

РЕДУКЦИЯ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ

НЕЧАЕВ В. К.

Профессор, доктор технических наук

Как известно, первым этапом каждого расчета вибраций вала силовой установки с двигателем внутреннего сгорания является определение характеристик так называемой эквивалентной, или приведенной, системы. Эта система, состоящая обычно из ряда сосредоточенных („точечных“) масс, соединенных между собою отрезками гладкого безмассового вала, по своим вибрационным характеристикам должна быть равноценной действительному валопроводу установки.

Сохранение в эквивалентной схеме распределенных масс обычно нецелесообразно, так как приводит к значительному усложнению всех дальнейших расчетов. Введение таких распределенных масс может быть рекомендовано лишь в установках с очень длинным валом (некоторые судовые установки), а также при расчетах собственных частот колебаний валов двигателей с большим числом цилиндров [4, 6, 9].

Подсчет характеристик эквивалентной системы производится по известным правилам и формулам [1, 5, 8], полученным как теоретическим, так и экспериментальным путем. Данные эксперимента в особенности необходимы при определении жесткости колена коленчатого вала, так как теоретический анализ деформаций колена, возникающих при его скручивании, очень сложен и дает результаты, плохо согласующиеся с опытом.

В результате проведения подобных расчетов силовая установка, состоящая, например, из m -цилиндрового рядного двигателя, маховика и динамо, сводится к системе, состоящей из $m + 2$ сосредоточенных масс, соединенных между собою $m + 1$ кусками упругого и безинертного, то есть безмассового, вала. Моменты инерции всех этих масс, а также и жесткость всех участков вала определены конкретными числами.

Теперь, по крайней мере в общем случае, анализ вибраций такой системы может быть сведен к решению системы неоднородных дифференциальных уравнений, число которых равно числу масс $m + 2$. Вид и характер этих уравнений определяются как конкретными особенностями исследуемой колеблющейся системы, так и, в значительной степени, характером демпфирующих сил, противодействующих развитию колебаний.

Но решение подобной системы уравнений, даже для установки с небольшим числом масс, представляет исключительные трудности и едва ли практически может быть доведено до конца не только в общем, но и в конкретном числовом виде.

Для сокращения всех выкладок и расчетов, связанных с исследованием вибраций коленчатого вала многоцилиндрового ДВС, целесообразно возможно большее упрощение сложной приведенной многомассовой системы путем сведения ее к системе с меньшим числом масс. Характер и форма этой новой, уже упрощенной, редуцированной системы определяется как задачами дальнейших расчетов, так и положенными в основу редукции условиями эквивалентности.

Так, широко известен элементарный прием [7], с помощью которого можно расчет собственных частот многомассовой системы приближенно свести к определению собственной частоты двух-или трехмассовой системы. Этим задача кропотливого определения корней частотного (векового) уравнения, сводится к применению элементарно простых формул для частоты системы с двумя или тремя массами. В основе этого приема лежит замена всех приведенных масс цилиндров двигателя одной суммарной массой, сосредоточенной на середине длины коленчатого вала.

Иное сокращение числа масс рассчитываемой системы было, напр., применено нами ранее, в работе „Графический метод определения частот собственных колебаний“ [4]. Там было показано, что при свободных колебаниях многомассовой системы сумма инерционных моментов (т. е. моментов сил инерции) всех масс двигателя равна инерционному моменту некоторой фиктивной, воображаемой массы, имеющей момент инерции Θ/D_m и приложенной на месте последней, m -ой массы двигателя. Коэффициент D_m является переменной величиной и при заданных моментах инерции Θ всех масс установки, а также при известной жесткости всех участков вала зависит только от характера кривой формы колебаний системы и, следовательно, от угловой частоты колебаний. Числовые значения D_m для различного числа цилиндров двигателя и различных значений параметра A , характеризующего частоту колебаний, приведены в работе автора [3].

Теперь, например, установка двигатель—маховик сводится всего лишь к двухмассовой системе, кривая формы свободных колебаний которой совпадает с кривой формы свободных колебаний основной двухмассовой системы на участке между последней массой двигателя и маховиком (рис. 1).

Конкретно это значит, что инерционный момент всех масс двигателя равен инерционному моменту приведенной массы Θ_r , если амплитуда колебания φ_r ее равна амплитуде колебания φ_m последней массы двигателя. При свободных колебаниях рассматриваемой основной системы двигатель—маховик соотношение амплитуд φ_m и φ_r равно соотношению моментов инерции Θ_1 и Θ_r .

Подобное приведение, удовлетворяя условию равенства суммарного инерционного момента всех масс двигателя и инерционного момента редуцированной массы Θ_r , вполне достаточно для расчетов свободных колебаний, но уже не может удовлетворить нас при анализе вынужденных колебаний, в особенности при изучении вопросов развития, напр., резонансных вибраций. Данная редукция масс, обеспечивая одинаковую частоту свободных собственных колебаний обеих систем (действительной по рис. 1-а и редуцированной по рис. 1-б) не дает их равноценности по ряду других динамических характеристик.

Положим, что при свободных колебаниях обеих систем a и b амплитуды колебания маховиков φ_1 одинаковы, следовательно и амплитуда φ_m последней массы двигателя равна амплитуде φ_1 редуцированной массы с моментом инерции Θ_r .

В момент наибольшего отклонения масс первая система имеет потенциальную энергию

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} c_{i,i+1} (\varphi_i - \varphi_{i+1})^2 + \frac{1}{2} c_{m1} (\varphi_m - \varphi_1)^2,$$

а вторая, редуцированная система,

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} c_{m1} (\varphi_m - \varphi_1)^2.$$

Очевидно, что

$$\Pi_1 < \Pi.$$

Аналогичное соотношение

$$T_1 < T$$

можно было бы получить и в отношении кинетических энергий T и T_1 , соответственно действительной и редуцированной систем.

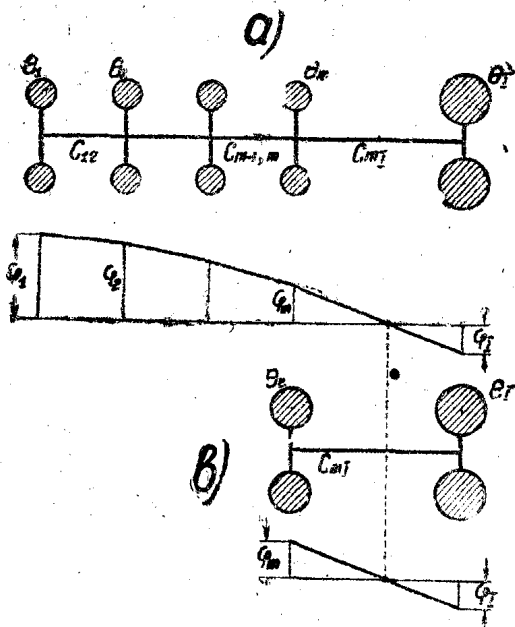


Рис. 1

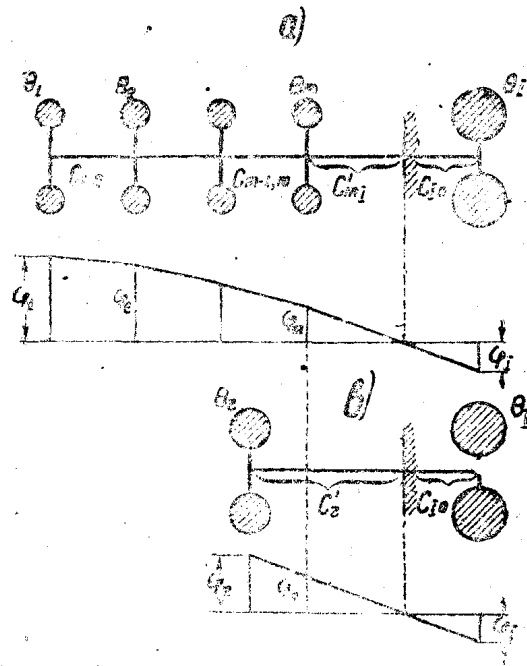


Рис. 2

Таким образом, обе наши системы неравноценны между собою с точки зрения их кинетической и потенциальной энергии в любой момент времени. Ясно, что поведение этих систем, в условиях, напр., получения одинаковой работы возбуждения за один цикл колебания, будет различным.

Заменим всю левую часть основной системы, расположенную левее узла колебания (мы рассматриваем здесь лишь колебания одноузлового типа) одной сосредоточенной массой с моментом инерции θ_T (рис. 2), расположенной где-то левее последней, m -ой массы двигателя. Обозначим через c'_2 жесткость участка вала между этой сосредоточенной массой и узлом колебания.

Теперь левая редуцированная одномассовая система (рис. 2-б) будет вполне эквивалентна левой части основной многомассовой системы (рис. 2-а) по всем основным динамическим показателям, если только в любой момент времени окажутся выполненными следующие условия:

а) левые половины обеих систем (рис. 2-а и 2-б) должны иметь одинаковые частоты собственных колебаний ω , равные, конечно, собственной частоте ω_0 основной многомассовой системы двигатель—маховик; это важно, например, для того, чтобы в дальнейшем иметь совершенно эквивалентную оценку обеих систем в отношении удаленности их от резонансного состояния или близости к нему;

б) обе системы должны в каждый момент времени иметь соответственно одинаковые величины кинетической и потенциальной энергии; это необходимо для обеспечения эквивалентности обеих систем, напр., в условиях развития нестационарных вибраций;

в) при одинаковых амплитудах маховиков I в обеих системах узловые участки вала должны быть нагружены одинаковыми скручивающими моментами, то-есть упругая линия на этих участках вала обеих систем должна иметь одинаковый угол наклона к оси вала; это необходимо для обеспечения равноценности обеих систем с точки зрения нагрузок, возникающих в валу установки во время вибраций;

г) в условиях одинаковой загрузки узловых участков вала работа возбуждения, совершаемая, например, какой-либо гармоникой суммарного крутящего момента в двигателе, должна быть одинакова в обеих системах;

д) наконец, в этих же условиях должна быть одинакова в обеих системах и потеря энергии на демпфирование за один цикл колебания.

Последние два условия, по существу своему, имеют совершенно самостоятельный характер и должны быть удовлетворены особо, при установлении соответствующей методики приведения возбуждающих и демпфирующих сил во всей основной системе. Первые три из названных выше условий целиком определяют главные характеристики редуцированной двухмассовой системы θ_r, C_r, φ_r (рис. 2—b).

Рассматривая левую часть этой системы, в соответствии с первым условием имеем

$$\frac{c_r'}{\Theta_r} = \omega_0^2. \quad (1)$$

Кинетическая энергия левой части основной системы

$$T = \frac{1}{2} \omega_0^2 \sum_{i=1}^{i=m} \Theta_i \varphi_i^2,$$

(мы предполагаем здесь свободные, моногармонические колебания) и кинетическая энергия левой половины редуцированной двухмассовой системы

$$T_1 = \frac{1}{2} \omega_0^2 \Theta_r \varphi_r^2.$$

Условие эквивалентности, сформулированное выше, в пункте „б“, требует выполнения равенства

$$T_1 = T,$$

т. е.

$$\frac{1}{2} \omega_0^2 \sum_{i=1}^m \Theta_i \varphi_i^2 = \frac{1}{2} \omega_0^2 \Theta_r \varphi_r^2,$$

или

$$\sum_{i=1}^m \Theta_i \varphi_i^2 = \Theta_r \varphi_r^2 \quad (2)$$

(здесь под φ можно понимать мгновенные углы отклонения соответствующих масс).

Аналогично запишем выражения для потенциальной энергии левых частей соответственно основной многомассовой и редуцированной двухмассовой систем

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m c_{i,i+1} (\varphi_i - \varphi_{i+1})^2,$$

где по рис. 2-а

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{m+1} &= 0, \\ c_{m, m+1} &= c_{m1}' \\ \Pi_1 &= \frac{1}{2} c_r' \cdot \varphi_r^2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и

Отсюда на основании того же условия пункта „в“

$$\Pi_1 = \Pi,$$

или

$$\sum_{i=1}^m c_{i, i+1} (\varphi_i - \varphi_{i+1})^2 = c_r' \varphi_r^2, \quad (4)$$

где сохраняют силу равенства (3).

Далее из условия п. „в“ имеем

$$\varphi_r c_r' = \varphi_m c_{m1}'. \quad (5)$$

Геометрически это последнее соотношение формулирует естественное требование отсутствия излома в упругой линии вала редуцированной двухмассовой системы в точке перехода ее через узел колебания.

Условие а и формула (1) не являются самостоятельными и целиком вытекают из очевидного и обязательного, в условиях гармонических незатухающих колебаний, равенства экстремальных значений Π и T в каждой системе, на протяжении каждого цикла. В самом деле, для левой части основной системы имеем следующие выражения максимальных кинетической и потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} T_{max} &= \frac{1}{2} \omega_0^2 \sum_{i=1}^m \Theta_i \varphi_i^2, \\ \Pi_{max} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m c_{i, i+1} (\varphi_i - \varphi_{i+1})^2, \\ T_{max} = \Pi_{max} &= \frac{1}{2} \omega_0^2 \sum_{i=1}^m \Theta_i \varphi_i^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m c_{i, i+1} (\varphi_i - \varphi_{i+1})^2, \end{aligned}$$

если здесь под φ понимать уже амплитуды колебания соответствующих масс. Отсюда угловая частота свободных колебаний основной многомассовой системы

$$\omega_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^m c_{i, i+1} (\varphi_i - \varphi_{i+1})^2}{\sum_{i=1}^m \Theta_i \varphi_i^2} \quad (6)$$

при учете, конечно, соотношений (3).

Аналогично для левой части редуцированной двухмассовой системы

$$\Pi_{1max} = T_{1max} = \frac{1}{2} c_r' \varphi_r^2 = \frac{1}{2} \Theta_r \varphi_r^2 \omega_r^2$$

и ее собственная частота

$$\omega_r = \sqrt{\frac{c_r'}{\Theta_r}}$$

или, подставляя сюда значения c_r' и Θ_r из (4) и (2), получаем

$$\omega_r^2 = \omega_0^2.$$

Поэтому независимыми уравнениями, вытекающими из условий „а“, „б“, „в“, которыми можно воспользоваться для определения основных характеристик c_r' , Θ_r , φ_r редуцированной системы, являются лишь уравнения (4), (5) и (6).

Имеем из уравнений (4) и (5)

$$\sum_{i=1}^m c_{i, i+1} (\varphi_i - \varphi_{i+1})^2 = \varphi_m c'_{m1} \varphi_r,$$

и отсюда амплитуды колебания левой, редуцированной, массы на рис. 2-б

$$\varphi_r = \frac{\sum_{i=1}^m c_{i, i+1} (\varphi_i - \varphi_{i+1})^2}{\varphi_m \cdot c'_{m1}}, \quad (7)$$

где сохраняют силу соотношения (3).

Теперь из (2)

$$\Theta_r = \frac{\sum_{i=1}^m \Theta_i \varphi_i^2}{\varphi_r^2},$$

или, подставляя сюда значение φ_r из (7),

$$\Theta_r = \frac{\sum_{i=1}^m \Theta_i \varphi_i^2}{\sum_{i=1}^m c_{i, i+1} (\varphi_i - \varphi_{i+1})^2} \cdot \frac{(\varphi_m \cdot c'_{m1})^2}{\sum_{i=1}^m c_{i, i+1} (\varphi_i - \varphi_{i+1})^2}.$$

Отсюда, пользуясь (6), получаем выражение для момента инерции левой массы двухмассовой редуцированной системы

$$\Theta_r = \frac{(\varphi_m c'_{m1})^2}{\omega_0^2 \sum_{i=1}^m c_{i, i+1} (\varphi_i - \varphi_{i+1})^2}. \quad (8)$$

Далее, из (1)

$$c_r' = \Theta_r \omega_0^2,$$

или, согласно (8),

$$c_r' = \frac{\varphi_m^2 \cdot c'^2_{m1}}{\sum_{i=1}^m c_{i, i+1} (\varphi_i - \varphi_{i+1})^2}. \quad (9)$$

Так определяется жесткость c'_r участка вала редуцированной системы от левой массы до узла колебания (рис. 2-а). Здесь, конечно,

$$c_{m, m+1} = c_{m1},$$

$$\varphi_m = 0.$$

Наконец, жесткость c_r всего вала редуцированной двухмассовой системы может быть вычислена по очевидной формуле

$$\frac{1}{c_r} = \frac{1}{c'_r} + \frac{1}{c_{10}},$$

или

$$c_r = \frac{c'_r \cdot c_{10}}{c'_r + c_{10}}, \quad (10)$$

где c_{10} — жесткость участка вала основной многомассовой системы от узла колебания до маховика.

Формулами (7), (8), (10) целиком определяются основные характеристики редуцированной двухмассовой системы, эквивалентной действительной многомассовой системе в условиях резонансных колебаний, когда доста-

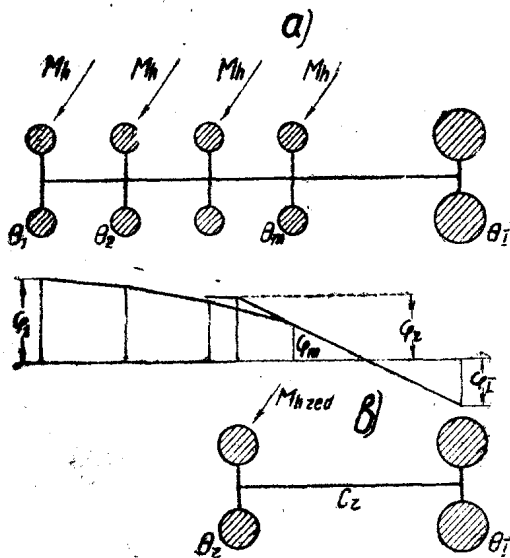


Рис. 3

точно справедливо обычное допущение о том, что при резонансе или вблизи него кривая формы вынужденных колебаний очень близка к форме свободных колебаний многомассовой системы без демпфирования [1, 2]. Входящие во все эти формулы амплитуды φ_i колебания отдельных масс рассматриваемой многомассовой системы могут быть найдены из расчета частот собственных колебаний, проведенного табличными методами, или значительно более быстро вычисляются по способу, изложенному автором в предыдущих его работах [3, 4]. Ясно, что в качестве числовых значений φ_i здесь могут быть использованы относительные амплитуды свободных колебаний, то-есть амплитуды колебания всех масс установки, вычисленные в предположении, что ам-

плитуда колебаний приведенной массы первого цилиндра (крайней левой массы на рис. 2-а) равна единице.

Теперь обратимся к рассмотрению указанных выше, на стр. 83 пунктов „г“ и „д“ условий, которым должна удовлетворять редуцированная двухмассовая система для возможности использования ее в расчетах вынужденных вибраций многомассовых систем.

Для обеспечения полной, не только „геометрической“, но и энергетической эквивалентности действительной и редуцированной систем по всем основным показателям необходимо провести еще редуцирование возбуждающих моментов и демпфирующих сил в рассматриваемой действительной многомассовой установке.

Пусть на приведенные массы цилиндров двигателя (рис. 3-а) действуют внешние возбуждающие гармонические крутящие моменты $M_h \sin(\gamma_h t + \epsilon_h)$ с угловой частотой γ_h . Конечно, следует предполагать, что эти моменты

в отдельных цилиндрах различны по фазе, в соответствии с порядком чередования вспышек в цилиндрах, тактностью двигателя и т. д.

Как известно [1, 3], работа всех этих гармонических моментов за один цикл колебаний в условиях резонанса может быть определена выражением

$$A_{\text{возб}} = \pi M_h \varphi_{1abc} \sum \varphi_{i \text{отн}}, \quad (11)$$

где, как обычно:

φ_{1abc} — абсолютная амплитуда колебаний первой массы системы, то-есть приведенной массы первого цилиндра двигателя,

$\sum \varphi_{i \text{отн}}$ — геометрическая сумма относительных амплитуд колебания приведенных масс всех работающих цилиндров двигателя, определяемая по фазовой диаграмме, построенной для возбуждающих моментов интересующего нас порядка.

Заменим все моменты M_h , действующие на приведенные массы цилиндров двигателя действительной установкой, одним равноценным им редуцированным моментом $M_{h \text{red}}$, приложенным к левой массе редуцированной двухмассовой системы (рис. 3-б).

Работа этого момента за цикл колебания:

$$A'_{\text{возб}} = \pi M_{h \text{red}} \varphi_{r \text{abc}},$$

где $\varphi_{r \text{abc}}$ — абсолютная амплитуда вынужденных колебаний левой массы системы по рис. 3-б.

Условие эквивалентности моментов M_h и $M_{h \text{red}}$

$$A_{\text{возб}} = A'_{\text{возб}}$$

или:

$$\pi M_h \varphi_{1abc} \sum \varphi_{i \text{отн}} = \pi M_{h \text{red}} \varphi_{r \text{abc}}.$$

Но, очевидно, можно записать следующую зависимость между $\varphi_{r \text{abc}}$, φ_{1abc} и $\varphi_{r \text{отн}}$:

$$\varphi_{r \text{abc}} = \varphi_{1abc} \cdot \varphi_{r \text{отн}}. \quad (12)$$

Подстановка этого значения для $\varphi_{r \text{abc}}$ в предыдущее выражение равенства работ возбуждения за цикл колебания дает, в итоге, следующее соотношение для подсчета амплитуды редуцированного возбуждающего момента, действующего на левую массу редуцированной двухмассовой системы:

$$M_{h \text{red}} = M_h \frac{\sum \varphi_{i \text{отн}}}{\varphi_{r \text{отн}}}, \quad (13)$$

причем входящая сюда $\varphi_{r \text{отн}}$ легко определяется из формулы (7), если только в последней, в правой ее части, понимать под φ соответствующие относительные амплитуды колебания, то-есть

$$\varphi_{r \text{отн}} = \frac{\sum_{i=1}^m c_{i, i+1} (\varphi_{i \text{отн}} - \varphi_{i+1, \text{отн}})^2}{\varphi_{m \text{отн}} \cdot c_{m1}}, \quad (14)$$

при учете равенства (3).

В дальнейшем все расчеты вынужденных вибраций мы будем проводить для редуцированной двухмассовой системы. Из таких расчетов может быть, например, найдена абсолютная резонансная амплитуда φ_{rabc} левой массы этой системы. После этого, пользуясь формулами (12) и (14), можно перейти уже к действительной многомассовой исходной системе и определить абсолютную амплитуду колебаний ее первой массы по формуле:

$$\varphi_{1abc} = \frac{\varphi_{rabc}}{\varphi_{r\text{отн}}} = \varphi_{rabc} \cdot \frac{\varphi_{m\text{отн}} \cdot C_{m1}}{\sum_{i=1}^m C_{i, i+1} (\varphi_{i, \text{отн}} - \varphi_{i+1, \text{отн}})^2} \quad (15)$$

Далее, по φ_{1abc} и известным из проведенного ранее расчета относительным амплитудам $\varphi_{i\text{отн}}$ легко подсчитываются абсолютные амплитуды колебания всех масс действительной установки, абсолютные углы закрутки каждого участка вала и соответствующие дополнительные вибрационные напряжения, возникающие в этом валу за счет вибраций.

Конечно, все это справедливо полностью пока лишь в отношении резонансных вибраций, то-есть вибраций вала, возникающих во время работы двигателя на одном из критических чисел оборотов. Но и эти подсчеты могут быть конкретно проведены только при учете демпфирующих сил в установке.

Рассмотрим основные случаи редуцирования демпфирующих сил. Предположим сначала, что в заданной конкретной установке демпфирующие силы имеются только в двигателе и практически полностью подчиняются обычному скоростному закону [1], [3]. Как известно, работа скоростного демпфирования во всем двигателе за один цикл колебания может быть определена выражением [3]:

$$A_{\text{демф}} = \pi k_0 F r^2 \omega \varphi_{1abc}^2 \sum_{i=1}^m \varphi_{i\text{отн}}^2, \quad (16)$$

где:

F — площадь поршня,

r — радиус кривошипа,

ω — угловая частота вынужденных колебаний,

$\sum_{i=1}^m \varphi_{i\text{отн}}^2$ — арифметическая сумма квадратов относительных амплитуд

колебания приведенных масс всех цилиндров двигателя,

k_0 — коэффициент скоростного демпфирования в двигателе.

Заменим все демпфирования в двигателе установки по рис. 3-а эквивалентным демпфированием с коэффициентом k_r , действующим на левую массу редуцированной двухмассовой системы по рис. 3-б. Этот приведенный коэффициент демпфирования определится из следующих соотношений, исходя из необходимого равенства величины потерь энергии на демпфирование за цикл колебания в обеих системах.

Предположим, что при колебаниях двухмассовой редуцированной системы левая ее масса колеблется, например, по следующему гармоническому закону:

$$(\varphi_{rabc}) = \varphi_{rabc} \sin \omega t,$$

где через (φ_{rabc}) мы обозначаем мгновенный угол отклонения массы, в отличие от амплитуды колебания φ_{rabc} . На эту массу действует демпфирующий момент

$$M_r = -k_r \frac{d(\varphi_{rabc})}{dt}.$$

Соответствующая работа, поглощенная этим моментом за цикл колебания,

$$\begin{aligned}
 A'_{\text{демпф}} &= \int_0^{t=2\pi/\omega_0} M_r d\varphi = \\
 &= \int_0^{t=2\pi/\omega} -k_r \varphi^2 r_{abc} \omega^2 \cos^2 \omega t dt = \pi k_r \omega \varphi_{rabc}^2.
 \end{aligned} \quad (17)$$

Приравнивая правые части выражений (16) и (17)

$$\pi k_0 F r^2 \omega \varphi_{1abc}^2 \sum_{i=1}^m \varphi_{iотн}^2 = \pi k_r \omega \varphi_{rabc}^2$$

и пользуясь соотношением (12), получаем окончательное выражение для приведенного коэффициента демпфирования k_r в редуцированной двухмассовой системе:

$$k_r = \frac{k_0 F r^2 \sum_{i=1}^m \varphi_{iотн}^2}{\varphi_{ромн}^2}. \quad (18)$$

Входящее сюда значение $\varphi_{iотн}$ определяется формулой (14).

Таким образом теперь система по рис. 3-а, состоящая из многоцилиндрового двигателя с маховиком, сводится к двухмассовой системе, где маховик I остается без изменения, а все массы двигателя заменены одной сосредоточенной массой с моментом инерции Θ_r (рис. 3-б). Эта новая приведенная или редуцированная система имеет:

- момент инерции левой массы Θ_r , определяемый формулой (8);
- жесткость соединительного вала C_r , определяемую формулой (10);
- приведенный возбуждающий момент $M_{h\text{ red}}$, действующий на левую массу (формула 13);
- приведенный коэффициент скоростного демпфирования k_r (формула 18);
- относительную амплитуду колебания φ_r левой массы, выраженную в долях амплитуды колебания левой крайней массы действительной установки и представленную формулой (14).

Моногармонический момент $M_{h\text{ red}}$ вызывает вынужденные колебания редуцированной системы. Конечно, $M_{h\text{ red}}$ будет различным по амплитуде, фазе и частоте, в зависимости от порядка гармонических моментов M_h , действующих на колена вала двигателя действительной силовой установки.

Если в установке, кроме скоростного демпфирования, в двигателе имеется еще, напр., также скоростное демпфирование винта (то-есть как бы маховика I, в наших предыдущих схемах), то величина приведенного коэффициента демпфирования k_r в редуцированной системе несколько изменится.

Здесь мы располагаем, по крайней мере, двумя вариантами выбора типа и характера эквивалентного, редуцированного, демпфирования. Все демпфирующие моменты в двигателе и демпфирующий момент гребного винта (или динамо) можно заменить эквивалентным демпфирующим моментом M_r , приложенным к левой массе редуцированной двухмассовой системы, или же демпфирующим моментом M_r' , действующим в валу между обеими массами.

В первом случае момент M_r будет зависеть от мгновенной угловой скорости колебательного движения левой массы и определится выражением:

$$M_r = -k_r \frac{d(\varphi_{rabc})}{dt}.$$

Работа этого момента за цикл колебания:

$$A_r' = \int_0^{t=2\pi/\omega} M_r d\varphi = \pi k_r \omega \varphi_{1abc}^2 \cdot \varphi_{rонт}^2. \quad (19)$$

Во втором же случае момент M_r' будет зависеть от разности угловых скоростей колебательного движения обеих масс, то-есть будет определяться формулой

$$M_r' = -k_r' \frac{d(\varphi_{rabc} - \varphi_{1abc})}{dt}.$$

Соответствующая работа демпфирования за один цикл колебания

$$A_r' = \pi k_r' \omega \varphi_{1abc}^2 (\varphi_{rонт} - \varphi_{1онт})^2. \quad (20)$$

Конечно, этот последний метод введения эквивалентного демпфирования в редуцированной системе имеет несомненные преимущества перед первым (формула 19), так как здесь более детально учитываются закономерности вибраций масс установки.

Работа, поглощаемая за один цикл колебания демпфированием гребного винта, может быть подсчитана по формуле:

$$A_{винта} = k_{винта} \omega \varphi_{1abc}^2. \quad (21)$$

Теперь полная работа демпфирования в двигателе, согласно (16) и (21),

$$A_{демпф} = \pi k_0 F r^2 \omega \varphi_{1abc}^2 \sum_{i=1}^m \varphi_{iонт}^2 + \pi k_{винта} \omega \varphi_{1abc}^2. \quad (22)$$

Приравнявая первые части (19) и (22), получаем выражение для приведенного коэффициента скоростного демпфирования k_r , определяющего момент демпфирования, действующий на левую массу редуцированной двухмассовой системы:

$$k_r = \frac{\pi k_0 F r^2 \omega \varphi_{rabc}^2 \sum_{i=1}^m \varphi_{iонт}^2 + \pi k_{винта} \omega \varphi_{1abc}^2}{\pi \omega \varphi_{1abc}^2 \varphi_{rонт}^2} = \frac{k_r F r^2 \sum_{i=1}^m \varphi_{iонт}^2 + k_{винта} \varphi_{1онт}^2}{\varphi_{rонт}^2}. \quad (23)$$

Аналогично, из сравнения правых частей (20) и (22) получаем величину приведенного коэффициента демпфирования

$$k_r' = \frac{k_0 F r^2 \sum_{i=1}^m \varphi_{iонт}^2 + k_{винта} \varphi_{1онт}^2}{(\varphi_{rонт} - \varphi_{1онт})^2}. \quad (24)$$

позволяющего определить приведенный демпфирующий момент в валу редуцированной двухмассовой системы, равноценный с точки зрения потери

энергии за цикл колебания всему скоростному демпфированию в действительной силовой установке.

В случае, если в установке, кроме скоростных демпфирующих сил, имеется еще значительная гистерезисная потеря энергии в валу, все же можно, хотя и со значительно меньшей степенью точности, ввести в расчеты вибраций редуцированной двухмассовой системы приведенный коэффициент скоростного демпфирования на основе общего соотношения

$$k_r = \frac{\sum A_{\text{демпф}}}{\pi \omega \varphi_{1abc}^2 \varphi_{гонт}^2} \quad (25)$$

или

$$k_r' = \frac{\sum A_{\text{демпф}}}{\pi \omega \varphi_{1abc}^2 (\varphi_{гонт} - \varphi_{гонт}')^2} \quad (26)$$

Здесь $\sum A_{\text{демпф}}$ означает всю потерю энергии на демпфирование в действительной установке за один цикл колебания. В эту сумму может быть включена и потеря на гистерезис в металле вала.

По опытам ряда исследователей [1, 3], потеря энергии на гистерезис металла вала за один цикл колебания характеризуется следующим общим выражением:

$$A_{\text{гист}} = a_2 \varphi_{1abc}^{q_2}$$

где показатель степени q_2 всегда > 2 . Таким образом, работа гистерезиса возрастает с увеличением амплитуд колебания значительно быстрее, чем работа, поглощаемая скоростным демпфированием.

Из всех предыдущих формул следует, что в установке с только скоростным демпфированием приведенный коэффициент демпфирования k_r или k_r' , определяемый формулами (23) и (24), оказывается постоянным, не зависящим от абсолютной величины амплитуд колебания масс установки. При наличии же в установке гистерезисных потерь величины k_r и k_r' в сильной степени зависят от абсолютных амплитуд углов закрутки вала на каждом участке, то-есть в итоге—от амплитуд колебания масс системы. Следовательно, здесь уже нельзя считать коэффициенты k_r или k_r' одинаковыми для различных критических чисел оборотов двигателя. В этом, в частности, заключается причина отмеченной в последнее время опытом зависимости k_r и вообще коэффициента демпфирования от числа оборотов и режима работы двигателя.

Выше была показана методика приведения многомассовой силовой установки двигатель—маховик к эквивалентной ей (по крайней мере, по ряду основных характеристик и показателей) двухмассовой системе. Аналогично же можно приближенно свести к двухмассовой системе и более сложные установки.

Рассмотрим силовую установку по рис 4.а, состоящую из многоцилиндрового двигателя, маховика с моментом инерции Θ_1 и динамо, ротор которой имеет момент инерции Θ_2 . Пусть при свободных колебаниях данной системы узел колебания располагается между маховиком и динамо. Заменим эту сложную многомассовую систему достаточно эквивалентной ей двухмассовой системой, показанной на рис. 4.б. Основой для такой замены будут сформулированные выше, на стр. 83, условия, предъявленные нами к редукации установки двигатель—маховик по рис. 3. Из равен-

ства кинетических энергий девых частей обеих систем a и b по рис. 4, аналогично формуле (2), имеем

$$\sum_{i=1}^m \Theta_i \varphi_{i \text{ отн}}^2 + \Theta_I \varphi_{I \text{ отн}}^2 = \Theta_r \varphi_{r \text{ отн}}^2. \quad (27)$$

Из необходимого равенства потенциальных энергий, аналогично (4)

$$\sum_{i=1}^m c_{i,i+1} (\varphi_{i \text{ отн}} - \varphi_{i+1 \text{ отн}})^2 + c'_{I \text{ II}} \varphi_{I \text{ отн}}^2 = c_r' \varphi_{r \text{ отн}}^2, \quad (28)$$

где c_r' — жесткость участка вала редуцированной двухмассовой системы между левой массой и узлом колебания;

$c'_{I \text{ II}}$ — жесткость участка вала действительной системы между узлом колебания и маховиком.

Наконец, из условия одинаковой загрузки крутящими моментами узловых участков валов обеих систем, то-есть из условия отсутствия изло-

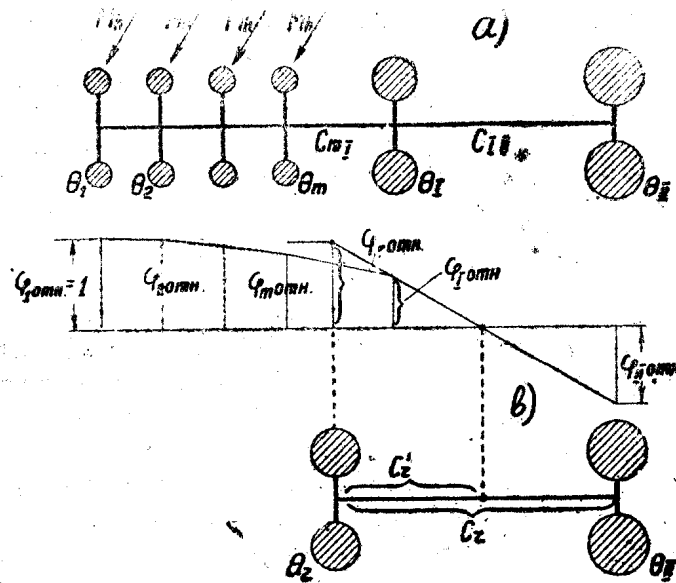


Рис. 4

ма упругой линии вала редуцированной двухмассовой системы, аналогично (5), запишем:

$$c_r' \cdot \varphi_{r \text{ отн}} = \varphi_{I \text{ отн}} \cdot c'_{I \text{ II}}. \quad (29)$$

Из этих соотношений легко получить следующие основные характеристики редуцированной системы по рис. 4- b . Из (28) и (29):

$$\varphi_{r \text{ отн}} = \frac{\sum_{i=1}^m c_{i,i+1} (\varphi_{i \text{ отн}} - \varphi_{i+1 \text{ отн}})^2 + c'_{I \text{ II}} \varphi_{I \text{ отн}}^2}{\varphi_{I \text{ отн}} c'_{I \text{ II}}} \quad (30)$$

Из (30) и (27):

$$\Theta_r = \frac{\sum_{i=1}^m \Theta_i \varphi_{i \text{ отн}}^2 + \Theta_I \varphi_{I \text{ отн}}^2}{\varphi_{r \text{ отн}}^2} =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^m \Theta_i \varphi_{i,отн}^2 + \Theta_1 \varphi_{1,отн}^2 \\
&= \frac{\left[\sum_{i=1}^m c_{i,i+1} (\varphi_{i,отн} - \varphi_{i+1,отн})^2 + c'_{III} \varphi_{1,отн}^2 \right]}{(\varphi_{1,отн} \cdot c'_{III})^2} \\
& \quad \left[\sum_{i=1}^m c_{i,i+1} (\varphi_{i,отн} - \varphi_{i+1,отн})^2 + c'_{III} \varphi_{1,отн}^2 \right]
\end{aligned}$$

Но легко видеть, что первый множитель в последнем выражении равен $1/\omega_0^2$, где ω_0 — собственная частота рассматриваемой многомассовой системы, поэтому

$$\Theta_r = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{(\varphi_{1,отн} c'_{III})^2}{\sum_{i=1}^m c_{i,i+1} (\varphi_{i,отн} - \varphi_{i+1,отн})^2 + c'_{III} \varphi_{1,отн}^2} \quad (31)$$

Очевидно далее, что по основному условию эквивалентности левых частей обеих систем

$$c_r' = \Theta_r \omega_0^2,$$

и, согласно (31),

$$c_r' = \frac{(\varphi_{1,отн} c'_{III})^2}{\sum_{i=1}^m c_{i,i+1} (\varphi_{i,отн} - \varphi_{i+1,отн})^2 + (c'_{III} \varphi_{1,отн}^2)} \quad (32)$$

Конечно, во всех предыдущих формулах m — число цилиндров двигателя, и:

$$c_{m,m+1} = c_{m1},$$

$$\varphi_{m+1} = \varphi_1.$$

Входящие сюда относительные амплитуды колебания масс действительной установки определяются из обычного расчета кривой формы свободных колебаний.

Как и ранее, все возбуждающие моменты M_n одного порядка могут быть заменены одним приведенным моментом $M_{n,ред}$, приложенным к левой массе системы по рис. 4-б. Амплитуда этого момента определяется формулой (13). Накоец, по формулам (18), (23) или (24) подсчитывается приведенный коэффициент демпфирования в редуцированной системе.

Таким образом, любая многомассовая система, схематично представляющая сложную силовую установку с ДВС, может быть приближенно сведена к редуцированной двухмассовой системе, со всеми конкретно известными ее характеристиками. Конечно, динамическое исследование такой редуцированной системы значительно проще исследования сложной многомассовой установки, анализ которой связан с большими, и во многом пока еще практически непреодолимыми математическими затруднениями.

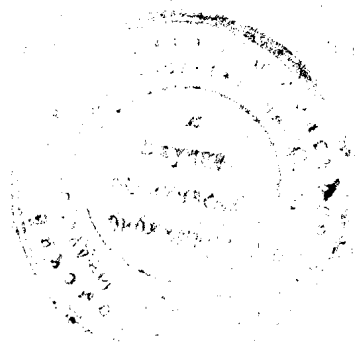
В какой же мере универсальна и надежна изложенная выше методика редукиции? При применении ее нам приходилось пользоваться данными,

например, в отношении амплитуд свободных, недемпфированных, колебаний основной многомассовой системы. Как уже отмечалось ранее, кривая формы вынужденных резонансных вибраций очень близка к кривой формы свободных недемпфированных колебаний. Следовательно, предлагаемая методика редукиции вполне надежна и приемлема при анализе резонансных вибраций.

В других же случаях, при вибрациях системы во внерезонансных условиях, кривая формы вынужденных колебаний оказывается иной; в некоторой мере иными могут получиться и результаты редукиции. Но применение редуцированной двухмассовой системы с характеристиками, переменными в зависимости, например, от частоты возбуждения, настолько сильно усложняет наши задачи, что от этого приходится отказаться. Поэтому и при исследовании внерезонансных вибраций (по крайней мере, в области, близкой к резонансу) редуцированная двухмассовая система с постоянными характеристиками c , θ и k , не зависящими от частоты возбуждающих моментов, действующих на колена вала двигателя, является полезной схемой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье И. А. — Крутильные колебания в дизельных установках. Военмориздат, 1940.
2. Натанзон В. Я. — О вынужденных колебаниях коленчатых валов при резонансе. Техника Воздушного Флота. 1941. № 2.
3. Нечаев В. К. — Теоретические торсиограммы для валов ДВС. Известия ТИИ, т. 58, 1937, вып. 2.
4. Нечаев В. К. — Графический метод определения частот собственных колебаний. Известия ТИИ, т. 54, 1934, вып. 6. Дизелестроение, 1934, № 4.
5. Терских В. П. — Крутильные колебания силовых установок. Судпромгиз. 1940.
6. Тетельбаум И. М. — Анализ крутильных колебаний установок с длинными валопроводами. Вестник Инженеров и Техников. 1933. № 9.
7. Geiger J. — Mechanische Schwingungen, Berlin, 1927.
8. W. Ker Wilson. — Practical Solution of Torsional Vibration Problems. New-York. 1935.
9. Porter, F. — Trans. A.S.M.E., Vol. 53, 1931.



ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
7	3 снизу	результате	результаты
9	2 сверху	$\alpha = hr_{10} t$	$\alpha = r_{10} t$
10	1 снизу	$\delta_s \cong b_i$	$\delta_s \cong \delta_i$
19	6 сверху	$+ \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q [J_{2q}(\xi) +$	$+ \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q [J_{2q}(\xi) +$
19	7 сверху	$- J_{2q} + 3(\xi)]$	$- J_{2q} + 3(\xi)]$
21	4 снизу	$[J_0(\xi_1) \sin(r_{1h} t +$	$[J_0(\xi_1) \sin r_{1h} t +$
22	7 сверху	$\sin(r_{1h} - 2\nu) t$	$\sin(r_{1h} - 2\nu) t + \dots$
25	3 снизу	$\left[1 + \frac{\delta_s}{2} \cos(\nu t - \xi) \right]$	$\left[1 + \frac{\delta_s}{2} \cos(\nu t - \xi) \right]^2$
27	3 сверху	$C = \frac{\delta_s^2}{16} \left\{$	$C = \frac{\delta_s^2}{16} \left\{$
30	25 сверху	изменяющиеся	уменьшающиеся
31	2 сверху	(69)	(65)
31	13 снизу	m_9	m_3
34	12 сверху	$\sum_{p=1}^{\infty} M_p \sin(p\alpha - \varepsilon_p')$	$\sum_{p=1}^{\infty} M_p \sin(p\alpha + \varepsilon_p')$
38	3 снизу	слагающих	слагающей
42	20 сверху	$k k_c$	k/k_c
47	14 сверху	$\Psi = \sum_{q=1}^{\infty} \Phi_{q-1}$	$\Psi = \sum_{q=1}^{\infty} \Phi_{q-1}$
48	12 сверху	$M_h J_1\left(\frac{\delta}{2}\right)$	—
51	5 сверху	$\frac{\delta}{2} \sin r_{1h} t$	$\frac{\delta}{2} \sin r_{1h} t$
52	23 сверху	Φ_0	Φ_{0res}
54	5 сверху	принимать	признать
55	17 сверху	$\sum_{q=1}^{\infty} (-1)_d$	$\sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q$
57	2 снизу	$M_{кр}'$	$M_{кр}''$
58	3 снизу	$\bar{B}_h = \bar{B}_h' = \bar{B}_h''$	$\bar{B}_h = \bar{B}_h' + \bar{B}_h''$
64	4 сверху	$\bar{M}_h \sin(hr_{10} t - \bar{\varepsilon}_h)$	$\bar{M}_h \sin(hr_{10} t + \bar{\varepsilon}_h)$
79	4 снизу	+ 1,0229	+ 1,0223
87	2 снизу	$(\varphi_i \text{ отн} - \varphi_{i+1, \text{отн}}^2)$	$(\varphi_i \text{ отн} - \varphi_{i+1, \text{отн}})^2$
90	6 сверху	M_h'	M_r'
92	5 сверху	$+c'_{1H} \varphi_{1 \text{ отн}} =$	$+c'_{1H} \varphi_{1 \text{ отн}}^2 =$