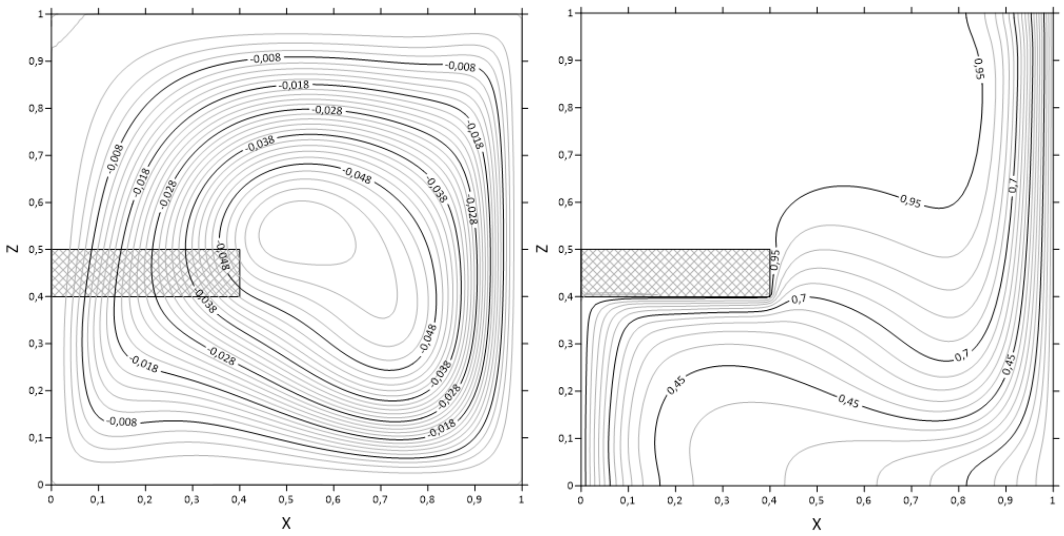
Ra	Nu	
	2D	3D
10^4	2.132	2.991(+40.3%)
5×10^4	3.686	5.515(+49.6%)
10^5	4.654	6.964(+49.6%)
5×10^5	7.774	11.761(+51.3%)
10^6	9.564	14.683(+53.5%)

4.3. Случай полостей при наличии одного пористого ребра

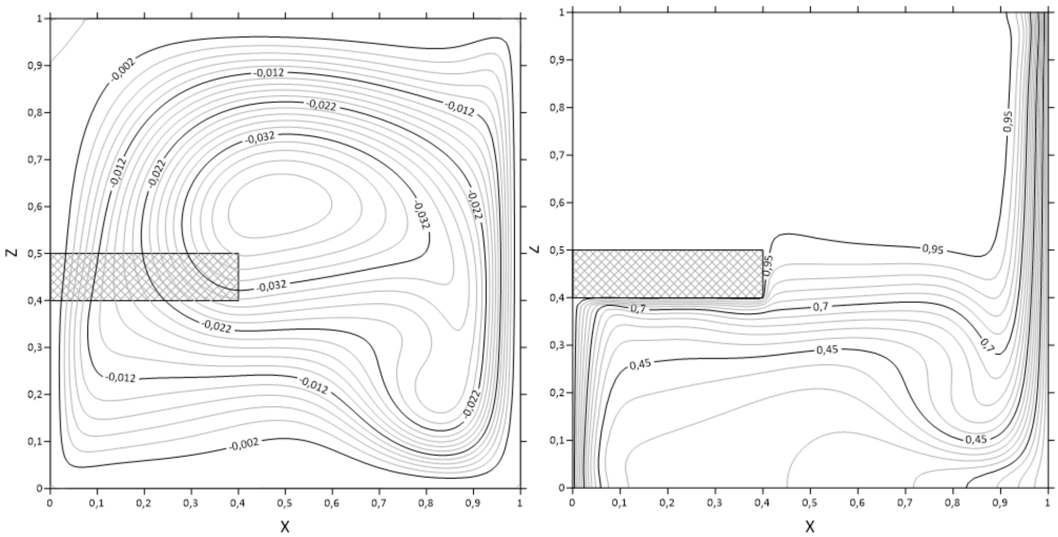
Конфигурация движения и распределение температуры для квадратных и кубических полостей с одним пористым ребром на горячей стенке демонстрируются на рисунках 4.6 и 4.7. Благодаря высокой пористости и проницаемости пористого ребра жидкость без затруднений циркулирует по всему объему полости. Таким образом, существенных изменений в движении жидкости и распределении температуры в двух полостях не наблюдается, аналогично случаю, когда в полостях отсутствуют ребра (рисунок 4.1 и 4.2).



а)



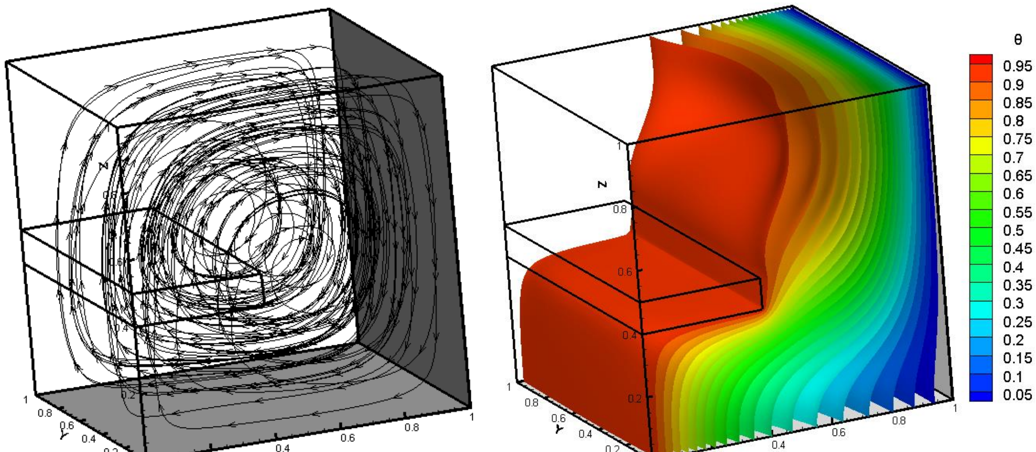
б)



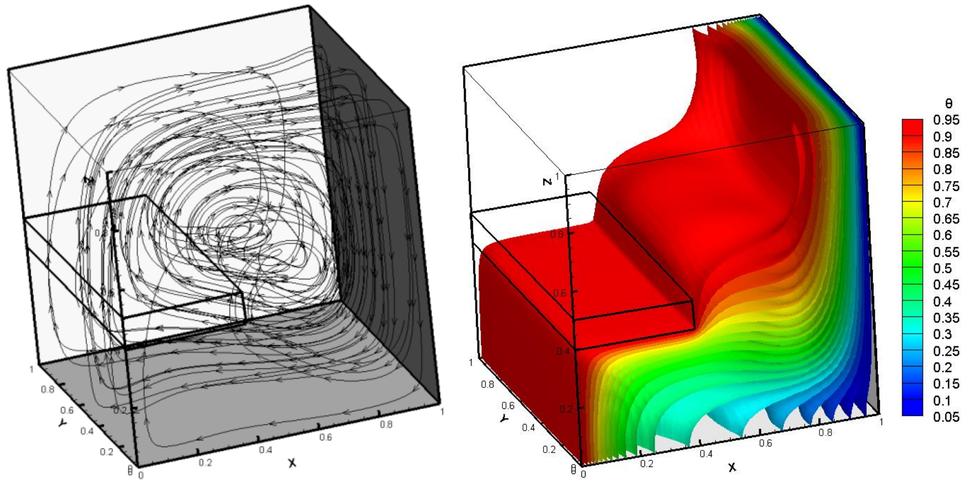
в)

Рисунок 4.6 – Линии тока (левые) и изотермы (правые) для квадратных полостей при наличии пористого ребра $\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \mathrm{k_r} = 1526, \mathrm{Da} = 10^{-2}, \varepsilon = 0.9$ и

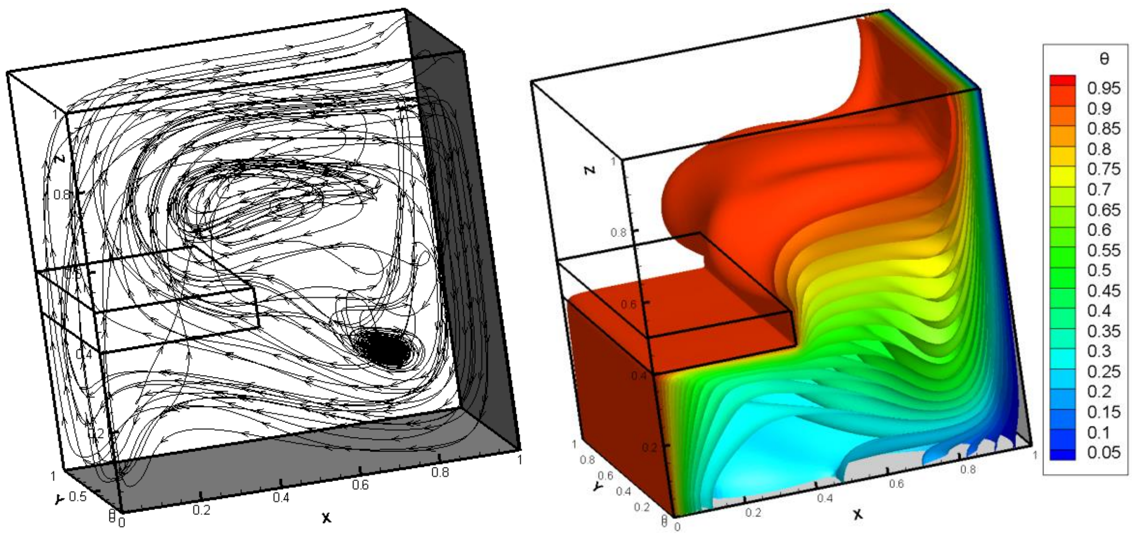
а – $\mathrm{Ra} = 10^4$, б – $\mathrm{Ra} = 10^5$, в – $\mathrm{Ra} = 10^6$



а)



б)



в)

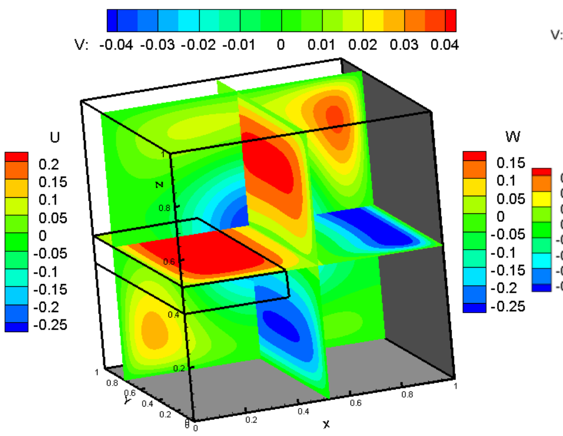
Рисунок 4.7 – Траектории движения (левые) и изотермические поверхности (правые) для кубических полостей при наличии пористого ребра $d = 0.4, l = 0.4, k_r = 1526, Da = 10^{-2}, \varepsilon = 0.9$ и

а – $Ra = 10^4$, б – $Ra = 10^5$, в – $Ra = 10^6$

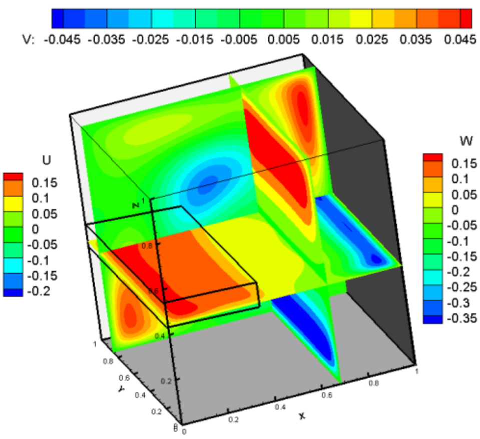
Максимальные значения компонент скорости для двух- и трехмерных полостей с пористым ребром при различных числах Рэлея представлены в таблице 4.5. Компонента скорости V снова оказывается значительно меньше двух остальных, как и в случае отсутствия ребер и полостей с твердым ребром (таблицы 4.1 и 4.3). Для чисел Рэлея $Ra < 10^5$ U_{max} и W_{max} получаются меньше для трехмерных полостей. Отметим, что разницы между максимальными значениями компонент скорости U_{max} для двумерных и трехмерных полостей возрастает с ростом числа Рэлея (максимальная разница наблюдается при $Ra = 10^6$ и составляет около 58%). Однако, согласно рисунку 4.8в, зона высоких значений компоненты скорости U ограничена в небольшой области вблизи верхней и нижней зон полости. Основная часть полости заполнена в основном нулевыми скоростями. Следовательно, увеличение U_{max} при переходе от двумерной полости к трехмерной мало влияет на интенсивность теплообмена. При меньших числах Рэлея зона высоких значений компонент скорости в трех направлениях распространяется, особенно вблизи центра полости (рисунки 4.8а и 4.8б). Поэтому разницы в максимальных значениях компонент скорости более значительны при малых числах Рэлея ($Ra < 10^5$).

Таблица 4.5 – Таблица 4.3. Максимальные значения компонент скорости для квадратных и кубических полостей при наличии пористого ребра и различных числах Рэлея ($d = 0.4, l = 0.4, k_r = 1526, Da = 10^{-2}$ и $\varepsilon = 0.9$)

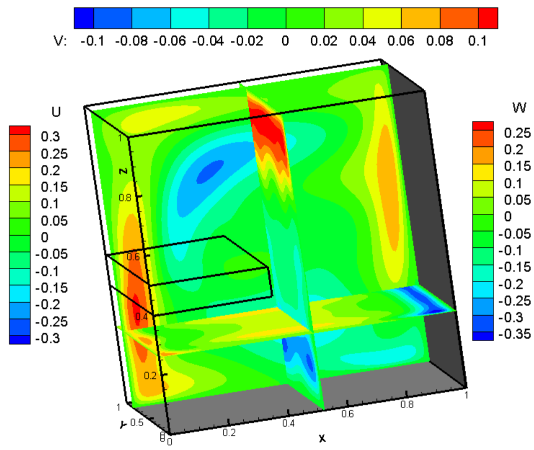
Ra	U_{max}		W_{max}		V_{max}	
	2D	3D	2D	3D	2D	3D
10^4	0.259	0.258	0.324	0.302	–	0.0413
5×10^4	0.274	0.256	0.369	0.344	–	0.0477
10^5	0.269	0.205	0.374	0.367	–	0.0477
5×10^5	0.239	0.278	0.376	0.355	–	0.0624
10^6	0.220	0.347	0.380	0.384	–	0.1050



а)



б)



в)

Рисунок 4.8. Распределение скоростей в кубических полостях при наличии пористого ребра в различных сечениях при:

$a - \mathrm{Ra} = 10^4$, $b - \mathrm{Ra} = 10^5$, $c - \mathrm{Ra} = 10^6$

Сравнение средних чисел Нуссельта для двух- и трехмерных полостей с пористым ребром на горячей грани для различных чисел Рэлея проведено в таблице 4.6. Видно из этой таблицы, средние числа Нуссельта не претерпевают существенных изменений, в отличие от твердых ребер (см. таблицу 4.4) и аналогично случаю с полостями без ребер (см. таблицу 4.2). Разницы в средних числах Нуссельта для двух- и трехмерных полостей находятся в пределах 10% для большинства рассматриваемых чисел Рэлея, за исключением $\mathrm{Ra} = 10^4$, когда начинает проявляться конвекция. Максимальная разница в средних числах Нуссельта для двух полостей наблюдается при $\mathrm{Ra} = 10^4$ и составляет 10.4%. Разницы в средних числах Нуссельта при очень высоких числах Рэлея ($\mathrm{Ra} > 10^5$) практически не наблюдаются.

Таблица 4.6. Среднее число Нуссельта для квадратных и кубических полостей при наличии твердого ребра и их разницы в процентах (значения в скобках) при различных числах Рэлея ($\mathrm{d} = 0.4, \mathrm{l} = 0.4, \lambda_{\mathrm{eff}}/\lambda_{\mathrm{f}} = 1526, \mathrm{Da} = 10^{-2}$ и $\varepsilon = 0.9$)

Ra	Nu	
	2D	3D
10^4	3.604	3.230(-10.4%)
5×10^4	6.063	5.715(-6.1%)
10^5	7.387	7.101(-4.0%)
5×10^5	11.483	11.419(-0.6%)
10^6	13.869	13.860(-0.1%)

Выводы по четвертой главе

Движение и распределение температуры, а также интенсивность теплопереноса в двух- и трехмерных полостях без ребер и с одним пористым ребром отличаются друг от друга незначительно (в пределах 10%). Кроме того, разницы в двух- и трехмерных моделях при этом уменьшается с ростом числа Рэлея, так как влияние высоких компонент скорости становится несущественным. При $\mathrm{Ra} > 10^5$ практически не найдено различий в средних числах для дву- и трехмерных моделей. Это означает возможность использования двумерных моделей вместо трехмерных для полостей без ребер и полостей с одним пористым ребром на горячей стенке. В то же время, существенные различия в конфигурации циркуляции жидкости, распределении и интенсивности теплообмена наблюдаются в полостях с одним твердым ребром на горячей стенке, что означает невозможность использования двумерной модели вместо трехмерной в этом случае. Кроме того, эти различия становятся более значительными по мере увеличения числа Рэлея. Максимальная разница в средних числах Нуссельта составляет 53.5% при $\mathrm{Ra} = 10^6$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе исследования влияния ключевых параметров на структуру течения и распределение температуры, а также интенсивность теплопереноса в двумерной и трехмерной постановках задачи были сделаны следующие выводы:

- Для двумерной задачи:

1. Использование твердых ребер является малоэффективным методом интенсификации, так как среднее число Нуссельта повышается только примерно на 7%. При этом пористые ребра с такими же геометрическими и теплофизическими параметрами могут повысить среднее число Нуссельта в среднем на 58%.

2. В целом, положение твердого ребра на левой стенке влияет на интенсивность теплообмена незначительно.

3. Среднее число Нуссельта является возрастающей функцией длины твердого ребра для всех рассмотренных значений числа Рэлея, за исключением перехода от $l = 0.2$ до $l = 0.4$ при $Ra = 10^4$.

4. Оптимальным количеством твердых или пористых ребер является одно ребро в случае рассмотренных геометрических и теплофизических параметров.

5. По мере увеличения длины пористого ребра при малых числах Рэлея среднее число Нуссельта монотонно возрастает. При средних и высоких числах Рэлея оптимальной длиной пористого ребра является 0.6.

6. Пористые ребра, расположенные в нижней части полости, лучше интенсифицируют теплообмен при всех рассмотренных значениях числа Рэлея. В отличие от твердых ребер, положение пористого ребра более существенно влияет на интенсивность теплообмена.

7. Среднее число Нуссельта является убывающей функцией пористости ребра для всех рассмотренных чисел Рэлея в связи с уменьшением эффективной относительной теплопроводности. В целом, пористость ребра слабо влияет на интенсивность теплообмена.

• Для трехмерной задачи:

1. Пористые ребра превосходят твердые при низких и средних числах Рэлея.

2. Введение твердых или пористых ребер является эффективным методом интенсификации теплообмена. С их помощью среднее число Нуссельта может увеличиться до 64%.

3. Оптимальной длиной твердых и пористых ребер является $l = 0.6$ при средних и высоких числах Рэлея.

4. Одно ребро определяет оптимальное количество твердых и пористых ребер для всех рассмотренных чисел Рэлея и с учетом выбранных геометрических параметров.

5. Оптимальное положение твердых и пористых ребер на горячей стенке определяется нижней частью полости.

В результате сравнения данных для двумерной и трехмерной моделей установлена возможность использования двумерных моделей вместо трехмерных для оценки интегрального теплообмена внутри кубических полостей без ребер или при наличии одного пористого ребра на горячей стенке, особенно при высоких числах Рэлея ($Ra > 10^5$), так как при этом различия в структуре течения и распределении температуры, а также интенсивности теплопереноса для двух моделей несущественны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hasnaoui M. Natural convection in rectangular enclosures with adiabatic fins attached on the heated wall / M. Hasnaoui, P. Vasseur, E. Bilgen // Heat Mass Transfer. – 1992. – Vol. 27 (6). – P. 357–368.
2. Dou H. S. Numerical simulation of flow instability and heat transfer of natural convection in a differentially heated cavity / H. S. Dou, G. Jiang. // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2016. – Vol. 103. – P. 370–381.
3. Lakhal E. K. Natural convection in inclined rectangular enclosures with perfectly conducting fins attached on the heated wall / E. K. Lakhal, M. Hasnaoui, E. Bilgen, P. Vasseur // Heat Mass Transfer. – 1997. – Vol. 32. – No. 5. – P. 365–373.
4. Yucel N. Numerical analysis of laminar natural convection in enclosures with fins attached to an active wall / N. Yucel, H. Turkoglu // Heat Mass Transfer. – Vol. 33. – No. 4. – P. 307–314.
5. Shi X. Laminar natural convection heat transfer in a differentially heated square cavity due to a thin fin on the hot wall / X. Shi, J.M. Khodadadi // Journal of Heat Transfer. – 2003. – Vol. 125. – No. 4. – P. 624–634.
6. Bilgen E. Natural convection in cavities with a thin fin on the hot wall / E. Bilgen // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2005. – Vol. 48. – P. 3493–3505.
7. Ambarita H. Laminar natural convection heat transfer in an air filled square cavity with two insulated baffles attached to its horizontal walls / H. Ambarita, K. Kishinami, M. Daimaruya, T. Saitoh, H. Takahashi, J. Suzuki // Thermal Science & Engineering. – 2006. – Vol. 14. – No. 3. – P. 35–46.
8. Ben-Nakhi A. Conjugate natural convection in a square enclosure with inclined thin fin of arbitrary length / A. Ben-Nakhi, A. J. Chamkha // International Journal of Thermal Sciences. – 2007. – Vol. 46. – No. 5. – P. 467–478.
9. Varol Y. Experimental and numerical study on laminar natural convection in a cavity heated from bottom due to an inclined fin / Y. Varol, H. F. Oztop, F. Ozgen, A. Koca // Heat Mass Transfer. – 2012. – Vol. 48. – No. 1. – P. 61–70.

10. A. Elatar, M. A. Teamah, M. A. Hassab. Numerical study of laminar natural convection inside square enclosure with single horizontal fin / A. Elatar, M. A. Teamah, M. A. Hassab // International Journal of Thermal Sciences. – 2016. – Vol. 99. – P. 41–51.
11. Bondareva N. S. Conjugate heat transfer in the PCM-based heat storage system with finned copper profile: Application in electronics cooling / N. S. Bondareva, M. A. Sheremet // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2018. – Vol. 124. – P. 1275–1284.
12. Bondareva N. S. Heat transfer inside cooling system based on phase change material with alumina nanoparticles / N. S. Bondareva, B. Buonomo, O. Manca, M. A. Sheremet // Applied Thermal Engineering. – 2018. – Vol.144. – P. 972–981.
13. Prakash R. Natural convective solar dryer powered by stepped fin plate integrated trough array solar air heater for agricultural produce preservations / R. Prakash , R. Kamatchi // Solar energy. – 2024. – Vol. 271, 112415.
14. Hickie-Bentzen A. Parametric investigation of internal Y-shaped fin confgurations under natural convection in a concentric annulus / A. Hickie-Bentzen, M. Elsharqawy, S. H. Tasnim, S. Mahmud // Results in Engineering. – 2022. – Vol. 16, 100692.
15. Karlapalem V. On the enhancement of natural convection heat transfer with multi-branching fins / V. Karlapalem, S. K. Dash // International Journal of Thermal Sciences. – 2023. – Vol. 183, 107868.
16. Liu F. Natural convection characteristics of honeycomb fin with different hole cells for battery phase-change material cooling systems / F. Liu, J. Wang, Y. Liu, F. Wang, Y. Chen, Q. Du, F. Sun, N. Yang // Journal of Energy Storage. – 2022. – Vol. 51, 104578.
17. Hidki R. Analysis of mixed convection and surface radiation in a horizontal channel containing different fnned heat-generating blocks / R. Hidki, L. E. Moutaouakil, M. Boukendil, Z. Charqui, B. Jamal // Thermal Science and Engineering Progress. – 2024. – Vol. 48, 102370.

18. Jamy R.H. Analyzing overall thermal behaviour of conjugate MHD free convection in *L*-shaped chamber with a thick fin / R.H. Jamy, S. Chowdhury, F. K. Chowdhury, S. Saha // Case Studies in Thermal Engineering. – 2023. – Vol. 48, 103137.
19. Fahad M. K. Comparative analysis on melting performance of PCM using rectangular and branching fin confgurations in a shell and tube type thermal energy storing unit / M. K. Fahad, S. Subah, N. F. Ifraj, S. H. Tahsin, T. R. Alvi, Md. J. Hasan // Journal of Energy Storage. – 2024. – Vol. 91, 112048.
20. Shehzad S.A. Influence of fin orientation on the natural convection of aqueous-based nano-encapsulated PCMs in a heat exchanger equipped with wing-like fins / S.A. Shehzad, B. Alshuraiaan, M. S. Kamel, M. Izadi, T. Ambreen // Chemical Engineering & Processing: Process Intensifcation. – 2021. – Vol. 160, 108287.
21. George N. F. Natural convection in a cavity with fins attached to both vertical walls / N. F. George // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. – 1993. – Vol. 7. – P. 555–560.
22. Frederick R. L. Natural convection in an inclined square enclosure with a partition attached to its cold wall / R. L. Frederick // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1989. – Vol. 32. – P. 87–94.
23. Frederick R. L. Heat transfer in a square cavity with a conducting partition on its hot wall / R. L. Frederick, A. Valencia // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 1989. – Vol. 16. – P. 347–354.
24. Konar D. Numerical analysis of 2-D laminar natural convection heat transfer from solid horizontal cylinders with longitudinal fins / D. Konar, M. A. Sultan, S. Roy // International Journal of Thermal Sciences. – 2020. – Vol. 154, 106391.
25. Shahabadi M. Controlling the natural convection of a non-Newtonian fluid using a flexible fin / M. Shahabadi, S.A.M. Mehryan, M. Ghalambaz and M. Ismael // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – Vol. 92. – P. 669-686.

26. El Moutaouakil L. Natural convection and surface radiation heat transfer in a cavity with vertically oriented fins / L. El Moutaouakil, M. Boukendil, Z. Zrikem, A. Abdelbaki // Materials Today: Proceedings. – 2020. – Vol. 27. – P. 3051–3057.
27. Nguyen T. B. Enhancement of convective heat transfer using magnetically flapping fin array / T. B. Nguyen, D. Liu, H. Raut, A. Sharma, T. Tran // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2021. – Vol. 129, 105638.
28. Hidki R. Impact of Cu,Al_2O_3-water hybrid nanofluid on natural convection inside a square cavity with two heat-generating bodies / R. Hidki, L. El Moutaouakil, M. Charqui, Z. Zrikem, A. Abdelbaki // Materials Today: Proceedings. – 2023. – Vol. 72. – P. 3749–3756.
29. Sadeghi H. M. Unsteady natural convection of water adjacent to the sidewall of a differentially heated cavity with multiple fins / H. M. Sadeghi, M. Mohammadpour, M. Babayan, A. Sojoudi, A. J. Chamkha // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2020. – Vol. 116, 104642.
30. Zhang C. N. Temperature distribution of conductive-convective-radiative fins with temperature-dependent thermal conductivity / C. N. Zhang, X. F. Li // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2020. – Vol. 117, 104799.
31. Da Silva A.K. On the thermal performance of an internally finned 3D cubic enclosure in natural convection / A. K. Da Silva, L. Gosselin // International Journal of Thermal Sciences. – 2005. – Vol. 44. – P. 540–546.
32. Frederick R. L. Three-dimensional natural convection in finned cubical enclosures / R. L. Frederick, Moraga S. G // International Journal of Heat and Fluid Flow. – 2007. – Vol. 28. – P. 289–298.
33. Li D. Natural convection melting in a cubic cavity with internal fins: A lattice Boltzmann study / D. Li, Z. Yu // Case Studies in Thermal Engineering. – 2021. – Vol. 25, 100919.
34. Huang C.-H. An optimum design for a natural convection pin fin array with orientation consideration / C.-H. Huang, Y.-T. Wu // Applied Thermal Engineering. – 2021. – Vol. 188, 116633.

35. Rao A. K. Heat transfer of a tapered fin heat sink under natural convection / A. K. Rao, V. Somkuwar // Materials Today: Proceedings. – 2021. – Vol. 46. – P. 7886-7891.
36. Lee Y. J. Thermal optimization of the pin-fin heat sink with variable fin density cooled by natural convection / Y. J. Lee, S. J. Kim // Applied Thermal Engineering. – 2021. – Vol. 190, 116692.
37. El Ghandouri I. Design and Numerical Investigations of Natural Convection Heat Transfer of a New Rippling Fin Shape / I. El Ghandouri, A. El Maakoul, S. Saadeddine, M. Meziane // Applied Thermal Engineering. – 2020. – Vol. 178, 115670.
38. Siddhartha. Thermal performance of a wavy annular fnned horizontal cylinder in natural convection for electronic cooling application / Siddhartha, S. Rath, S. K. Dash // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2021. – Vol. 128, 105623.
39. Adhikari R. C. Characteristics of thermal plume from an array of rectangular straight fins with openings on the base in natural convection / R. C. Adhikari, M. Pahlevani // International Journal of Thermal Sciences. – 2022. – Vol. 182, 107798.
40. Chang S.-W. Numerical study of oblique fins under natural convection with experimental validation / S.-W. Chang, A. Sadeghianjahromi, W.-J. Sheu, C.-C. Wang // International Journal of Thermal Sciences. – 2022. – Vol. 179, 107668.
41. Ding Y. Experimental and numerical investigation on natural convection heat transfer characteristics of vertical 3-D externally finned tubes / Y. Ding, W. Zhang, B. Deng, Y. Gu, Q. Liao, Z. Long, X. Zhu // Energy. – 2022. – Vol. 239, 122050.
42. Li B. Experimental and numerical study on the heat sink with radial fins and a concentric ring subject to natural convection / B. Li, C. Byon // Applied Thermal Engineering. – 2015. – Vol. 90. – P. 345–351.
43. Chen H.-T. Numerical study on natural convection heat transfer of annular finned tube heat exchanger in chimney with experimental data / H.-T. Chen, H.-Y. Chou,

H.-C. Tseng, J.-R. Chang // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2018. – Vol. 127. – P. 483–496.

44. Karami M. Experimental study of natural convection from an array of square fins / M. Karami, M. Yaghoubi, A. Keyhani // Experimental Thermal and Fluid Science. – 2018. – Vol. 93. – P. 409–418.
45. Zhang K. Experimental and numerical investigation of natural convection heat transfer of W-type fin arrays / K. Zhang, M.-J. Li, F.-L. Wang, Y.-L. He // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2020. – Vol. 152, 119315.
46. Bayrak F. Effects of different fin parameters on temperature and efficiency for cooling of photovoltaic panels under natural convection / F. Bayrak, H. F. Oztop, F. Selimefendigil // Solar Energy. – 2019. – Vol. 188. – P. 484–494.
47. Lewis R. W. Numerical methods in heat transfer. R. W. Lewis, K. Morgan, B. A. Schrefler. – Vol. 2, Chichester.
48. Malan A. G. An artificial compressibility CBS method for modelling heat transfer and fluid flow in heterogeneous porous materials / A. G. Malan, R. W. Lewis // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2011. – Vol. 87. – P. 412–423.
49. Sahaya A. J. Unsteady MHD mixed convection flow of water over a sphere with mass transfer / A. J. Sahaya, P. Saikrishnan, R. W. Lewis // Journal of Applied and Computational Mechanics. – 2021. – Vol. 7. – P. 935–943.
50. Le Breton P. Natural convection in a square cavity with thin porous layers on its vertical walls / P. Le Breton, J. P. Caltagirone, E. Arquis // Journal of Heat Transfer. – 1991. – Vol. 113. – P. 892–898.
51. Alshuraiaan B. The effect of the position of the heated thin porous fin on the laminar natural convection heat transfer in a differentially heated cavity / B. Alshuraiaan, K. Khanafer // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2016. Vol. 78. – P. 190–199.
52. Khanafer K. Laminar natural convection heat transfer in a differentially heated cavity with a thin porous fin attached to the hot wall / K. Khanafer, A. AlAmiri, J.

Bull // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2015. – Vol. 87. – P. 59–70.

53. Sadeghi S. Temperature distribution in porous fins in natural convection condition / S. Sadeghi // Middle East Journal of Scientific Research. – 2013. – P. 812–817.
54. Asl A. K. Comprehensive investigation of solid and porous fins influence on natural convection in an inclined rectangular enclosure / A. K. Asl, S. Hossainpour, M. M. Rashidi, M. A. Sheremet, Z. Yang // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2018. – Vol. 133. – P. 729–744.
55. Varol Y. Natural convection in porous triangular enclosures with a solid adiabatic fin attached to the horizontal wall / Y. Varol, H. F. Oztop, A. Varol // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2007. – Vol. 34. – No. 1. – P.19–27.
56. Varol Y. Effects of thin fin on natural convection in porous triangular enclosures / Y. Varol, H.F. Oztop, A. Varol // International Journal of Thermal Sciences. – 2007. – Vol. 46. – No. 10. – P. 1033-1045.
57. Beckermann C. Natural convection flow and heat transfer between a fluid layer and a porous layer inside a rectangular enclosure / C. Beckermann, S. Ramadhyani, R. Viskanta // Journal of Heat Transfer. – 1987. – Vol. 109. – P. 363–370.
58. Beckermann C. Natural convection in vertical enclosures containing simultaneously fluid and porous layers / C. Beckermann, R. Viskanta, S. Ramadhyani // Journal of Fluid Mechanics. – 1988. – Vol. 186. – P. 257–284.
59. Kim G. B. Buoyant convection in a square cavity partially filled with a heat-generating porous medium / G. B. Kim, J. M. Hyun, H. S. Kwak // Numerical Heat Transfer. – 2001. – Vol. 40. – P. 601–618.
60. Sheremet M. A. Thermo-Bioconvection in a square porous cavity filled by oxytactic microorganisms / M.A. Sheremet, I. Pop // Transport in Porous Media. – 2014. – Vol. 103. – No. 2. – P. 191–205.
61. Kiwan S. Using porous fins for heat transfer enhancement / S. Kiwan, M.A. Al-Nimr // Journal of Heat Transfer. – 2001. – Vol. 123. – P. 790–795.

62. Sheikholeslami M. Free convection of magnetic nanofluid considering MFD viscosity effect / M. Sheikholeslami, M. M. Rashidi, T. Hayat, D. D. Ganji // Journal of Molecular Liquids – 2016. – Vol. 218. – P. 393–399.
63. Rashidi M. M. Buoyancy effect on MHD flow of nanofluid over a stretching sheet in the presence of thermal radiation / M. M. Rashidi, N. V. Ganesh, A. K. A. Hakeem, B. Ganga // Journal of Molecular Liquids. – 2014. – Vol. 198. – P. 234–238.
64. Rashidi M. M. Entropy generation in steady MHD flow due to a rotating porous disk in a nanofluid / M. M. Rashidi, S. Abelman, N. F. Mehr // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2013. – Vol. 62. – P. 515–525.
65. Al-Kouz W. Two dimensional analysis of low-pressure flows in an inclined square cavity with two fins attached to the hot wall / W. Al-Kouz, A. Alshare, S. Kiwan, A. Al-Muhtady, A. Alkhalidi, H. Saadeh // International Journal of Thermal Sciences. – 2018. – Vol. 126. – P. 181–193.
66. Rashidi M. M. Analytic approximate solutions for heat transfer of a micropolar fluid through a porous medium with radiation / M.M. Rashidi, S.A. Mohimanian pour, S. Abbasbandy // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2011. – Vol. 16. – P. 1874–1889.
67. Hassan H. N. An analytic solution of micropolar flow in a porous channel with mass injection using homotopy analysis method / H.N. Hassan, M.M. Rashidi // International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow. – 2014. – Vol. 24. – No. 2. – P. 419–437.
68. Rashidi M. M. A study on heat transfer in a second grade fluid through a porous medium with the modified differential transform method / M.M. Rashidi, T. Hayat, T. Keimanesh, H. Yousefian // Heat Transfer-Asian Research. – 2013. – Vol. 42. – No. 1. – P. 31–45.
69. Метод гомотопического анализа – Homotopy analysis method. URL: https://ru.qaz.wiki/wiki/Homotopy_analysis_method.
70. Turkyilmazoglu M. A note on the homotopy analysis method / M. Turkyilmazoglu // Applied Mathematics Letters. – 2010. – Vol. 23. – No. 10. – P. 1226-1230.

71. S. Kiwan. Thermal analysis of natural convection porous fins / S. Kiwan // Transport in porous media. – 2007. – Vol. 17. – P. 67.
72. Keramat F. A CFD parametric analysis of natural convection in an H-shaped cavity with two-sided inclined porous fins / F. Keramat, A. Azari, H. Rahideh, M. Abbas // Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers. – 2020. – Vol. 114. – P. 142-152.
73. Saleh H. Effects of flexible fin on natural convection in enclosure partially-filled with porous medium / H. Saleh, I. Hashim, E. Jamesahar, M. Ghalambaz // Alexandria Engineering Journal. – 2020. – Vol. 59. – P. 3515–3529.
74. S. Kiwan. An experimental investigation of the natural convection heat transfer from a vertical cylinder using porous fins / S. Kiwan, H. Alwan, N. Abdelal // Applied Thermal Engineering. – 2020. – Vol. 179, 115673.
75. Sobamowo M. G. Thermal performance analysis of a natural convection porous fin with temperature-dependent thermal conductivity and internal heat generation / M. G. Sobamowo, O. M. Kamiyo, O. A. Adeleye // Thermal Science and Engineering Progress. – 2017. – Vol. 1. – P. 39–52.
76. Mosayebidorcheh S. Optimization analysis of convective–radiative longitudinal fins with temperature-dependent properties and different section shapes and materials / S. Mosayebidorcheh, M. Hatami, T. Mosayebidorcheh, D. D. Ganji // Energy Conversion and Management. – 2015. – Vol. 106. – P. 1286–1294.
77. Esfe M. H. A 3D numerical study on natural convection flow of nanofluid inside a cubical cavity equipped with porous fins using two-phase mixture model / M. H. Esfe, R. Barzegarian, M. Bahiraei // Advanced Powder Technology. – 2020. – Vol. 31. – P. 2480–2492.
78. Zoman A. V. Heat transfer enhancement using fins with perforation: a review/ A.V. Zoman, D. D. Palande // International journal of engineering sciences & research technology. – 2016.
79. Sathe A. Investigation of thermal performance of modified vertical rectangular fin array in free convection using experimental and numerical method / A. Sathe, S.

Sanap, S. Dingare, N. Sane // Experimental Thermal and Fluid Science. – 2015. – Vol. 68. – P. 145–154.

80. Awasarmol U. V. An experimental investigation of natural convection heat transfer enhancement from perforated rectangular fins array at different inclination / U. V. Awasarmol, A. T. Pise // Experimental Thermal and Fluid Science. – 2015. – Vol. 68. – P. 145–154.

81. Khomane G. Enhancement of Heat Transfer by Natural Convection from Discrete Fins / S. G. Khomane, A. T. Pise. A. R. Udare // International Engineering Research Journal. – 2015. – P. 73–77.

82. Huang G.-J. Enhancement of natural convection heat transfer from horizontal rectangular fin arrays with perforations in fin base / G.-J. Huang, S.-C. Wong, C.-P. Lin // International Journal of Thermal Sciences. – 2014. – Vol. 84 – P. 164–174.

83. Pankaj S. Experimental Investigation of Heat Transfer by Natural Convection with Perforated Pin Fin Array / S. Pankaj, B. Santosh, K. Kishor, J. Sarang // 2nd International Conference on Materials Manufacturing and Design Engineering. – 2018. – P. 311–317.

84. Ahmadi M. Natural convection from rectangular interrupted fins / M. Ahmadi, G. Mostafavi, M. Bahrami // International Journal of Thermal Sciences. – 2014. – Vol. 82. – P. 62–71.

85. Wadhah H. Enhancement of Natural Convection Heat Transfer from the Rectangular Fins by Circular Perforations / H. Wadhah // International Journal of Automotive and Mechanical Engineering. – 2011. – Vol.82. – P. 428–436.

86. Muthuraja C. S. Experimental study of the perforated rectangular fins by natural convection / C. S. Muthuraja, Aravindkumar, P. Hanoca // International Journal of Advanced Technology in Engineering and Science. – 2015. – Vol. 3. – P. 2348–7550.

87. Raaid R. J. Effect the form of perforation on the heat transfer in the perforated fins / R. J. Raaid // Academic Research International. – 2013. – Vol. 4. – P. 198–207.

88. Hussein M.A. An implementation study on a heat sink with different fin confgurations under natural convective conditions / M.A. Hussein, V.M. Hameed, H.T. Dhaiban // Case Studies in Thermal Engineering. – 2022. – Vol. 30, 101774.
89. Karlapalem V. Design of perforated branching fns in laminar natural convection / V. Karlapalem, S. K. Dash // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2021. – Vol. 120, 105071.
90. Ding P. Numerical investigation of natural convection enhancement in latent heat energy storage units with punched-fin and slit-fin / P. Ding, Z. Liu // International Journal of Thermal Sciences. – 2021. – Vol. 163, 106834.
91. Sathe A. Investigation of thermal performance of modified vertical rectangular fin array in free convection using experimental and numerical method / A. Sathe, S. Sanap, S. Dingare, N. Sane // Materials Today: Proceedings. – 2021. – Vol. 38. – P. 2281–2290.
92. Duffin R. A variational problem relating to cooling fins / R. Duffin // Journal of Mathematics and Mechanics. – 1959. – Vol. 8. – P. 47–56.
93. Jany P. Ernst Schimidt’s approach to fin optimization: an extension to fins with variable conductivity and the design of ducts for fluid flow / P. Jany, A. Bejan // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1988. – Vol. 31. – P. 1635–1644.
94. A. Bejan. Convection heat transfer, John Wiley and Sons, New York.
95. Snider A. D. The quest for the optimum longitudinal fin profile / A. D. Snider, A. D. Kraus // Heat Transfer Engineering. – 1986. – Vol. 64. – P. 43–48.
96. Poulikakos D. Fin geometry for minimum entropy generation in forced convection / D. Poulikakos, A. Bejan // Journal of Heat Transfer. – Vol. 104. – P. 616–623.
97. Irey R. K. Errors in the one-dimentional fin solution / R. K. Irey // Journal of Heat Transfer. – 1968. – Vol. 90. – P. 175–176.
98. Lau W. Errors in one-dimensional heat transfer analyses in straight and annular fins / W. Lau and C. W. Tan // Journal of Heat Transfer. – 1973. – Vol. 95. – P. 549–551.
99. Stachiewicz J. W. Effect of variation of local film coefficient on fin performance / J. W. Stachiewicz // Journal of Heat Transfer. – 1969. – Vol. 91. – P. 21-26.

100. Razelos P. Two-Dimensional Fin Performance: Bi (Top Surface) > Bi (Bottom Surface) / P. Razelos, R. Krikkis // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2004. – Vol. 31. – No. 2. – P. 203-210.
101. Михаил Шеремет. Сопряженные задачи естественной конвекции. Замкнутые области с локальными источниками тепловыделения.
102. Nithiarasu P. Natural convective heat transfer in a fluid saturated variable porosity medium / P. Nithiarasu, K. N. Seetharamu, T. Subdararajan // International Journal of Thermal Sciences. – 1997. – Vol. 40– P. 3955-3967.
103. Singh A. K. Natural convection in a confined fluid overlying a porous layer – a comparison study of different models / A.K.Singh, G.R.Thorpe // Indian Journal of Pure and Applied Mathematics. – 1995. – Vol. 26. – P. 81–95.
104. Yedder R. B. Laminar natural convection in inclined enclosures bounded by a solid wall / R. B. Yedder, E. Bilgen // Heat and Mass Transfer. – 1997. – Vol. 32. – P. 455–462.
105. Гинкин В.П. Метод и программа расчета трехмерной конвекции на сетках большой размерности / В. П. Гинкин, С. М. Ганина // Труды 3 Российской национальной конференции по теплообмену. – Москва, 2002. – Т. 3. – С. 49–52.
106. Bessonov O.A. Threedimensional natural convection in a cubical enclosure: a benchmark numerical solution /O. A. Bessonov, V. A. Brailovskay, S. A. Nikitin, V. I. Polezhaev // Proceedings of Int. Symposium on Advances in Computational Heat Transfer. – Turkey, 1997. – P. 157–165.
107. Fusegi T. A numerical study of 3D natural convection in a differently heated cubical enclosure / T. Fusegi, J.M. Hyin, K. Kuwahara // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1991. – Vol. 34. – P. 1543–1557.
108. Артемьев В.К. Численное моделирование трехмерной естественной конвекции в кубической полости / В. К. Артемьев, М.М. Рожков // Труды XIII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева “Физические основы экспериментального и математического моделирования процессов газодинамики и

тепломассообмена в энергетических установках”. – Санкт-Петербург, 2001. – Т.1. – С. 153–157.

109. Kramer J. A numerical study of three-dimensional natural convection in a differentially heated cubical enclosure / J. Kramer, J. Ravnik, R. Jecl, L. Skerget // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2011. – Vol. 35. – P. 1256–1264.